VILNIAUS UNIVERSITETAS

ANTANAS LENKŠAS

SILPNOSIOS HESTONO MODELIO APROKSIMACIJOS DISKREČIAISIAIS ATSITIKTINIAIS DYDŽIAIS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2016

Disertacija rengta 2013–2016 metais ir ginama eksternu.

Mokslinis konsultantas

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacijos gynimo taryba:

Pirmininkas

prof. habil. dr. Remigijus Leipus

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Nariai:

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Yuliya Mishura

(Kijevo Taraso Ševčenkos nacionalinis universitetas,

fiziniai mokslai, matematika – 01P)

doc. dr. Marijus Radavičius

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

prof. dr. Jonas Šiaulys

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija bus ginama viešame disertacijos gynimo tarybos posėdyje 2016 m. rugsėjo 23 d. 15 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultete, 103 a.

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2016 m. rugpjūčio 23 d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto interneto svetainėje adresu: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

VILNIUS UNIVERSITY

ANTANAS LENKŠAS

WEAK APPROXIMATIONS OF HESTON MODEL BY DISCRETE RANDOM VARIABLES

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2016

Doctoral dissertation was written in 2013–2016 at Vilnius University and will be defended externally.

Scientific adviser

prof. habil. dr. Vigirdas Mackevičius

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The council:

Chairman

prof. habil. dr. Remigijus Leipus

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

Members:

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. dr. Yuliya Mishura

(Taras Shevchenko National University of Kyiv,

Physical sciences, Mathematics – 01P)

doc. dr. Marijus Radavičius

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

prof. dr. Jonas Šiaulys

(Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on September 23, 2016 at Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, lecture room 103 at 15:00.

Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on August 23, 2016.

The dissertation is available at the library of Vilnius University and at the website of Vilnius University: www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1 Įžanga

Black–Scholes (Merton) modelis ir iš jo išvesta opciono kainos formulė dažnai laikomi vienu iš svarbiausių rezultatų finansų matematikoje. Tačiau dabar ši formulė naudojama itin retai, dažniausiai tik dėl savo paprastumo, mat, nepaisant užtarnautos vietos vadovėliuose, seniai žinomi ir jos trūkumai. Vieni iš svarbiausių trūkumų yra pastovaus palūkanų normos dydžio ir pastovaus kintamumo (*volatility*) prielaidos, ypač jei modelis taikomas ilgalaikėje perspektyvoje.

Pirmas trūkumas, pastovaus palūkanų normos dydžio prielaida, skatino kurti ir vystyti įvairius palūkanų normų modelius. Tokie modeliai nagrinėti ir Vašíček [14] bei Cox, Ingersoll ir Ross [5] straipsniuose. Pastarieji, beje, pristatė dabar itin plačiai naudojamą kvadratinės šaknies procesą arba, kaip jis autorių garbei buvo pavadintas vėliau, CIR modelį.

Bandymai pašalinti antrą trūkumą, pastovaus kintamumo prielaidą, paskatino į lygtį įtraukti dar vieną atsitiktinumo šaltinį ir nagrinėti modelius su stochastiniu (atsitiktiniu) kintamumu (*stochastic volatility*). Tokie modeliai nagrinėti Scott [12], Hull ir White [6], Stein ir Stein [13] straipsniuose. Panašiai 1993 metais pasielgė ir Hestonas – jis aprašė dvifaktorį modelį, kuriame akcijos kaina (*spot asset price*), valdoma vieno atsitiktinumo šaltinio, koreliuoja su stochastiniu kintamumu, valdomu kito atsitiktinumo šaltinio. Modelis greit išpopuliarėjo ir netgi šiandien, praėjus jau daugiau nei 20 metų po jo pristatymo, tebėra aktualus tiek praktikoje, tiek finansų matematikos teorijoje.

Šioje disertacijoje yra nagrinėjamas Hestono stochastinio kintamumo modelis:

$$\begin{cases} \mathrm{d}S_t = rS_t\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}S_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t, \quad S_0 = s \geqslant 0, \\ \mathrm{d}Y_t = k(\theta - Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, \quad Y_0 = y \geqslant 0, \\ \mathrm{d}W_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t = \rho\,\mathrm{d}t; \end{cases} \tag{1.1}$$

čia W ir $\widetilde{W}$ yra (galbūt priklausomi) standartiniai Brauno judesiai (standartiniai Vynerio procesai), $\theta, \sigma, k > 0$.

2 Tyrimo objektas ir tikslas

Pagrindinis disertacijos tikslas – sukurti „paprastas“, tačiau „efektyvias“ pirmosios ir antrosios eilės silpnąsias Hestono modelio aproksimacijas, kurias konstruojant pakaktų kiekviename žingsnyje generuoti vieną ar du diskrečiuosius atsitiktinius dydžius.

Kaip ir [10], [9], [8] bei kituose straipsniuose (pavyzdžiui, Andersen [3], Lord, Koekkoek ir van Dijk [11], Kloeden ir Neuenkirch [7]), (1.1) modelyje aproksimuosime ne akcijos kainą S_t, o jos logaritmą $X_t := \log S_t$, taip išsaugodami konstruojamos aproksimacijos teigiamumą bei išvengdami problemų, kylančių iš gerai žinomo fakto, kad Hestono modelio sprendinio momentai „sprogsta“, t. y. tolsta į begalybę per baigtinį laiką (žr., pvz., [4]). Tam, pasinaudoję Itô lema, nuo Hestono modelio pereisime prie logaritmuoto Hestono (log-Hestono) modelio

$$\begin{cases} \mathrm{d}X_t = (r - \frac{1}{2}Y_t)\,\mathrm{d}t + \sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t, & X_0 = x := \log(s), \\ \mathrm{d}Y_t = k(\theta - Y_t)\,\mathrm{d}t + \sigma\sqrt{Y_t}\,\mathrm{d}W_t, & Y_0 = y \geqslant 0, \\ \mathrm{d}W_t\,\mathrm{d}\widetilde{W}_t = \rho\,\mathrm{d}t. \end{cases} \tag{2.1}$$

3 Tyrimo metodai

Rašant disertaciją naudotasi įvairių matematikos sričių – kelių kintamųjų analizės, tikimybių teorijos, stochastinės analizės, funkcinės analizės ir statistikos – metodais. Kompiuteriniams skaičiavimams atlikti ir grafikams nubraižyti kurtos programos C programavimo kalba, naudoti Matlab bei R matematikos ir statistikos paketai.

4 Moksliniai rezultatai

Apibrėžimai

Tarkime, kad $B_t = (B_t^1, B_t^2)$ yra standartinis dvimatis Brauno judesys (Vynerio procesas). Nagrinėsime dvimatę stochastinę diferencialinę lygtį

$$\mathrm{d}Z_t = b(Z_t, t)\,\mathrm{d}t + \sigma(Z_t, t)\,\mathrm{d}B_t, \quad t \geq 0, \; Z_0 = z; \tag{4.1}$$

čia $z \in \mathbb{D} \subset \mathbb{R}^2$ yra pradinė reikšmė, $b : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$, $\sigma = (\sigma_{ij})$, $i, j = 1, 2$ ($\sigma_{ij} : \mathbb{R}^2 \times I \to \mathbb{R}^2$) – lygties koeficientai, o $I = [0, T] \subset \mathbb{R}$ fiksuoto laiko intervalas.

Sakysime, kad 4.1 lygtis yra homogeniška sprendinio reikšmių srities atžvilgiu, t.y. su visais $z \in \mathbb{D}$ lygtis turi tokį vienintelį silpnąjį sprendinį Z^z, kad $\mathbb{P}\{Z_t^z \in \mathbb{D}, t \geqslant 0\} = 1$. Pavyzdžiui, Hestono modelio atveju (1.1) galima imti $\mathbb{D} = (0, +\infty) \times [0, +\infty)$, o log-Hestono modelio atveju (2.1) - $\mathbb{D} = \mathbb{R} \times [0, +\infty)$, jei tik lygties koeficientai yra griežtai teigiami: $\theta, \sigma, k > 0$.

Fiksuoto laiko intervalo $[0, T]$ diskretizaciją žymėsime $\Delta^h = \{ih, i = 0, \ldots, [T/h]\}$; čia $[a]$ žymi sveikąją skaičiaus a dalį.

4.1 apibrėžimas. Aibėje $\mathbb{D}$ reikšmes įgyjančių diskretaus laiko homogeninių Markovo grandinių šeimą $\bar{Z}^h = \{\hat{Z}^h(z, t), \, z \in \mathbb{D}, \, t \in \Delta^h\}$, $h > 0$, su pradinėmis reikšmėmis $\hat{Z}^h(z, 0) = z$ vadinsime (4.1) lygties aproksimacija arba diskretizacijos schema.

Skirstinio atžvilgiu aproksimacija $\bar{Z}^h$ yra vienareikšmiškai apibrėžiama vienažingsnėmis aproksimacijomis $\bar{Z}_h^z = \bar{Z}^h(z, h)$, $z \in \mathbb{D}$ (arba jų skirstiniais). Todėl vienažingsnes aproksimacijas vadinsime tiesiog aproksimacijomis.

Žymėsime $C_{pol}^\infty(\mathbb{D})$ klasę tokių funkcijų iš C^∞, kurių visos dalinės išvestinės yra polinominio augimo, t. y.

$$C_{pol}^\infty(\mathbb{D}) := \Big\{ f \in C^\infty(\mathbb{D}) : \forall i \in \mathbb{N}_0^2, \; \exists C_i > 0, \exists k_i \geqslant 0, \\ \forall z \in \mathbb{D}, |f^{(i)}(z)| \leqslant C_i(1 + |z|^{k_i}) \Big\}.$$

Čia $\mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, $i = (i_1, i_2) \in \mathbb{N}_0^2$ yra multiindeksai, o

$$f^{(i)}(z) := \frac{\partial^{|i|} f(z)}{\partial z^i}, \quad |i| := i_1 + i_2, \quad \partial z^i := \partial z_1^{i_1} \partial z_2^{i_2}.$$

Kaip ir Alfonsi [1], „seką“ $\{(C_i, k_i) : i \in \mathbb{N}_0^2\}$ vadinsime gera seka funkcijai f.

4.2 apibrėžimas. Tarkime, kad L yra (4.1) lygties sprendinio Z^z generatorius. Operatorių $R_\upsilon^h : C_{pol}^\infty(\mathbb{D}) \to C(\mathbb{D})$, apibrėžtą lygybe

$$R_\upsilon^h f(z) := \mathbb{E}f\big(\bar{Z}_h^z\big) - \left[f(z) + \sum_{k=1}^{\upsilon} \frac{L^k f(z)}{k!} h^k\right], \; z \in \mathbb{D}, \; h > 0, \tag{4.2}$$

vadinsime aproksimacijos $\bar{Z}^h$ υ-osios eilės liekana.

Žymėsime $g(z,h) = \mathrm{O}_{p,k}(h^n)$, jei su kokiais nors $C > 0$ ir $h_0 > 0$

$$|g(z,h)| \le Ch^n(1 + |z|^k), \quad z \in \mathbb{D}, \; h \le h_0.$$

Jei funkcija g išreiškiama funkcija $f \in C_{pol}^\infty(\mathbb{D})$ (kaip, pvz., $R_\upsilon^h f(z)$ (4.2) lygybėje), o konstantos C, h_0 ir k priklauso tik nuo geros sekos funkcijai f, rašysime $g(z,h) = \mathcal{O}_p(h^n)$.

4.3 apibrėžimas. Aproksimaciją $\bar{Z}^h$ vadinsime stipriai potencialia υ-osios eilės silpnąja (4.1) lygties sprendinio aproksimacija, jei

- su bet kuria $f \in C_{pol}^\infty(\mathbb{D})$

$$R_\upsilon^h f(z) = \mathcal{O}_p(h^{\upsilon+1});$$

- ji turi tolygiai aprėžtus momentus, t. y. su visais $q \in \mathbb{N}$, $h = [T/N]$

$$\sup_{N \in \mathbb{N}} \sup_{0 \le k \le N} \mathbb{E}|\bar{Z}_{kh}^z|^q < +\infty, \quad z \in \mathbb{D}.$$

Aproksimacijos

Disertacijoje pristatomos naujos pirmosios ir antrosios eilės (stipriai potencialiai) silpnosios Hestono modelio sprendinio aproksimacijos diskrečiaisiais atsitiktiniais dydžiais. Aproksimacijos apibrėžiamos šiomis teoremomis.

4.1 teorema. Tarkime, kad:

(1) $\hat{Y}_h^y$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes

$$y_{1,2} = y + \sigma^2 h \pm \sqrt{(y + \sigma^2 h)\, \sigma^2 h}$$

su (atitinkamomis) tikimybėmis

$$p_{1,2} = \frac{y}{2y_{1,2}}.$$

(2) $\tilde{X}_h^z$ – diskretusis nuo $\hat{Y}_h^y$ nepriklausomas atsitiktinis dydis, įgyjantis reikšmes

$$x_{1,2} = x \pm \sqrt{yh} \quad \text{su tikimybe } \frac{1}{2}.$$

(3) $\hat{X}_h^z$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, apibrėžiamas lygybe

$$\hat{X}_h^z := x + \sqrt{1-\rho^2}(\tilde{X}_h^z - x) + \frac{\rho}{\sigma}(\hat{Y}_h^y - y).$$

Tada vienažingsnė aproksimacija – dvimatis diskretusis atsitiktinis dydis

$$\bar{Z}_h^z = (\bar{X}_h^z, \bar{Y}_h^y) = D\left[\hat{Z}(z,h), h\right]$$

apibrėžia stipriai potencialią pirmosios eilės silpnąją log-Hestono modelio (2.1) aproksimaciją, kurią vadiname DVSS aproksimacija (*discrete-variable split-step*). Čia $\hat{Z}_h^z = (\hat{X}_h^z, \hat{Y}_h^y)$, o $D(z,t) = (D_1^z(t), D_2^y(t))$ yra deterministinės log-Hestono modelio (2.1) dalies

$$\begin{cases} \mathrm{d}D_1^z(t) = (r - \frac{1}{2}D_2^y(t))\,\mathrm{d}t, & D_1^z(0) = x, \\ \mathrm{d}D_2^y(t) = k(\theta - D_2^y(t))\,\mathrm{d}t, & D_2^y(0) = y, \end{cases}$$

sprendinys

$$\begin{cases} D_1^z(t) = x + (r - \frac{1}{2}\theta)t + \frac{1}{2k}\left(\mathsf{e}^{-kt} - 1\right)(y - \theta), \\ D_2^y(t) = y\mathsf{e}^{-kt} + \theta(1 - \mathsf{e}^{-kt}). \end{cases} \tag{4.3}$$

4.2 teorema. Tarkime, kad:

(1) $\hat{Y}_h^y$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, tenkinantis sąlygas:

(i)

$$\begin{cases} \mathbb{E}(\hat{Y}_h^y - y) = \mathrm{O}_{p,1}(h^3), \\ \mathbb{E}(\hat{Y}_h^y - y)^2 = yh + \mathrm{O}_{p,2}(h^3), \\ \mathbb{E}(\hat{Y}_h^y - y)^3 = \frac{3}{2}yh^2 + \mathrm{O}_{p,3}(h^3), \\ \mathbb{E}(\hat{Y}_h^y - y)^4 = 3y^2h^2 + \mathrm{O}_{p,4}(h^3); \end{cases}$$

(ii) $\mathbb{E}(\hat{Y}_h^y - y)^5 = \mathrm{O}_{p,5}(h^3)$;

(iii) $\mathbb{E}|\hat{Y}_h^y - y|^{2q} = \mathrm{O}_{p,2q}(h^q)$ su visais $q \geq 3$;

(2) ξ yra diskretusis nepriklausomas nuo $\hat{Y}_h^y$ atsitiktinis dydis, kurio pirmieji penki momentai sutampa su standartinio normalaus atsitiktinio dydžio pirmaisiais penkiais momentais;

(3) $\hat{X}_h^z$ yra diskretusis atsitiktinis dydis, apibrėžiamas lygybe

$$\hat{X}_h^z := x + \xi\sqrt{\frac{1}{2}(y + \hat{Y}_h^y)h}\ ;$$

(4) Dvimatis atsitiktinis dydis $\tilde{Z}_h^z = (\tilde{X}_h^z, \tilde{Y}_h^y)$ apibrėžiamas lygybėmis

$$\begin{aligned}\tilde{X}_h^z &= \sigma\left(\sqrt{1-\rho^2}\,\hat{X}_h^z + \rho\hat{Y}_h^y\right),\\ \tilde{Y}_h^y &= \sigma^2\tilde{Y}_h^y.\end{aligned}$$

Tada vienažingsnė aproksimacija – dvimatis diskretusis atsitiktinis dydis

$$\bar{Z}_h^z = (\bar{X}_h^z, \bar{Y}_h^y) = D\big(\tilde{Z}_h^{D(z,h/2)}, h/2\big)$$

apibrėžia stipriai potencialią antrosios eilės silpnąją log-Hestono modelio (2.1) aproksimaciją, kurią vadiname DVSS$_2$ (*discrete-variable split-step second-order*). Čia $D(z,t) = (D_1^z(t), D_2^y(t))$, kaip ir 4.1 teoremoje, yra deterministinės log-Hestono modelio (2.1) dalies sprendinys (4.3).

5 Darbo mokslinis aktualumas ir naujumas

Hestono modelis yra vienas iš plačiausiai naudojamų modelių finansų matematikoje. Kaip ir daugelyje kitų stochastinių modelių, jo sprendinys nėra žinomas išreikštiniu pavidalu (nors ir žinoma sprendinio charakteristinės funkcijos išraiška), todėl jo taikymams labai svarbūs skaitiniai sprendimo metodai. Klasikiniai skaitinio sprendimo metodai, pavyzdžiui, Eulerio aproksimacija, netinka, nes su teigiama tikimybe įgyja neigiamas reikšmes – tai iškart „sugriauna“ aproksimaciją dėl modelyje esančių kvadratinių šaknų, o įvairios klasikinių skaitinių sprendimų metodų modifikacijos pernelyg lėtai konverguoja.

Disertacijoje siūloma Hestono modelio aproksimacijas konstruoti diskrečiaisiais atsitiktiniais dydžiais, taikant „atskyrimo“ (*„split-step“*) ir momentų suderinimo (*„moment matching“*) technikas. Naudojant „atskyrimo“ techniką lygtis išskaidoma į „deterministinę“, išsprendžiamą diferencialinių lygčių metodais, ir „stochastinę“ dalis, kuriai ir yra konstruojama aproksimacija, o momentų suderinimo technika pasitelkiama parenkant diskretųjį atsitiktinį dydį taip, kad jo momentai su tam tikra paklaida atitiktų norimos eilės aproksimacijai gauti reikalingus momentus.

Nors panašių idėjų yra ir kitų autorių darbuose, pavyzdžiui, Alfonsi [1, 2], tačiau anksčiau nebūta bandymų konstruoti silpnąsias Hestono modelio aproksimacijas diskrečiaisiais atsitiktiniais dydžiais, be to, kitų panašias idėjas įgyvendinančių autorių darbuose (žr., pvz., jau minėtą [1] arba [3]), paprastai nėra tiriamos labai svarbios sukonstruotų aproksimacijų matematinės savybės, tokios kaip aproksimacijos eilė. Galiausiai, disertacijoje pasiūlytos aproksimacijos daugeliu atžvilgių (tikslumu, paprastumu ir greičiu) lenkia kitas žinomas aproksimacijas.

Pabrėžtina, kad disertacijoje naudojama aproksimacijų konstravimo technika gali būti naudinga ir konstruojant diskretizacijos schemas kitiems finansų matematikos modeliams, tokiems kaip CEV-SV ar CKLS.

6 Darbo struktūra ir apimtis

Darbą sudaro 94 puslapiai: įvadinė dalis, literatūros apžvalga, pagrindiniai apibrėžimai ir naudojamos technikos aprašymas, pagrindinių disertacijos rezultatų pristatymas ir įrodymas, išvados, santrauka ir priedai bei naudotos literatūros sąrašas.

7 Publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuoti šiuose moksliniuose straipsniuose:

1. A. Lenkšas, V. Mackevičius. A second-order weak approximation of Heston model by discrete random variables. *Lithuanian Mathematical Journal*, 55(4):555–572, 2015.
2. A. Lenkšas, V. Mackevičius. Weak approximation of Heston model by discrete random variables. *Mathematics and Computers in Simulation*, 113: 1–15, 2015.
3. A. Lenkšas, V. Mackevičius. Option pricing in Heston model by means of weak approximations. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 54, 27–32, 2013.

8 Rezultatų sklaida

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti šiose mokslinėse konferencijose:

1. *56-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija*, Kaunas, Lietuva, 2015 m. birželio 16–17 d.
2. *11-oji tarptautinė Vilniaus konferencija „Tikimybių teorija ir matematinė statistika“*, Vilnius, Lietuva, 2014 m. birželio 30 – liepos 4 d.
3. *55-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija*, Vilnius, Lietuva, 2014 m. birželio 26–27 d.
4. *54-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija*, Vilnius, Lietuva, 2013 m. birželio 19–20 d.
5. *53-oji Lietuvos matematikų draugijos konferencija*, Klaipėda, Lietuva, 2012 m. birželio 11–12 d.

9 Išvados

Disertacijoje sukonstruotos silpnosios Hestono modelio aproksimacijos DVSS ir DVSS_2 tikslumu nenusileidžia, o daugeliu atvejų (ypač antrosios eilės aproksimacija DVSS_2) yra pranašesnės už šiuo metu praktikoje kaip silpnosios Hestono modelio aproksimacijos dažniausiai naudojamas Anderseno QE (žr. [3]) bei Alfonsi (žr. [1]) sukonstruotas aproksimacijos schemas. Be to:

- DVSS ir DVSS_2 aproksimacijos yra stipriai potencialios, atitinkamai, pirmosios ir antrosios eilės silpnosios aproksimacijos, o QE ir Alfonsi aproksimacijų eilė, nepaisant to, kad šios aproksimacijos „vizualiai“ kompiuterinėse simuliacijose rodo gana gerą tikslumą, nėra ištirta;

- DVSS ir DVSS_2 aproksimacijas lengviau įgyvendinti, nes jos yra paprastesnės (ypač pirmosios eilės DVSS aproksimacija) nei Anderseno (QE) ar Alfonsi pasiūlytos schemos – konstruojant kiekviename žingsnyje tereikia generuoti dvi ar tris reikšmes įgyjančius diskrečiuosius atsitiktinius dydžius;

- DVSS ir DVSS_2 aproksimacijos naudoja mažiau kompiuterinių išteklių – skaitiniai eksperimentai parodė, kad pirmosios eilės aproksimacija DVSS veikia 2,5–3,7, o antrosios eilės aproksimacija DVSS_2 – 1,2–1,7 karto greičiau nei QE ar Alfonsi aproksimacijos.

10 Summary

The aim of the thesis is to construct "simple" yet "effective" first- and second-order weak approximation schemes for the solution of the Heston model that use, at each step, only generation of one and two discrete random variables, respectively, and to provide rigorous proofs of their accuracy. The main results of the thesis (presented in Chapters 4 and 5) were first published in the articles [10] and [9].

The thesis is organized as follows. In Chapter 2, we give a historical overview of the main results obtained by other authors. Then, after some preliminaries and definitions in Chapter 3, in Section 3.2, we "split" the approximation problem for the process (X, Y) in Eq. (2.1) into exact solution of the deterministic part and the approximation problem for the stochastic part of the system. In Section 4, we construct a (strongly) potential first-order weak approximation for the stochastic part, and in Section 5, we construct a (strongly) potential second-order weak approximation for the stochastic part. We summarize the algorithms in Sections 4.3 and 5.3, respectively. In Sections 4.4 and 5.4, we illustrate the first-order scheme (DVSS) and the second-order scheme (DVSS_2), respectively, by numerical simulation results, including option pricing and a detailed comparison with the schemes of Andersen [3] and Alfonsi [1, 2].

We finalize the results of the thesis in Chapter 6 and in the Appendix (Chapter 7), we provide additional calculations, which we think would only distract the reader if placed elsewhere in the text.

Comparison of the schemes with other known schemes in the field (such as Andersen's QE [3] and Alfonsi [1, 2] schemes) shows that accuracy of our new schemes is not worse and often surpasses (especially in the case of the second-order approximation scheme DVSS_2) them even with large time step values. In fact, as we can see from simulation examples (Section 5.4), only the QE scheme can compete with the DVSS_2 in terms of accuracy, although the former still loses in terms of computational cost (see Section 5.4, Table 5.3) and simplicity (see Section 5.3).

Literatūra

[1] A. Alfonsi. High order discretization schemes for the CIR process: Application to affine term structure and Heston models. *Mathematics of Computation*, 79(269):209–237, 2010.

[2] A. Alfonsi. *Affine Diffusions and Related Processes: Simulation, Theory and Applications*, volume 6 of *Bocconi & Springer Series*. Springer, 1 edition, 2015.

[3] L. Andersen. Simple and efficient simulation of the Heston stochastic volatility model. *Journal of Computational Finance*, 11(3):1–42, 2008.

[4] L. B. G. Andersen and V. V. Piterbarg. Moment Explosions in Stochastic Volatility Models. *Finance and Stochastics*, 11(1):29–50, 2007.

[5] J. C. Cox, J. E. Ingersoll, and S. A. Ross. A Theory of the Term Structure of Interest Rates. *Econometrica*, 53(2):385–407, March 1985.

[6] J. C. Hull and A. White. The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities. *Journal of Finance*, 42(2):281–300, 1987.

[7] P. Kloeden and A. Neuenkirch. Convergence of numerical methods for stochastic differential equations in Mathematical Finance. In T. Gerstner and P. Kloeden, editors, *Recent Developments in Computational Finance: Foundations, Algorithms and Applications*, volume 14 of *Interdisciplinary Mathematical Sciences Series*, pages 49–80. World Scientific, Singapur, 2013.

[8] A. Lenkšas and V. Mackevičius. Option pricing in Heston model by means of weak approximations. *Lietuvos matematikos rinkinys*, 54:27–32, 2013.

[9] A. Lenkšas and V. Mackevičius. A second-order weak approximation of Heston model by discrete random variables. *Lithuanian Mathematical Journal*, 55:555–572, 2015.

[10] A. Lenkšas and V. Mackevičius. Weak approximation of Heston model by discrete random variables. *Mathematics and Computers in Simulation*, 113:1–15, 2015.

[11] R. Lord, R. Koekkoek, and D. van Dijk. A comparison of biased simulation schemes for stochastic volatility models. *Quantit. Finance*, 10(2):177–194, 2010.

[12] L.O. Scott. Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation, and an Application. *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22:419–438, 12 1987.

[13] E. M. Stein and J. C. Stein. Stock Price Distributions with Stochastic Volatility: An Analytic Approach. *Review of Financial Studies*, 4:727–752, 1991.

[14] O. Vasicek. An equilibrium characterization of the term structure. *Journal of Financial Economics*, 5(2):177–188, 1977.

11 Trumpos žinios apie autorių

Išsilavinimas

1990–1993 Vilniaus *licėjus*

1993–1997 Vilniaus universiteto *matematikos taikymų* bakalauras

1995–1998 Vilniaus universiteto Orientalistikos centro japonologijos studijos

1998–1999 Vasedos universiteto Japonų kalbos centro intensyvūs japonų kalbos kursai

1997–2000 Vilniaus universiteto *matematikos* magistras

Pedagoginio darbo patirtis

2001–2011 Vilniaus universiteto asistentas

2012– dabar Vilniaus universiteto lektorius