VILNIAUS UNIVERSITETAS

AGNEŠKA KORVEL

BANKROTO TIKIMYBĖS DISKRETAUS LAIKO RIZIKOS MODELIUI SU KELIOMIS SKIRTINGAI PASISKIRSČIUSIOMIS ŽALOMIS

Daktaro disertacijos santrauka

Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2016

Disertacija rengta 2011–2016 metais Vilniaus universitete.

Mokslinis vadovas –

prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija ginama Vilniaus universiteto Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas –

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Nariai:

prof. dr. Romas Baronas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, informatika – 09P),
prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),
prof. dr. Yuliya Mishura (Kijevo Taraso Ševčenkos nacionalinis universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P),
doc. dr. Marijus Radavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2016 m. rugsėjo 23 d. 13 val. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto 103 auditorijoje.

Adresas: Naugarduko g. 24, LT-03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2016 m. rugpjūčio 23 d.

Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje ir Vilniaus universiteto interneto svetainėje adresu: *www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius*.

VILNIUS UNIVERSITY

AGNEŠKA KORVEL

RUIN PROBABILITIES OF THE DISCRETE-TIME RISK MODEL WITH INHOMOGENEOUS CLAIMS

Summary of doctoral dissertation

Physical sciences, mathematics (01P)

Vilnius, 2016

Doctoral dissertation was written in 2011–2016 at Vilnius University.

Scientific supervisor –

prof. dr. Jonas Šiaulys (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Dissertation will be defended at Vilnius University Mathematics research council:

Chairman –

prof. habil. dr. Kęstutis Kubilius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

Members:

prof. dr. Romas Baronas (Vilnius University, Physical sciences, Informatics – 09P),
prof. habil. dr. Vydas Čekanavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P),
prof. dr. Yuliya Mishura (Taras Shevchenko National University of Kyiv, Physical sciences, Mathematics – 01P),
doc. dr. Marijus Radavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the Council of Mathematics Science in the auditorium number 103 at the Faculty of Mathematics and Informatics at 1 p.m. on 23 September, 2016.

Address: Naugarduko st. 24, LT-03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of the dissertation was distributed on 23 August, 2016.

The dissertation is available at the library of Vilnius University and VU website:

www.vu.lt/lt/naujienos/ivykiu-kalendorius.

1 Mokslinė problema ir aktualumas

Disertaciniame darbe nagrinėjamas baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybių elgesys kintant pradiniam kapitalui ir laikui diskretaus laiko rizikos modeliuose su keliomis nehomogeninėmis žalomis.

Rizikos teorijoje naudojami matematiniai modeliai, aprašantys draudiko pažeidžiamumą dėl bankroto. Vienas iš populiariausių modelių – 1903 metais pasiūlytas Cramer-Lundberg modelis ir vėlesni jo apibendrinimai (S. Andersen modelis, sudėtinis binominis modelis ir kt.). Draudiko kapitalas priklauso nuo turimo pradinio kapitalo ir nuo dviejų priešingo tipo lėšų srautų – įmokų ir išmokų (žalų). Kapitalo kitimo procesas dar vadinamas *rizikos atstatymo procesu* (trumpiau: *rizikos procesu*), kurį nusako *rizikos atstatymo modelis* (trumpiau: *rizikos modelis*). Uždavinys tiriant rizikos procesą yra įvertinti tikimybę, su kuria draudiko kapitalas nukristų žemiau nulio. Tokiu atveju sakoma, kad draudimo įmonė bankrutuoja. Jau daugiau negu šimtmetį bankroto tikimybė rizikos modelyje yra plačiai nagrinėjama skirtingų pasaulio šalių mokslininkų, pavyzdžiui, De Vylder [4, 5], Gerber, Shiu [6, 7, 12–14]. Neseniai, XXI a. pradžioje, pradėta nagrinėti rizikos modelių įvairias modifikacijas su skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis. Kadangi draudimo bendrovės dažniausiai susiduria su skirtingo tipo žalomis, toks rizikos modelis tampa vis aktualesnis ir plačiau nagrinėjamas. Rizikos modelis su keliomis skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis gali būti apibūdintas kaip *kelių žalų rizikos modelis* – rizikos modelis su keliomis nehomogeninėmis žalomis (angl. *multi-risk model*) arba *kelių sezonų rizikos modelis* – rizikos modelis su keliomis nehomogeninėmis žalomis, kai kiekviena žala įvyksta vienodu periodiškumu (angl. *multi-seasonal risk model*). Kelių žalų rizikos modelis buvo nagrinėjamas Lu [8, 9], Picard, Lefevre ir Coulibaly [10], Wang ir Wang [15, 16] darbuose, kuriuose autoriai gavo asimptotines formules. Šiame disertaciniame darbe yra gauti algoritmai tikslioms bankroto tikimybių reikšmėms skaičiuoti. Yra nedaug darbų, kuriuose yra gautos rekursinės formulės tikslioms bankroto tikimybių reikšmėms skaičiuoti. Pavyzdžiui, Raducan, Vernic ir Zbaganu darbe [11] autoriai gavo rekursinę formulę bankroto tikimybėms skaičiuoti diskretizuotam tolydaus laiko rizikos modeliui su žalomis, pasiskirsčiusiomis pagal Erlango dėsnį su skirtingais parametrais. Modelio diskretizaciją autoriai atliko pakeisdami bankroto tikimybės sampratą. Savo darbe jie pateikia algoritmą bankroto tikimybei skaičiuoti, kol pasirodys n-oji žala. Algoritmai tikslioms bankroto tikimybių reikšmėms skaičiuoti diskretaus laiko rizikos modelyje su keliomis skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis buvo gauti Bieliauskienės ir Šiaulio darbe [1], Blaževičiaus, Bieliauskienės ir Šiaulio darbe [2], Damaracko ir Šiaulio darbe [3]. Šiame disertaciniame darbe išplečiami kitų autorių gauti rezultatai ir gautos rekursinės formulės tikslioms bankroto tikimybių reikšmėms skaičiuoti sudėtingesniems rizikos modeliams.

2 Tikslai ir uždaviniai

Disertacijos tikslas – gauti rekursines formules bankroto tikimybei skaičiuoti diskretaus laiko rizikos modeliui su keliomis nehomogeninėmis žalomis. Tam buvo iškelti tokie konkretūs uždaviniai:

- Nustatyti minimalius reikalavimus, kurių neįvykdžius begalinio laiko bankroto tikimybė diskretaus laiko kelių rizikų modelyje artėja į 1 (grynojo pelno sąlyga).
- Ištirti begalinio laiko bankroto tikimybės elgesį diskretaus laiko kelių rizikų modelyje, kai pradinis kapitalas u artėja į begalybę.
- Rasti rekursines formules baigtinio laiko bankroto tikimybei skaičiuoti diskretaus laiko modelyje su keliomis skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis.
- Rasti rekursines formules begalinio laiko bankroto tikimybei skaičiuoti diskretaus laiko modelyje su dviem skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis.
- Rasti rekursines formules begalinio laiko bankroto tikimybei skaičiuoti diskretaus laiko modelyje su trimis skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis.
- Rasti rekursines formules baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybei skaičiuoti diskretaus laiko trijų sezonų modelyje.
- Gauti rekursinių formulių skaitines reikšmes.

3 Tyrimų metodika

Šioje disertacijoje naudojami bendri tikimybių teorijos metodai ir principai. Sudarytų algoritmų efektyvumas tikrintas naudojant MATHEMATICA paketą.

4 Moksliniai rezultatai

4.1 Sąvokos ir apibrėžimai

Šiame skyrelyje pateiksime pagrindinius darbe nagrinėjamų objektų apibrėžimus.

1 Apibrėžimas. *Sakome, kad draudiko turtas $W_u(n),\ n \in \mathbb{N}_0$ kinta pagal diskretaus laiko rizikos modelį (vienos rizikos modelį, homogeninį diskretaus laiko rizikos modelį), jeigu kiekvienu laiko momentu $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$W_u(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i, \tag{1}$$

ir tenkinamos tokios sąlygos:

- *pradinis kapitalas $u = W_u(0)$ yra neneigiamas sveikas skaičius, t.y. $u \in \mathbb{N}_0$;*
- *žalos $Z_1, Z_2, Z_3, ...$ yra neneigiamo sveikareikšmio atsitiktinio dydžio (a.d.) Z nepriklausomos kopijos.*

A.d. Z nusako lokalios tikimybės

$$z_k = \mathbb{P}(Z = k),\ k \in \mathbb{N}_0$$

arba pasiskirstymo funkcija

$$F_Z(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} z_k,\ x \in \mathbb{R}.$$

Kiekvienas diskretaus laiko rizikos modelis aprašo draudiko kapitalo kitimą tik diskrečiais laiko momentais.

2 Apibrėžimas. *Sakome, kad draudiko kapitalas $W_u(n),\ n \in \mathbb{N}_0$ kinta pagal diskretaus laiko kelių rizikų modelį, jeigu kiekvienam laiko momentui $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$W_u(n) = u + n - \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{\lfloor n/i \rfloor} Z_{ij}, \tag{2}$$

čia K fiksuotas natūralusis skaičius, $u \in \mathbb{N}_0$ draudiko pradinis kapitalas, o $Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots$ nepriklausomos sveikareikšmio neneigiamo a.d. Z_i, $i \in \{1, 2, \ldots, K\}$ kopijos. Be to, a.d. sekos $\{Z_{i1}, Z_{i2}, \ldots\}_{i=1}^{K}$ yra nepriklausomos tarpusavyje.

Neneigiami sveikareikšmiai a.d. $Z_1,\ Z_2, \ldots, Z_K$, generuojantys kelių rizikų modelį, apibrėžiami lokaliomis tikimybėmis

$$h_{ik} = \mathbb{P}(Z_i = k),\ \ k \in \mathbb{N}_0,\ i = 1, 2, \ldots, K,$$

ir pasiskirstymo funkcijomis

$$H_i(x) = \sum_{k \leqslant x} h_{ik}, \;\; x \in \mathbb{R}, \; i = 1, 2, \ldots, K.$$

3 Apibrėžimas. *Sakome, kad draudiko kapitalas $W_u(n)$, $n \in \mathbb{N}_0$ kinta pagal diskretaus laiko m sezonų rizikos modelį ($m \in \mathbb{N}$), jeigu kiekvienu laiko momentu $n \in \mathbb{N}_0$,*

$$W_u(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Z_i, \tag{3}$$

ir tenkinamos tokios sąlygos:

- *pradinis draudiko kapitalas $u \in \mathbb{N}_0$,*
- *žalos $Z_1, Z_2, \ldots$ yra neneigiami sveikareikšmiai skirtingai pasiskirstę nepriklausomi a.d.,*
- *su visais $k \in \mathbb{N}_0$ galioja, kad $Z_{mk+1} \overset{d}{=} Z_1$, $Z_{mk+2} \overset{d}{=} Z_2$, $\ldots$, $Z_{mk+m} \overset{d}{=} Z_m$.*

Bankroto laikas ir bankroto tikimybė – pagrindinės kiekvieno rizikos modelio charakteristikos. Toliau yra pateikiamos charakteristikos diskretaus laiko rizikos modeliui.

Kiekvienu laiko momentu n draudiko turtas gali likti teigiamas, tapti neigiamas arba nukristi iki nulio. Situacija, kai kapitalas nukrenta žemiau nulio arba tampa lygus nuliui, vadinama *nemokumu* arba *bankrotu*.

4 Apibrėžimas. *Bankroto laikas yra pirmasis laiko momentas T_u, kai įvyksta bankrotas, t.y.*

$$T_u = \begin{cases} \inf \{n \in \mathbb{N} : W_u(n) \leqslant 0\}, \\ \infty, \text{ jei } W_u(n) > 0 \text{ visiems } n \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

5 Apibrėžimas. *Tikimybė bankrutuoti iki tam tikro laiko $T \in \mathbb{N}$ vadinama baigtinio laiko bankroto tikimybe*

$$\psi(u, T) = \mathbb{P}(T_u \leqslant T).$$

6 Apibrėžimas. *Begalinio laiko bankroto tikimybė apibrėžiama lygybe*

$$\psi(u) = \mathbb{P}(T_u < \infty).$$

7 Apibrėžimas. *Begalinio laiko išgyvenimo tikimybė apibrėžiama lygybe*

$$\varphi(u) = 1 - \psi(u) = \mathbb{P}(T_u = \infty).$$

4.2 Baigtinio laiko bankroto tikimybės diskretaus laiko kelių rizikų modelyje

Šiame skyrelyje pateiksime rezultatus baigtinio laiko bankroto tikimybėms skaičiuoti diskretaus laiko rizikos modelyje su bet kokiu žalų skaičiumi. Kita teorema nusako algoritmus tikslioms baigtinio laiko bankroto tikimybių reikšmėms skaičiuoti.

4.1 Teorema. (2.1 teorema darbe) *Tarkime, kad a.d.* $Z_1, Z_2, \ldots, Z_K$*,* $K \geqslant 1$*, generuoja diskretaus laiko kelių rizikų modelį. Tegu visiems* $u, l \in \mathbb{N}_0$*,*

$$\mathcal{D}_{lu}^{K} = \{k_{ij} \in \mathbb{N}_0 : i \in \{1, 2, \ldots, K\},\ j \in \mathbb{N},\ \mathcal{B}_{Kl} \leqslant u + l\}$$

ir

$$\overline{\mathcal{D}}_{lu}^{K} = \{k_{ij} \in \mathbb{N}_0 : i \in \{1, 2, \ldots, K\},\ j \in \mathbb{N},\ \mathcal{B}_{Kl} > u + l\},$$

čia

$$\mathcal{B}_{Kl} = \sum_{i=1}^{K} \sum_{j=1}^{\lfloor (l+1)/i \rfloor} k_{ij} = \sum_{j=1}^{l+1} k_{1j} + \sum_{j=1}^{\lfloor (l+1)/2 \rfloor} k_{2j} + \cdots + \sum_{j=1}^{\lfloor (l+1)/K \rfloor} k_{Kj}.$$

Tada su bet kuriuo $u \in \mathbb{N}_0$ *turime, kad:*

$$\begin{aligned}
\psi(u, 1) &= \sum_{k_{11} > u} h_{1k_{11}}, \\
\psi(u, 2) &= \psi(u, 1) + \sum_{\substack{k_{11} \leqslant u \\ k_{11} + k_{12} + k_{21} > u+1}} h_{1k_{11}} h_{1k_{12}} h_{2k_{21}}, \\
\psi(u, T) &= \psi(u, T-1) + \sum_{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_{0u}^{K} \cap \mathcal{D}_{1u}^{K} \cap \cdots \cap \mathcal{D}_{(T-2)u}^{K} \cap \overline{\mathcal{D}_{(T-1)u}^{K}}} \prod_{k_{ij} \in \mathcal{D}} h_{ik_{ij}}
\end{aligned}$$

visiems $T \in \{3, 4, \ldots, M\}$*, čia* M *yra mažiausias bendras kartotinis skaičių* $1, 2, \ldots, K$*. Jeigu* $u \in \mathbb{N}_0$ *ir* $T \geqslant M + 1$*, tada*

$$\begin{aligned}
&\psi(u, T) = \psi(u, M) \\
&+ \sum_{\mathcal{D} \subseteq \mathcal{D}_{0u}^{K} \cap \mathcal{D}_{1u}^{K} \cap \cdots \cap \mathcal{D}_{(M-2)u}^{K} \cap \mathcal{D}_{(M-1)u}^{K}} \prod_{k_{ij} \in \mathcal{D}} h_{ik_{ij}} \psi(u + M - \mathcal{B}_{K(M-1)}, T - M).
\end{aligned}$$

4.3 Begalinio laiko bankroto tikimybės diskretaus laiko kelių rizikų modeliuose

Šiame skyrelyje pateiksime rezultatus begalinio laiko bankroto tikimybėms skaičiuoti diskretaus laiko dviejų ir trijų rizikų modeliuose. Pirmosios trys teoremos nusako algoritmus tikslioms begalinio laiko bankroto tikimybių reikšmėms skaičiuoti dviejų rizikų modelyje.

Kai $K = 2$, lygybė (2), nusakantį draudiko kapitalo kitimą, užrašoma taip:

$$W_u(n) = u + n - \sum_{k=1}^{n} X_k - \sum_{l=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} Y_l, \; n \in \mathbb{N}_0.$$

Akivaizdu, kad šį modelį generuoja draudiko pradinis kapitalas u ir dvi žalos, apibrėžtos kaip a.d. X ir Y, čia žala X įvyksta kiekvieną laiko momentą, o žala Y – kas antrą laiko momentą. Šiuo atveju naudojame tokius žymėjimus X ir Y lokalioms tikimybėms ir pasiskirstymo funkcijoms apibrėžti:

$$\begin{aligned}
a_k &= \mathbb{P}(X = k), \; k \in \mathbb{N}_0; \\
b_l &= \mathbb{P}(Y = l), \; l \in \mathbb{N}_0; \\
A(x) &= \sum_{0 \leqslant k \leqslant \lfloor x \rfloor} a_k, \quad x \in \mathbb{R}; \\
B(x) &= \sum_{0 \leqslant l \leqslant \lfloor x \rfloor} b_l, \quad x \in \mathbb{R}.
\end{aligned}$$

4.2 Teorema. (3.1 teorema darbe) *Sakykime, diskretaus laiko rizikos modelį generuoja dvi žalos X ir Y. Tada kiekvienam $u \in \mathbb{N}_0$*

$$\psi(u) = \sum_{k>u} a_k + \sum_{\substack{k \leqslant u \\ k+l+m>u+1}} a_k a_l b_m + \sum_{\substack{k \leqslant u \\ k+l+m \leqslant u+1}} \psi(u + 2 - k - l - m)\, a_k a_l b_m.$$

Iš šios teoremos matome, kad galime skaičiuoti $\psi(u)$, kai $u \geqslant 2$, reikšmes, jeigu yra žinomos $\psi(0)$ ir $\psi(1)$ reikšmės. Kitos dvi teoremos nusako algoritmus $\psi(0)$ ir $\psi(1)$ reikšmėms skaičiuoti.

Kiekvienam $u \in \mathbb{N}_0$ pažymėkime:

$$\begin{aligned}
AAB(u) &= \sum_{k+l+m \leqslant u} a_k a_l b_m, \\
\overline{AAB}(u) &= 1 - AAB(u).
\end{aligned}$$

4.3 Teorema. (3.2 teorema darbe) *Sakykime, diskretaus laiko rizikos modelį generuoja dvi žalos X ir Y, turinčios baigtinius vidurkius $\mathbb{E}X$ ir $\mathbb{E}Y$.*

(i) Jeigu $\mu_{x,y} := \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y/2 \geqslant 1$ ir a.d. X, Y nėra išsigimę, tada $\psi(u) = 1$ visiems $u \in \mathbb{N}_0$.

(ii) Jeigu $\mu_{X,Y} < 1$ ir $b_0 = 0$, turime:

$$\begin{aligned}
\psi(0) &= 2\mu_{X,Y} - 1, \\
\psi(1) &= 1 - \frac{2}{AAB(1)} \left(1 - \mu_{X,Y}\right), \\
\psi(u) &= \frac{1}{AAB\,(1)} \left(\sum_{v=1}^{u-1} \psi(v) \overline{AAB}(u + 1 - v) + \sum_{v=u+1}^{\infty} \overline{AAB}(v) \right),
\end{aligned}$$

visiems $u \in \{2, 3, \ldots\}$.

4.4 Teorema. (3.3 teorema darbe) *Sakykime, diskretaus laiko rizikos modelį generuoja dvi žalos* X *ir* Y. *Tarkime, kad* $a_0 \neq 0$, $b_0 \neq 0$, *ir* $\mu_{X,Y} = \mathbb{E}X + \mathbb{E}Y/2 < 1$. *Tada*

$$\psi(0) = 1 - 2(\mu_{X,Y} - 1) \lim_{n\to\infty} \frac{\gamma_{n+1} - \gamma_n}{\beta_{n+1} - \beta_n},$$
$$\psi(1) = \frac{1}{a_0 b_0} \left(2\mu_{X,Y} - 1 + a_0 b_0 - \psi(0)\right),$$

čia $\{\beta_n\}$ *ir* $\{\gamma_n\}$ *yra dvi rekurentinės sekos, apibrėžtos tokiomis lygybėmis :*

$$\beta_0 = 1,\ \beta_1 = -\frac{1}{a_0 b_0},\ \beta_n = \frac{1}{\alpha_0}\left(\beta_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \beta_{n-i} - a_{n-1}\right),\ n \in \{2, 3, \ldots\},$$
$$\gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = \frac{1}{a_0 b_0},\ \gamma_n = \frac{1}{\alpha_0}\left(\gamma_{n-2} - \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \gamma_{n-i} + a_{n-1}\right),\ n \in \{2, 3, \ldots\},$$

ir $\alpha_r = \sum\limits_{k+l+m=r} a_k a_l b_m$ *kiekvienam* $r \in \mathbb{N}_0$.

Gautos rekursinės formulės taikomos begalinio laiko bankroto tikimybėms skaičiuoti. Pirmiausia skaičiuojama $\psi(0)$ reikšmė, paskui skaičiuojama $\psi(1)$ reikšmė, naudojant jau apskaičiuotą $\psi(0)$ reikšmę (4.3 ir 4.4 teoremos). Vėliau skaičiuojamos $\psi(u),\ u \in \{2, 3, \ldots\}$ reikšmės naudojant rekursines formules iš 4.2 ir 4.3 teoremų.

Toliau šiame skyrelyje pateiksime analogiškus rezultatus diskretaus laiko trijų rizikų modeliui. Toks modelis gaunamas iš antro apibrėžimo, kai $K = 3$:

$$W_u(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} X_i - \sum_{j=1}^{\lfloor n/2 \rfloor} Y_j - \sum_{k=1}^{\lfloor n/3 \rfloor} Z_k,\ n \in \mathbb{N}_0. \tag{4}$$

Čia:

pradinis draudiko kapitalas $u \in \mathbb{N}_0$,

$X_1, X_2, \ldots$ yra nepriklausomos sveikareikšmio neneigiamo a.d. X kopijos,

$Y_1, Y_2, \ldots$ yra nepriklausomos sveikareikšmio neneigiamo a.d. Y kopijos,

$Z_1, Z_2, \ldots$ yra nepriklausomos sveikareikšmio neneigiamo a.d. Z kopijos.

Sakykime, atsitiktinių dydžių lokaliosios tikimybės ir pasiskirstymo funkcijos nusakytos šiomis lygybėmis:

$$a_k = \mathbb{P}(X_1 = k),\ b_k = \mathbb{P}(Y_1 = k),\ c_k = \mathbb{P}(Z_1 = k),\ k \in \mathbb{N}_0,$$
$$A(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} a_k,\ B(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} b_k,\ C(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} c_k,\ x \geqslant 0.$$

Tegul, be to,

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_i + Y_1 + \ldots Y_j + Z_1 + \ldots + Z_k = m) = a^i b^j c^k(m),$$

ir

$$\mathbb{P}(X_1 + \ldots + X_i + Y_1 + \ldots Y_j + Z_1 + \ldots + Z_k \leqslant m) = A^i B^j C^k(m),$$

visiems $i = \overline{0,6}$, $j = \overline{0,3}$, $k = \overline{0,2}$ ir $m = 0, 1, 2, \ldots$

Kita teorema nusako grynojo pelno sąvoką diskretaus laiko trijų rizikų modeliui.

4.5 Teorema. (3.4 teorema darbe) *Sakykime, diskretaus laiko rizikos modelį generuoja trys a.d.* X*,* Y *ir* Z*, turintys baigtinius vidurkius* $\mathbb{E}X$*,* $\mathbb{E}Y$ *ir* $\mathbb{E}Z$*. Jei* $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y/2 + \mathbb{E}Z/3 > 1$*, tai* $\psi(u) = 1$ *su kiekvienu pradiniu kapitalu* $u \in \mathbb{N}_0$*. Jei* $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y/2 + \mathbb{E}Z/3 = 1$*, tai galimi tokie atvejai:*

- $\psi(0) = 1$ *ir* $\psi(u) = 0$ *visiems* $u \in \mathbb{N}$*, jei* $\{a_1 = b_0 = c_0 = 1\}$ *arba* $\{a_0 = b_2 = c_0 = 1\}$ *arba* $\{a_0 = b_0 = c_3 = 1\}$*;*
- $\psi(u) = 1$ *visiems* $u \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$*, jei* $a^6 b^3 c^2(6) < 1$*.*

Kitas mūsų rezultatas – rekursinės formulės begalinio laiko išgyvenimo tikimybėms $\varphi(u) = 1 - \psi(u)$, $u \in \mathbb{N}_0$ skaičiuoti.

4.6 Teorema. (3.5 teorema darbe) *Sakykime, diskretaus laiko rizikos modelį generuoja trys a.d.* X*,* Y *ir* Z*. Tarkime, kad* $\mathbb{E}X + \mathbb{E}Y/2 + \mathbb{E}Z/3 < 1$*. Tada galioja tokie tvirtinimai:*

- $\lim\limits_{u \to \infty} \varphi(u) = 1$*.*
- *Jei* $a_0 \neq 0$*,* $b_0 \neq 0$ *ir* $c_0 \neq 0$*, tai*

$$\begin{aligned} \varphi(n) = \beta_n^0 \varphi(0) + \beta_n^1 \varphi(1) + \beta_n^2 \varphi(2) + \beta_n^3 \varphi(3) + \beta_n^4 \varphi(4) \\ + \gamma_n (6 - 6\mathbb{E}X - 3\mathbb{E}Y - 2\mathbb{E}Z), \ n \in N_0 \end{aligned} \tag{5}$$

čia

$$\begin{cases} \beta_0^0 = 1, \ \beta_1^0 = 0, \ \beta_2^0 = 0, \ \beta_3^0 = 0, \ \beta_4^0 = 0, \ \beta_5^0 = -\frac{1}{a^5 b^3 c^2(0)}, \\ \beta_n^0 = \frac{1}{a^6 b^3 c^2(0)} \left(\beta_{n-6}^0 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 b^3 c^2(k) \ \beta_{n-k}^0 - a(n-5) \right), \quad n \geqslant 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0^1 = 0, \ \beta_1^1 = 1, \ \beta_2^1 = 0, \ \beta_3^1 = 0, \ \beta_4^1 = 0, \ \beta_5^1 = -\frac{\hat{z}_1}{a^5 b^3 c^2(0)}, \\ \beta_n^1 = \frac{1}{a^6 b^3 c^2(0)} \left(\beta_{n-6}^1 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 b^3 c^2(k) \ \beta_{n-k}^1 + z_1(n-6) - a(n-5)\hat{z}_1 \right), \ n \geqslant 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0^2 = 0, \ \beta_1^2 = 0, \ \beta_2^2 = 1, \ \beta_3^2 = 0, \ \beta_4^2 = 0, \ \beta_5^2 = -\frac{\hat{z}_2}{a^5 b^3 c^2(0)}, \\ \beta_n^2 = \frac{1}{a^6 b^3 c^2(0)} \left(\beta_{n-6}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 b^3 c^2(k) \ \beta_{n-k}^2 + z_2(n-6) - a(n-5)\hat{z}_2 \right), \ n \geqslant 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0^3 = 0,\ \beta_1^3 = 0,\ \beta_2^3 = 0,\ \beta_3^3 = 1,\ \beta_4^3 = 0,\ \beta_5^3 = -\frac{\hat{z}_3}{a^5b^3c^2(0)}, \\ \beta_n^3 = \frac{1}{a^6b^3c^2(0)}\left(\beta_{n-6}^3 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k)\ \beta_{n-k}^3 + z_3(n-6) - a(n-5)\hat{z}_3\right),\ n \geqslant 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \beta_0^4 = 0,\ \beta_1^4 = 0,\ \beta_2^4 = 0,\ \beta_3^4 = 0,\ \beta_4^4 = 1,\ \beta_5^4 = -\frac{\hat{z}_4}{a^5b^3c^2(0)}, \\ \beta_n^4 = \frac{1}{a^6b^3c^2(0)}\left(\beta_{n-6}^4 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k)\ \beta_{n-k}^4 + z_4(n-6) - a(n-5)\hat{z}_4\right),\ n \geqslant 6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = 0,\ \gamma_3 = 0,\ \gamma_4 = 0,\ \gamma_5 = \frac{1}{a^5b^3c^2(0)}, \\ \gamma_n = \frac{1}{a^6b^3c^2(0)}\left(\gamma_{n-6} - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k)\ \gamma_{n-k} + a(n-5)\right),\quad n \geqslant 6. \end{cases}$$

- *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0, b_1 \neq 0\}$, *tai*

$$\varphi(n) = \tilde{\beta}_n^0\varphi(0) + \tilde{\beta}_n^1\varphi(1) + \tilde{\gamma}_n(6 - 6\mathbb{E}X - 3\mathbb{E}Y - 2\mathbb{E}Z),\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{6}$$

čia

$$\begin{cases} \tilde{\beta}_0^0 = \beta_0^0,\ \tilde{\beta}_1^0 = \beta_1^0,\ \tilde{\beta}_2^0 = -\frac{1}{a^4b^2c^2(2)}, \\ \tilde{\beta}_0^1 = \beta_0^1,\ \tilde{\beta}_1^1 = \beta_1^1,\ \tilde{\beta}_2^1 = -\frac{\hat{z}_1}{a^4b^2c^2(2)}, \\ \tilde{\gamma}_0 = \gamma_0,\ \tilde{\gamma}_1 = \gamma_1,\ \tilde{\gamma}_2 = \frac{1}{a^4b^2c^2(2)}, \\ \tilde{\beta}_n^0 = \frac{1}{a^6b^3c^2(3)}\left(\tilde{\beta}_{n-3}^0 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k+3)\ \tilde{\beta}_{n-k}^0 - a(n-2)\right),\ n \geqslant 3, \\ \tilde{\beta}_n^1 = \frac{1}{a^6b^3c^2(3)}\left(\tilde{\beta}_{n-3}^1 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k+3)\ \tilde{\beta}_{n-k}^1 + z_1(n-3) - a(n-2)\hat{z}_1\right),\ n \geqslant 3, \\ \tilde{\gamma}_n = \frac{1}{a^6b^3c^2(3)}\left(\tilde{\gamma}_{n-3} - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k+3)\ \tilde{\gamma}_{n-k} + a(n-2)\right),\ n \geqslant 3. \end{cases}$$

- *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, c_0 = 0, c_1 \neq 0\}$, *tai*

$$\varphi(n) = \breve{\beta}_n^0\varphi(0) + \breve{\beta}_n^1\varphi(1) + \breve{\beta}_n^2\varphi(2) + \breve{\gamma}_n(6 - 6\mathbb{E}X - 3\mathbb{E}Y - 2\mathbb{E}Z),\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{7}$$

čia

$$\begin{cases} \breve{\beta}_0^0 = \beta_0^0,\ \breve{\beta}_1^0 = \beta_1^0,\ \breve{\beta}_2^0 = \beta_2^0,\ \breve{\beta}_3^0 = -\frac{1}{a^5b^3c^2(2)}, \\ \breve{\beta}_0^1 = \beta_0^1,\ \breve{\beta}_1^1 = \beta_1^1,\ \breve{\beta}_2^1 = \beta_2^1,\ \breve{\beta}_3^1 = -\frac{\hat{z}_1}{a^5b^3c^2(2)}, \\ \breve{\beta}_0^2 = \beta_0^2,\ \breve{\beta}_1^2 = \beta_1^2,\ \breve{\beta}_2^2 = \beta_2^2,\ \breve{\beta}_3^2 = -\frac{\hat{z}_2}{a^5b^3c^2(2)}, \\ \breve{\gamma}_0 = \gamma_0,\ \breve{\gamma}_1 = \gamma_1,\ \breve{\gamma}_2 = \gamma_2,\ \breve{\gamma}_3 = \frac{1}{a^5b^3c^2(2)}, \\ \breve{\beta}_n^0 = \frac{1}{a^6b^3c^2(2)}\left(\breve{\beta}_{n-4}^0 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k+2)\ \breve{\beta}_{n-k}^0 - a(n-3)\right),\ n \geqslant 4, \\ \breve{\beta}_n^1 = \frac{1}{a^6b^3c^2(2)}\left(\breve{\beta}_{n-4}^1 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k+2)\ \breve{\beta}_{n-k}^1 + z_1(n-4) - a(n-3)\hat{z}_1\right),\ n \geqslant 4, \\ \breve{\beta}_n^2 = \frac{1}{a^6b^3c^2(2)}\left(\breve{\beta}_{n-4}^2 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k+2)\ \breve{\beta}_{n-k}^2 + z_2(n-4) - a(n-3)\hat{z}_2\right),\ n \geqslant 4, \\ \breve{\gamma}_n = \frac{1}{a^6b^3c^2(2)}\left(\breve{\gamma}_{n-4} - \sum_{k=1}^{n-1} a^6b^3c^2(k+2)\ \breve{\gamma}_{n-k} + a(n-3)\right),\ n \geqslant 4. \end{cases}$$

- *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, c_0 = c_1 = 0, c_2 \neq 0\}$, *tai*

$$\varphi(n) = \hat{\beta}_n^0 \varphi(0) + \hat{\gamma}_n (6 - 6\mathbb{E}X - 3\mathbb{E}Y - 2\mathbb{E}Z),\ n \in \mathbb{N}_0, \tag{8}$$

čia
$$\begin{cases} \hat{\beta}_0^0 = \beta_0^0,\ \hat{\beta}_1^0 = -\frac{1}{2a_0^6 b_0^3 c_2^2},\ \hat{\gamma}_0 = \gamma_0,\ \hat{\gamma}_1 = \frac{1}{2a_0^6 b_0^3 c_2^2}, \\ \hat{\beta}_n^0 = \frac{1}{a^6 b^3 c^2(4)} \left(\hat{\beta}_{n-2}^0 - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 b^3 c^2(k+4)\ \hat{\beta}_{n-k}^0 - \frac{a_n}{2a_0} \right),\ n \geqslant 2, \\ \hat{\gamma}_n = \frac{1}{a^6 b^3 c^2(4)} \left(\hat{\gamma}_{n-2} - \sum_{k=1}^{n-1} a^6 b^3 c^2(k+4)\ \hat{\gamma}_{n-k} + \frac{a_n}{2a_0} \right),\ n \geqslant 2. \end{cases}$$

- *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 = 0, c_0 = 0, b_1 \neq 0, c_1 \neq 0\}$, *tai*

$$\begin{aligned} \varphi(0) &= 6 - 6\mathbb{E}X - 3\mathbb{E}Y - 2\mathbb{E}Z, \\ \varphi(1) &= \frac{\varphi(0)}{a^6 b^3 c^2(5)}, \\ \varphi(n) &= \frac{1}{a^6 b^3 c^2(5)} \Big(\varphi(n-1) - \sum_{k=1}^{u-1} a^6 b^3 c^2(n+5-k)\varphi(k) \Big),\ n \geqslant 2. \end{aligned}$$

Koeficientų $\hat{z}_1$, $\hat{z}_2$, $\hat{z}_3$, $\hat{z}_4$, $z_k(u)$ išraiškos pateiktos priede.

4.4 Trijų sezonų rizikos modelis

Šiame skyrelyje pateiksime rezultatus, susijusius su baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybių skaičiavimais trijų sezonų rizikos modelyje. Toks modelis gaunamas iš trečio apibrėžimo, kai $m = 3$.

Trijų sezonų rizikos modelį nusako lokaliosios tikimybės ir pasiskirstymo funkcijos:

$$a_k = \mathbb{P}(Z_1 = k),\ b_k = \mathbb{P}(Z_2 = k),\ c_k = \mathbb{P}(Z_3 = k),\ k \in \mathbb{N}_0,$$
$$A(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} a_k,\ B(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} b_k,\ C(x) = \sum_{k=0}^{\lfloor x \rfloor} c_k,\ x \geqslant 0.$$

Mūsų pirmas rezultatas – gautos rekursinės formulės, leidžiančios apskaičiuoti baigtinio laiko bankroto tikimybes $\psi(u, T)$, $u \in \mathbb{N}_0$, $T \in \mathbb{N}$, diskretaus laiko trijų sezonų rizikos modelyje.

4.7 Teorema. (4.3 teorema darbe) *Nagrinėkime pirmiau apibrėžtą diskretaus laiko trijų sezonų modelį. Kiekvienam* $u \in \mathbb{N}_0$ *turime, kad*

$$\psi(u, 1) = \psi^{(0)}(u, 1) = \sum_{k > u} a_k,\ \psi^{(1)}(u, 1) = \sum_{k > u} b_k,\ \psi^{(2)}(u, 1) = \sum_{k > u} c_k,$$

ir su visais $u \in \mathbb{N}_0$ *ir* $T \in \{2, 3, \ldots\}$ *galioja tokios rekursinės lygybės:*

$$\begin{aligned}\psi(u,T)=\psi^{(0)}(u,T) &= \psi^{(0)}(u,1)+\sum_{k=0}^{u}\psi^{(1)}(u+1-k,T-1)a_k,\\ \psi^{(1)}(u,T) &= \psi^{(1)}(u,1)+\sum_{k=0}^{u}\psi^{(2)}(u+1-k,T-1)b_k,\\ \psi^{(2)}(u,T) &= \psi^{(2)}(u,1)+\sum_{k=0}^{u}\psi^{(0)}(u+1-k,T-1)c_k.\end{aligned}$$

Mūsų kitas rezultatas nusako grynojo pelno sąvoką skaičiuojant begalinio laiko bankroto tikimybes diskretaus laiko trijų sezonų modelyje. Kitų dviejų teoremų formuluotėse $S = Z_1 + Z_2 + Z_3,\ s_k = \mathbb{P}(S = k)$, visiems $k \in \mathbb{N}_0$.

4.8 Teorema. (4.4 teorema darbe) *Tegu diskretaus laiko trijų sezonų modelį generuoja nepriklausomi a.d. Z_1, Z_2 ir Z_3. Jei $\mathbb{E}S > 3$, tai $\psi(u) = 1$ su kiekvienu pradiniu kapitalu $u \in \mathbb{N}_0$. Jei $\mathbb{E}S = 3$, galimi tokie atvejai:*

- *$\psi(0) = \psi(1) = \psi(2) = 1$ ir $\psi(u) = 0$ visiems $u \in \{3, 4, \ldots\}$, jei $\{a_3 = b_0 = c_0 = 1\}$;*
- *$\psi(0) = \psi(1) = 1$ ir $\psi(u) = 0$ visiems $u \in \{2, 3, \ldots\}$, jei $\{a_0 = b_3 = c_0 = 1\}$ arba $\{a_2 = b_1 = c_0 = 1\}$, arba $\{a_1 = b_2 = c_0 = 1\}$, arba $\{a_2 = b_0 = c_1 = 1\}$;*
- *$\psi(0) = 1$ ir $\psi(u) = 0$ visiems $u \in \mathbb{N}$, jei $\{a_0 = b_0 = c_3 = 1\}$ arba $\{a_0 = b_2 = c_1 = 1\}$, arba $\{a_0 = b_1 = c_2 = 1\}$, arba $\{a_1 = b_0 = c_2 = 1\}$, arba $\{a_1 = b_1 = c_1 = 1\}$;*
- *$\psi(u) = 1$ visiems $u \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, \ldots\}$, jei $s_3 < 1$.*

Mūsų paskutinis rezultatas – gautos rekursinės formuliės išgyvenimo tikimybei $\varphi(u) = 1 - \psi(u),\ u \in \mathbb{N}_0$ skaičiuoti.

4.9 Teorema. (4.5 teorema darbe) *Tegu diskretaus laiko trijų sezonų modelį generuoja nepriklausomi a.d. Z_1, Z_2 ir Z_3. Jeigu $\mathbb{E}S < 3$, galioja tokie tvirtinimai:*

- *$\lim\limits_{u\to\infty}\varphi(u) = 1$.*
- *Jei $s_0 \neq 0$, tai*

$$\varphi(n) = \alpha_n\varphi(0) + \beta_n\varphi(1) + \gamma_n(3 - \mathbb{E}S),\ n \in \mathbb{N}_0,$$

čia

$$\begin{cases}\alpha_0 = 1,\ \alpha_1 = 0,\ \alpha_2 = -\frac{1}{b_0c_0},\\ \alpha_n = \frac{1}{s_0}\left(\alpha_{n-3} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k\alpha_{n-k} - a_{n-2}\right),\quad n \geqslant 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases}\beta_0 = 0,\ \beta_1 = 1,\ \beta_2 = -\frac{c_1}{c_0} - \frac{1}{b_0},\\ \beta_n = \frac{1}{s_0}\left(\beta_{n-3} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k\beta_{n-k} - a_{n-2}c_0 + c_0\sum\limits_{k=0}^{n-1} a_kb_{n-1-k}\right),\quad n \geqslant 3;\end{cases}$$

$$\begin{cases} \gamma_0 = 0,\ \gamma_1 = 0,\ \gamma_2 = \frac{1}{b_0c_0}, \\ \gamma_n = \frac{1}{s_0}\Big(\gamma_{n-3} - \sum\limits_{k=1}^{n-1} s_k\gamma_{n-k} + a_{n-2}\Big), \quad n \geqslant 3. \end{cases}$$

- *Jei* $\{a_0 = 0, b_0 \neq 0, c_0 \neq 0, a_1 \neq 0\}$, *tai*

$$\begin{cases} \varphi(0) = 0, \\ \varphi(n) = \hat{\beta}_n\varphi(1) + \hat{\gamma}_n(3 - \mathbb{E}S),\ n \in \mathbb{N}, \end{cases}$$

čia

$$\begin{cases} \hat{\beta}_1 = \beta_1,\ \hat{\beta}_2 = \beta_2,\ \hat{\gamma}_1 = \gamma_1,\ \hat{\gamma}_2 = \gamma_2, \\ \hat{\beta}_n = \frac{1}{s_1}\Big(\hat{\beta}_{n-2} - \sum\limits_{k=2}^{n} s_k\hat{\beta}_{n-k+1} - a_{n-1}c_0 - c_0\varphi(1)\sum\limits_{k=1}^{n} a_kb_{n-k}\Big),\ n \geqslant 3, \\ \hat{\gamma}_n = \frac{1}{s_1}\Big(\hat{\gamma}_{n-2} - \sum\limits_{k=2}^{n} s_k\hat{\gamma}_{n-k+1} + a_{n-1}\Big),\ n \geqslant 3. \end{cases}$$

- *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0, b_1 \neq 0\}$, *tai*

$$\varphi(n) = \tilde{\alpha}_n\varphi(0) + \tilde{\gamma}_n(3 - \mathbb{E}S),\ n \in \mathbb{N},$$

čia

$$\begin{cases} \tilde{\alpha}_1 = -1/c_0,\ \tilde{\alpha}_2 = c_1/c_0^2 + 1/(a_0b_1c_0),\ \tilde{\gamma}_1 = 1/c_0,\ \tilde{\gamma}_2 = -c_1/c_0^2, \\ \tilde{\alpha}_n = \frac{1}{s_1}\Big(\tilde{\alpha}_{n-2} - \sum\limits_{k=2}^{n} s_k\tilde{\alpha}_{n-k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_kb_{n-k}\Big),\ n \geqslant 3, \\ \tilde{\gamma}_n = \frac{1}{s_1}\Big(\tilde{\gamma}_{n-2} - \sum\limits_{k=2}^{n} s_k\tilde{\gamma}_{n-k+1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_kb_{n-k}\Big),\ n \geqslant 3. \end{cases}$$

- *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, c_0 = 0, c_1 \neq 0\}$, *tai*

$$\varphi(n) = \breve{\alpha}_n\varphi(0) + \breve{\gamma}_n(3 - \mathbb{E}S),\ n \in \mathbb{N}_0,$$

čia

$$\begin{cases} \breve{\alpha}_0 = 1, \breve{\alpha}_1 = -1/(b_0c_1),\ \breve{\gamma}_0 = 0,\ \breve{\gamma}_1 = 1/(b_0c_1), \\ \breve{\alpha}_n = \frac{1}{s_1}\Big(\breve{\alpha}_{n-2} - \sum\limits_{k=2}^{n} s_k\breve{\alpha}_{n-k+1} - \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_kb_{n-k}\Big),\ n \geqslant 2, \\ \breve{\gamma}_n = \frac{1}{s_1}\Big(\breve{\gamma}_{n-2} - \sum\limits_{k=2}^{n} s_k\breve{\gamma}_{n-k+1} + \sum\limits_{k=0}^{n-1} a_kb_{n-k}\Big),\ n \geqslant 2. \end{cases}$$

- *Jei* $\{a_0 = 0, b_0 = 0, c_0 \neq 0\}$, *tai* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = (3 - \mathbb{E}S)/c_0$ *ir*

$$\begin{aligned} \varphi(u+1) = \frac{1}{s_2}\Big((1 - s_3)\varphi(u) - \sum_{k=1}^{u-1} \varphi(k)s_{u+3-k} \\ + c_0\varphi(1)\sum_{k=0}^{u+2} a_kb_{u+2-k}\Big),\ u \in \mathbb{N}. \end{aligned} \tag{9}$$

- *Jei* $\{a_0 = 0, b_0 \neq 0, c_0 = 0\}$, *tai* $\varphi(0) = s_2\varphi(1)$, $\varphi(1) = (3 - \mathbb{E}S)/(s_2 + b_0c_1)$ *ir*

$$\begin{aligned} \varphi(u+1) = \frac{1}{s_2}\Big((1 - s_3)\varphi(u) - \sum_{k=1}^{u-1} \varphi(k)s_{u+3-k} \\ + a_{u+1}b_0c_1\varphi(1)\Big),\ u \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

• *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 = 0, c_0 = 0\}$, *tai* $\varphi(0) = 3 - \mathbb{E}S$, $\varphi(1) = (3 - \mathbb{E}S)/s_2$ *ir*

$$\varphi(u+1) = \frac{1}{s_2}\Big((1 - s_3)\varphi(u) + \sum_{k=1}^{u-1} \varphi(k)s_{u+3-k}\Big), \; u \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

• *Jei* $\{a_0 = a_1 = 0, b_0 \neq 0, c_0 \neq 0\}$, *tai* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = (3 - \mathbb{E}S)/(1/a_2 + c_0)$ *ir galioja rekursinė formulė* (9).

• *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 = b_1 = 0, c_0 \neq 0\}$, *tai* $\varphi(0) = 0$, $\varphi(1) = (3 - \mathbb{E}S)/c_0$ *ir galioja rekursinė formulė* (9).

• *Jei* $\{a_0 \neq 0, b_0 \neq 0, c_0 = c_1 = 0\}$, *tai* $\varphi(0) = 3 - \mathbb{E}S$, $\varphi(1) = (3 - \mathbb{E}S)/s_2$ *ir galioja rekursinė formulė* (10).

4.5 Skaitiniai pavyzdžiai

Šiame skyrelyje pateiksime porą pavyzdžių. Pavyzdžiai demonstruoja gautų rekursinių formulių skaitines reikšmes. Skaičiavimai atlikti naudojant paketą MATHEMATICA.

Pirmame pavyzdyje pateikiamos baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybių reikšmės diskretaus laiko dviejų rizikų modeliui. Pavyzdį su aprašymu galima rasti disertacinio darbo 60 psl.

1 Pavyzdys. Tegu dviejų rizikų modelį generuoja a.d. X ir Y, turintys tokius paprastus pasiskirstymus:

X	0	1	2
$\mathbb{P}$	3/4	1/8	1/8

;

Y	0	1	2
$\mathbb{P}$	1/10	8/10	1/10

.

Pagal 4.1 teoremą gauname funkcijos $\psi(u, T)$ skaitines reikšmes. Paskutinė lentelės eilutė rodo $\psi(u)$ reikšmes, gautas pagal 4.2 ir 4.4 teoremas. Reikia pasakyti, kad grynojo pelno sąlyga yra įvykdyta.

1 lentelė. Funkcijų $\psi(u,T)$ ir $\psi(u)$ skaitinės reikšmės modeliui, aprašytam pirmame pavyzdyje

$T \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	20	30
1	0.25	0.125	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.484	0.258	0.064	0.017	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.542	0.285	0.087	0.023	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.606	0.345	0.134	0.046	0.012	0.002	0	0	0	0	0	0	0
5	0.620	0.362	0.147	0.053	0.015	0.004	0.001	0	0	0	0	0	0
6	0.650	0.398	0.180	0.074	0.026	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0
7	0.659	0.408	0.190	0.081	0.029	0.009	0.002	0.001	0	0	0	0	0
8	0.677	0.433	0.215	0.098	0.039	0.014	0.005	0.001	0	0	0	0	0
9	0.683	0.440	0.222	0.104	0.043	0.016	0.006	0.002	0	0	0	0	0
10	0.695	0.458	0.241	0.119	0.052	0.022	0.008	0.003	0.001	0	0	0	0
20	0.737	0.522	0.314	0.182	0.101	0.053	0.027	0.013	0.006	0.003	0.001	0	0
30	0.754	0.549	0.348	0.216	0.129	0.075	0.043	0.023	0.012	0.007	0.003	0	0
40	0.762	0.563	0.367	0.235	0.146	0.090	0.054	0.032	0.018	0.010	0.006	0	0
50	0.768	0.572	0.378	0.248	0.158	0.100	0.062	0.038	0.023	0.014	0.008	0	0
60	0.771	0.578	0.386	0.256	0.166	0.107	0.068	0.043	0.027	0.016	0.100	0	0
70	0.773	0.582	0.392	0.262	0.172	0.112	0.073	0.047	0.030	0.019	0.012	0	0
80	0.775	0.584	0.396	0.266	0.176	0.116	0.076	0.049	0.032	0.020	0.013	0	0
90	0.776	0.587	0.399	0.270	0.180	0.119	0.079	0.052	0.034	0.022	0.014	0.0001	0
100	0.777	0.589	0.401	0.272	0.182	0.122	0.081	0.053	0.035	0.023	0.015	0.0001	0
300	0.780	0.594	0.409	0.281	0.191	0.130	0.089	0.061	0.041	0.028	0.019	0.0004	0.00001
∞	0.780	0.594	0.409	0.281	0.191	0.131	0.089	0.061	0.041	0.028	0.019	0.0004	0.00001

Antrame pavyzdyje pateikiamos baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybių skaitinės reikšmės diskretaus laiko rizikos modeliui su trimis skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis. Pavyzdį su aprašymu galima rasti disertacinio darbo 61 psl.

2 Pavyzdys. Tegu rizikos modelį generuoja trys a.d. X, Y ir Z, turintys tokius paprastus pasiskirstymus:

$$\begin{array}{c|c|c|c} X & 0 & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P} & 0.92 & 0.07 & 0.01 \end{array}\;; \quad \begin{array}{c|c|c} Y & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P} & 0.95 & 0.05 \end{array}\;; \quad \begin{array}{c|c|c} Z & 1 & 2 \\ \hline \mathbb{P} & 0.85 & 0.15 \end{array}\,.$$

Reikia pabrėžti, kad grynojo pelno sąlyga yra įvykdyta, t.y. $\mathbb{E}Z_1 + \mathbb{E}Z_2/2 + \mathbb{E}Z_3/3 < 1$. Pagal 4.1 teoremą gauname $\psi(u,T)$ reikšmes. Paskutinė lentelės eilutė su $\psi(u)$ reikšmėmis gaunama iš 4.6 teoremos.

2 lentelė. Funkcijų $\psi(u,T)$ ir $\psi(u)$ skaitinės reikšmės modeliui, aprašytam antrame pavyzdyje

$T \setminus u$	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	15	20
1	0.080	0.010	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	0.196	0.031	0.003	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	0.371	0.084	0.013	0.002	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	0.450	0.128	0.027	0.004	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0
5	0.456	0.132	0.028	0.004	0.001	0	0	0	0	0	0	0	0
6	0.624	0.261	0.081	0.019	0.004	0.001	0	0	0	0	0	0	0
7	0.628	0.265	0.082	0.020	0.004	0.001	0	0	0	0	0	0	0
8	0.636	0.273	0.087	0.022	0.004	0.001	0	0	0	0	0	0	0
9	0.656	0.296	0.101	0.028	0.006	0.001	0	0	0	0	0	0	0
10	0.673	0.318	0.115	0.034	0.008	0.002	0	0	0	0	0	0	0
11	0.674	0.319	0.116	0.034	0.009	0.002	0	0	0	0	0	0	0
12	0.722	0.386	0.164	0.058	0.018	0.005	0.001	0	0	0	0	0	0
13	0.724	0.388	0.166	0.059	0.018	0.005	0.001	0	0	0	0	0	0
14	0.727	0.393	0.170	0.062	0.019	0.005	0.001	0	0	0	0	0	0
15	0.736	0.407	0.181	0.068	0.022	0.006	0.002	0	0	0	0	0	0
16	0.744	0.420	0.192	0.075	0.026	0.008	0.002	0.001	0	0	0	0	0
17	0.744	0.421	0.193	0.076	0.026	0.008	0.002	0.001	0	0	0	0	0
18	0.769	0.463	0.232	0.101	0.039	0.013	0.004	0.001	0	0	0	0	0
19	0.770	0.464	0.233	0.102	0.039	0.014	0.004	0.001	0	0	0	0	0
20	0.772	0.468	0.236	0.104	0.040	0.014	0.005	0.001	0	0	0	0	0
30	0.818	0.556	0.331	0.177	0.087	0.039	0.017	0.006	0.002	0.001	0	0	0
40	0.838	0.598	0.381	0.222	0.120	0.061	0.029	0.013	0.005	0.002	0	0	0
50	0.855	0.635	0.428	0.268	0.158	0.087	0.046	0.023	0.011	0.005	0.002	0	0
∞	0.990	0.973	0.955	0.936	0.918	0.900	0.883	0.865	0.849	0.832	0.816	0.739	0.670

5 Ginamos išvados

- Begalinio laiko bankroto tikimybei diskretaus laiko kelių rizikų modelyje nustatyta grynojo pelno sąlyga, kurios neįvykdžius bankroto tikimybė yra lygi 1.
- Begalinio laiko bankroto tikimybė diskretaus laiko kelių rizikų modelyje artėja į 0, kai pradinis kapitalas u artėja į begalybę.
- Gautos rekursinės formulės baigtinio laiko bankroto tikimybių tikslioms reikšmėms skaičiuoti diskretaus laiko rizikos modelyje su keliomis skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis.
- Gautos rekursinės formulės begalinio laiko bankroto tikimybių tikslioms reikšmėms skaičiuoti diskretaus laiko rizikos modelyje su dviem skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis.
- Gautos rekursinės formulės begalinio laiko bankroto tikimybių tikslioms reikšmėms skaičiuoti diskretaus laiko rizikos modelyje su trimis skirtingai pasiskirsčiusiomis žalomis.
- Gautos rekursinės formulės baigtinio ir begalinio laiko bankroto tikimybių tikslioms reikšmėms skaičiuoti diskretaus laiko trijų sezonų modelyje.
- Naudojant matematinį paketą gautos rekursinių formulių skaitinės reikšmės.

6 Naujumas

Visi gauti rezultatai yra nauji ir originalūs. Jie praplečia, apibendrina ir papildo iki šiol kelių autorių gautus rezultatus. Rezultatai atitinka dviejų mokslinių publikacijų (žr. skyrių „Pagrindinės publikacijos“) turinį. Disertacijoje gauti rezultatai buvo sėkmingai pristatyti vietinėse ir tarptautinėse konferencijose (žr. skyrių „Rezultatų sklaida“).

7 Darbo struktūra ir apimtis

Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro 7 skyriai: įvadas, vartojamos sąvokos ir apibrėžimai, 4 moksliniams rezultatams skirti skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Bendra darbo apimtis yra 78 puslapiai.

8 Pagrindinės publikacijos

Pristatomos disertacijos rezultatai publikuojami 2 moksliniuose straipsniuose:

1. A. Grigutis, A. Korvel and J. Šiaulys. Ruin probabilities of a discrete-time multi-risk model. *Information Technology and Control*, 44:367–379, 2015.

2. A. Grigutis, A. Korvel and J. Šiaulys. Ruin probabilities in the three-seasonal discrete-time risk model. *Modern Stochastics: Theory and Applications*, 2:421–441, 2015.

9 Rezultatų sklaida

Disertacijoje gauti rezultatai buvo pristatyti šiose vietinėse ir tarptautinėse mokslinėse konferencijose:

1. *Lietuvos matematikų draugijos 55-oji konferencija*, Vilnius, Lietuva, 2014 m. birželio 26–27 d.

2. *Lietuvos matematikų draugijos 56-oji konferencija*, Kaunas, Lietuva, 2015 m. birželio 16–17 d.

3. *Quantitative methods in economics*, SGGW, Varšuva, Lenkija, 2015 m. birželio 22–23 d.

4. *19th International Congress on Insurance: Mathematics and Economics (IME)*, Liverpulio universitetas, Liverpulis, Didžioji Britanija, 2015 m. birželio 24–26 d.

10 Summary

In this thesis, the discrete-time risk model with inhomogeneous claims is investigated. This model describes an insurance company who experiences two opposing cash flows: incoming cash premiums and outgoing claims and also depends on initial surplus. The main risk measure of the model, ruin probability, is considered and recursive formulas for the ruin probabilities calculation are obtained. These formulas enable fast and accurate evaluation of the finite-time and ultimate ruin probabilities of the discrete-time risk model with inhomogeneous claims. The results are presented in 4 chapters.

In the second chapter the recursive relations for the finite-time ruin probabilities calculation of the discrete-time any multi-risk model are obtained.

In the third chapter the recursive relations for the ultimate ruin probabilities calculation of the discrete-time bi-risk model and risk model with three inhomogeneous claims are obtained.

In the fourth chapter the recursive relations for the finite-time ruin probabilities calculation of the discrete-time three-seasonal risk model are obtained.

In the fifth chapter numerical examples of the obtained recursive relations are presented.

The thesis also contains an introduction, background on the techniques used, conclusions and bibliography. Additionally to the thesis, an extensive summary in Lithuanian is provided.

11 Trumpos žinios apie autorių

Išsilavinimas

2005 Vilniaus universiteto matematikos magistrė

1999 Vilniaus Justiniškių vidurinė mokykla

Darbo patirtis

2014 – UAB "Euromonitor International - Eastern Europe", duomenų analitikė

2008 – 2014 Draudimo bendrovė "Aviva Lietuva", investicijų apskaitininkė

Literatūra

[1] E. Bieliauskienė and J. Šiaulys. Gerber-Shiu function for the discrete inhomogeneous claim case. *International Journal of Computer Mathematics*, 89(12):1617–1630, 2012.

[2] K. Blaževičius, E. Bieliauskienė, and J. Šiaulys. Finite time ruin probability in the inhomogeneous claim case. *Lithuanian Mathematical Journal*, 50(3):260–270, 2010.

[3] J. Damarackas and J. Šiaulys. Bi-seasonal discrete time risk model. *Applied Mathematics and Computation*, 247:930–940, 2014.

[4] F. E. De Vylder and M. J. Goovaerts. Recursive calculation of finite-time ruin probabilities. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7:1–8, 1988.

[5] F. E. De Vylder and M. J. Goovaerts. Explicit finite-time and infinite-time ruin probabilities in the continuous case. *Insurance: Mathematics and Economics*, 24:155–172, 1999.

[6] H. U. Gerber. An introduction to mathematical risk theory. *S.S. Huebner Foundation Monographs, University of Pennsylvania*, 1979.

[7] H. U. Gerber and E. Shiu. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2:48–78, 1998.

[8] D. Lu. Lower and upper bounds of large deviations for sum of subexponential claims in a multi-risk model. *Statistics and Probability Letters*, 81:1911–1919, 2011.

[9] D. Lu. Lower bounds of large deviations for sums of long-tailed claims in a multi-risk model. *Statistics and Probability Letters*, 82(7):1242–1250, 2012.

[10] Ph. Picard, Cl. Lefévre, and I. Caulibaly. Multirisk model and finite-time ruin probabilities. *Methodology and Computing in Applied Probability*, 5:337–353, 2003.

[11] A. M. Raducan, R. Vernic, and G. Zbaganu. Recursive calculation of the ruin probabilities at or before claim instants for non-identically distributed claims. *ASTIN Bulletin*, 45:421–443, 2015.

[12] E. S. W. Shiu. Convolution of uniform distributions and ruin probability. *Scandinavian Actuarial Journal*, pages 191–197, 1987.

[13] E. S. W. Shiu. Calculation of the probability of eventual ruin by beckman's convolution series. *Insurance: Mathematics and Economics*, 7:41–47, 1989.

[14] E. S. W. Shiu. The probability of eventual ruin in the compound binomial model. *ASTIN Bulletin*, 19:179–190, 1989.

[15] S. Wang and W. Wang. Precise large deviations for sums of random variables with consistently varying tails in multi-risk models. *Journal of Applied Probability*, 44(4):889–900, 2007.

[16] S. Wang and W. Wang. Precise large deviations for sums of random variables with consistent variation in dependent multi-risk models. *Communications in Statistics – Theory and Methods*, 42(24):4444–4459, 2013.

$$
\begin{aligned}
\hat{z}_4 &= A^6B^3C^2(1) + \overline{A}(0)\ a^6b^3c^2(1) + \overline{A}(1)\ a^6b^3c^2(0) + \overline{AB}(1)\ a^4b^2c^2(0),\\
\hat{z}_3 &= A^6B^3C^2(2) + \sum_{i_1=1}^{3} \overline{A}(i_1-1)\ a^5b^3c^2(3-i_1) + \sum_{i_2=2}^{3} \overline{AB}(i_2-1)\ a^4b^2c^2(3-i_2)\\
&\qquad\qquad + a^3b^2c(0)\ \{\overline{AC}(2) + \overline{AB}(0)\ ac(2)\},\\
\hat{z}_2 &= A^6B^3C^2(3) + \sum_{i_1=1}^{4} \overline{A}(i_1-1)\ a^5b^3c^2(4-i_1) + \sum_{i_2=2}^{4} \overline{AB}(i_2-1)\ a^4b^2c^2(4-i_2)\\
&\qquad\qquad + \sum_{i_3=3}^{4} a^3b^2c(4-i_3)\{\overline{AC}(i_3-1) + \overline{AB}(0)\ ac(i_3-1)\},\\
\hat{z}_1 &= A^6B^3C^2(4) + \sum_{i_1=1}^{5} A(i_1-1)\ a^5b^3c^2(5-i_1) + \sum_{i_2=2}^{5} \overline{AB}(i_2-1)\ a^4b^2c^2(5-i_2)\\
&\qquad\qquad + \sum_{i_3=3}^{5} a^3b^2c(5-i_3)\{\overline{AC}(i_3-1) + \overline{AB}(0)\ ac(i_3-1)\}\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + a^2bc(0)\sum_{i_4=4}^{5} \overline{AB}(i_4-1)\ a^2bc(5-i_4)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + ab(0)\ ac(1)\sum_{i_4=4}^{5} \overline{AB}(i_4-2)\ a^2bc(5-i_4)\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad + ab(0)\ \overline{AC}(1)\sum_{i_4=4}^{5} \overline{AB}(i_4-3)\ a^2bc(5-i_4)\\
&\qquad\qquad + abc(0)\sum_{k=0}^{2} \overline{A}(4-k)\ a^4b^2c(k) + abc(0)\ \overline{A^2B^2C}(2)\ \overline{A}(1)\\
&\qquad\qquad + a^4b^3c(0)\ a_2\ \overline{AC}(2) + a^2b^2c(0)\ a_2\ \overline{A^2B}(0)\ \overline{AC}(1)\\
&\qquad\qquad + a^3b^3c(0)\ a_2\ ac(2)\ \overline{A}(0) - abc(0)\sum_{i_2=0}^{1}\sum_{k=0}^{1-i_2} abc(k)\ a_{3-i_2-k}\ \overline{AB}(i_2+1)\\
&\quad - abc(0)\sum_{i_1=0}^{2}\sum_{k=0}^{2-i_1} a^3b^2c(k)\ a_{4-i_1-k}\ \overline{A}(i_1),\\
z_k(u) &= \sum_{i=1}^{6-k}\sum_{j=i}^{6-k}\sum_{\bigcap_{l=1}^{i} I_l} a_{k_1}^{\lfloor(4+i)/5\rfloor} ab^{\lfloor(3+i)/5\rfloor}(k_2) ac^{\lfloor(2+i)/5\rfloor}(k_3) ab^{\lfloor(1+i)/5\rfloor}(k_4) a^{\lfloor i/5\rfloor}(k_5)\times\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad \times a^{6-i}b^{3-\lfloor i/2\rfloor}c^{2-\lfloor i/3\rfloor}(6-j-k),
\end{aligned}
$$

čia $I_l = \left\{ k_l; 0; u + l - 1 - \sum_{m=0}^{l-1} k_m \right\} 1 \left(\left[\frac{4 + i - l}{5} \right] \right)$

$$\bigcup \left\{ k_l; u + j - \sum_{m=0}^{l-1} k_m; u + j - \sum_{m=0}^{l-1} k_m \right\} 1 \left(\left[\frac{5 + l - i}{5} \right] \right).$$