ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Andrė Miltinienė

Vienos periodinės dzeta funkcijos antrojo momento asimptotika kritinėje tiesėje

Bakalauro darbas

Darbo vadovas
doc. dr. Darius Šiaučiūnas

Šiauliai, 2011

TURINYS

ĮVADAS

Kompleksinio kintamojo funkcijos, kurioje nors pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilute su koeficientais, turinčiais vieną ar kitą aritmetinę prasmę, paprastai yra vadinamos dzeta arba L-funkcijomis. Jos atlieka svarbų vaidmenį analizinėje skaičių teorijoje.

Tegul $i = \sqrt{-1}$ yra menamasis vienetas, $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $\mathfrak{a} = \{a_m : a_m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka, kurios periodas $k \in \mathbb{N}$. Čia $\mathbb{N}$- natūraliųjų skaičių aibė, o $\mathbb{N}_0$ yra sveikųjų neneigiamų skaičių aibė. Periodinė dzeta funkcija $\zeta(s, \mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama tokia Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Jeigu $\mathfrak{a} = \{1\}$ ir $k = 1$, tai periodinė dzeta funkcija $\zeta(s; \mathfrak{a})$ virsta Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ [1], pusplokštumėje $\sigma > 1$, apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Toje pat pusplokštumėje, $\sigma > 1$, periodinė dzeta funkcija yra išreiškiama tokia lygybe

$$\zeta(s, \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{q=1}^{k} a_q \zeta\Big(s, \frac{q}{k}\Big), \tag{1}$$

čia $\zeta(s, \alpha)$ yra Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \quad \sigma > 1, \quad 0 < \alpha \leq 1.$$

Kadangi $\zeta(s; \alpha)$ yra visur reguliari, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1, tai pastaroji lygybė duoda funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus galbūt paprastąjį polių taške $s=1$ su reziduumu

$$a = \frac{1}{k}\sum_{m=1}^{k} a_m.$$

Rymano dzeta funkciją dar XVIII a pradėjo tirti Oileris (Euler). Tačiau jis ją tyrė, kaip realaus kintamojo funkciją. Rymanas pirmasis pradėjo tirti Rymano dzeta funkciją, kaip kompleksinio kintamojo funkciją (XIX a.). Klasikinių Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ ir Dirichlė L-funkcijų analizinės savybės yra glaudžiai susijusios su pirminių skaičių pasiskirstymu. Todėl daugelis garsių matematikų nagrinėjo ir nagrinėja dzeta funkcijas. F. V. Atkinsono (Atkinson), H. Boro (Bohr), E. Bombjerio (Bombieri), B. Konrio (Conrey), R. Garunkščio, S. M. Goneko (Gonek), G. H. Hardžio (Hardy), D. R. His-Brauno (Heath-Brown), M. Hakslio (Huxley), A. E. Ingamo (Ingham), A. Ivičiaus (Ivič), H. Ivanieco (Iwaniec), M. Jutilos (Jutila), A. Laurinčiko, A. F. Lavriko (Lavrik), N. N. Levinsono (Levinson), J. E. Litlvudo (Littlewood), K. Macumoto (Matsumoto), H. L. Montgomerio (Montgomery), Y. Motohašio (Motohashi), A. Perelio (Perelli), P. Sarnako (Sarnak), A. Selbergo (Selberg), J. Štoidingo (Steuding), V. Švarco (Schwarz), E. C. Titčmaršo (Tichmarsh), S. M. Voronino (Voronin) ir kitų matematikų darbai įtakoja dzeta funkcijų tyrimus.

Tegul

$$I_k(T,\sigma) = \int_0^T |\zeta(\sigma+it)|^{2k}\mathrm{d}t, \quad k \geq 0, \quad \sigma \geq \frac{1}{2}.$$

Šis integralas yra vadinamas Rymano dzeta funkcijos $2k$ eilės momentu.

Patebėsime, kad dzeta funkcijų momentų problema yra gana sunki. Pavyzdžiui, netgi Rymano dzeta funkcijos atveju ji yra patenkinamai išspręsta tik antrajam ir ketvirtajam momentui. Kitoms dzeta funkcijoms padėtis dar blogesnė. Todėl yra labai svarbu vykdyti tyrimus šioje srityje.

Rymano dzeta funkcijos atveju egzistuoja hipotezė, kad su kiekvienu k, $\forall k \in \mathbb{R}_+$ jos $2k$ eilės momentui galioja asimptotika

$$\int_0^T \left|\zeta\Big(\frac{1}{2}+it\Big)\right|^{2k} \mathrm{d}t \sim C_k T(\log T)^{k^2}, \quad T \to \infty.$$

Ši hipotezė yra patvirtinta tik 3 atvejais:

$$\begin{aligned} k &= 1, \quad C_k = 1, \quad \text{(Hardy, 1918)}, \\ k &= 2, \quad C_k = \frac{1}{2\pi^2}, \quad \text{(Ingham, 1924)}, \\ k &= \frac{C}{\sqrt{\log\log T}}, \quad C_k = 1, \quad \text{(A. Laurinčikas)}. \end{aligned}$$

Momentų problema reikalauja rasti momentų $I_k(T,\sigma)$ asimptotiką, kai $T \to \infty$, arba bent gauti jų įverčius.

1. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS

Šiame darbe nagrinėjama periodinė dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$, apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Periodinės kompleksinių skaičių sekos periodas $k = 4$, o seka apibrėžiama tokiu būdu

$$\mathfrak{a} = \{1, -1, i, -i\}.$$

Apibrėžiame integralą, kuris yra vadinamas funkcijos $\zeta(s, \mathfrak{a})$ antruoju momentu

$$I_1\Big(T, \sigma\Big) = \int_0^T |\zeta(\sigma + it; \mathfrak{a})|^2 \mathrm{d}t, \quad T \to \infty$$

Bakalauro darbo uždavinys yra gauti funkcijos $\zeta(s, \mathfrak{a})$ antrojo momento asimptotiką kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$, t.y. gauti tokio integralo

$$I_1\Big(T, \frac{1}{2}\Big) = \int_0^T \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2} + it; \mathfrak{a}\Big)\Big|^2 \mathrm{d}t$$

asimptotiką.

2. ARTUTINĖ FUNKCINĖ LYGTIS

Norint įrodyti artutinę funkcinę lygtį periodinei dzeta funkcijai, pagal (1) lygybę, pakanka ją įrodyti Hurvico dzeta funkcijai. Šią artutinę funkcinę lygtį užrašysime 1 teoremoje.

Tegul [3]

$$\psi(a) = \frac{\cos \pi\left(\frac{a^2}{2} - a - \frac{1}{8}\right)}{\cos \pi a}$$

ir

$$f(\alpha, t) = t \log\left(\frac{2\pi}{t}\right) + \frac{t}{2} - \frac{7\pi}{8} + \frac{\pi\alpha^2}{2} + \frac{\pi l}{2} + \pi n - \pi\alpha l + 2\pi y(l - \alpha).$$

1 **teorema.**([3]) Tegul $t \geq 1$, $y = (\frac{t}{2\pi})^{\frac{1}{2}}$, $n = [y]$, $r = [y - \frac{q}{k}]$, $l = n - r$. Tuomet, kai $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$,

$$\begin{aligned} \zeta(s;\alpha) &= \sum_{0 \leq m \leq r} \frac{1}{(m+\alpha)^s} + \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{s-\frac{1}{2}} e^{i(t+\frac{\pi}{4})} \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{e^{-2\pi i m \alpha}}{m^{1-s}} + \\ &+ \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{\frac{\sigma}{2}} e^{i f(\alpha,t)} \psi(2y - 2n + l - \alpha) + B t^{\frac{\sigma}{2}-1}. \end{aligned}$$

Iš artutinės funkcinės lygties Hurvico dzeta funkcijai, gauname artutinę funkcinę lygtį periodinei dzeta funkcijai

2 **teorema.**([3]) Tegul parametrai t, y, n, r, l apibrėžiami taip pat, kaip 1 teoremoje. Tuomet, kai $\frac{1}{2} \leq \sigma \leq 1$,

$$\begin{aligned} \zeta(s;\mathfrak{a}) &= k^{-s} \sum_{q=1}^{4} a_q \sum_{0 \leq m \leq r} \frac{1}{(m+\frac{q}{k})^s} + \\ &+ k^{-s} \left(\frac{2\pi}{t}\right)^{s-\frac{1}{2}} e^{i(t+\frac{\pi}{4})} \sum_{q=1}^{k} a_q \sum_{1 \leq m \leq n} \frac{e^{-2\pi i m \frac{q}{k}}}{m^{1-s}} + \end{aligned}$$

$$+ \quad k^{-s}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{\frac{\sigma}{2}}\sum_{q=1}^{k} a_q e^{if(\frac{q}{k},t)}\psi\Big(2y-2n+l-\frac{q}{k}\Big)+k^{-s}R(s,k),$$

o narys $R(s,k)$ yra toks

$$R(s,k) = Bt^{\frac{\sigma}{2}-1}\sum_{q=1}^{k}|a_q|.$$

Nagrinėjamu atveju, kai $\sigma=\frac{1}{2}$, $k=4$, periodinės dzeta funkcijos artutinė funkcinė lygtis apibrėžiama lygybe:

3 **teorema.** Tegul parametrai t, y, n, r, l apibrėžiami taip pat, kaip 1 teoremoje. Tuomet, kai $sigma = \frac{1}{2}$,

$$\begin{aligned}
\zeta(s;\mathfrak{a}) &= 4^{-s}\sum_{q=1}^{4} a_q \sum_{0\le m\le r}\frac{1}{(m+\frac{q}{4})^s}+ \\
&+ \quad 4^{-s}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{s-\frac{1}{2}} e^{i(t+\frac{\pi}{4})}\sum_{q=1}^{4} a_q \sum_{1\le m\le n}\frac{e^{-\frac{1}{2}\pi imq}}{m^{1-s}}+ \\
&+ \quad 4^{-s}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{\frac{1}{4}}\sum_{q=1}^{4} a_q e^{if(\frac{q}{4},t)}\psi\Big(2y-2n+l-\frac{q}{4}\Big)+4^{-s}R(s,k).
\end{aligned}$$

3. ANTROJO MOMENTO ASIMPTOTIKA KRITINĖJE TIESĖJE

Šiame skyriuje periodinės dzeta funkcijos antrajam momentui $I_1(T, \frac{1}{2})$ gaunamos asimptotinės formulės. Įveskime pažymėjimą, kai $k = 4$, $\mathfrak{a} = \{1, -1, i, -i\}$

$$K_1 = \sum_{q=1}^{4} q \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(4m+q)},$$

3 teoremos įrodymui naudosime lemą.

1 lema.([3]) Tarkime, kad $x \geq 1$. Tada

$$\sum_{m \leq x} \frac{1}{m} = \log x + \gamma_0 + \frac{B}{x},$$

čia γ_0- Oilerio konstanta.

4 **teorema.** Tarkime, kad $T \to \infty$. Tada

$$\begin{aligned} I_1\Big(T, \frac{1}{2}\Big) &= \int_0^T \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2} + it; \mathfrak{a})\Big)\Big|^2 \mathrm{d}t = \\ &= T \log T + T(2\gamma_0 - \log \pi - 1) - \\ &- \frac{1}{4} T(K_1 - \frac{25}{3}) + BT^{\frac{1}{2}} \log T + B. \end{aligned} \tag{2}$$

4 teoremos įrodymas. Kadangi $\zeta(s, \mathfrak{a}) \cdot \overline{\zeta(s, \mathfrak{a})} = |\zeta(\sigma + it, \mathfrak{a})|^2$ [2], tai

$$\int_{\frac{T}{2}}^{T} \Big|\zeta\Big(\frac{1}{2} + it; \mathfrak{a}\Big)\Big|^2 \mathrm{d}t = \frac{1}{4} \int_{\frac{T}{2}}^{T} \Big|\sum_{q=1}^{4} a_q \sum_{0 \leq m \leq r} \frac{1}{(m + \frac{q}{4})^{\frac{1}{2}+it}}\Big|^2 \mathrm{d}t +$$

$$+\quad \frac{1}{4}\int_{\frac{T}{2}}^{T}\Big|\sum_{q=1}^{4}a_q\sum_{1\le m\le n}e^{-\frac{1}{2}\pi imq}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}-it}}\Big|^2\mathrm{d}t+$$

$$+\quad B\int_{\frac{T}{2}}^{T}t^{-\frac{3}{2}}\mathrm{d}t+B\Big|\int_{\frac{T}{2}}^{T}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{it}e^{-it}\sum_{q_1=1}^{4}a_{q_1}\sum_{q_2=1}^{4}\bar{a}_{q_2}\times$$

$$\times\quad \sum_{0\le m_1\le r}\frac{1}{(m_1+\frac{q_1}{4})^{\frac{1}{2}+it}}\sum_{1\le m_2\le n}e^{\frac{1}{2}\pi imq_2}\frac{1}{m_2^{\frac{1}{2}+it}}\mathrm{d}t\Big|+$$

$$+\quad B\Big|\int_{\frac{T}{2}}^{T}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{\frac{1}{4}}\sum_{q_1=1}^{4}\bar{a}_{q_1}\sum_{q_2=1}^{4}a_{q_2}\times$$

$$\times\quad \sum_{0\le m\le r}\frac{1}{(m+\frac{q_1}{4})^{\frac{1}{2}-it}}\exp\Big\{if\Big(\frac{q_2}{4},t\Big)\Big\}\times$$

$$\times\quad \psi\Big(2y-2n+l-\frac{q_2}{4}\Big)\mathrm{d}t\Big|+$$

$$+\quad B\Big|\int_{\frac{T}{2}}^{T}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{\frac{1}{4}-it}e^{-it}\sum_{q_1=1}^{4}\bar{a}_{q_1}\sum_{q_2=1}^{4}a_{q_2}\times$$

$$\times\quad \sum_{1\le m\le n}e^{\frac{1}{2}\pi imq_1}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}+it}}\exp\Big\{if\Big(\frac{q_2}{4},t\Big)\Big\}\psi\times$$

$$\times\quad \Big(2y-2n+l-\frac{q_2}{4}\Big)\mathrm{d}t\Big|+$$

$$+\quad B\Big|\int_{\frac{T}{2}}^{T}\sum_{q=1}^{4}a_q\sum_{0\le m\le r}\frac{1}{(m+\frac{q}{4})^{\frac{1}{2}+it}}\overline{R(s,k)}\mathrm{d}t\Big|+$$

$$+\quad B\Big|\int_{\frac{T}{2}}^{T}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{it}\sum_{q=1}^{4}a_q\sum_{1\le m\le n}e^{-\frac{1}{2}\pi imq}\frac{1}{m^{\frac{1}{2}-it}}\overline{R(s,k)}\mathrm{d}t\Big|+$$

$$+\quad B\Big|\int_{\frac{T}{2}}^{T}\Big(\frac{2\pi}{t}\Big)^{\frac{1}{4}}\sum_{q=1}^{4}a_q e^{if(\frac{q}{4},t)}\psi\times$$

$$\times\quad\Big(2y-2n+l-\frac{q}{4}\Big)\overline{R(s,k)}\mathrm{d}t\Big|=$$

$$\overset{def}{=}\ \sum_{j=1}^{10}I_j. \tag{3}$$

Tegul $T_1=\max\left(\frac{T}{2},2\pi(m_1+\frac{q_1}{4})^2,2\pi(m_2+\frac{q_2}{4})^2\right)$. Tada gauname, kad

$$I_1 = \frac{1}{4}\sum_{q=1}^{4}\sum_{0\le m\le M_q(T)}\int_{T_1}^{T}\frac{\mathrm{d}t}{m+\frac{q}{4}}+\frac{1}{4}\sum_{q=1}^{4}\sum_{0\le m_1\le M_q(T)}\times$$

$$\times\quad\sum_{0\le m_2\le M_q(T)}\frac{1}{(m_1+\frac{q_1}{4})^{\frac{1}{2}}(m_2+\frac{q_2}{4})^{\frac{1}{2}}}\int_{T_1}^{T}\Big(\frac{m_1+\frac{q}{4}}{m_2+\frac{q}{4}}\Big)^{it}\mathrm{d}t+$$

$$+\quad\frac{1}{4}\sum_{q_1=1}^{4}a_{q_1}\sum_{q_2=1}^{4}\bar{a}_{q_2}\sum_{\substack{0\le m_1\le M_{q_1}(T)m_1\\ m_1\ne m_2}}\sum_{0\le m_2\le M_{q_2}(T)}\frac{1}{(m_1+\frac{q_1}{4})^{\frac{1}{2}}(m_2+\frac{q_2}{4})^{\frac{1}{2}}}\times$$

$$\times\quad\int_{T_1}^{T}\Big(\frac{m_2+\frac{q_2}{4}}{m_1+\frac{q_1}{4}}\Big)^{it}\mathrm{d}t+\frac{1}{4}\sum_{\substack{q_1=1\\ q_1\ne q_2}}^{4}a_{q_1}\sum_{q_2=1}^{4}\bar{a}_{q_2}\times$$

$$\times\quad\sum_{0\le m\le\max(M_{q_1}(T),M_{q_2}(T))}\frac{1}{(m+\frac{q_1}{4})^{\frac{1}{2}}(m+\frac{q_2}{4})^{\frac{1}{2}}}\int_{T_1}^{T}\Big(\frac{m+\frac{q_2}{4}}{m+\frac{q_1}{4}}\Big)^{it}\mathrm{d}t=$$

$$\stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{4} I_{1j}. \tag{4}$$

Nesunku pastebėti, kad pakankamai dideliems T

$$\begin{aligned} I_{11} &= \frac{1}{4}\sum_{q=1}^{4} \sum_{0\le m\le M_q(T)} \frac{1}{m+\frac{q}{4}}\Big(T - \max\Big(\frac{T}{2}, 2\pi\Big(m+\frac{q}{4}\Big)^2\Big)\Big) = \\ &= \frac{1}{4}T\sum_{q=1}^{4} \sum_{0\le m\le M_q(T)} \frac{1}{m+\frac{q}{4}} - \frac{25T}{24} - \frac{T}{8}\sum_{q=1}^{4} \times \\ &\times \sum_{1\le m\le M_q(\frac{T}{2})} \frac{1}{m+\frac{q}{4}} - \frac{1}{2}\pi\sum_{q=1}^{4} \sum_{M_q(\frac{T}{2})+1\le m\le M_q(T)} \Big(m+\frac{q}{4}\Big). \end{aligned} \tag{5}$$

Iš 1 lemos gauname, kad

$$\begin{aligned} \sum_{0\le m\le M_q(T)} \frac{1}{m+\frac{q}{4}} &= \frac{4}{q} + \sum_{1\le m\le M_q(T)} \frac{1}{m+\frac{q}{4}} = \\ &= \frac{4}{q} + \sum_{1\le m\le M_q(T)} \frac{1}{m} - q\sum_{1\le m\le M_q(T)} \frac{1}{m(4m+q)} = \\ &= \frac{4}{q} + \frac{1}{2}\log T - \log\sqrt{2\pi} + \gamma_0 - q\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(4m+q)} + \frac{B}{\sqrt{T}}. \end{aligned}$$

Analogiškai gauname, kad

$$\sum_{1\le m\le M_q(\frac{T}{2})} \frac{1}{m+\frac{q}{4}} = \frac{1}{2}\log T - \log\sqrt{4\pi} + \gamma_0 - q\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m(4m+q)} + \frac{B}{\sqrt{T}}.$$

Be to

$$\sum_{M_q(\frac{T}{2})+1\le m\le M_q(T)}\Big(m+\frac{q}{4}\Big) = \frac{\Big[\sqrt{\frac{T}{2\pi}}-\frac{q}{4}\Big]\Big(\Big[\sqrt{\frac{T}{2\pi}}-\frac{q}{4}\Big]+1\Big)}{2}-$$

$$-\frac{\Big[\sqrt{\frac{T}{4\pi}}-\frac{q}{4}\Big]\Big(\Big[\sqrt{\frac{T}{4\pi}}-\frac{q}{4}\Big]+1\Big)}{2}+B\sqrt{T}=$$

$$=\frac{T}{4\pi}-\frac{T}{8\pi}+B\sqrt{T}=\frac{T}{8\pi}+B\sqrt{T}.$$

Iš šių gautų įverčių ir (5) lygybės gauname, kad

$$I_{11} = \frac{1}{4}T\log T+\frac{T}{8}\Big(4\Big(\gamma_0-\log\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\Big)-K_1+\frac{25}{3}\Big)+$$

$$+ BT^{\frac{1}{2}} \tag{6}$$

Integralams $I_{1j}, j\ge 2$ taip pat galime panaudoti (5) ir (6) lygybes. Tada jiems galioja asimptotikos

$$I_{12} = I_{13} = BT^{\frac{1}{4}}+BT^{\frac{1}{2}}\log T, \tag{7}$$

$$I_{14} = B. \tag{8}$$

Iš (4), (6)-(9) lygybių gauname, kad

$$I_1 = \frac{1}{4}T\log T+\frac{T}{8}\Big(4\Big(\gamma_0-\log\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\Big)-K_1+\frac{25}{3}\Big)+$$

$$+ BT^{\frac{1}{2}}\log T+BT^{\frac{1}{4}}+B. \tag{9}$$

Tegul $T_2=\max\left(\frac{T}{2},2\pi m_1^2,2\pi m_2^2\right)$. Tada gauname, kad

$$\begin{aligned}
I_2 &= \frac{1}{4}\sum_{q=1}^{4}\sum_{1\le m\le M_0(T)}\frac{1}{m}\Big(T-\max\Big(\frac{T}{2},2\pi m^2\Big)\Big)+\\
&+ B\sum_{q=1}^{4}\sum_{1\le m_1<m_2\le M_0(T)}\frac{m_2}{(m_1m_2)^{\frac{1}{2}}(m_2-m_1)}+\\
&+ B\sum_{\substack{q_1=1\\ q_1\ne q_2}}^{4}\sum_{q_2=1}^{4}|a_{q_1}\bar{a}_{q_2}|\sum_{1\le m_1<m_2\le M_0(T)}\frac{m_2}{(m_1m_2)^{\frac{1}{2}}(m_2-m_1)}+\\
&+ B\sum_{\substack{q_1=1\\ q_1\ne q_2}}^{4}\sum_{q_2=1}^{4}|a_{q_1}\bar{a}_{q_2}|\sum_{1\le m\le M_0(T)}\frac{1}{m}=\\
&\stackrel{def}{=} \sum_{j=1}^{4}I_{2j}. \qquad (10)
\end{aligned}$$

Taip pat, kaip ir I_{11} atveju gauname, kad:

$$\begin{aligned}
I_{21} &= T(\log(M_0(T))+\gamma_0+\frac{B}{\sqrt{T}})-\\
&- \frac{1}{2}T\sum_{1\le m\le M_0(\frac{T}{2})}\frac{1}{m}-2\pi\sum_{M_0(\frac{T}{2})+1\le m\le M_0(T)}m=\\
&= \frac{1}{4}T\log T+\frac{T}{2}(\gamma_0-\log\sqrt{\pi}-\frac{1}{2})+BT^{\frac{1}{2}}. \qquad (11)
\end{aligned}$$

Analogiškai gauname, kad

$$\begin{aligned}
I_{22} &= I_{23} = BT^{\frac{1}{2}}\log T,\\
I_{24} &= B\log T.
\end{aligned}$$

Iš (10) ir (11) lygybių gauname, kad I_2 asimptotika yra

$$I_2 = \frac{1}{4}T\log T + \frac{T}{2}\Big(\gamma_0 - \log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\Big) + BT^{\frac{1}{2}}\log T. \tag{12}$$

Tuo pačiu būdu skaičiuojant likusius I_j, $j \geq 3$ gauname, kad

$$\begin{aligned}
I_3 &= BT^{\frac{1}{2}},\\
I_4 &= BT^{-\frac{1}{2}},\\
I_5 &= BT^{\frac{1}{2}} + BT^{\frac{1}{2}}\log T,\\
I_6 &= BT^{\frac{1}{4}}\log T + BT^{\frac{1}{2}}\log T,\\
I_7 &= BT^{\frac{1}{2}}\log T,\\
I_8 + I_9 + I_{10} &= BT^{\frac{1}{2}}\log T.
\end{aligned}$$

Gavę visus I_j galime apskaičiuoti periodinės dzeta funkcijos antrojo momento asimptotiką, apibrėžtą (2) integralu

$$\begin{aligned}
\int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it; \mathfrak{a})|^2 \mathrm{d}t &= \frac{1}{2}T\log T + T\Big(\gamma_0 - \log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\Big) -\\
&- \frac{T}{8}(K_1 - \frac{25}{3}) + BT^{\frac{1}{2}}\log T + B.
\end{aligned}$$

Šioje formulėje vietoj T įrašę $2^{-\alpha T}$ ir susumavę pagal visus neneigiamus α gauname teoremos tvirtinimą.

4. IŠVADOS

Bakalauro darbe nagrinėjama periodinė dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$, apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Periodinė kompleksinių skaičių seka apibrėžiama tokiu būdu

$$\mathfrak{a} = \{1, -1, i, -i\},$$

kurios periodas $k = 4$.

Darbo rezultatas yra periodinės dzeta funkcijos $\zeta(s)$ antrojo momento asimptotika, kuri užrašoma taip:

$$\begin{aligned}\int_0^T |\zeta(\frac{1}{2} + it; \mathfrak{a})|^2 \mathrm{d}t &= \frac{1}{2} T \log T + T\Big(\gamma_0 - \log\sqrt{\pi} - \frac{1}{2}\Big) - \\ &- \frac{T}{8}(K_1 - \frac{25}{3}) + BT^{\frac{1}{2}} \log T + B.\end{aligned}$$

SUMMARY

In this work we studied the periodic zeta-function

$$\zeta(s,\mathfrak{a})=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s},\quad s=\sigma+it,\quad \sigma>1,$$

where $\{a_m\}$ is a periodic sequence of complex numbers. The function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ is analytically continuable to the whole complex plane, except, maybe, for a simple pole at $s=1$. The function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ has been studied by many authors, among them W. Schnee, B. C. Berndt and L. Shoenfield, T. Funakura, P.Gérardin and W. L. Weng-Ching, I. I. Piatecki-Shapira and R. Raghunathan, J. Steuding, M. Ishibashi and S. Kanemitsu, A. Kačėnas and A. Laurinčikas, and others.

In this work, the periodic sequence of complex numbers is defined in such way

$$\mathfrak{a}=\{1,-1,i,-i\},$$

with period $k=4$.

The main result of this work is the asymptotics of the second power moment of the periodic zeta-function

$$\begin{aligned}\int_0^T|\zeta(\frac{1}{2}+it;\mathfrak{a})|^2\mathrm{d}t &= \frac{1}{2}T\log T+T\Big(\gamma_0-\log\sqrt{\pi}-\frac{1}{2}\Big)-\\ &- \frac{T}{8}(K_1-\frac{25}{3})+BT^{\frac{1}{2}}\log T+B.\end{aligned}$$

LITERATŪRA

1. A. Laurinčikas, *Rymano dzeta funkcijos pagrindai*, Vilnius, 1992.
2. A. Nagelė, L. Papreckienė, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*, Vilnius, 1996.
3. D. Šiaučiūnas, *The Investigations of the Periodic Zeta-Function*, Doctoral dissertation, Vilnius, 2004.