VILNIAUS UNIVERSITETAS

Svetlana Roman

GRYNO FUNKCIJOS UŽDAVINIAMS SU NELOKALIOSIOMIS KRAŠTINĖMIS SĄLYGOMIS

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2011

Disertacija rengta 2007–2011 metais Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas

prof. dr. Artūras Štikonas

(Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

VILNIUS UNIVERSITY

Svetlana Roman

GREEN'S FUNCTIONS FOR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Doctoral dissertation
Physical Sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2011

The dissertation was prepared at Institute of Mathematics and Informatics, Vilnius University in 2007–2011.

Scientific supervisor

Prof Dr Artūras Štikonas

(Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)

Reziumė

Disertacijoje tiriami antros ir aukštesnės eilės diferencialinis ir diskretusis uždaviniai su įvairiomis, tame tarpe ir nelokaliosiomis, sąlygomis, kurios yra aprašytos tiesiškai nepriklausomais tiesiniais funkcionalais. Pateikiamos šių uždavinių Gryno funkcijų išraiškos ir jų egzistavimo sąlygos, jei žinoma homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Gautas dviejų Gryno funkcijų sąryšis uždaviniams su ta pačia lygtimi, bet su papildomomis sąlygomis. Rezultatai pritaikomi uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

Įvadiniame skyriuje aprašyta tiriamoji problema ir temos objektas, išanalizuotas temos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, uždaviniai, naudojama tyrimų metodika, mokslinis darbo naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai ir darbo rezultatų aprobavimas.

m-tosios eilės diferencialinis uždavinys ir jo Gryno funkcija nagrinėjami pirmajame skyriuje. Surastas uždavinio sprendinys, išreikštas per Gryno funkciją. Pateikta Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga.

Antrajame skyriuje pateikti pirmojo skyriaus pagrindiniai apibrėžimai ir rezultatai antros eilės diferencialinei lygčiai. Pavyzdžiuose išsamiai išanalizuotas gautų rezultatų pritaikymas uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

Trečiajame skyriuje nagrinėjama antros eilės diskrečioji lygtis su dviem sąlygomis. Surastos diskrečiosios Gryno funkcijos išraiška ir jos egzistavimo sąlyga. Taip pat pateiktas dviejų Gryno funkcijų sąryšis, kuris leidžia surasti diskrečiosios lygties su dviem sąlygomis Gryno funkciją, jei yra žinoma tos pačios lygties, bet su kitomis sąlygomis, Gryno funkcija.

Trečiojo skyriaus rezultatai apibendrinti ketvirtajame skyriuje. Suformuluotas m-tosios eilės diskretusis uždavinys ir pateiktos Gryno funkcija ir jos egzistavimo sąlyga.

Abstract

In the dissertation, second-order and higher-order differential and discrete equations with additional conditions which are described by linearly independent linear functionals are investigated. The solutions to these problems, formulae and the existence conditions of Green's functions are presented, if the general solution of a homogeneous equation is known. The relation between two Green's functions of two nonhomogeneous problems for the same equation but with different additional conditions is obtained. These results are applied to problems with nonlocal boundary conditions.

In the introduction the topicality of the problem is defined, the goals and tasks of the research are formulated, the scientific novelty of the dissertation, the methodology of research, the practical value and the significance of the results are presented.

m-order differential problem and its Green's function are investigated in the first chapter. The relation between two Green's functions and the existence condition of Green's function are obtained.

In the second chapter, the main definitions and results of the first chapter are formulated for the second-order differential equation with additional conditions. In the examples the application of the received results is analyzed for problems with nonlocal boundary conditions in detail.

In the third chapter, the second-order difference equation with two additional conditions is considered. The expression of Green's function and its existence condition are presented. Also, the relation between two Green's functions, which allows us to find Green's function for an equation with two additional conditions if we know Green's function for the same equation, but with other additional conditions is obtained.

The results of the third chapter are generalized in the fourth chapter. The m-order discrete problem is formulated and Green's function and its existence condition are presented.

TURINYS

Iliustracijų sąrašas

Lentelių sąrašas

Įvadas

Problemos formulavimas

Disertacijoje tiriamos antros ir m-tosios eilės diferencialinių ir diskrečiųjų lygčių su įvairiomis sąlygomis, kurios yra aprašytos tiesiškai nepriklausomais tiesiniais funkcionalais, *Gryno funkcijos*.

Gryno funkcijos. Trumpa istorinė apžvalga

1828 m. anglų matematikas Džordžas Grynas (George Green) (1793–1841) parašė vieną iš pagrindinių savo darbų „An Essay on the Application of Mathematical Analysis to the Theories of Electricity and Magnetism“, kuris buvo išspausdintas vietiniame laikraštyje. Šiame straipsnyje jis pateikė teoremą, kuri atitinka dabartinę Gryno teoremą; aprašė potencialą, kuris naudojamas šiuolaikinėje fizikoje; ir sąvoką, kuri dabar vadinama *Gryno funkcija*. Jis praplėtė ir apibendrino elektros ir magnetizmo tyrimus, įvedė potencialios funkcijos apibrėžimą. Jo teorija tapo pagrindu kitiems mokslininkams, tokiems kaip Džeimsas Klerkas Maksvelas (James Clerk Maxwell) (1831–1879) ir Viljamas Tompsonas (William Thomson) (1824–1907). Džordžo Gryno gyvenimo eigoje esė liko nepastebėta. Ji nebuvo išspausdinta moksliniame žurnale ir tuo metu priklausė nežinomam autoriui. Tik 1845 m. V. Tompsonas perspausdino Džordžo Gryno darbą dalimis „Crelle“ žurnale. Džordžas Grynas taip ir mirė nesužinojęs apie savo šlovę.

Įvadas

N. M. Ferersas (N. M. Ferrers) 1871 metais išleido knygą „Mathematical Papers of the late George Green“ [39], kurioje buvo patys svarbiausi Džordžo Gryno darbai apie hidrodinamiką, šviesos ir garso atspindį ir lūžimą: „Mathematical Investigations Concerning the Laws of the Equilibrium of Fluids Analogous to the Electric Fluid“ (1832); „On the Motion of Waves in a Variable Canal of Small Width and Depth“ (1837); „On the Laws of Relexion and Refraction of Light at the Common Surface of Two Non-Crystallized Media“ (1937) ir kiti darbai.

Šiuolaikinį *Gryno funkcijos* apibrėžimą įvedė B. Rymanas (B. Riemann) (1826–1866). Straipsnyje „Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwelle von endlicher Schwingungsweite“ 1860 metais jis pritaikė Gryno funkcijos metodą, siekdamas integruoti hiperbolinio tipo diferencialinę lygtį, kuri apibūdina akustinių bangų sklaidą [104]. Jis aprašė funkciją, kuri šiandien vadinama „*hiperbolinio uždavinio Gryno funkcija*“.

Temos, susijusios su Gryno funkcijomis, gana populiarios. Išspausdinta daug monografijų ir straipsnių apie jų pritaikymą įvairiose srityse. Gryno teorema ir funkcijos turi svarbią reikšmę klasikinėje mechanikoje ir jos buvo naudojamos J. Švingerio (J. Schwinger) darbe apie elektrodinamiką (1948), už kurį jam buvo įteikta Nobelio premija (1965 m. kartu su R. Feinmanu (R. Feynman) ir S. Tomonaga (S. Tomonaga). Vėliau Gryno funkcijos tapo naudingos nagrinėjant superlaidininkus. Taip pat jos taikomos elektrostatikoje (Puasono lygties sprendimas), kondensuotųjų medžiagų teorijoje (difuzijos lygties sprendimas), kvantinėje mechanikoje (Šredingerio lygties sprendimas). G. Rikeizenas (G. Rickayzen) [103] kvantinėje fizikoje nagrinėjo Gryno funkcijos savybes. Superlaidumo, supertakumo ir magnetizmo skyriuose jis parodė, kaip Gryno funkcijos naudojamos aprašant fazės perėjimą. Taip pat parodyta, kokį vaidmenį atlieka Gryno funkcijos pernormavimo grupės metode.

Gryno funkcijų taikymas paprastosioms diferencialinėms lygtims su kraštinėmis sąlygomis prasidėjo nuo H. Burkhardto (H. Burkhardt) (1861–1914) darbo [17]. Vėliau, M. Bocheris (M. Bôcher) (1867–1918) praplėtė šiuos rezultatus n-tosios eilės kraštiniams uždaviniams [15].

Tiesinių paprastųjų ir dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sprendime Gryno funkcija atlieka svarbų vaidmenį. Ji yra naudojama sprendžiant nehomogenines lygtis atsižvelgiant į kraštines sąlygas. Ja naudojantis galima rasti stacionariųjų ir nestacionariųjų uždavinių sprendinius, ištirti sprendinių egzistavimą ir vienatį [33, 105, 130, 131].

2001 m. D. G. Dafis (D. G. Duffy) [35] išleido knygą, kurioje pateikė Gryno funkcijų išraiškas daugeliui diferencialinių uždavinių. Jos buvo sukonstruotos reguliariesiems ir singuliariesiems kraštiniams uždaviniams su paprastomis diferencialinėmis lygtimis, Helmholtz lygtimi, tiesinėmis nestacionariosiomis lygtimis (šilumos lygtis, bangų lygtis) ir klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis. Knyga apima skyrius apie vandens bangas, absoliutų / konvencinį nestabilumą. Autorius daug dėmesio skiria Gryno funkcijos apytiksliam skaičiavimui. Jis taip pat nagrinėjo kaip apytiksliai surasti Gryno funkcijos reikšmes ir galimus būdus, siekiant pagreitinti skaičiavimo procesą.

Iš esmės Gryno funkcijos tiriamos atsižvelgiant į fundamentaliuosius sprendinius. Daugiamatėms stacionariosioms ir nestacionariosioms problemoms Gryno funkcijų išraiškos yra sudėtingos ir jos pateikiamos kaip begalinės eilutės net paprastoms stačiakampėms, sferinėms ir cilindrinėms sritims [100]. Funkcinis požiūris į Gryno funkcijų konstravimą, naudojimą ir aproksimavimą bei jų asociatyvieji sutvarkytieji eksponencialai pateikiami knygoje [40], kur H. M. Frydas (H. M. Fried) nagrinėjo naujus uždavinius ir jų sprendinius, tame tarpe atvejį, kai dalelės formuojasi lazerio spindulių susikirtime ir nepastoviame elektros lauke.

Darbo aktualumas

Diferencialinių lygčių teorijoje pagrindinės sąvokos buvo suformuluotos tiriant klasikines matematinės fizikos uždavinius. Tačiau šiuolaikinės problemos skatina naujų uždavinių formulavimą ir tyrimą, pavyzdžiui, nelokaliųjų uždavinių klasė. Nelokaliosios sąlygos atsiranda tada, kai negalima tiesiogiai išmatuoti duomenų nagrinėjamo uždavinio srities krašte. Šiuo atveju formuluojami uždaviniai, kuriuose sprendinio ir / arba jo išvestinės reikšmės susijusios keliuose taškuose ar ištisame intervale.

1963 m. J. R. Kenonas (J. R. Cannon) [20] suformulavo uždavinį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \quad 0 < x < 1,\ 0 < t < T,$$

$$u(0,t) = \varphi_1(t), \qquad \int\limits_0^1 u(x,t)\,dx = \varphi_2(t),$$

$$u(x,0) = u_0(x),$$

kuris dabar vadinamas *nelokaliuoju* (terminą *nelokaliosios kraštinės sąlygos*, pirmą sykį panaudojo N. I. Jonkinas (Н. И. Ионкин) 1977 m. [68]). Šis uždavinys suteikė naują kryptį kraštinių uždavinių tyrime. Panašų uždavinį tyrė L. I. Kamyninas (Л.И. Камынин) [75].

Po šešerių metų A. A. Samarskis (А. А. Самарский) ir A. V. Bitsadzė (А. В. Бицадзе) parašė straipsnį „Some elementary generalizations of linear elliptic boundary value problems“ [14], kuriame jie suformulavo elipsinį dvimatį uždavinį su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Šis darbas paskatino naujų ir originalių straipsnių atsiradimą. Didesnis susidomėjimas šiais uždaviniais atsirado praeito šimtmečio 80-aisiais metais. Tokio tipo uždavinius nagrinėjo tokie Rusijos mokslininkai: V. A. Iljinas (В. А. Ильин), E. I. Moisejevas (Е. И. Моисеев) [59, 60, 61], N. I. Jonkinas [68, 69, 70], A. V. Gulinas (А. В. Гулин) [46, 47, 48, 49, 50, 51, 52, 53, 54]. Tuo pat metu Lietuvoje uždavinius su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis pradėjo nagrinėti M. Sapagovas ir jo mokinys R. Čiegis [25, 123, 124]. Šiuo metu Lietuvoje susiformavo matematikų grupė aktyviai tirianti uždavinius su nelokaliosiomis sąlygomis: M. Sapagovas [71, 121, 122, 125, 126, 127], R. Čiegis [26, 27, 28, 29], A. Štikonas [132, 133, 134] ir jų mokiniai [30, 31, 95, 96, 97, 98, 128]. Netiesinius diferencialinius uždavinius su panašiomis nelokaliosiomis sąlygomis aktyviai nagrinėja J. R. L. Vebas (J. R. L. Webb) ir jo mokiniai: G. Infantė (G. Infante)

[62, 63, 64, 65, 66, 67] ir kt. Be to, šiais 2011 metais buvo išleistas žurnalo „Boundary Value Problems“ specialus numeris, skirtas nelokaliosioms kraštinėms sąlygoms, kurį sudarė 27 straipsniai [1, 2, 5, 6, 13, 16, 18, 19, 21, 22, 36, 37, 38, 41, 79, 80, 81, 83, 91, 99, 102, 109, 129, 141, 142, 150, 154]. Akivaizdu, kad nelokaliųjų kraštinių, pradinių–kraštinių uždavinių tyrimas, skaitinių metodų analizė ir plėtra yra aktuali, įdomi ir svarbi matematikos sritis.

Šioje disertacijoje bus tiriamos antros ir aukštesnės eilės diferencialinių ir diskrečiųjų (skirtuminių) lygčių su įvairiomis sąlygomis (pavyzdžiui, su pradinėmis, kraštinėmis arba nelokaliosiomis sąlygomis) Gryno funkcijos.

Pusiau tiesinių uždavinių (dešinioji diferencialinės lygties pusė netiesiškai priklauso nuo ieškomosios funkcijos, o kairioji yra tiesinis diferencialinis operatorius) su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis tyrimas ir teigiamų sprendinių egzistavimas remiasi tiesinių uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijos tyrimu [62, 63, 88, 89, 90, 93, 137, 155]. Šiuose straipsniuose Gryno funkcija konstruojama uždaviniams su paprastu operatoriumi $\mathcal{L}u = -u''$ ir su kraštinėmis sąlygomis, kurios yra daugiataškių nelokaliųjų sąlygų atskiri atvejai:

$$\alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = \delta_0 u'(\xi_{00}) + \gamma_0 u(\xi_0),$$
$$\alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = \delta_1 u'(\xi_{11}) + \gamma_1 u(\xi_1),$$

čia $\alpha_i, \beta_i, \delta_i, \gamma_i \in \mathbb{R}$, $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $i = 0, 1$, ir $\xi_{00}, \xi_{11}, \xi_0, \xi_1 \in [0, 1]$, arba kraštinės sąlygos yra integralinio tipo:

$$u(0) = \int\limits_a^b \gamma_0(t) u(t)\, dt, \qquad u(1) = \int\limits_a^b \gamma_1(t) u(t)\, dt.$$

Antros eilės kraštiniams uždaviniams su įvairiomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijos konstruojamos straipsniuose [66, 67, 78, 139, 143, 155]. Šiuose darbuose autoriai nagrinėjo sprendinių egzistavimą ir vienatį.

Trečios eilės diferencialinė lygtis su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$u''' + h(t)f\big(u(t)\big) = 0, \quad t \in (0,1),$$
$$u(0) = u'(0) = 0, \qquad u'(1) = \alpha u'(\nu),$$

čia $0 < \nu < 1$ ir $1 < \alpha < \frac{1}{\nu}$, buvo tiriama straipsnyje [55]. Šiame darbe nustatyti bent trijų teigiamų sprendinių keli egzistavimo kriterijai, naudojant Legeto (Leggett) ir Viljamso (Williams) nejudamojo taško teoremą [8], ir laisviesiems teigiamiems argumentams m įrodytas bent $2m-1$ teigiamų sprendinių egzistavimas.

Sanas (Sun) ir Zangas (Zhang) [136] tyrė trečios eilės m-taškį kraštinį uždavinį

$$u'''(t) + f\big(t, u(t), u'(t), u''(t)\big) = 0, \quad t \in (0,1),$$
$$u(0) = u'(0) = 0, \qquad u''(1) = \sum_{i=1}^{m-2} k_i u''(\xi_i).$$

Jie surado Gryno funkcijos išraišką ir keletą jos savybių. Taip pat jie nustatė bent vieno sprendinio egzistavimo kriterijų, pritaikydami Lerėjaus (Leray) ir Šauderio (Schauder) pratęsimo principą.

Trečios eilės kraštinius uždavinius dar nagrinėjo Bėjus (Bai) [11] ir Jangas (Yang) [152]. Jie studijavo sprendinių egzistavimą, naudodami apatinio ir viršutinio sprendimo metodą, ir metodą, kuris pagrįstas Šauderio nejudamojo taško teorema. Jangas [152] užrašė Gryno funkcijos išraišką ir įrodė kelis teigiamų sprendinių įverčius. Andersonas (Anderson) ir jo bendraautoriai [3, 4] apibrėžė Gryno funkciją trečios eilės 3-taškiam židininio tipo kraštiniam uždaviniui ir įrodė teigiamų sprendinių egzistavimą aukštesnės eilės 3-taškiam funkciniam uždaviniui. Palamidesas (Palamides) ir Velonis (Veloni) [94] surado Gryno funkciją singuliariajam trečios eilės 3-taškiam kraštiniam uždaviniui. Šiame straipsnyje Gryno funkcija nėra teigiama, bet gautas sprendinys yra teigiamas ir didėjantis. Paminėtuose darbuose naudojami įvairūs metodai: nejudamojo taško Krasnoselskio teorema, Averio (Avery) ir Petersono (Peterson) nejudamojo taško teorema [9], Legeto ir Viljamso nejudamojo taško teorema [8], Ge ir Bėjaus nejudamojo taško teoremos [12, 43].

Guo ir bendraautoriai [55], Liu ir O'Reganas (O'Regan) [84], Hendersonas (Henderson) ir Ntouyasas (Ntouyas) [58] nagrinėjo trečios ir aukštesnės eilės diferencialines lygtis su įvairaus tipo kraštinėmis sąlygomis ir šių uždavinių sprendinių egzistavimą.

Ksu (Xu) ir Vei (Wei) [151] nagrinėjo ketvirtos eilės diferencialinį uždavinį

$$
\begin{gathered}
u^{(4)}(t) - \beta u'' + \alpha u = f\big(t, u(t)\big), \quad 0 < t < 1, \\
au(0) - bu'(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u(\xi_i), \qquad cu(1) + du'(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u(\xi_i), \\
au''(0) - bu'''(0) = \sum_{i=1}^{m-2} \alpha_i u''(\xi_i), \qquad cu''(1) + du'''(1) = \sum_{i=1}^{m-2} \beta_i u''(\xi_i),
\end{gathered}
$$

čia $f = C([0,1] \times [0,+\infty), [0,+\infty))$ tenkina $f(t,u) \not\equiv 0$ ir $\alpha, \beta \geqslant 0$, $a, b, c, d \in [0,+\infty)$ ir $\rho := ac+bc+ad > 0$, $\xi_i \in (0,1)$, $\alpha_i, \beta_i \in [0,+\infty)$ $(i = 1, 2, \ldots, m-2)$ yra konstantos. Konstruodami visiškai tolydų operatorių ir kombinuodami nejudamojo taško indekso teoremą ir kai kurias tiesinių operatorių tikrinių reikšmių savybes, jie gavo bent vieno teigiamo sprendinio pakankamą egzistavimo sąlygą.

Panašų uždavinį tyrė Ma [86], kai kraštinėse sąlygose $a = c = 1$, $b = d = 0$, o diferencialinė lygtis yra $u^{(4)}(t) + \alpha u'' - \beta u = f(t, u(t))$. Jis analizavo teigiamų sprendinių egzistavimą.

Taip pat ketvirtos eilės daugiataškį kraštinį uždavinį tyrinėjo Liu ir O'Reganas [84]. Jie nagrinėjo diferencialinę lygtį $u^{(4)} = f(u(t), u''(t))$ su kraštinėmis sąlygomis, kurios taške $t = 0$ yra klasikinės $u'(0) = u'''(0) = 0$, o taške $t = 1$ sutampa su straipsnio [86] kraštinėmis sąlygomis. Jie studijavo sprendinių egzistavimą ir vienatį, naudodami Rabinovičiaus (Rabinowitz) bendrąją bifurkacijos teoremą. Vei (Wei) ir Pangas (Pang) [148] nagrinėjo analogiško uždavinio netrivialų sprendinių egzistavimą ir vienatį, kai nulinės sąlygos yra $u(0) = u''(0) = 0$.

Įvadas

n-tosios eilės diferencialinė lygtis su dviem nelokaliosiomis sąlygomis

$$u^{(n)}(t) + h(t)f\big(t, u(t)\big) = 0, \quad t \in [a, b],$$
$$u(a) = \alpha u(\nu), \quad u'(a) = 0, \quad \dots, \quad u^{(n-2)}(a) = 0, \quad u(b) = \beta u(\nu) \tag{0.1}$$

buvo nagrinėjama straipsnyje [149]. Šiam uždaviniui buvo surasta Gryno funkcija, kuri išreikšta per klasikinio uždavinio Gryno funkciją ir suformuluota teorema:

0.1 teorema [žr. [149, 2.3 teorema]]**.** *Tarkime, kad* $\Delta =: (1-a)(b-a)^{n-1} + (\alpha - \beta)(\nu - a)^{n-1} \neq 0$*. Tada visiems* $y \in C[a, b]$*,* (0.1) *uždavinys turi sprendinį*

$$u(t) = \int_a^b G(t, s)y(s)\,ds, \tag{0.2}$$

kur

$$G(t, s) = H(t, s) + \frac{1}{\Delta}\big\{\alpha\big[(b-a)^{n-1} - (t-a)^{n-1}\big] + \beta(t-a)^{n-1}\big\}H(\nu, s),$$

čia $H(t, s)$ *yra klasikinio uždavinio* (0.1) (*kai* $\alpha = \beta = 0$) *Gryno funkcija.*

Ši teorema padėjo įrodyti (0.2) sprendinio vienatį. Taip pat buvo pateiktos Gryno funkcijos savybės.

Panašaus tipo uždaviniai nagrinėjami ir kituose darbuose [42, 45, 58, 145].

Šios disertacijos *pirmajame* skyriuje nagrinėjama m-tosios eilės diferencialinė lygtis su įvairiomis sąlygomis, kurios gali būti ne tik klasikinės, bet ir nelokaliosios. Šios sąlygos formuluojamos nepriklausomų tiesinių funkcionalų pagalba. Todėl jos apibendrina iki šiol nagrinėtus kraštinių sąlygų atvejus. Taip pat pirmajame skyriuje išvesta formulė, apibendrinanti uždavinių su neklasikinėmis ir klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis sąryšį pateiktoje 0.1 teoremoje.

Antrajame skyriuje suformuluota antros eilės diferencialinė lygtis. Pirmojo skyriaus rezultatai pritaikomi šiam uždaviniui. Pateikiami pavyzdžiai, kuriuose pavaizduota, kaip konstruojama uždavinių su įvairaus tipo nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcija.

2007 m. Zao (Zhao) [155] nagrinėjo antros eilės diferencialinę lygtį su aštuoniais kraštinių sąlygų tipais: viena nuline ir viena nelokaliąja sąlyga. Kiekvienu atveju jis išvedė Gryno funkciją ir įrodė sprendinių egzistavimą ir vienatį. Po dviejų metų jis išspausdino panašų darbą [156], kuriame nagrinėtos m-taškės kraštinės nelokaliosios sąlygos. Tokio tipo sąlygos dažnai naudojamos ir kituose moksliniuose darbuose. Ma [87], Sanas ir Vei [135] tyrė uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis $u(0) = \alpha u(\nu)$, $u(1) = \beta u(\nu)$ teigiamų sprendinių egzistavimą ir vienatį, naudodami Krasnoselskio nejudamojo taško teoremą. Tokio uždavinio, kai $\alpha = \beta$, bent vieno simetrinio teigiamo sprendinio egzistavimas ir teigiamų tikrinių reikšmių egzistavimas buvo nagrinėjami straipsnyje [137]. Uždavinio tyrimą, kai pirma kraštinė sąlyga yra nulinė, atliko Infantė, Ma ir Tomsonas (Thompson) [64, 88, 92]. Jie užrašė Gryno funkciją ir ištyrė sprendinio egzistavimą. Integralinio tipo kraštinės sąlygos buvo tiriamos darbuose [20, 63, 65, 75].

Didelį dėmesį nelokaliosioms problemoms skiria anglų matematikas J. R. L. Vebas. Išspausdinta nemažai šio autoriaus straipsnių, kuriuose kalbama apie diferencialinę lygtį su įvairaus tipo nelokaliosiomis sąlygomis. Jis tyrinėjo konstantas, kurios atsiranda studijuojant kai kurių nelokaliųjų kraštinių uždavinių teigiamus sprendinius, siekiant gauti jų optimalias reikšmes [143]; tyrinėjo netiesinį šilumos srauto uždavinį ir parodė, kad naudojant tikrines reikšmes gaunami geresni rezultatai [144]; pasiūlė naują metodą, nustatydamas teigiamų sprendinių egzistavimą dideliam skaičiui netiesinių diferencialinių lygčių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis [146].

Pirmajame ir antrajame disertacijos skyriuose nagrinėjamos m-tosios ir antros eilės diferencialinės lygtys. Šias lygtis galima aproksimuoti baigtinių skirtumų lygtimis.

Trečiajame skyriuje tiriama antros eilės diskrečioji lygtis su dviem sąlygomis. Bachvalovas ir bendraautoriai [10] pateikia Gryno funkciją Dirichlė kraštiniam uždaviniui. Monografijose [118, 119] nagrinėjami tiesioginiai metodai diskrečiųjų (skirtuminių) lygčių sprendimui ir iteraciniai metodai gautų lygčių sprendimui bei jų pritaikymas skirtuminėms lygtims. Aprašyti perkelties algoritmo (monotoniško, nemonotoniško, ciklinio ir t. t.) įvairūs variantai vienmatėms 3-taškėms lygtims. Be to, nagrinėjami šiuolaikiniai ekonomiški metodai sprendžiant Puasono skirtumines lygtis stačiakampyje su įvairaus tipo kraštinėmis sąlygomis.

Stacionarieji antros eilės tiesiniai uždaviniai, parabolinio tipo uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis ir jų baigtinių skirtumų schemos nagrinėjamos straipsniuose [28, 29]. Čiegis ir Tumanova [30] vienmatę parabolinę lygtį su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis aproksimavo neišreikštine Eulerio skirtumine schema. Jie įrodė, kad diskrečiosios schemos stabilumo sritis priklauso nuo koeficientų ženklų nelokaliosiose kraštinėse sąlygose. Ganbaris (Ghanbari) [44] palygino diferencialinių ir diskrečiųjų Šturmo ir Liuvilio uždavinių savybes. Jis parodė, kad abiem atvejais Gryno funkcijos turi analogiškas išraiškas. Chungas (Chung) ir Yau [24] tyrinėjo diskrečiąsias Gryno funkcijas ir jų sąryšį su diskrečiosiomis Laplaso tipo lygtimis. Ieškodami Gryno funkcijų, jie nagrinėjo keletą metodų. Liu ir bendraautoriai [82] pateikė diskrečiosios Gryno funkcijos įverčio su didelio tikslumo analize pritaikymą.

Ketvirtajame disertacijos skyriuje apibendrinti trečiojo skyriaus rezultatai m-tosios eilės diskrečiajai lygčiai su įvairiomis sąlygomis.

Uždavinius su aukštesnės eilės diferencialine ir diskrečiąja lygtimi su skirtingomis kraštinėmis sąlygomis nagrinėjo A. A. Samarskis [117, 119], A. V. Gulinas (А.В. Гулин) [118], N. S. Bachvalovas (Н.С. Бахвалов) [10], J. R. L. Vebas, G. Infantė ir D. Frankas (D. Franco) [147], J. Hendersonas [58] ir kiti matematikai. Dauguma iš jų konstravo Gryno funkcijas sprendinių tyrimui.

Sangas (Sang) ir bendraautoriai [120] tyrė netiesinę diskrečiąją ketvirtos eilės lygtį su Lidstone kraštinėmis sąlygomis. Naudodami monotonišką iteracinį metodą, jie nagrinėjo teigiamų sprendinių egzistavimą, vienatį ir iteracijų metodo konvergavimą. Singuliariojo aukštesnės eilės tolydžiojo ir diskrečiojo kraštinio uždavinio sprendinių egzistavimas ir vienatis nagrinėjami straipsnyje [153], naudojant monotoninį metodą. Taip pat diskrečioji Gryno funkcija buvo konstruojama straipsnyje [138].

Tyrimo objektas

Disertacijos tyrimo objektas – diferencialinės ir diskrečiosios lygtys su įvairiomis sąlygomis, šių uždavinių sprendiniai ir Gryno funkcijos, jų egzistavimo sąlygos ir rezultatų pritaikymas uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

Darbo tikslas ir uždaviniai

Disertacijos tikslas – ištirti tiesinius diferencialinį ir diskretųjį uždavinius su įvairiomis sąlygomis, užrašyti nehomogeninių lygčių sprendinių išraiškas, kai žinoma fundamentalioji sprendinių sistema, rasti Gryno funkcijas, taip pat nustatyti sąryšį tarp dviejų Gryno funkcijų uždaviniams su ta pačia lygtimi ir skirtingomis sąlygomis.

Siekiant numatyto tikslo buvo sprendžiami šie uždaviniai:

- ištirti homogeninės lygties sprendinių tiesinę erdvę;
- ištirti nehomoheninių diferencialinio ir diskrečiojo uždavinių sprendinius su ta pačia lygtimi, bet su skirtingomis sąlygomis;
- surasti diferencialinio ir diskrečiojo uždavinių Gryno funkcijas ir jų egzistavimo sąlygas;
- ištirti dviejų diferencialinių arba diskrečiųjų lygčių su skirtingomis sąlygomis Gryno funkcijas;
- pritaikyti gautus rezultatus uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis;
- palyginti diferencialinio ir diskrečiojo uždavinių rezultatus.

Tyrimo metodika

Disertacijos pagrindinių formulių išvedimui buvo taikomas konstantų varijavimo metodas. Naudojant šį metodą ir determinantų savybes, galima surasti

Gryno funkcijas diferencialinėms ir diskrečiosioms lygtims su kintamais koeficientais ir įvairiomis kraštinėmis sąlygomis. Taip pat darbe aprašyti tiesiniai funkcionalai ir funkcionaliniai determinantai, kurių savybėmis buvo naudojamasi. Braižant grafikus, buvo naudojamas „MAPLE“ programų paketas.

Darbo mokslinis naujumas ir jo reikšmė

Tiriant antros ir aukštesnės eilės (tiek tiesinių, tiek netiesinių) uždavinių sprendinių egzistavimą ir vienatį, dažniausiai konstruojama Gryno funkcija. Šiam tikslui mokslininkai naudoja įvairius metodus, bet beveik visais atvejais Gryno funkcija ieškoma uždaviniui, kuris yra šios disertacijos uždavinio atskiras atvejis.

Šioje disertacijoje nagrinėjamos Gryno funkcijos uždaviniams su bet kokiomis tiesinėmis sąlygomis. Rasta būtina ir pakankama Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga. Taip pat gautas Gryno funkcijų sąryšis, kuris padeda ištirti Gryno funkciją uždaviniui su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis, žinant Gryno funkciją uždaviniui su pradinėmis arba klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis. Dažniausiai įvairiose monografijose ir straipsniuose tokio tipo formulės buvo gautos uždaviniui su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis, bet šiame darbe jos yra išvestos uždaviniui su bet kokiomis (tiesinėmis) sąlygomis. Tokiu būdu, mes galime užrašyti Gryno funkcijos išraišką uždaviniui su įvairiomis (pavyzdžiui, nelokaliosiomis) sąlygomis, jei žinomos homogeninės lygties fundamentalioji bazė ir uždavinio su kitomis (pavyzdžiui, klasikinėmis) sąlygomis Gryno funkcija. Gautus rezultatus galima pritaikyti uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (ir ne tik tokioms).

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Disertacijos gauti rezultatai gali būti panaudojami sprendžiant tiesines diferencialines arba diskrečiąsias lygtis su įvairiomis (pavyzdžiui, pradinėmis, kraštinėmis, nelokaliosiomis) tiesinėmis sąlygomis; taip pat tiriant sprendinių egzistavimą, vienatį ir jų savybes.

Ginamieji teiginiai

- Būtina ir pakankama Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga.
- Antros ir m-tosios eilės diferencialinio ir diskrečiojo uždavinių su įvairiomis tiesinėmis sąlygomis Gryno funkcijų išraiškos.
- Gryno funkcijos sąryšis su Gryno funkcija uždaviniui su pradinėmis sąlygomis.
- Uždavinių su ta pačia lygtimi, bet su skirtingomis sąlygomis, Gryno funkcijų sąryšis.
- Taikymai uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai paskelbti 9 straipsniuose, iš jų 5 mokslinės publikacijos yra „Web of Science" duomenų bazėje, 3 mokslinės publikacijos Lietuvos periodiniuose ir recenzuojamuose leidiniuose ir 1 mokslinė publikacija Lietuvoje vykusioje tarptautinės konferencijos pranešimų medžiagoje (Web of Science ISI Proceedings). 1 publikacija priimta spaudai Lietuvos periodiniame recenzuojamame leidinyje.

Konferencijose skaityti pranešimai:

- S. Roman, A. Štikonas. Green's function for problems with various types nonlocal boundary conditions. 13$^{\text{th}}$ International Conference on Mathematical Modeling and Analysis, June 4–7, 2008, Kääriku, Estonia.
- S. Roman, A. Štikonas. Nelokaliųjų stacionariųjų kraštinių uždavinių Gryno funkcijos savybės. Lietuvos matematikų draugijos XLIX konferencija, VDU, 2008 m. birželio 25–26 d., Kaunas.
- S. Roman, A. Štikonas. Green's functions for stationary problems with additional conditions. 14$^{\text{th}}$ International Conference on Mathematical Modeling and Analysis, May 27–30, 2009, Daugavpils, Latvia.

- S. Roman, A. Štikonas. Stacionariojo uždavinio su nelokaliomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijos ir jų savybės. Lietuvos matematikų draugijos L konferencija, MII, 2009 m. birželio 18–19 d., Vilnius.
- S. Roman, A. Štikonas. Green's functions for stationary problems with four-point nonlocal boundary conditions. Differential equations and their applications. Dedicated to professor M. Sapagovas 70th anniversary, September 10–12, 2009, Panevezys, Lithuania.
- S. Roman, A. Štikonas. Boundary Value Problems with Nonlocal Boundary Conditions and Green's Functions for such Problems. 15^{th} International Conference on Mathematical Modeling and Analysis, May 26–29, 2010, Druskininkai, Lithuania.
- S. Roman. Boundary Value Problems with Nonlocal Boundary Conditions and Green's Functions for such Problems. Lietuvos matematikų draugijos LI konferencija, ŠU, 2010 m. birželio 17–18 d., Šiauliai.
- S. Roman, A. Štikonas. Green's function for discrete second-order problems with nonlocal boundary conditions. 16^{th} International Conference on Mathematical Modeling and Analysis, May 25–28, 2011, Sigulda, Latvia.
- S. Roman, A. Štikonas. Green's function for discrete problem with nonlocal boundary conditions. Lietuvos matematikų draugijos LII konferencija, LKA, 2011 m. birželio 16–17 d., Vilnius.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, keturi skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Skyriai yra suskirstyti į poskyrius, o kai kurie poskyriai – į skirsnius. Disertacijoje naudojama numeracija „skyrius.teiginys“, „skyrius.paveikslėlis“, „skyrius.lentelė“. Formulių numeracija yra atskira kiekviename skyriuje, t. y. „poskyris.numeris“. Cituojant formulę iš kito skyriaus papildomai bus nurodytas skyrius.

Įvade apsvarstytas disertacijos temos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, naudojama tyrimų metodika, mokslinis naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai, darbo aprobacija.

Pirmajame skyriuje suformuluota m-tosios eilės diferencialinė lygtis su įvairiomis sąlygomis [108, 110, 114]

$$u^{(m)} + a^{m-1}(x)u^{(m-1)} + \cdots + a^1(x)u' + a^0(x)u = f(x),$$
$$\langle L_i, u\rangle = f_i \in \mathbb{K}, \quad i = 1, \ldots, m,$$

čia $a^k \in C[0, L]$, $k = 0, \ldots, m-1$, $f \in C[0, L]$, $f_i \in \mathbb{K}$, $i = 1, \ldots, m$, ir $L_1, \ldots, L_m$ yra tiesiškai nepriklausomi tiesiniai funkcionalai, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ arba $\mathbb{K} = \mathbb{C}$.

Antrajame skyriuje pirmojo skyriaus rezultatai pritaikyti antros eilės diferencialiniam uždaviniui [106, 107, 111, 112, 113]:

$$-\big(p(x)u'\big)' + q(x)u = f(x),$$
$$\langle L_1, u\rangle = g_1 \in \mathbb{K}, \qquad \langle L_2, u\rangle = g_2 \in \mathbb{K}.$$

Šį uždavinį galima aproksimuoti diskrečiuoju uždaviniu

$$a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \quad i \in \tilde{X} = \{0, 1, \ldots, m-2\},$$
$$\langle L_1, u\rangle = g_1 \in \mathbb{K}, \qquad \langle L_2, u\rangle = g_2 \in \mathbb{K},$$

kuris yra nagrinėjamas *trečiajame* skyriuje [109].

Visuose disertacijos skyriuose tiriamos determinantų ir funkcionalų savybės, homogeninių lygčių fundamentalieji sprendiniai. Surastos uždavinių su nehomogenine lygtimi sprendinių išraiškos, Gryno funkcijos ir Gryno funkcijų egzistavimo sąlygos. Pirmajame skyriuje nagrinėjamas diferencialinis atvejis, o trečiajame – diskretusis. Antros eilės diferencialiniams uždaviniams skirtas antrasis skyrius, o antros eilės diskretiesiems uždaviniams – trečiasis skyrius. Taip pat užrašomi sąryšiai tarp dviejų Gryno funkcijų: 1) uždaviniams su pradinėmis ir įvairiomis sąlygomis, ir 2) uždaviniams su įvairaus tipo (pavyzdžiui, klasikinėmis ir nelokaliosiomis kraštinėmis) sąlygomis. Šiuose skyriuose gautų rezultatų pritaikymui uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis skirtas atskiras poskyris, kuriame pateikti uždavinių su nelokaliosiomis ir klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijų sąryšis ir pavyzdžiai.

Antrajame skyriuje daug dėmesio skiriama uždaviniams su nelokaliosiomis sąlygomis. Pirmuose dviejuose poskyriuose m-tosios eilės uždavinio rezultatai suformuluoti antros eilės uždaviniui. Trečiajame poskyryje išsamiai išnagrinėti pavyzdžiai uždaviniams su įvairiomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Parodyta, kaip konstruojama Gryno funkcija, žinant homogeninės lygties fundamentaliąją sistemą.

Trečiojo skyriaus rezultatai apibendrinti *ketvirtajame* skyriuje. Šiame skyriuje nagrinėjamas m-tosios eilės diskretusis uždavinys su įvairiomis sąlygomis

$$a_i^m u_{i+m} + \cdots + a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \quad i \in \tilde{X},$$
$$\langle L_1, u\rangle = g_1 \in \mathbb{K}, \quad \ldots, \quad \langle L_m, u\rangle = g_m \in \mathbb{K}$$

bei pateikta Gryno funkcijos išraiška [115].

Išvadose apibendrinti tyrimų rezultatai.

Padėka

Nuoširdžiai dėkoju darbo vadovui prof. Artūrui Štikonui už vadovavimą disertaciniam darbui, skirtą laiką ir energiją; UAB „VTEX“ už sudarytas galimybes derinti darbą ir mokslą; visam Matematikos ir informatikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus kolektyvui už moralinį palaikymą ir draugišką pagalbą rašant disertaciją. Ačiū visiems artimiesiems ir draugams už jų kantrybę, palaikymą ir supratingumą.

1 skyrius

m-tosios eilės diferencialinis uždavinys

Šiame skyriuje nagrinėjama m-tosios eilės tiesinė nehomogeninė (paprastoji) diferencialinė lygtis su m tiesiškai nepriklausomomis sąlygomis. Surandamas šio uždavinio sprendinys ir pateikiama Gryno funkcijos išraiška ir jos egzistavimo sąlyga. Palyginamos dviejų uždavinių su skirtingomis sąlygomis Gryno funkcijos. Gauti rezultatai pritaikomi uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai išspausdinti straipsniuose [A3,A5,A9].

Gryno funkcijų tyrimas uždaviniuose su neklasikinėmis kraštinėmis sąlygomis yra gana nauja sritis. Šiuo atveju dažnai turime nesavijungius operatorius. Gryno funkcijas antros eilės kraštiniams uždaviniams su įvairiomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis sukonstravo Zao [155, 156]. Straipsniuose [107, 108] surastos Gryno funkcijų išraiškos antros ir trečios eilės tiesinėms paprastosioms diferencialinėms lygtims su atitinkamai dviem ir trimis sąlygomis. Jų taikymai pateikti darbuose [106, 111]. Trečios ir aukštesnės eilės kraštiniai uždaviniai nagrinėjami daugelyje darbų. Sanas, Zangas ir Jangas [136, 152] tyrė trečios eilės kraštinių uždavinių teigiamų sprendinių egzistavimą, taikydami įvairius metodus: apatinio ir viršutinio sprendimo metodą, Legeto ir Viljamso nejudamojo taško teoremą, Lerėjaus ir Šauderio principą. Šiuose darbuose pateikta

Gryno funkcijų išraiškos ir keletas savybių. Straipsniuose [34, 84, 151] tiriama ketvirtos eilės uždavinių su įvairiomis kraštinėmis sąlygomis sprendinių vienatis ir randama būtina bei pakankama egzistavimo sąlyga.

Ksi (Xie) ir bendraautoriai [149] nagrinėjo m-tosios eilės 3-taškio kraštinio uždavinio

$$u^{(m)}(t) + h(t)f\big(t, u(t)\big) = 0, \quad t \in [a, b],$$
$$u(a) = \alpha u(\nu), \quad u'(a) = 0, \quad \dots, \quad u^{(m-2)}(a) = 0, \quad u(b) = \beta u(\nu).$$

teigiamų sprendinių egzistavimą, sukonstravo šiam uždaviniui Gryno funkciją. Šį uždavinį taip pat nagrinėjo Ji ir Guo [72], kai $a = 0$, ir Hao ir bendraautoriai [57], kai $a = \alpha = 0$ ir $b = 1$. Jiangas (Jiang) [73] tyrė panašų uždavinį su n-taškėmis kraštinėmis sąlygomis

$$u(0) = u'(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) = \theta, \quad u(1) = \sum_{i=1}^{n-2} k_i u(\xi_i).$$

Uždavinį, kai $\theta = 0$, o paskutinė sąlyga yra $\alpha u^{(m-2)}(\nu) = u^{(m-2)}(1)$, nagrinėjo Graefas (Graef) ir bendraautoriai [45]. Šių darbų pagrindinis tikslas buvo sprendinių egzistavimo ir kartotinumo tyrimas. Šiam tikslui autoriai ieškojo Gryno funkcijų ir tyrė jų savybes.

Šiame skyriuje nagrinėsime m-tosios eilės tiesinę nehomogeninę (paprastąją) diferencialinę lygtį

$$\mathcal{L}u := u^{(m)} + a^{m-1}(x)u^{(m-1)} + \cdots + a^1(x)u' + a^0(x)u = f. \tag{0.1}$$

Gryno funkcijų išraiškos bus gautos naudojant konstantų varijavimo metodą [32]. Šio metodo pranašumas – kad galima sukonstruoti Gryno funkciją nehomogeninei lygčiai (0.1) su kintamaisiais koeficientais $a^0, \dots, a^{m-1} \in C[0, L]$ ir skirtingomis sąlygomis (pavyzdžiui, nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis).

Plačiau apie antros eilės diferencialinį uždavinį bus paminėta antrajame skyriuje.

1. Žymėjimai

Tegul $F = F(X) := \{u \mid u : X \to \mathbb{K}\}$ yra realių (kompleksinių) funkcijų tiesinė erdvė, čia X yra bet kokia aibė, $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ arba $\mathbb{K} = \mathbb{C}$ ir $1 \leqslant k \in \mathbb{N}$. Paimkime vektorių $\boldsymbol{x} = (x_1, \ldots, x_k) \in X^k$ ir vektorinę funkciją $\boldsymbol{w} = [w^1, \ldots, w^k] \in F^k$. Tada apibrėžkime matricą $[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}) \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$ ir jos determinantą:

$$[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}) = \left[w^1, \ldots, w^k\right](x_1, \ldots, x_k) := \begin{pmatrix} w^1(x_1) & \cdots & w^1(x_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w^k(x_1) & \cdots & w^k(x_k) \end{pmatrix},$$

$$D[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}) = \det\left[w^1, \ldots, w^k\right](x_1, \ldots, x_k) := \begin{vmatrix} w^1(x_1) & \cdots & w^1(x_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ w^k(x_1) & \cdots & w^k(x_k) \end{vmatrix}.$$

Nagrinėkime erdvėje F tiesinių funkcionalų erdvę F^*. Funkcionalo f reikšmes, priklausančias nuo funkcijos w, žymėsime $\langle f, w\rangle$, $\langle f(\cdot), w(\cdot)\rangle$, $\langle f(x), w(x)\rangle$. Tarkime, kad turime reguliarųjį funkcionalą $f \in (C^p[0, L])^*$, jei egzistuoja toks $\tilde{f} \in L^1(0, l)$, kad $\langle f, w\rangle = (\tilde{f}, w) := \int_0^L \tilde{f}(x)w(x)\,dx$. $\delta_x^{(r)}$ yra singuliarusis funkcionalas toks, kad $\langle \delta_x^{(r)}, w\rangle = (-1)^r w^{(r)}(x)$, $r = 0, 1, \ldots, p$. Jeigu turime vektorinę funkciją $\boldsymbol{w}$ ir vektorinį funkcionalą $\boldsymbol{f} = (f_1, \ldots, f_k) \in (F^*)^k$, tai galima apibrėžti matricą $(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}]$ ir jos determinantą $D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}]$:

$$(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] = (f_1, \ldots, f_k)\left[w^1, \ldots, w^k\right] := \begin{pmatrix} \langle f_1, w^1\rangle & \cdots & \langle f_k, w^1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle f_1, w^k\rangle & \cdots & \langle f_k, w^k\rangle \end{pmatrix},$$

$$D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] = \det(f_1, \ldots, f_k)\left[w^1, \ldots, w^k\right] := \begin{vmatrix} \langle f_1, w^1\rangle & \cdots & \langle f_k, w^1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle f_1, w^k\rangle & \cdots & \langle f_k, w^k\rangle \end{vmatrix}.$$

1.1 pavyzdys. Sąryšiai tarp dviejų matricų ir dviejų determinantų yra

$$(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_k})[\boldsymbol{w}] = [\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}), \qquad D(\delta_{x_1}, \ldots, \delta_{x_k})[\boldsymbol{w}] = D[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}).$$

1.2 pavyzdys. Toliau naudosime funkciją $\hat{f}^l[\boldsymbol{w}] \in F(X)$, $l = 1, \ldots, k$:

$$\hat{f}^l[\boldsymbol{w}](x) := D(f_1, \ldots, f_{l-1}, \delta_x, f_{l+1}, \ldots, f_k)[\boldsymbol{w}] \tag{1.1}$$

ir žymėsime $\hat{\boldsymbol{f}} := (\hat{f}^1, \ldots, \hat{f}^k)$.

Jei $[\tilde{w}^1, \ldots, \tilde{w}^k] = \mathbf{P}_w[w^1, \ldots, w^k]$, čia matrica $\mathbf{P}_w = (p_i^j) \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$ (t. y. $\tilde{w}^j = \sum_{i=1}^k p_i^j w^i(x)$, $j = 1, \ldots, k$), tai

$$[\tilde{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x}) = \mathbf{P}_w \cdot [\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}), \qquad D[\tilde{\boldsymbol{w}}](\boldsymbol{x}) = D[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}) \cdot \det \mathbf{P}_w. \tag{1.2}$$

Jei $(\tilde{f}_1, \ldots, \tilde{f}_k) = (f_1, \ldots, f_k)\mathbf{P}_f$, čia matrica $\mathbf{P}_f \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$, tai

$$D(\tilde{\boldsymbol{f}})[\tilde{\boldsymbol{w}}] = \det \mathbf{P}_w \cdot D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] \cdot \det \mathbf{P}_f, \tag{1.3}$$

$$D(f_0, \tilde{\boldsymbol{f}})\big[w^0, \tilde{\boldsymbol{w}}\big] = \det \mathbf{P}_w \cdot D(f_0, \boldsymbol{f})\big[w^0, \boldsymbol{w}\big] \cdot \det \mathbf{P}_f. \tag{1.4}$$

Įveskime vektorių $\mathbf{V}, \mathbf{E}_j \in M_{k\times 1}(\mathbb{K})$ ir matricos $\mathbf{A} \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$ žymėjimus:

$$\mathbf{V} = \begin{pmatrix} v^1 \\ \vdots \\ v^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{E}_j = \begin{pmatrix} \delta_j^1 \\ \vdots \\ \delta_j^k \end{pmatrix}, \quad \mathbf{A} = \left(a_j^i\right) = (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) = \begin{pmatrix} a_1^1 & \cdots & a_k^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ a_1^k & \cdots & a_k^k \end{pmatrix},$$

čia

$$\mathbf{A}_j = \begin{pmatrix} a_j^1 \\ \vdots \\ a_j^k \end{pmatrix}, \quad v^i, a_j^i \in \mathbb{K}, \quad i, j = 1, \ldots, k, \quad \delta_j^i = \begin{cases} 1, & \text{kai } i = j, \\ 0, & \text{priešingu atveju.} \end{cases}$$

Įrodysime lemą apie determinantų savybes.

1.1 lema. *Jei vektoriai $\mathbf{A}_j, \mathbf{B}_j \in M_{k\times 1}(\mathbb{K})$, $j = 1, \ldots, k$ ir matricos $\mathbf{A} = (\mathbf{A}_1, \ldots, \mathbf{A}_k)$, $\mathbf{B} = (\mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{B}_k) \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$, tai lygybė*

$$\begin{vmatrix} \det(\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k) & \cdots & \det(\mathbf{B}_k, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{A}_k) \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \ldots, \mathbf{A}_k) & \cdots & \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_k, \ldots, \mathbf{A}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{B}_1) & \cdots & \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \ldots, \mathbf{B}_k) \end{vmatrix} = \det \mathbf{B} \cdot (\det \mathbf{A})^{k-1}.$$

yra teisinga.

Įrodymas. Matricai $\mathbf{A}$ galime apibrėžti matricą $\operatorname{adj}\mathbf{A} \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$, kurios (i,j) elementas yra matricos $\mathbf{A}$ (j,i) adjunktas [77]:

$$\operatorname{adj}\mathbf{A} = \begin{pmatrix} A_1^1 & \cdots & A_k^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ A_1^k & \cdots & A_k^k \end{pmatrix}^{\mathrm{T}}$$
$$= \begin{pmatrix} \det(\mathbf{E}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k) & \cdots & \det(\mathbf{E}_k, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k) \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{A}_k) & \cdots & \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{E}_k, \dots, \mathbf{A}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{E}_1) & \cdots & \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{E}_k) \end{pmatrix}.$$

Ši adjunktų matrica turi savybę $\det(\operatorname{adj}\mathbf{A}) = (\det\mathbf{A})^{k-1}$ [77]. Taigi, gauname lygybę

$$\begin{vmatrix} \det(\mathbf{E}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k) & \cdots & \det(\mathbf{E}_k, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k) \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{A}_k) & \cdots & \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{E}_k, \dots, \mathbf{A}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{E}_1) & \cdots & \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{E}_k) \end{vmatrix} = (\det\mathbf{A})^{k-1}. \tag{1.5}$$

Funkcija $\mathcal{D} : \mathbb{K}^k \times \cdots \times \mathbb{K}^k \to \mathbb{K}$ (fiksuotiems vektoriams $\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_k$)

$$\mathcal{D}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k) := \begin{vmatrix} \det(\mathbf{B}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k) & \cdots & \det(\mathbf{B}_k, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_k) \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{A}_k) & \cdots & \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{B}_k, \dots, \mathbf{A}_k) \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{B}_1) & \cdots & \det(\mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{B}_k) \end{vmatrix}$$

yra alternuojančioji (antisimetrinė pagal visus kintamuosius) daugiatiesinė funkcija. Tuomet lygybė $\mathcal{D}(\mathbf{B}_1, \dots, \mathbf{B}_k) = \det\mathbf{B} \cdot \mathcal{D}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k)$ yra teisinga. Bet $\mathcal{D}(\mathbf{E}_1, \dots, \mathbf{E}_k)$ yra lygi (1.5) lygybės kairiajai pusei. Taigi lema įrodyta. □

1.1 išvada. *Jei* $\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_k)$, $\boldsymbol{f} = (f_1, \dots, f_k) \in (F^*)^k$, $\boldsymbol{w} = [w^1, \dots, w^k] \in F^k$, *tai lygybė*

$$\begin{vmatrix} D(g_1, f_2, \ldots, f_k)[\boldsymbol{w}] & \cdots & D(g_k, f_2, \ldots, f_k)[\boldsymbol{w}] \\ D(f_1, g_1, \ldots, f_k)[\boldsymbol{w}] & \cdots & D(f_1, g_k, \ldots, f_k)[\boldsymbol{w}] \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ D(f_1, f_2, \ldots, g_1)[\boldsymbol{w}] & \cdots & D(f_1, f_2, \ldots, g_k)[\boldsymbol{w}] \end{vmatrix} = D(\boldsymbol{g})[\boldsymbol{w}] \cdot \big(D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}]\big)^{k-1} \quad (1.6)$$

yra teisinga.

Įrodymas. Jei 1.1 lemoje paimsime $\mathbf{B}_i = \langle g_i, [\boldsymbol{w}]\rangle$, $\mathbf{A}_i = \langle f_i, [\boldsymbol{w}]\rangle$, $i = 1, \ldots, k$, tai gausime (1.6) formulę. $\square$

1.2 išvada. *Lygybės*

$$D(\boldsymbol{g})\big[\hat{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{w}]\big] = D(\boldsymbol{g})[\boldsymbol{w}] \cdot \big(D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}]\big)^{k-1}, \quad (1.7)$$

$$D\big[\hat{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{w}]\big](\boldsymbol{x}) = D[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}) \cdot \big(D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}]\big)^{k-1}, \quad (1.8)$$

$$D\big[D[\boldsymbol{w}](\cdot, y_2, \ldots, y_k), D[\boldsymbol{w}](y_1, \cdot, \ldots, y_k), \ldots, D[\boldsymbol{w}](y_1, y_2, \ldots, \cdot)\big](\boldsymbol{x}) = D[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{x}) \cdot \big(D[\boldsymbol{w}](\boldsymbol{y})\big)^{k-1}, \quad (1.9)$$

yra teisingos, čia $\hat{\boldsymbol{f}}$ yra apibrėžtas formulėje (1.1).

Įrodymas. (1.6) formulės kairiojoje pusėje determinantas yra lygus

$$\begin{vmatrix} \langle g_1, \hat{f}^1[\boldsymbol{w}]\rangle & \cdots & \langle g_k, \hat{f}^1[\boldsymbol{w}]\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle g_1, \hat{f}^k[\boldsymbol{w}]\rangle & \cdots & \langle g_k, \hat{f}^k[\boldsymbol{w}]\rangle \end{vmatrix} = D(\boldsymbol{g})\big[\hat{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{w}]\big].$$

Tuomet gauname (1.7) lygybę. Jei $g_i = \delta_{x_i}$, $i = 1, \ldots, k$, tai (1.8) lygybė yra teisinga. Paėmę $g_i = \delta_{x_i}$, $f_i = \delta_{y_i}$, $i = 1, \ldots, k$, gauname (1.9) formulę. $\square$

1.1. Vronskianas

Tiesinių diferencialinių lygčių teorijoje funkcijos $\boldsymbol{w} = [w^1, \ldots, w^k] \in C^{k-1}[0, L]$ Vronskio (J.H. de Wronski) determinantas, kuris vadinamas vronskianu, $W[\boldsymbol{w}](y)$ ir determinantas $\widetilde{W}[\boldsymbol{w}](x, y)$ [32]:

$$W[\boldsymbol{w}](y) := \begin{vmatrix} w^1(y) & (w^1)'(y) & \cdots & (w^1)^{(k-2)}(y) & (w^1)^{(k-1)}(y) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w^k(y) & (w^k)'(y) & \cdots & (w^k)^{(k-2)}(y) & (w^k)^{(k-1)}(y) \end{vmatrix}, \quad y \in [0, L],$$

$$\widetilde{W}[\boldsymbol{w}](x,y) := \begin{vmatrix} w^1(y) & (w^1)'(y) & \cdots & (w^1)^{(k-2)}(y) & w^1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ w^k(y) & (w^k)'(y) & \cdots & (w^k)^{(k-2)}(y) & w^k(x) \end{vmatrix}, \quad x,y \in [0,L].$$

Šių dviejų determinantų paskutinio stulpelio elementai turi tuos pačius adjunktus ir yra teisingos lygybės

$$W[\boldsymbol{w}](y) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} W_i[\boldsymbol{w}](y) \cdot \left(w^i\right)^{(k-1)}(y), \tag{1.10}$$

$$\widetilde{W}[\boldsymbol{w}](x,y) = \sum_{i=1}^{k} (-1)^{k-i} W_i[\boldsymbol{w}](y) \cdot w^i(x), \tag{1.11}$$

čia $W_i[\boldsymbol{w}](y) := W[w^1,\dots,w^{i-1},w^{i+1},\dots,w^k](y)$.

Jei $[\tilde{w}^1,\dots,\tilde{w}^k] = \mathbf{P}_w[w^1,\dots,w^k]$, čia $\mathbf{P}_w \in M_{k\times k}(\mathbb{K})$, tai

$$W[\tilde{\boldsymbol{w}}](y) = W[\boldsymbol{w}](y) \cdot \det \mathbf{P}_w, \qquad \widetilde{W}[\tilde{\boldsymbol{w}}](x,y) = \widetilde{W}[\boldsymbol{w}](x,y) \cdot \det \mathbf{P}_w. \tag{1.12}$$

Vronskianą ir $\widetilde{W}[\boldsymbol{w}](x,y)$ galima užrašyti taip:

$$W[\boldsymbol{w}](y) = D\big(\delta_y, -\delta_y', \dots, (-1)^{k-2}\delta_y^{(k-2)}, (-1)^{k-1}\delta_y^{(k-1)}\big)[\boldsymbol{w}],$$
$$\widetilde{W}[\boldsymbol{w}](x,y) = D\big(\delta_y, -\delta_y', \dots, (-1)^{k-2}\delta_y^{(k-2)}, \delta_x\big)[\boldsymbol{w}].$$

Tada iš (1.7) lygybės ($g_i = (-1)^{i-1}\delta_y^{(i-1)}$, $i = 1,\dots,k-1$, ir $g_k = (-1)^{(k-1)}\delta_y$ arba $g_k = \delta_x$) gauname

$$W\big[\hat{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{w}]\big](y) = W[\boldsymbol{w}](y) \cdot \big(D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}]\big)^{k-1}, \tag{1.13}$$

$$\widetilde{W}\big[\hat{\boldsymbol{f}}[\boldsymbol{w}]\big](x,y) = \widetilde{W}[\boldsymbol{w}](x,y) \cdot \big(D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}]\big)^{k-1}. \tag{1.14}$$

Įveskime (jei $W[\boldsymbol{w}](y) \neq 0$) funkciją

$$V[\boldsymbol{w}](x,y) := \frac{\widetilde{W}[\boldsymbol{w}](x,y)}{W[\boldsymbol{w}](y)}. \tag{1.15}$$

Jei $W[\boldsymbol{w}](y) \neq 0$ ir $\mathbf{P} \in GL_m(\mathbb{K}) := \{\mathbf{P} \in M_{k\times k}(\mathbb{K})\colon \det \mathbf{P} \neq 0\}$, $\tilde{\boldsymbol{w}} = \mathbf{P}\boldsymbol{w}$, tai teisinga lygybė

$$V[\tilde{\boldsymbol{w}}](x,y) = V[\boldsymbol{w}](x,y). \tag{1.16}$$

Taigi funkcija $V[\boldsymbol{w}](x,y)$ yra invariantinė funkcijų $\{w^1,\dots,w^k\}$ atžvilgiu. Jei $\boldsymbol{w}\in C^{k-1+l}[0,L]$, $l=0,\dots,k-1$ tai $\frac{\partial^{k-1+2l}}{\partial x^{k-1+l}\partial y^l}V\in C[0,L]^2$, ir

$$\frac{\partial^{n+l}}{\partial x^n\partial y^l}V(x,y)\bigg|_{y=x}=0,\quad n=0,\dots,k-2-l, \tag{1.17}$$

$$\frac{\partial^{k-1}}{\partial x^{k-1-l}\partial y^l}V(x,y)\bigg|_{y=x}=(-1)^l. \tag{1.18}$$

Panagrinėkime tokias funkcijas $w_i\in C^p[\xi_i,\xi_{i+1}]$, $i=0,\dots,N-1$, $p=0,1,\dots$, čia $-\infty<\xi_0=a<\xi_1<\dots<\xi_{N-1}<\xi_N=b<+\infty$ $(N\in\mathbb{N})$ ir funkcija w, kad $w(x)=w_i(x)$, kai $x\in(\xi_i,\xi_{i+1})$. Ši funkcija nėra apibrėžta taškuose $\xi\in\varXi_N=\{\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_N\}$. Nagrinėsime funkcijų klases intervale $[a,b]$ (dvi funkcijos w ir v yra ekvivalenčios, jei $w=v$ visiems $x\in\bigcup_{i=0}^{N-1}(\xi_i,\xi_{i+1})$). Galime pakeisti N ir aibę $\varXi_N$. Žymėkime $C^{[p]}[a,b]$ visų tokių funkcijų (klasių) tiesinę erdvę ir $C^{r,[p]}[a,b]:=C^{[p]}[a,b]\cap C^r[a,b]$, $0\leqslant r\leqslant p$.

1.3 pavyzdys. Apibrėžkime Hevisaido (Heaviside) funkciją

$$H(x):=\begin{cases}0, & x<0,\\ 1, & x>0.\end{cases}$$

Funkcija $H(x)\in C^{[\infty]}[-a,a]$ su $\xi_0=-a$, $\xi_1=0$, $\xi_2=a>0$. Šiame pavyzdyje $H\equiv 0$, kai $x\in[-a,0]$ ir $H\equiv 1$, kai $x\in[0,a]$.

Panagrinėsime funkciją

$$G^c(x,y):=H(x-y)V(x,y). \tag{1.19}$$

Sritį $[0,L]^2$ padalykime į dvi dalis $D_y:=\{(x,y)\in[0,L]^2\colon y\geqslant x\}$ ir $D_x:=\{(x,y)\in[0,L]^2\colon y\leqslant x\}$. Funkcija $G^c\equiv 0$ srityje D_y, ir $G^c=V$ srityje D_x. Jei $\boldsymbol{w}\in C^{k-1+l}[0,L]$, $l=0,\dots,k-1$ tai $G^c\in C^l[0,L]^2$ ir

$$\frac{\partial^{n+l}G^c(x,y)}{\partial x^n\partial y^l}\in C[0,L]^2,\quad n=0,\dots,k-2-l, \tag{1.20}$$

$$\frac{\partial^{k-1+l}G^c(x,x+0)}{\partial x^{k-1}\partial y^l}=\frac{\partial^{k-1+l}G^c(x-0,x)}{\partial x^{k-1}\partial y^l}=0, \tag{1.21}$$

$$\frac{\partial^{k-1+l}G^c(x,x-0)}{\partial x^{k-1}\partial y^l}=\frac{\partial^{k-1+l}G^c(x+0,x)}{\partial x^{k-1}\partial y^l}=(-1)^l. \tag{1.22}$$

Pastebėsime, kad $G^c(x, y_0) \in C_x^{k-2,[k-1+l]}[0, L]$ visiems $y_0 \in [0, L]$ su $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = y_0$, $\xi_2 = L$; $G^c(x_0, y) \in C_y^l[0, L]$, $l < k-1$, $G^c(x_0, y) \in C_y^{k-2,[k-1]}[0, L]$, $l = k-1$, su $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = x_0$, $\xi_2 = L$ visiems $x_0 \in [0, L]$.

1.2. Fundamentalieji sprendiniai

Tegul $\boldsymbol{u} = [u^1, \ldots, u^m] \in C^m[0, L]$, $m \geqslant 1$, kad $W[\boldsymbol{u}](x) \neq 0$ visiems $x \in [0, L]$. Šios funkcijos yra m-tosios eilės tiesinės homogeninės diferencialinės lygties

$$\mathcal{L}u := u^{(m)} + a^{m-1}u^{(m-1)} + \cdots + a^1 u' + a^0 u = 0, \tag{1.23}$$

sprendiniai, čia

$$a^i[\boldsymbol{u}](x) = -\frac{\det(\boldsymbol{u}(x), \ldots, \boldsymbol{u}^{(i-1)}(x), \boldsymbol{u}^{(m)}(x), \boldsymbol{u}^{(i+1)}(x), \ldots, \boldsymbol{u}^{(m-1)}(x))}{W[\boldsymbol{u}](x)},$$

$i = 0, \ldots, m-1$. Taigi funkcijos $a^0(x), \ldots, a^{m-1}(x) \in C[0, L]$ apibrėžia visus sprendinius, t. y. tiesinę erdvę $S := \{u \in C^m[0, L]\colon \mathcal{L}u = 0\}$, kuri gali būti aprašyta fundamentaliąja sistema $\{u^1, \ldots, u^m\}$, ir atvirkščiai, fundamentalioji sistema $\{u^1, \ldots, u^m\}$ apibrėžia $a^0(x), \ldots, a^{m-1}(x)$. Jei $\{\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m\}$ yra dar viena fundamentalioji sistema, ir $[\bar{u}^1, \ldots, \bar{u}^m] = \mathbf{P}[u^1, \ldots, u^m]$, čia $\mathbf{P} \in GL_m(\mathbb{K})$, tai $a^i[\bar{\boldsymbol{u}}] = a^i[\boldsymbol{u}](x)$, $i = 0, \ldots, m-1$, t. y. jos yra invariantinės fundamentaliosios sistemos atžvilgiu.

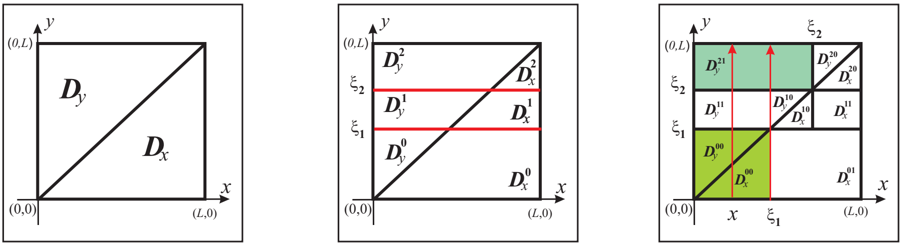
Galima pastebėti, kad teisinga Abelio formulė

$$W[\boldsymbol{u}](x) \exp\left(\int_{\bar{x}}^{x} a^{m-1}[\boldsymbol{u}](\xi)\, d\xi \right) = W[\boldsymbol{u}](x_0) \exp\left(\int_{\bar{x}}^{x_0} a^{m-1}[\boldsymbol{u}](\xi)\, d\xi \right),$$

čia $x, x_0, \bar{x} \in [0, L]$.

1.1 apibrėžimas [fundamentalusis sprendinys, žr. [74]]. Taškuose $0 \leqslant x, y \leqslant L$ apibrėžta funkcija $g(x, y)$ vadinama diferencialinės lygties (1.23) *fundamentaliuoju sprendiniu*, jei teisingos šios savybės:

a) kiekviename trikampyje D_y ir D_x, $g(x, y)$ turi m-osios eilės dalines išvestines taške x ir šios išvestinės yra tolydžios taškuose x ir y;



a) klasikinis fundamentalusis sprendinys

b) apibendrintasis fundamentalusis sprendinys

c)

1.1 pav. Fundamentaliųjų sprendinių sritys

b) $g(x,y)$ (kaip funkcija, priklausanti nuo x), tenkina (1.23) lygtį kiekviename trikampyje D_y ir D_x;

c) $g(x,y)$ yra tolydi visame kvadrate $0 \leqslant x, y \leqslant L$ ir turi dalines išvestines taške x iki $(m-2)$-tosios eilės ir išvestinės yra tolydžios šio kvadrato taškuose x ir y;

d) lygybė
$$\frac{\partial^{m-1} g(y+0,y)}{\partial x^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} g(y-0,y)}{\partial x^{m-1}} = 1$$
yra teisinga, kai $0 < y < L$.

Funkcija G^c (žr. (1.19)) yra fundamentaliojo sprendinio pavyzdys ir jos sritis pavaizduota 1.1 a) pav.

Panagrinėkime baigtinę aibę $\Xi_N = \{\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_N\}$, čia $\xi_0 = 0 < \xi_1 < \cdots < \xi_{N-1} < \xi_N = L$ $(N \in \mathbb{N})$. Linijos $y = \xi_i$, $i = 0, \ldots, N$ ir linija $y = x$ dalija kvadratą $[0,L]^2$ į trikampius ir trapecijas: D_x^i, D_y^i, $i = 0, \ldots, N-1$ (žr. 1.1 b) pav.). Naudosime šį žymėjimą trikampiams ir trapecijoms su kraštais, t. y. D_x^i, D_y^i, $i = 0, \ldots, N-1$ yra uždarosios aibės.

1.2 apibrėžimas [apibendrintasis fundamentalusis sprendinys]. Srityje $0 \leqslant x, y \leqslant L$ apibrėžta funkcija $g(x,y)$ vadinama diferencialinės lygties (1.23) *apibendrintuoju fundamentaliuoju sprendiniu*, jei teisingos šios savybės:

a) kiekvienoje srityje D_y^i ir D_x^i, $i = 0, \ldots, N-1$, $g(x,y)$ turi m-osios eilės dalines išvestines taške x ir šios išvestinės yra tolydžios taškuose x ir y;

b) $g(x, y)$ (kaip funkcija, priklausanti nuo x), tenkina (1.23) lygtį kiekvienoje srityje D_y^i ir D_x^i;

c) $g(x, y)$ yra tolydi kiekviename stačiakampyje $D_x^i \cup D_y^i$, $i = 0, \ldots, N-1$ ir turi dalines išvestines taške x iki $(m-2)$-tosios eilės ir išvestinės yra tolydžios šio stačiakampio taškuose x ir y;

d) lygybė

$$\frac{\partial^{m-1} g(y+0, y)}{\partial x^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} g(y-0, y)}{\partial x^{m-1}} = 1 \tag{1.24}$$

yra teisinga srityje $[0, L] \setminus \Xi_N$.

1.1 pastaba. (1.24) lygybę galima užrašyti tokiu būdu

$$\frac{\partial^{m-1} g(x, x-0)}{\partial x^{m-1}} - \frac{\partial^{m-1} g(x, x+0)}{\partial x^{m-1}} = 1, \quad x \in [0, L] \setminus \Xi_N. \tag{1.25}$$

1.2 pastaba. Kiekvienas fundamentalusis sprendinys yra taip pat apibendrintasis fundamentalusis sprendinys ($N = 1$, $\xi_0 = 0$, $\xi_1 = L$).

Jei g yra apibendrintasis fundamentalusis sprendinys ir $f \in C[0, L]$, tai apibrėžiame integralą

$$u(x) = \int_0^L g(x, y) f(y)\, dy = \sum_{j=1}^{N} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} g(x, y) f(y)\, dy. \tag{1.26}$$

Iš 1.2 apibrėžimo trečios savybės turime

$$u^{(p)}(x) = \sum_{j=1}^{N} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{\partial^p g(x, y)}{\partial x^p} f(y)\, dy, \quad p = \overline{1, m-2}, \tag{1.27}$$

iš pirmos savybės turime

$$\begin{aligned} u^{(m-1)}(x) = {} & \sum_{j=1,\, j \neq k}^{N} \int_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{\partial^{m-1} g(x, y)}{\partial x^{m-1}} f(y)\, dy \\ & + \int_{\xi_{k-1}}^{x} \frac{\partial^{m-1} g(x, y)}{\partial x^{m-1}} f(y)\, dy + \int_{x}^{\xi_k} \frac{\partial^{m-1} g(x, y)}{\partial x^{m-1}} f(y)\, dy, \end{aligned} \tag{1.28}$$

ir iš pirmos ir ketvirtos savybių turime

$$u^{(m)}(x) = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{N} \int\limits_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \frac{\partial^m g(x,y)}{\partial x^m} f(y)\, dy$$
$$+ \int\limits_{\xi_{k-1}}^{x} \frac{\partial^m g(x,y)}{\partial x^m} f(y)\, dy + \int\limits_{x}^{\xi_k} \frac{\partial^m g(x,y)}{\partial x^m} f(y)\, dy + f(x). \tag{1.29}$$

Taigi gauname, kad $u \in C^m[0,L]$. Įrodėme, kad (žr. 1.2 apibrėžimą, antrą savybę)

$$\mathcal{L}u = \sum_{j=1,\, j\neq k}^{N} \int\limits_{\xi_{j-1}}^{\xi_j} \mathcal{L}_x g(x,y)\, f(y)\, dy$$
$$+ \int\limits_{\xi_{k-1}}^{x} \mathcal{L}_x g(x,y)\, f(y)\, dy + \int\limits_{x}^{\xi_k} \mathcal{L}_x g(x,y)\, f(y)\, dy + f(x) = f(x), \tag{1.30}$$

kai $x \in [\xi_{k-1}, \xi_k]$. Taigi u tenkina lygtį $\mathcal{L}u = f$.

1.3 pastaba [žr. [74]]. Jei $g(x,y)$ yra apibendrintasis fundamentalusis sprendinys, tai

$$g(x,y) + c_1(y)u^1(x) + \cdots + c_m(y)u^m(x) \tag{1.31}$$

yra visų apibendrintųjų fundamentaliųjų sprendinių formulė, čia $\boldsymbol{u} = [u^1, \ldots, u^m] \in C^m[0,L]$ yra homogeninės lygties (1.23) fundamentalioji sistema ir $c_j \in C^{[0]}[0,L]$. Pavyzdžiui, galima paimti

$$G^c(x,y) + c_1(y)u^1(x) + \cdots + c_m(y)u^m(x).$$

1.4 pastaba. Apibendrintasis fundamentalusis sprendinys turi fundamentaliųjų sprendinių savybes kvadrate $D_x^{00} \cup D_y^{00} \subset [0,L]^2$ ir homogeninio uždavinio sprendinių savybes stačiakampyje $D_y^{21} \subset [0,L]^2$ (žr. 1.1 c) pav.).

Panagrinėkime tiesinį integralinį operatorių $A_j : C[0,L] \to C[0,L]$:

$$(A_j u)(x) = \int\limits_0^L \frac{\partial^j g(x,y)}{\partial x^j} u(y)\, dy + u(x)\delta_{jm}, \quad j = \overline{0,m}. \tag{1.32}$$

1.2 lema. *Integraliniai tiesiniai operatoriai A_j, $j = \overline{0,m}$, yra visiškai tolydūs operatoriai.*

Įrodymas. Branduoliai $K_j(x,y) = \frac{\partial^j g(x,y)}{\partial x^j}$ tenkina 1 teoremos iš [76, 241 p.] sąlygas. $\square$

2. Specialioji bazė sprendinių erdvėje

Tegul funkcijos $w^1, \ldots, w^m \in F(X)$ yra tiesiškai nepriklausomos ir $\mathrm{span}(w^1, \ldots, w^m) = F(X)$.

1.3 lema. *Funkcionalai $f_1, \ldots, f_m$ yra tiesiškai nepriklausomi, jei* $\mathrm{span}(w^1, \ldots, w^m) \subset F(X)$ *tada ir tik tada, kai $D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] \neq 0$.*

Įrodymas. Funkcionalai $f_1, \ldots, f_m$ yra tiesiškai nepriklausomi, jei $\alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^m f_m = 0$, kai $\alpha^1 = \cdots = \alpha^m = 0$. Šią lygybę galima perrašyti kaip $\langle \alpha^1 f_1 + \cdots + \alpha^m f_m, w\rangle = 0$ visiems $w \in \mathrm{span}(w^1, \ldots, w^m)$. Funkcijų sistema $\{w^1, \ldots, w^m\}$ yra bazė erdvėje $\mathrm{span}(w^1, \ldots, w^m)$ ir ši lygybė yra ekvivalenti sąlygai

$$\alpha^1 \begin{pmatrix} \langle f_1, w^1\rangle \\ \vdots \\ \langle f_1, w^m\rangle \end{pmatrix} + \cdots + \alpha^m \begin{pmatrix} \langle f_m, w^1\rangle \\ \vdots \\ \langle f_m, w^m\rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Taigi funkcionalai $f_1, \ldots, f_m$ yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, jei vektoriai

$$\begin{pmatrix} \langle f_1, w^1\rangle \\ \vdots \\ \langle f_1, w^m\rangle \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} \langle f_m, w^1\rangle \\ \vdots \\ \langle f_m, w^m\rangle \end{pmatrix}$$

yra tiesiškai nepriklausomi. Bet šie vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, jei

$$D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] = \begin{vmatrix} \langle f_1, w^1\rangle & \cdots & \langle f_m, w^1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle f_1, w^m\rangle & \cdots & \langle f_m, w^m\rangle \end{vmatrix} \neq 0. \qquad \square$$

Panagrinėkime homogeninę tiesinę diferencialinę lygtį (1.23) ir tegul $\boldsymbol{u} = \{u^1, \dots, u^m\}$ yra m-matės sprendinių tiesinės erdvės S fiksuota bazė. Imkime įvairias sąlygas

$$\langle L_1, u\rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle L_m, u\rangle = 0, \quad u \in S, \tag{2.1}$$

čia $L_1, \dots, L_m \in S^*$ yra tiesiškai nepriklausomi tiesiniai funkcionalai. Žymėkime $\boldsymbol{L} = (L_1, \dots, L_m)$.

Įveskime naujas funkcijas

$$\hat{v}^i[\boldsymbol{u}](x) := D(L_1, \dots, L_{i-1}, \delta_x, L_{i+1}, \dots, L_m)[\boldsymbol{u}], \quad i = 1, \dots, m. \tag{2.2}$$

Šioms funkcijoms $\langle L_i, \hat{v}^j\rangle = \delta_i^j D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]$, $i, j = 1, \dots, m$. Jei pažymėsime

$$\mathbf{A}_i = \begin{pmatrix} \langle L_i, u^1\rangle \\ \vdots \\ \langle L_i, u^m\rangle \end{pmatrix}, \quad i = 1, \dots, m, \tag{2.3}$$

tai bazėje $\{u^1, \dots, u^m\}$ funkcijų $\hat{v}^1, \dots, \hat{v}^m$ komponentės atitinkamai yra

$$\begin{pmatrix} \det(\mathbf{E}_1, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m) \\ \vdots \\ \det(\mathbf{E}_m, \mathbf{A}_2, \dots, \mathbf{A}_m) \end{pmatrix}, \dots, \begin{pmatrix} \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{m-1}, \mathbf{E}_1) \\ \vdots \\ \det(\mathbf{A}_1, \dots, \mathbf{A}_{m-1}, \mathbf{E}_m) \end{pmatrix}.$$

Taigi funkcijos $\hat{v}^1[\boldsymbol{u}], \dots, \hat{v}^m[\boldsymbol{u}]$ yra tiesiškai nepriklausomos tada ir tik tada, jei (1.5) lygties kairiojoje pusėje determinantas yra nenulinis. Bet šis determinantas yra nenulinis tada ir tik tada, kai $\det(\mathbf{A}) = D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$. Apjungsime 1.3 lemą ir šį rezultatą.

1.4 lema. *Tegul $\{u^1, \dots, u^m\}$ yra sprendinių tiesinės erdvės S bazė. Tada šie teiginiai yra ekvivalentūs*:

a) *funkcionalai $L_1, \dots, L_m$ yra tiesiškai nepriklausomi*;

b) *funkcijos $\hat{v}^1, \dots, \hat{v}^m$ yra tiesiškai nepriklausomos*;

c) $D(\boldsymbol{L}) \neq 0$.

1.5 pastaba. Sąlyga $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = 0$ nepriklauso nuo fundamentaliosios sistemos $\{\boldsymbol{u}\}$. Todėl vietoj $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]$ naudojame žymėjimą $D(\boldsymbol{L})$.

(1.13) lygybę galima užrašyti kaip

$$\begin{aligned}&W\big[D(\delta_x, L_2, \ldots, L_m)[\boldsymbol{u}], D(L_1, \delta_x, \ldots, L_m)[\boldsymbol{u}], \ldots, D(L_1, L_2, \ldots, \delta_x)[\boldsymbol{u}]\big](x)\\&\quad = W[\boldsymbol{u}](x) \cdot \big(D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]\big)^{m-1}\end{aligned}$$

arba

$$W[\hat{\boldsymbol{v}}](x) = W[\boldsymbol{u}](x) \cdot \big(D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]\big)^{m-1}. \tag{2.4}$$

Jei palyginsime šią lygybę su (1.12), tai gausime, kad dviem bazėms $\{u^1, \ldots, u^m\}$ ir $\{\hat{v}^1[\boldsymbol{u}], \ldots, \hat{v}^m[\boldsymbol{u}]\}$ determinantas $\det \mathbf{P} = (D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}])^{m-1}$. Taigi yra teisingos lygybės

$$\begin{aligned}D[\hat{\boldsymbol{v}}](\boldsymbol{x}) &= D[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{x}) \cdot \big(D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]\big)^{m-1},\\ \widetilde{W}[\hat{\boldsymbol{v}}](x,y) &= \widetilde{W}[\boldsymbol{u}](x,y) \cdot \big(D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]\big)^{m-1}.\end{aligned} \tag{2.5}$$

Vadinasi, teisinga lema.

1.5 lema. *Tegul* $\{u^1, \ldots, u^m\} \in C^m[0, L]$ *yra* (1.23) *homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Tada yra teisinga lygybė* (2.4) *ir*

$$\begin{aligned}W[\hat{\boldsymbol{v}}](x) \neq 0 \quad &\Leftrightarrow \quad D(\boldsymbol{L}) \neq 0,\\ W[\hat{\boldsymbol{v}}](x) \equiv 0 \quad &\Leftrightarrow \quad D(\boldsymbol{L}) = 0.\end{aligned}$$

1.4 lemos teiginiai yra ekvivalentūs sąlygai $W[\hat{\boldsymbol{v}}](x) \neq 0$.

Jei funkcionalai $L_1, \ldots, L_m$ yra tiesiškai nepriklausomi, t. y. $D(\boldsymbol{L}) \neq 0$, ir

$$v^i(x) := \frac{D(L_1, \ldots, L_{i-1}, \delta_x, L_{i+1}, \ldots, L_m)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{2.6}$$

t. y. $\boldsymbol{v} = \hat{\boldsymbol{v}}/D(\boldsymbol{L})$, tai dvi bazės $\{v^1, \ldots, v^m\}$ ir $\{L_1, \ldots, L_m\}$ yra biortogonaliosios:

$$\big\langle L_i, v^j \big\rangle = \delta_i^j, \quad i, j = 1, \ldots, m, \tag{2.7}$$

ir

$$D[\boldsymbol{v}](\boldsymbol{x}) = \frac{D[\boldsymbol{u}](\boldsymbol{x})}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \qquad W[\boldsymbol{v}](x) = \frac{W[\boldsymbol{u}](x)}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]},$$

$$\widetilde{W}[\boldsymbol{v}](x,y) = \frac{\widetilde{W}[\boldsymbol{u}](x,y)}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \tag{2.8}$$

$$V[\boldsymbol{v}](x,y) = V[\boldsymbol{u}](x,y) = V(x,y),$$

$$G^c[\boldsymbol{v}](x,y) = G^c[\boldsymbol{u}](x,y) = G^c(x,y). \tag{2.9}$$

1.6 pastaba. 1.4 lemos teiginiai yra teisingi, jei vietoj $\{\hat{v}^1,\dots,\hat{v}^m\}$ paimsime $\{v^1,\dots,v^m\}$.

1.7 pastaba. Jei $\{\hat{u}^1,\dots,\hat{u}^m\}$ yra kita fundamentalioji sistema ir $[\hat{u}^1,\dots,\hat{u}^m] = \mathbf{P}[u^1,\dots,u^m]$, čia $\mathbf{P}\in GL_m(\mathbb{K})$, tai

$$\frac{D(L_1,\dots,L_{i-1},\delta_x,L_{i+1},\dots,L_m)[\hat{\boldsymbol{u}}]}{D(\boldsymbol{L})[\hat{\boldsymbol{u}}]} = \frac{D(L_1,\dots,L_{i-1},\delta_x,L_{i+1},\dots,L_m)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]},$$

$i=1,\dots,m$ (žr. (1.3) lygybę). Taigi $\boldsymbol{v} := [v^1,\dots,v^m]$ apibrėžimas yra invariatiškas bazės $\{u^1,\dots,u^m\}$ atžvilgiu.

3. Tiesinė diferencialinė lygtis su įvairiomis sąlygomis

Panagrinėkime m-tosios eilės nehomogeninę diferencialinę lygtį

$$\mathcal{L}u := u^{(m)} + a^{m-1}(x)u^{(m-1)} + \dots + a^1(x)u' + a^0(x)u = f(x), \tag{3.1}$$

čia $f\in C[0,L]$, su sąlygomis

$$\langle L_i, u\rangle = f_i \in \mathbb{K}, \quad i=1,\dots,m, \tag{3.2}$$

čia $L_1,\dots,L_m$ yra tiesiškai nepriklausomi funkcionalai erdvėje $C^m[0,L]$. Žymėkime $\boldsymbol{L}=(L_1,\dots,L_m)$, $\boldsymbol{f}=(f_1,\dots,f_m)$, $\tilde{\boldsymbol{f}} = [\underbrace{0,\dots,0}_{m-1},f]$.

3.1. Nehomogeninio uždavinio su homogeninėmis sąlygomis sprendinys

Tegul $\{u^1,\dots,u^m\}$ yra (1.23) homogeninės lygties fiksuota fundamentalioji sistema ir $\boldsymbol{u}=[u^1,\dots,u^m]$, tai šios lygties bendrasis sprendinys yra

$$u_h(x) = \boldsymbol{C}\boldsymbol{u}(x),$$

čia $\boldsymbol{C} = (C_1, \dots, C_m)$ yra laisvosios konstantos. Pakeiskime konstantas $\boldsymbol{C}$ atitinkamai funkcijomis $\boldsymbol{c}(x) = (c_1(x), \dots, c_m(x))$ (konstantų varijavimo metodas [32]). Įstatę

$$u(x) = \boldsymbol{c}(x)\boldsymbol{u}(x), \tag{3.3}$$

į nehomogeninę lygtį (3.1) ir išsprendę sistemą

$$\big(\delta_x, -\delta_x', \dots, (-1)^{m-1}\delta_x^{(m-1)}\big)[\boldsymbol{u}] \cdot \boldsymbol{c}'(x) = \tilde{\boldsymbol{f}},$$

surandame funkcijas $\boldsymbol{c}'(x)$, o po to integruodami surandame $\boldsymbol{c}(x)$.

Kadangi $W(x) = \det(\delta_x, -\delta_x', \dots, (-1)^{m-1}\delta_x^{(m-1)})[\boldsymbol{u}] \neq 0$, gauname

$$c_i(x) = \int\limits_0^x \frac{(-1)^{m-i}W_i[\boldsymbol{u}](s)}{W[\boldsymbol{u}](s)} f(s)\,ds + A_i, \quad i = 1, \dots, m.$$

Tada (žr. [32] ir (1.11)):

$$u(x) = \int\limits_0^L H(x-s)V(x,s)f(s)\,ds + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(x) = \big(G^c(x,s), f(s)\big)_X + \boldsymbol{A}\boldsymbol{u}(x), \tag{3.4}$$

čia $(g, f)_X := \int_0^L g(x)f(x)\,dx$, $g \in L^1(0, L)$, $f \in C[0, L]$. Naudosime šią formulę su biortogonaliąja (2.6) baze $\{v^1, \dots, v^m\}$. Šiuo atveju

$$u(x) = \big(G^c(x,s), f(s)\big)_X + A_1 v^1(x) + \dots + A_m v^m(x). \tag{3.5}$$

Tarkime, turime homogenines sąlygas

$$\langle L_1, u\rangle = 0, \quad \dots, \quad \langle L_m, u\rangle = 0. \tag{3.6}$$

Įstatę bendrąjį sprendinį (3.5) į homogenines sąlygas (3.6) ir pasinaudoję (2.7) lygybę, surandame

$$A_i = -\big\langle L_i(y), \big(G^c(y,s), f(s)\big)_X\big\rangle = -\big(\big\langle L_i(y), G^c(y,s)\big\rangle, f(s)\big)_X, \quad i = 1, \dots, m.$$

Tuomet gauname m-tosios eilės tiesinės diferencialinės lygties su m homogeninėmis sąlygomis sprendinio išraišką

$$\begin{aligned} u_f(x) &= \big(G^c(x,s), f(s)\big)_X - \Bigg(\Bigg\langle \sum_{i=1}^m L_i(y)v^i(x), G^c(y,s)\Bigg\rangle, f(s)\Bigg)_X \\ &= \big(\big\langle \delta_x(y) - \boldsymbol{L}(y)\boldsymbol{v}(x), G^c(y,s)\big\rangle, f(s)\big)_X. \end{aligned} \tag{3.7}$$

3.2. Nehomogeninis uždavinys

Panagrinėkime homogeninę lygtį (1.23) su sąlygomis (3.2):

$$\mathcal{L}u = 0, \qquad \langle L_i, u\rangle = f_i, \quad i = 1, \ldots, m.$$

Tada šio uždavinio sprendinys

$$u_h(x) = \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}(x). \tag{3.8}$$

Nehomogeninio uždavinio sprendinys turi formą $u(x) = u_f(x) + u_h(x)$ (žr. (3.7) ir (3.8)). Taigi gauname nehomogeninio (3.1)–(3.2) uždavinio sprendinių formulę.

1.1 teorema. (3.1)–(3.2) *uždavinio sprendinys yra*

$$u(x) = \big(\big\langle \delta_x(y) - \boldsymbol{L}(y)\boldsymbol{v}(x), G^c(y,s)\big\rangle, f(s)\big)_X + \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}(x). \tag{3.9}$$

Tiesinių ir kvazitiesinių uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis [136, 152] tyrimas reikalauja bendros teorijos apie sprendinių konstravimą su labai skirtingomis kraštinėmis sąlygomis. (3.9) lygtis gali būti efektyviai panaudota tiesinės m-tosios eilės diferencialinės lygties, kai koeficientai $a^0(x), \ldots, a^{m-1}(x)$ nėra pastovūs ir su bet kokia dešine puse $f(x)$, bet kokiais funkcionalais $L_1, \ldots, L_m$ ir bet kokiais $f_1, \ldots, f_m$, sprendinių radimui, jei homogeninės lygties bendrasis sprendinys yra žinomas. Šios formulės ypač yra naudingos Gryno funkcijų konstravimui.

3.3. Sąryšis tarp dviejų sprendinių

Panagrinėkime du uždavinius su ta pačia m-tosios eilės nehomogenine diferencialine lygtimi, bet su skirtingomis kraštinėmis sąlygomis:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ \langle l_i, u\rangle = f_i, \quad i = 1, \ldots, m, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}v = f, \\ \langle L_i, v\rangle = F_i, \quad i = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{3.10}$$

ir $D(\boldsymbol{L}) \neq 0$. Skirtumas $w = v - u$ tenkina uždavinį su homogenine lygtimi

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = 0, \\ \langle L_i, w\rangle = F_i - \langle L_i, u\rangle, \quad i = 1, \dots, m. \end{cases}$$

Tuomet iš (3.9) formulės matyti, kad

$$w(x) = \boldsymbol{F}\boldsymbol{v}(x) - \big\langle \boldsymbol{L}(y)\boldsymbol{v}(x), u(y)\big\rangle \tag{3.11}$$

arba

$$v(x) = u(x) + \sum_{i=1}^{m} \big(F_i - \langle L_i, u\rangle\big) \frac{D(L_1, \dots, L_{i-1}, \delta_x, L_{i+1}, \dots, L_m)}{D(\boldsymbol{L})} \tag{3.12}$$

ir antro (3.10) uždavinio sprendinį galima išreikšti per pirmo uždavinio sprendinį.

1.3 išvada. *Uždaviniams* (3.10) *yra teisingas sąryšis tarp dviejų sprendinių:*

$$v(x) = \frac{1}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \cdots & \langle L_m, u^1\rangle & u^1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m\rangle & \cdots & \langle L_m, u^m\rangle & u^m(x) \\ \langle L_1, u\rangle - F_1 & \cdots & \langle L_m, u\rangle - F_m & u(x) \end{vmatrix}. \tag{3.13}$$

Įrodymas. Išskaidę (3.13) determinantą pagal paskutinę eilutę, gauname (3.12) lygybę. □

1.8 pastaba. (3.13) lygties determinantas yra lygus

$$\begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \cdots & \langle L_m, u^1\rangle & u^1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m\rangle & \cdots & \langle L_m, u^m\rangle & u^m(x) \\ \langle L_1, u\rangle & \cdots & \langle L_m, u\rangle & u(x) \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \cdots & \langle L_m, u^1\rangle & u^1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m\rangle & \cdots & \langle L_m, u^m\rangle & u^m(x) \\ F_1 & \cdots & F_m & 0 \end{vmatrix}.$$

Taigi (3.13) lygybę galima užrašyti kaip

$$v(x) = \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_x)[\boldsymbol{u}, u]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} + \sum_{i=1}^{m} F_i \frac{D(L_1, \dots, L_{i-1}, \delta_x, L_{i+1}, \dots, L_m)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}. \tag{3.14}$$

Pastebėsime, kad šioje lygybėje funkcija u yra tik pirmame naryje ir $v(x)$ yra invariantinė bazės $\{u^1, \dots, u^m\}$ atžvilgiu.

4. Gryno funkcijos

Pateiksime Gryno funkcijų apibrėžimus [7, 32, 35, 105, 131]. Lygties (3.1) fundamentalusis sprendinys $G(x,y)$ yra (3.1)–(3.2) kraštinio uždavinio Gryno funkcija (lokaliosios arba periodinės kraštinės sąlygos atveju), jei ji taip pat tenkina (kaip funkcija, priklausanti nuo x) homogenines kraštines sąlygas (3.2). Mes naudosime šiek tiek bendresnio pobūdžio Gryno funkcijos sąvoką.

1.3 apibrėžimas. (3.1) lygties apibendrintasis fundamentalusis sprendinys $G(x,y)$ vadinamas (3.1)–(3.2) uždavinio *Gryno funkcija*, jei jis tenkina (kaip funkcija, priklausanti nuo x) homogenines sąlygas (3.2), kai $y \in [0,L] \setminus \varXi_N$, t. y.

$$\big\langle L_i(x), G(x,y) \big\rangle = 0, \quad i = 1,\ldots,m, \ y \in [0,L] \setminus \varXi_N. \tag{4.1}$$

Jei (3.1)–(3.2) uždavinio Gryno funkcija $G(x,y)$ egzistuoja, tai uždavinio sprendinį galima išreikšti formule:

$$u(x) = \big(G(x,y), f(y)\big)_X = \int_0^L G(x,y) f(y)\, dy. \tag{4.2}$$

4.1. Tiesinės diferencialinės lygties su įvairiomis sąlygomis Gryno funkcijos

Panagrinėkime nehomogeninę lygtį su operatoriumi (3.1): $\mathcal{L} : U \to F$, čia $F = C[0,L]$, kur homogeninės sąlygos apibrėžia poerdvį $U = \{u \in C^m[0,L]\colon \langle L_1, u\rangle = 0, \ldots, \langle L_m, u\rangle = 0\}$.

Iš 1.1 teoremos, kai $\boldsymbol{f} = \boldsymbol{0}$, gauname sprendinio formulę:

$$u(x) = \big(\big\langle \delta_x(y) - \boldsymbol{L}(y)\boldsymbol{v}(x), G^c(y,s)\big\rangle\big)_X = \int_0^L \big\langle \delta_x(y) - \boldsymbol{L}(y)\boldsymbol{v}(x), G^c(y,s)\big\rangle f(s)\, ds.$$

Taigi įrodėme lemą apie Gryno funkciją:

1.6 lema. (3.1) *uždavinio su m homogeninėmis sąlygomis* $\langle L_1, u\rangle = 0, \ldots, \langle L_m, u\rangle = 0$ *Gryno funkcija yra lygi*:

$$\begin{aligned} G(x,s) &= \big\langle \delta_x(y) - \boldsymbol{L}(y)\boldsymbol{v}(x), G^c(y,s)\big\rangle \\ &= G^c(x,s) - \sum_{i=1}^m \big\langle L_i(y), G^c(y,s)\big\rangle \frac{D(L_1,\ldots,L_{i-1},\delta_x,L_{i+1},\ldots,L_m)}{D(\boldsymbol{L})} \end{aligned}$$

$$= \frac{1}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1 \rangle & \cdots & \langle L_m, u^1 \rangle & u^1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m \rangle & \cdots & \langle L_m, u^m \rangle & u^m(x) \\ \langle L_1(\cdot), G^c(\cdot, s) \rangle & \cdots & \langle L_m(\cdot), G^c(\cdot, s) \rangle & G^c(x, s) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_x)[\boldsymbol{u}, G^c(\cdot, s)]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}. \tag{4.3}$$

Jei $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{P}\boldsymbol{u}$, čia $\mathbf{P} \in GL_m(\mathbb{K})$, tai gauname, kad Gryno funkcija $G(x, s) = G[\bar{\boldsymbol{u}}](x, s) = G[\boldsymbol{u}](x, s)$, t. y. ji yra invariantinė bazės $\{u^1, \ldots, u^m\}$ atžvilgiu. Funkcija $G^c(x, s)$ turi tą pačią savybę (žr. (1.16)). Galima lengvai patikrinti (žr. (1.17)), kad $G^c(x, s)$ yra (3.1) uždavinio su specialiosiomis (šiuo atveju, pradinėmis) sąlygomis $u(0) = 0, \ldots, u^{(m-1)}(0) = 0$ Gryno funkcija.

Uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis teoriniame tyrime yra naudingas toliau pateiktas rezultatas apie Gryno funkcijų $G^u(x, s)$ ir $G^v(x, s)$ sąryšį dviejų nehomogeninių uždavinių su ta pačia f

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ \langle l_i, u \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}v = f, \\ \langle L_i, v \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m. \end{cases} \tag{4.4}$$

1.2 teorema. (4.4) *uždaviniams yra teisingas sąryšis tarp dviejų Gryno funkcijų $G^v(x, s)$ ir $G^u(x, s)$:*

$$G^v(x, s) = \big\langle \delta_x(y) - \boldsymbol{L}(y)\boldsymbol{v}(x), G^u(y, s) \big\rangle$$
$$= G^u(x, s) - \sum_{j=1}^{m} \big\langle L_j(y), G^u(y, s) \big\rangle \frac{D(L_1, \ldots, L_{j-1}, \delta_x, L_{j+1}, \ldots, L_m)}{D(\boldsymbol{L})}$$
$$= \frac{1}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1 \rangle & \cdots & \langle L_m, u^1 \rangle & u^1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m \rangle & \cdots & \langle L_m, u^m \rangle & u^m(x) \\ \langle L_1(\cdot), G^u(\cdot, s) \rangle & \cdots & \langle L_m(\cdot), G^u(\cdot, s) \rangle & G^u(x, s) \end{vmatrix}$$
$$= \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_x)[\boldsymbol{u}, G^u(\cdot, s)]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}. \tag{4.5}$$

Įrodymas. Šių sąryšių įrodymas išplaukia iš (3.14) lygties, kai $\boldsymbol{F} = \boldsymbol{0}$, ir sprendinių u ir v integralinės išraiškos (4.2). $\square$

Formulės (4.5) lengvai leidžia surasti lygties su m įvairiomis sąlygomis Gryno funkciją, jei žinoma tos pačios lygties, bet su kitomis sąlygomis, Gryno funkcija. Sprendinio išraiška

$$u(x) = \big(G(x,s), f(s)\big)_X + \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}(x) = \int\limits_0^L G(x,s)f(s)\,ds + \boldsymbol{f}\boldsymbol{v}(x) \tag{4.6}$$

gali būti naudojama m-tosios eilės lygties su diferencialiniu operatoriumi (kai $a^i(x)$, $i = 0, \ldots, m-1$ nėra pastovūs) ir su bet kokiomis m tiesinėmis įvairiomis (pradinėmis arba kraštinėmis arba nelokaliosiomis kraštinėmis) sąlygomis sprendinių radimui, jei žinoma homogeninės lygties fundamentalioji sistema.

5. Gryno funkcijų pritaikymas uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

Nagrinėsime uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$\mathcal{L}u := u^{(m)} + a^{m-1}(x)u^{(m-1)} + \cdots + a^1(x)u' + a^0(x)u = f(x), \tag{5.1}$$

$$\langle L_i, u\rangle := \langle \kappa_i, u\rangle - \gamma_i\langle \varkappa_i, u\rangle = 0, \quad i = 1, \ldots, m, \tag{5.2}$$

čia $a^i \in C[0,L]$, $f \in C(0,L)$, Gryno funkciją. Daugumą uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (NKS) galima užrašyti šiuo pavidalu, čia $\langle \kappa_i, u\rangle := \langle \kappa_i(x), u(x)\rangle$ yra klasikinė dalis, ir $\langle \varkappa_i, u\rangle := \langle \varkappa_i(x), u(x)\rangle$, $i = 1, \ldots, m$, yra nelokalioji kraštinių sąlygų dalis. Pavyzdžiui, funkcionalai $\varkappa_i$, $i = 1, \ldots, m$, gali aprašyti daugiataškes ($\xi_j \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, J$) arba integralines nelokaliąsias kraštines sąlygas

$$\langle \varkappa, u\rangle = \sum_{j=1}^{J}\sum_{k=1}^{m}\big(\varkappa_j^k u^{(k-1)}(\xi_j)\big), \qquad \langle \varkappa, u\rangle = \int\limits_0^1 \varkappa(t)u(t)\,dt,$$

ir funkcionalas κ_i, $i = 0, \ldots, m$, gali aprašyti lokaliąsias (klasikines) kraštines sąlygas.

Jei $\gamma_1, \ldots, \gamma_m = 0$, tai uždavinys (5.1)–(5.2) tampa klasikiniu. Tarkime, kad klasikiniu atveju Gryno funkcija $G^{\mathrm{cl}}(x,s)$ egzistuoja. Tada (5.1)–(5.2) uždavinio

Gryno funkcija egzistuoja, jei $\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$. Kai $L_i = \kappa_i - \gamma_i \varkappa_i$, $i = 1, \ldots, m$, gauname

$$\vartheta = \sum_{\sigma_1=0,\ldots,\sigma_m=0}^{1} \prod_{j=1}^{m} (-\gamma_j)^{\sigma_j} D\big(\big(\varkappa_1^{\sigma_1}\kappa_1^{1-\sigma_1}\big), \ldots, \big(\varkappa_m^{\sigma_m}\kappa_m^{1-\sigma_m}\big)\big). \tag{5.3}$$

Jei apibrėšime matricas $\mathbf{K} := (\kappa_{ij})$, $\kappa_{ij} = \langle \kappa_j, u_i \rangle$, $\mathbf{N} := (\varkappa_{ij})$, $\varkappa_{ij} = \langle \varkappa_j, u_i \rangle$, $\boldsymbol{\Gamma} := (\gamma_i \delta_{ij})$, tai sąlyga $\vartheta \neq 0$ yra ekvivalenti sąlygai

$$\det\big(\mathbf{I} - \boldsymbol{\Gamma}\mathbf{N}\mathbf{K}^{-1}\big) \neq 0. \tag{5.4}$$

Šis rezultatas apibendrina antros eilės lygties panašią sąlygą [28, 29, 133]. Kadangi $\langle \kappa_i(\cdot), G^{\mathrm{cl}}(\cdot, s) \rangle = 0$, $i = 1, \ldots, m$, tai (4.5) formulę galima užrašyti kaip

$$\begin{aligned} G(x,s) &= G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \big\langle \varkappa_j(y), G^{\mathrm{cl}}(y,s) \big\rangle v^j(x) \qquad (5.5) \\ &= G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \big\langle \varkappa_j(y), G^{\mathrm{cl}}(y,s) \big\rangle \frac{D(L_1, \ldots, L_{j-1}, \delta_x, L_{j+1}, \ldots, L_m)}{D(\boldsymbol{L})} \\ &= \frac{1}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1 \rangle & \cdots & \langle L_m, u^1 \rangle & u^1(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m \rangle & \cdots & \langle L_m, u^m \rangle & u^m(x) \\ -\gamma_1 \langle \varkappa_1(\cdot), G^{\mathrm{cl}}(\cdot, s) \rangle & \cdots & -\gamma_m \langle \varkappa_m(\cdot), G^{\mathrm{cl}}(\cdot, s) \rangle & G^{\mathrm{cl}}(x,s) \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

1.4 pavyzdys. Panagrinėkime uždavinį

$$u''' = f(x), \quad x \in (0,1),$$
$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 0, \qquad u'(1) = \gamma u'(\xi), \quad \xi \in (0,1),$$

čia $\xi \in [0,1]$. Šį uždavinį tyrė L.-J. Guo ir bendraautoriai [55]. Paimkime $u^1(x) = 1$, $u^2(x) = x$ ir $u^3(x) = x^2$. Tada

$$\widetilde{W}(x,s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ s & 1 & x \\ s^2 & 2s & x^2 \end{vmatrix} = (x-s)^2, \qquad W(s) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ s & 1 & 0 \\ s^2 & 2s & 2 \end{vmatrix} = 2.$$

Taigi gauname

$$G^c(x,s) = H(x-s)\frac{(x-s)^2}{2}. \tag{5.6}$$

Uždaviniui su kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = u'(1) = 0$ turime

$$D(\boldsymbol{L}, \delta_x)[\boldsymbol{u}, G^c(\cdot, s)] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & x \\ 0 & 0 & 2 & x^2 \\ 0 & 0 & (1-s) & H(x-s)\frac{(x-s)^2}{2} \end{vmatrix}$$
$$= H(x-s)(x-s)^2 - x^2(1-s),$$
$$D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 2,$$

ir „klasikinė“ Gryno funkcija yra

$$G^{\text{cl}}(x,s) = H(x-s)\frac{(x-s)^2}{2} - (1-s)\frac{x^2}{2} = -\frac{1}{2}\begin{cases} 2xs - x^2 s - s^2, & s \leqslant x, \\ x^2(1-s), & x \leqslant s. \end{cases}$$

„Nelokaliajam“ uždaviniui su kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = 0$, $u'(1) - \gamma u'(\xi) = 0$, yra teisingos lygybės:

$$D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1-\gamma \\ 0 & 0 & 2(1-\gamma\xi) \end{vmatrix} = 2(1-\gamma\xi), \quad D(L_1, L_2, \delta_x)[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & x^2 \end{vmatrix} = x^2.$$

Iš (5.5) lygybės matyti, kad

$$G(x,s) = G^{\text{cl}}(x,s) + \gamma \frac{d}{dx} G^{\text{cl}}(x,s)\bigg|_{x=\xi} \cdot \frac{x^2}{2(1-\gamma\xi)} \tag{5.7}$$

jei $1 - \gamma\xi \neq 0$. Taigi,

$$G(x,s) = \frac{1}{2(\gamma\xi - 1)} \cdot \begin{cases} x^2 s(\gamma - 1) + (1-\gamma\xi)(2xs - s^2), & s \leqslant \min\{\xi, x\}, \\ x^2(1-\gamma\xi) + x^2 s(\gamma - 1), & x \leqslant s \leqslant \xi, \\ x^2(\gamma\xi - s) + (1-\gamma\xi)(2xs - s^2), & \xi \leqslant s \leqslant x, \\ x^2(1-s), & \max\{\xi, x\} \leqslant s \end{cases}$$

jei $\gamma\xi \neq 1$ (žr. [55, 2.1 lema]).

1.5 pavyzdys. Panagrinėkime uždavinį

$$u''' = f(x), \quad x \in (0,1),$$

$$u(0) = 0, \qquad u''(0) = 0, \qquad u(1) = \gamma \int\limits_0^1 u(\xi)\, d\xi.$$

Fundamentaliąją sistemą $\{u^1, u^2, u^3\}$ imkime, kaip ir praeitame pavyzdyje: $\{1, x, x^2\}$. Funkcija $G^c(x,s)$ yra tokia pati kaip 1.4 pavyzdyje (žr. (5.6) formulę). Uždavinio su kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u''(0) = u(1) = 0$ Gryno funkcija $G^{\mathrm{cl}}(x,s)$ yra

$$G^{\mathrm{cl}}(x,s) = H(x-s)\frac{(x-s)^2}{2} - \frac{x(1-s)^2}{2} = -\frac{1}{2}\begin{cases}(1-x)(x-s^2), & s \leqslant x,\\ x(1-s)^2, & x \leqslant s.\end{cases}$$

Uždaviniui su kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u''(0) = 0$, $u(1) = \gamma \int_0^1 u(\xi)\, d\xi$ galima apskaičiuoti reikšmes $D(\boldsymbol{L}) = \gamma - 2$, $D(L_1, L_2, \delta_x) = -2x$. Iš (5.5) lygybės matyti, kad

$$G(x,s) = G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \gamma \int\limits_0^1 G^{\mathrm{cl}}(\xi,s)\, d\xi \cdot \frac{x}{1-\gamma/2}, \tag{5.8}$$

jei $\gamma \neq 2$. Taigi gauname

$$\begin{aligned} G(x,s) &= H(x-s)\frac{(x-s)^2}{2} + \frac{x(1-s)^2}{3(2-\gamma)}\big(\gamma(1-s)-3\big)\\ &= \frac{x(1-s)^2}{3(2-\gamma)}\big(\gamma(1-s)-3\big) + \frac{1}{2}\begin{cases}(x-s)^2, & s \leqslant x,\\ 0, & x \leqslant s,\end{cases}\end{aligned}$$

kai $\gamma \neq 2$.

1.6 pavyzdys. Panagrinėkime uždavinį

$$\begin{gathered} u'''(x) = f(x), \quad x \in (x_1, x_3),\\ \alpha u(x_1) - \beta u'(x_1) = 0,\\ \gamma u(x_2) + \delta u'(x_2) = 0, \quad x_2 \in (x_1, x_3),\\ u''(x_3) = 0. \end{gathered} \tag{5.9}$$

Tokio tipo uždavinį tyrė D. R. Andersonas ir bendraautoriai [4]. Šiam uždaviniui gauname

$$D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 0 \\ \alpha x_1 - \beta & \gamma x_2 + \delta & 0 \\ \alpha x_1^2 - 2\beta x_1 & \gamma x_2^2 + 2\delta x_2 & 2 \end{vmatrix} = 2(\alpha\gamma x_2 + \alpha\delta - \alpha\gamma x_1 + \beta\gamma)$$
$$= 2\alpha\gamma(x_2 - x_1) + 2(\alpha\delta + \beta\gamma).$$

Kai $x, s \in [x_1, x_3]$, Gryno funkcija egzistuoja, jei $k = \alpha\delta + \beta\gamma + \alpha\gamma(x_2 - x_1) \neq 0$ ir

$$G(x,s) = \frac{1}{2k} \begin{vmatrix} \alpha & \gamma & 0 & 1 \\ \alpha x_1 - \beta & \gamma x_2 + \delta & 0 & x \\ \alpha x_1^2 - 2\beta x_1 & \gamma x_2^2 + 2\delta x_2 & 2 & x^2 \\ 0 & H(x_2 - s)(\gamma \frac{(s-x_2)^2}{2} - \delta(s - x_2)) & 1 & \frac{H(x-s)(s-x)^2}{2} \end{vmatrix}.$$

Išskleidę šį determinantą, gauname Gryno funkcijos išraišką [4, 1.2 teorema]

$$G(x,s) = \begin{cases} s \in [x_1, x_2]: & \begin{cases} -w_1(x,s) & x \leqslant s, \\ -v_1(x,s) & x \geqslant s, \end{cases} \\ s \in [x_2, x_3]: & \begin{cases} -w_2(x,s) & x \leqslant s, \\ -v_2(x,s) & x \geqslant s, \end{cases} \end{cases}$$

čia

$$w_1(x,s) := \frac{1}{k}(s - x_1)\big[\alpha(x - x_1) + \beta\big]\left[\delta + \frac{\gamma}{2}(2x_2 - x_1 - s)\right] - \frac{1}{2}(x - x_1)^2,$$
$$v_1(x,s) := w_1(x,s) + \frac{1}{2}(x - s)^2 = \frac{1}{2k}(s - x_1)\big[\alpha(s - x_1) + 2\beta\big]\big[\gamma(x_2 - x) + \delta\big],$$
$$w_2(x,s) := \frac{1}{k}\big[\alpha(x - x_1) + \beta\big]\left[\delta(x_2 - x_1) + \frac{\gamma}{2}(x_2 - x_1)^2\right] - \frac{1}{2}(x - x_1)^2,$$
$$v_2(x,s) := w_2(x,s) + \frac{1}{2}(x - s)^2.$$

Gavome tą pačią Gryno funkcijos išraišką kaip straipsnyje [4].

Šiame pavyzdyje Gryno funkciją išreiškėme tiesiogiai, panaudodami (4.3) lygtį. Klasikiniu atveju, kai $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$, Gryno funkcija yra

$$
\begin{aligned}
G^{\mathrm{cl}}(x,s) &= \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ x_1 & 1 & 0 & x \\ x_1^2/2 & x_2 & 1 & x^2/2 \\ 0 & H(x_2-s)(x_2-s) & 1 & H(x-s)(s-x)^2/2 \end{vmatrix} \\
&= H(x-s)\frac{(s-x)^2}{2} - \frac{x^2}{2} + \bigl(x_2 - H(x_2-s)(x_2-s)\bigr)x + \frac{x_1^2}{2} \\
&\quad - x_1x_2 + x_1H(x_2-s)(x_2-s).
\end{aligned}
$$

Tada (5.9) uždavinio Gryno funkcija gali būti išreikšta per Gryno funkciją G^{cl}:

$$
\begin{aligned}
G(x,s) &= G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \beta\frac{d}{dx}G^{\mathrm{cl}}(x,s)\Big|_{x=x_1} \cdot \frac{(x_2-x)\gamma+\delta}{\alpha\delta+\beta\gamma+\alpha\gamma(x_2-x_1)} \\
&\quad + \gamma G^{\mathrm{cl}}(x_2,s)\cdot\frac{\alpha(x_1-x)-\beta}{\alpha\delta+\beta\gamma+\alpha\gamma(x_2-x_1)}.
\end{aligned}
$$

1.7 pavyzdys. Panagrinėkime trečios eilės uždavinį

$$
u''' - \frac{1}{x+1}u'' - u' + \frac{1}{x+1}u = f, \quad x\in(0,1), \tag{5.10}
$$

$$
u(0)=0, \qquad u'(0)=0, \qquad u(1)=\gamma u(\xi), \quad \xi\in(0,1). \tag{5.11}
$$

Pasirinkime (5.10) homogeninės lygties fundamentaliąją sistemą $u^1(x) = x+1$, $u^2(x) = \mathrm{e}^x$, $u^3(x) = \mathrm{e}^{-x}$.

Iš pradžių surasime Gryno funkciją diferencialinei lygčiai (5.10) su pradinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$:

$$
W[\boldsymbol{u}](s) = \begin{vmatrix} s+1 & 1 & 0 \\ \mathrm{e}^s & \mathrm{e}^s & \mathrm{e}^s \\ \mathrm{e}^{-s} & -\mathrm{e}^{-s} & \mathrm{e}^{-s} \end{vmatrix} = 2(s+1), \tag{5.12}
$$

$$
\widetilde{W}[\boldsymbol{u}](x,s) = \begin{vmatrix} s+1 & 1 & x+1 \\ \mathrm{e}^s & \mathrm{e}^s & \mathrm{e}^x \\ \mathrm{e}^{-s} & -\mathrm{e}^{-s} & \mathrm{e}^{-x} \end{vmatrix} = s\mathrm{e}^{s-x} + (s+2)\mathrm{e}^{x-s} - 2(x+1), \tag{5.13}
$$

$$
G^c(x,s) = H(x-s)\bigl(s\mathrm{e}^{s-x} + (s+2)\mathrm{e}^{x-s} - 2x - 2\bigr)/(2s+2). \tag{5.14}
$$

Tada uždavinio su kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = u(1) = 0$ Gryno funkcija egzistuoja ($D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = 2(\mathrm{e}-2) \neq 0$) ir iš 1.6 lemos turime

$$\begin{aligned} G^{\mathrm{cl}}(x,s) &= -\frac{\mathrm{e}^x - x - 1}{\mathrm{e}-2} G^c(1,s) + G^c(x,s) \\ &= -\frac{(\mathrm{e}^x - x - 1)(s\mathrm{e}^{s-1} + (s+2)\mathrm{e}^{1-s} - 4)}{2(\mathrm{e}-2)(s+1)} \\ &\quad + H(x-s)\frac{s\mathrm{e}^{s-x} + (s+2)\mathrm{e}^{x-s} - 2(x+1)}{2(s+1)}. \end{aligned}$$

Toliau uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkciją išreikšime per Gryno funkciją $G^{\mathrm{cl}}(x,s)$. Uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (5.11) Gryno funkcija egzistuoja, jei $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = 2\mathrm{e}-4-2\gamma(\mathrm{e}^{\xi}-\xi-1) \neq 0$. Taigi, kai $\gamma \neq (\mathrm{e}-2)/(\mathrm{e}^{\xi} - 1 - \xi)$, Gryno funkcija yra

$$\begin{aligned} G(x,s) &= G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{(\mathrm{e}^x - x - 1)}{\mathrm{e} - 2 - \gamma(\mathrm{e}^{\xi} - \xi - 1)} \gamma G^{\mathrm{cl}}(\xi, s) \\ &= \gamma \frac{(\mathrm{e}^x - x - 1)}{\mathrm{e} - 2 - \gamma(\mathrm{e}^{\xi} - \xi - 1)} \Bigg(-\frac{(\mathrm{e}^{\xi} - \xi - 1)(s\mathrm{e}^{s-1} + (s+2)\mathrm{e}^{1-s} - 4)}{2(\mathrm{e}-2)(s+1)} \\ &\quad + H(\xi - s)\frac{s\mathrm{e}^{s-\xi} + (s+2)\mathrm{e}^{\xi-s} - 2(\xi+1)}{2(s+1)} \Bigg) \\ &\quad - \frac{(\mathrm{e}^x - x - 1)(s\mathrm{e}^{s-1} + (s+2)\mathrm{e}^{1-s} - 4)}{2(\mathrm{e}-2)(s+1)} \\ &\quad + H(x-s)\frac{s\mathrm{e}^{s-x} + (s+2)\mathrm{e}^{x-s} - 2(x+1)}{2(s+1)}. \end{aligned}$$

1.8 pavyzdys. Panagrinėkime trečios eilės uždavinį

$$u''' + \frac{3x}{1+x^2} u'' = f, \quad x \in (0,1) \tag{5.15}$$

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \gamma u(\nu),\ \nu \in (0,1), \quad u''(1) = \beta u(\eta),\ \eta \in (0,1). \tag{5.16}$$

Šio uždavinio fundamentalioji sistema yra $\{1, x, \sqrt{1+x^2}\,\}$.

(5.15) diferencialinės lygties su pradinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = u''(0) = 0$ Gryno funkcija yra

$$G^c(x,s) = H(x-s)\Big(\sqrt{(1+x^2)(1+s^2)} - 1 - xs\Big)(1+s^2).$$

Tada uždavinio su kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = u''(1) = 0$ $(D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = \sqrt{2}/4)$ Gryno funkcija yra

$$\begin{aligned}
G^{\mathrm{cl}}(x,s) &= G^c(x,s) - 2\sqrt{2}\big(\sqrt{1+x^2}-1\big)\frac{d^2}{dx^2}\big(G^c(x,s)\big)\Big|_{x=1} \\
&= H(x-s)\Big(\sqrt{\big(1+x^2\big)\big(1+s^2\big)}-1-xs\Big)\big(1+s^2\big) \\
&\quad - \big(\sqrt{1+x^2}-1\big)\big(1+s^2\big)\sqrt{1+s^2}.
\end{aligned}$$

Uždavinio (5.15) su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (5.16) Gryno funkcija egzistuoja, kai $\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = (1-\gamma\nu)(\frac{1}{2\sqrt{2}} + \beta - \beta\sqrt{1+\eta^2}\,) + \gamma\beta\eta(1 - \sqrt{1+\nu^2}\,) \neq 0$ ir

$$\begin{aligned}
G(x,s) &= G^{\mathrm{cl}}(x,s) \\
&\quad - \beta G^{\mathrm{cl}}(\eta,s)\big((1-\nu\gamma)\big(1-\sqrt{1+x^2}\,\big) + x\gamma\big(1-\sqrt{1+\nu^2}\,\big)\big)/\vartheta \\
&\quad - \gamma G^{\mathrm{cl}}(\nu,s)\big(\beta\eta\big(1-\sqrt{1+x^2}\,\big) - x\big(\beta\big(1-\sqrt{1+\eta^2}\,\big)+\sqrt{2}/4\big)\big)/\vartheta.
\end{aligned}$$

1.9 pavyzdys. Panagrinėkime ketvirtos eilės uždavinį

$$u^{(4)} - \frac{4}{(x+1)^2}u'' + \frac{8}{(x+1)^3}u' - \frac{8}{(x+1)^4}u = f, \quad x \in (0,1), \tag{5.17}$$

$$u(0)=0, \quad u'(0)=0, \quad u''(0)=0, \quad u(1)=\beta u(\eta), \quad \eta\in(0,1). \tag{5.18}$$

Imkime (5.17) lygties fundamentaliąją sistemą $u^1(x) = x+1$, $u^2(x) = (x+1)^2$, $u^3(x) = (x+1)^4$, $u^4(x) = (x+1)^{-1}$. Tada

$$\begin{aligned}
\widetilde{W}[\boldsymbol{u}](x,s) &= \begin{vmatrix} s+1 & 1 & 0 & u^1(x) \\ (s+1)^2 & 2(s+1) & 2 & u^2(x) \\ (s+1)^4 & 4(s+1)^3 & 12(s+1)^2 & u^3(x) \\ (s+1)^{-1} & -(s+1)^{-2} & 2(s+1)^{-3} & u^4(x) \end{vmatrix} \\
&= -30(s+1)^2u^1(x) + 30(s+1)u^2(x) - 6(s+1)^{-1}u^3(x) + 6(s+1)^4u^4(x), \\
W[\boldsymbol{u}](s) &= -30(s+1)^2\cdot 0 + 30(s+1)\cdot 0 - 6(s+1)^{-1}\cdot 24(s+1) \\
&\quad + 6(s+1)^4\cdot(-6)(s+1)^{-4} = -180, \\
G^c(x,s) &= -H(x-s)\widetilde{W}[\boldsymbol{u}](x,s)/180.
\end{aligned}$$

Uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (5.17), (5.18) Gryno funkcija egzistuoja, jei

$$\begin{aligned}\vartheta(\beta) &= D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = -33 - \beta\widetilde{W}(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}](\eta,0)\\ &= -33 + \beta(30(\eta+1) - 30(\eta+1)^2 + 6(\eta+1)^4 - 6(\eta+1)^{-1}) \neq 0.\end{aligned}$$

Uždavinio su kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = u''(0) = u(1) = 0$ (atvejis, kai $\beta = 0$) Gryno funkcija lygi

$$G^{\mathrm{cl}}(x,s) = -H(x-s)\widetilde{W}[\boldsymbol{u}](x,s)/180 + \widetilde{W}[\boldsymbol{u}](x,0)\cdot\widetilde{W}[\boldsymbol{u}](1,s)/\big(180\vartheta(0)\big).$$

Uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcija yra

$$G(x,s) = G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \beta G^{\mathrm{cl}}(\eta,s)\cdot\widetilde{W}[\boldsymbol{u}](x,0)/\vartheta(\beta).$$

1.10 pavyzdys. Panagrinėkime uždavinį

$$u^{(m)} = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{5.19}$$

$$u(0) = \beta u(\alpha), \quad u'(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) = 0, \quad u(1) = \gamma u(\eta). \tag{5.20}$$

Pasirinkime $u^j(x) = x^{j-1}/(j-1)!$, $j = 1,\ldots,m$. Tada

$$\widetilde{W}(x,s) = \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad W(s) = 1.$$

Taigi gauname

$$V(x,s) = \frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}, \qquad G^c(x,s) = H(x-s)\frac{(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}. \tag{5.21}$$

$\widetilde{W}(x,s)$ surado me tiesiogiai, bet šiuo atveju lengviau rasti $V(x,s)$ naudojant (1.17) savybes.

Uždaviniui su kraštinėmis sąlygomis

$$u(0) = 0, \quad u'(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) = 0, \quad u(1) = 0, \tag{5.22}$$

turime

$$D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = \frac{1}{(m-1)!}, \quad D(\boldsymbol{L},\delta_x)\big[\boldsymbol{u}, G^c(\cdot,s)\big] = \frac{(G^c(x,s) - x^{m-1}V(1,s))}{(m-1)!},$$

ir „klasikinė“ Gryno funkcija yra

$$
\begin{aligned}
G^{\mathrm{cl}}(x,s) &= H(x-s)V(x,s) - x^{m-1}V(1,s)\\
&= \frac{1}{(m-1)!}\begin{cases} -x^{m-1}(1-s)^{m-1}, & x \leqslant s,\\ (x-s)^{m-1} - x^{m-1}(1-s)^{m-1}, & s \leqslant x. \end{cases}
\end{aligned}
$$

„Nelokaliajam“ uždaviniui su kraštinėmis sąlygomis $u(0) - \beta u(\alpha) = 0$, $u'(0) = \cdots = u^{(m-2)}(0) = 0$, $u(1) - \gamma u(\eta) = 0$ yra teisingos lygybės

$$
\begin{aligned}
D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] &= \big((1-\beta)\big(1-\gamma\eta^{m-1}\big) + (1-\gamma)\beta\alpha^{m-1}\big)/(m-1)!,\\
D(\delta_x, L_2, \ldots, L_m)[\boldsymbol{u}] &= \big(1-\gamma\eta^{m-1} - (1-\gamma)x^{m-1}\big)/(m-1)!,\\
D(L_1, \ldots, L_{m-1}, \delta_x)[\boldsymbol{u}] &= \big((1-\beta)x^{m-1} + \beta\alpha^{m-1}\big)/(m-1)!.
\end{aligned}
$$

Iš (5.5) lygybės matyti, kad

$$
\begin{aligned}
G(x,s) = G^{\mathrm{cl}}(x,s) &+ \beta G^{\mathrm{cl}}(\alpha,s)\frac{1-\gamma\eta^{m-1} - (1-\gamma)x^{m-1}}{(1-\beta)(1-\gamma\eta^{m-1}) + (1-\gamma)\beta\alpha^{m-1}}\\
&+ \gamma G^{\mathrm{cl}}(\eta,s)\frac{(1-\beta)x^{m-1} + \beta\alpha^{m-1}}{(1-\beta)(1-\gamma\eta^{m-1}) + (1-\gamma)\beta\alpha^{m-1}}
\end{aligned}
\tag{5.23}
$$

jei $\vartheta := (1-\beta)(1-\gamma\eta^{m-1}) + (1-\gamma)\beta\alpha^{m-1} \neq 0$. Tada

$$
\begin{aligned}
G(x,s) = \frac{1}{(m-1)!}&\begin{cases} -x^{m-1}(1-s)^{m-1}, & x \leqslant s,\\ (x-s)^{m-1} - x^{m-1}(1-s)^{m-1}, & s \leqslant x, \end{cases}\\
+ \beta\frac{1-\gamma\eta^{m-1} - (1-\gamma)x^{m-1}}{(1-\beta)(1-\gamma\eta^{m-1}) + (1-\gamma)\beta\alpha^{m-1}}&\begin{cases} -\frac{\alpha^{m-1}(1-s)^{m-1}}{(m-1)!}, & \alpha \leqslant s,\\ \frac{(\alpha-s)^{m-1} - \alpha^{m-1}(1-s)^{m-1}}{(m-1)!}, & s \leqslant \alpha, \end{cases}\\
+ \gamma\frac{(1-\beta)x^{m-1} + \beta\alpha^{m-1}}{(1-\beta)(1-\gamma\eta^{m-1}) + (1-\gamma)\beta\alpha^{m-1}}&\begin{cases} -\frac{\eta^{m-1}(1-s)^{m-1}}{(m-1)!}, & \eta \leqslant s,\\ \frac{(\eta-s)^{m-1} - \eta^{m-1}(1-s)^{m-1}}{(m-1)!}, & s \leqslant \eta. \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.9 pastaba. Uždavinys (5.19)–(5.20), kai $\alpha = \eta$, buvo nagrinėjamas straipsnyje [72]. Šio uždavinio Gryno funkcija yra lygi

$$
\begin{aligned}
G(x,s) &= G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{x^{m-1}(\gamma-\beta)+\beta}{1-\beta-\eta^{m-1}(\gamma-\beta)} G^{\mathrm{cl}}(\eta,s) \\
&= \frac{1}{(m-1)!}\begin{cases} -x^{m-1}(1-s)^{m-1}, & x \leqslant s, \\ (x-s)^{m-1} - x^{m-1}(1-s)^{m-1}, & s \leqslant x, \end{cases} \\
&+ \frac{x^{m-1}(\gamma-\beta)+\beta}{1-\beta-\eta^{m-1}(\gamma-\beta)} \begin{cases} -\frac{\eta^{m-1}(1-s)^{m-1}}{(m-1)!}, & \eta \leqslant s, \\ \frac{(\eta-s)^{m-1}-\eta^{m-1}(1-s)^{m-1}}{(m-1)!}, & s \leqslant \eta. \end{cases}
\end{aligned}
$$

1.10 pastaba. Hao, Liu ir Vu (Wu) [57, Section 2] nagrinėjo (5.19)–(5.20) uždavinį, kai $\beta = 0$. Jei $\gamma\eta^{m-1} \neq 1$, šio uždavinio Gryno funkcija yra

$$
\begin{aligned}
G(x,s) &= G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \gamma G^{\mathrm{cl}}(\eta,s)\frac{x^{m-1}}{1-\gamma\eta^{m-1}} \\
&= \begin{cases} \frac{\phi(s)x^{m-1}}{(m-1)!}, & 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1, \\ \frac{\phi(s)x^{m-1}+(x-s)^{m-1}}{(m-1)!}, & 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

čia

$$
\phi(s) = \begin{cases} -\frac{(1-s)^{m-1}}{1-\gamma\eta^{m-1}}, & \eta \leqslant s, \\ -\frac{(1-s)^{m-1}-\gamma(\eta-s)^{m-1}}{1-\gamma\eta^{m-1}}, & s \leqslant \eta. \end{cases}
$$

6. Pirmojo skyriaus išvados

Kai $D(\boldsymbol{L}) \neq 0$, funkcionalai $L_1, \dots, L_m$ yra tiesiškai nepriklausomi. Tai yra uždavinio su m tiesinėmis sąlygomis būtina ir pakankama Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga. Esminis šio skyriaus rezultatas yra tai, kad tiesinės diferencialinės lygties Gryno funkcijos susijusios tarpusavyje, ir šis sąryšis išreikštas (4.5) lygybe. Buvo pateikti keli pavyzdžiai, bet (4.5) formulė gali būti pritaikyta įvairiems tiesiniams uždaviniams su kintamais koeficientais ir įvairiomis tiesinėmis kraštinėmis sąlygomis, pavyzdžiui, uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijų radimui ir jų savybių tyrimui.

2 skyrius

Gryno funkcijos antros eilės diferencialiniams uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

Šiame skyriuje pirmojo skyriaus rezultatai pritaikomi uždaviniams su antros eilės diferencialiniu operatoriumi ir nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Šiam tikslui iš pradžių performuluojami pagrindiniai žymėjimai ir pagrindinės formulės antros eilės diferencialiniam uždaviniui, kai lygtis užrašyta savijungiu pavidalu. Pateikiami pavyzdžiai, kuriuose užrašomos Gryno funkcijos ir jų egzistavimo sąlygos. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai išspausdinti straipsniuose [A1,A2,A6].

1. Antros eilės diferencialinė lygtis. Savijungis lygties pavidalas

Pusiau tiesinių uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (NKS) tyrimas ir jų teigiamų sprendinių egzistavimas yra pagrįstas tiesinių uždavinių su NKS Gryno funkcijos tyrimu [62, 63, 88, 89, 90, 93, 137, 155]. Šiuose straipsniuose Gryno funkcijos sukonstruotos uždaviniui su paprastu operatoriumi $\mathcal{L}u = -u''$, kur sprendiniai gauti du kartus integruojant diferencialinę lygtį

$-u'' = f(x)$. Be to, kraštinės sąlygos yra daugiataškių nelokaliųjų kraštinių sąlygų atskiri atvejai.

Panagrinėkime antros eilės tiesinę paprastąją diferencialinę lygtį

$$\mathcal{L}u := u'' + r(x)u' + \bar{q}(x)u = \bar{f}(x), \tag{1.1a}$$

čia $r, q, f \in C[0, L]$. Ši lygtis gali būti užrašyta savijungiu pavidalu [32]:

$$-\big(p(x)u'\big)' + q(x)u = f(x), \tag{1.1b}$$

čia $p(x) = p(x_0)\exp(\int_0^x r(t)\,dt) \geqslant p_0 > 0$, $p \in C^1[0, L]$, $q = -\bar{q}p \in C[0, L]$, $f = -\bar{f}p \in C[0, L]$. Tarkime, kad žinome homogeninės diferencialinės lygties (1.1a) (arba (1.1b)) fundamentaliąją sistemą $\{u^1(x), u^2(x)\}$, čia $u^1, u^2 \in C^2[0, L]$. Tada Vronskio determinantas $W[u^1, u^2](x) \neq 0$, kai $x \in [0, L]$. Užrašysime antros eilės tiesinę diferencialinę lygtį

$$\begin{vmatrix} u^1 & u^2 & u \\ (u^1)' & (u^2)' & u' \\ (u^1)'' & (u^2)'' & u'' \end{vmatrix} = W\big[u^1, u^2\big]\cdot u'' - \begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ (u^1)'' & (u^2)'' \end{vmatrix}\cdot u' + \begin{vmatrix} (u^1)' & (u^2)' \\ (u^1)'' & (u^2)'' \end{vmatrix}\cdot u = \tilde{f}. \tag{1.1c}$$

Ši lygtis ekvivalentiška diferencialinei lygčiai (1.1a), kai

$$r = -\begin{vmatrix} u^1 & u^2 \\ (u^1)'' & (u^2)'' \end{vmatrix}/W\big[u^1, u^2\big], \qquad \bar{q} = \begin{vmatrix} (u^1)' & (u^2)' \\ (u^1)'' & (u^2)'' \end{vmatrix}/W\big[u^1, u^2\big],$$
$$\bar{f} = \tilde{f}/W\big[u^1, u^2\big],$$

ir homogeninių lygčių (1.1a) ir (1.1c) sprendinių erdvės sutampa. Randame $p(x)$ ir $q(x)$:

$$p(x) = p(x_0)\exp\left(-\int_{x_0}^{x}\begin{vmatrix} u^1(t) & u^2(t) \\ (u^1)''(t) & (u^2)''(t) \end{vmatrix}/W\big[u^1, u^2\big](t)\,dt\right), \ x_0 \in [0, L], \tag{1.2}$$

$$q(x) = -p(x)\begin{vmatrix} (u^1)'(x) & (u^2)'(x) \\ (u^1)''(x) & (u^2)''(x) \end{vmatrix}/W\big[u^1, u^2\big](x). \tag{1.3}$$

Pastebėsime, kad yra teisinga Abelio formulė [101]: $p(x)W[u^1, u^2](x) = p(x_0)W[u^1, u^2](x_0)$, $x_0 \in [0, L]$. Taigi koeficientą p galima rasti iš formulės

$$p(x) = p(x_0)W\big[u^1, u^2\big](x_0)/W\big[u^1, u^2\big](x). \tag{1.4}$$

Formulėje (1.2) (arba (1.4)) reikšmė $p(x_0)$ gali būti laisvai parinkta, pavyzdžiui $p(x_0) = 1$ arba $p(x_0) = (W[u^1, u^2](x_0))^{-1}$. Turime, kad pora $\{p(x), q(x)\}$ aprašo sprendinius, kurie apibrėžia fundamentaliąją sistemą $\{u^1(x), u^2(x)\}$, ir atvirkščiai, fundamentalioji sistema apibrėžia p ir q ($p(x_0)$ tikslumu).

Šiame skyriuje nagrinėsime antros eilės nehomogeninę tiesinę diferencialinę lygtį

$$\mathcal{L}u := -\big(p(x)u'\big)' + q(x)u = f(x), \tag{1.5}$$

su sąlygomis

$$\langle L_1, u\rangle = f_1, \qquad \langle L_2, u\rangle = f_2, \tag{1.6}$$

čia $f \in C[0, L]$, $f_1, f_2 \in \mathbb{K}$ ir L_1, L_2 yra tokie tiesiniai funkcionalai erdvėje $C^2[0, L]$, kad $D(L_1, L_2) \neq 0$.

2. Žymėjimai ir pagrindinės formulės

Iš pradžių pateiksime determinanto ir tiesinio funkcionalo žymėjimus ir suformuluosime pagrindines teoremas antros eilės atveju.

Kaip ir pirmajame skyriuje apibrėžkime funkcinį determinantą $D[w^1, w^2]$ ir Vronskio determinantą $W[v^1, v^2]$:

$$D\big[w^1, w^2\big](x_1, x_2) := \begin{vmatrix} w^1(x_1) & w^1(x_2) \\ w^2(x_1) & w^2(x_2) \end{vmatrix}, \quad w^1, w^2 \in F(X),$$

$$W\big[v^1, v^2\big](y) := \begin{vmatrix} v^1(y) & (v^1)'(y) \\ v^2(y) & (v^2)'(y) \end{vmatrix}, \quad y \in [0, L],\ v^1, v^2 \in C^1[0, L].$$

Taip pat kartais naudosime žymėjimą (jei fiksuotos funkcijos u^1 ir u^2)

$$D(x, y) := D\big[u^1, u^2\big](x, y),$$

ir pastebėsime, kad šiuo atveju $D[u^1, u^2](y, x) = \widetilde{W}[u^1, u^2](x, y)$.

Kai $w^1, w^2 \in F(X)$, apibrėžkime determinantus:

$$D(f_1, f_2)\big[w^1, w^2\big] = \begin{vmatrix} \langle f_1, w^1\rangle & \langle f_2, w^1\rangle \\ \langle f_1, w^2\rangle & \langle f_2, w^2\rangle \end{vmatrix}; \tag{2.1}$$

$$D(\delta_x, f_1, f_2)\big[w^1, w^2, w^3\big] = \begin{vmatrix} w^1(x) & \langle f_1, w^1\rangle & \langle f_2, w^1\rangle \\ w^2(x) & \langle f_1, w^2\rangle & \langle f_2, w^2\rangle \\ w^3(x) & \langle f_1, w^3\rangle & \langle f_2, w^3\rangle \end{vmatrix}. \tag{2.2}$$

Kadangi šiame skyriuje nagrinėsime (1.5) diferencialinę lygtį savijungiu pavidalu, tai (1.5)–(1.6) uždavinys, kai $f_1 = f_2 = 0$, turi sprendinį

$$u(x) = -\int_0^L H(x-s)\frac{D(s,x)}{W(x_0)p(x_0)}f(s)\,ds = \int_0^L H(x-s)\frac{D(x,s)}{W(x_0)p(x_0)}f(s)\,ds.$$

Funkciją G^c apibrėžkime kitaip negu pirmajame skyriuje (žr. pirmojo skyriaus (1.15) ir (1.19) formules ir šio skyriaus (1.4) Abelio formulę):

$$G^c(x,s) := H(x-s)\frac{D(x,s)}{W(x_0)p(x_0)}. \tag{2.3}$$

Kaip ir pirmajame skyriuje, ši funkcija yra (1.5) lygties su pradinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = 0$ Gryno funkcija.

Dabar performuluosime m-tosios eilės diferencialinės lygties rezultatus antros eilės diferencialinei lygčiai.

2.1 teiginys [žr. 1.1 teoremą]. (1.5), (1.6) *uždavinio sprendinys yra*

$$\begin{aligned} u_f(x) = \big(G^c(x,s), f(s)\big)_X - v^1(x)\big(\big\langle L_1(y), G^c(y,s)\big\rangle, f(s)\big)_X \\ - v^2(x)\big(\big\langle L_2(y), G^c(y,s)\big\rangle, f(s)\big)_X + f_1 v^1(x) + f_2 v^2(x) \end{aligned} \tag{2.4}$$

čia

$$v^1(x) = \frac{D(\delta_x, L_2)[u^1, u^2]}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]}, \qquad v^2(x) = \frac{D(L_1, \delta_x)[u^1, u^2]}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]}.$$

Panagrinėkime du uždavinius su ta pačia nehomogenine tiesine diferencialine lygtimi ir su skirtingomis sąlygomis:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ \langle l_1, u\rangle = f_1, \quad \langle l_2, u\rangle = f_2; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}v = f, \\ \langle L_1, v\rangle = F_1, \quad \langle L_2, v\rangle = F_2. \end{cases} \tag{2.5}$$

2.1 išvada [žr. 1.3 išvadą]. (2.5) *uždavinių sprendiniai susieti lygybėmis*:

$$v(x) = \frac{1}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u^1(x) \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u^2(x) \\ \langle L_1, u\rangle - F_1 & \langle L_2, u\rangle - F_2 & u(x) \end{vmatrix},$$

$$v(x) = u(x) + \big(F_1 - \langle L_1, u\rangle\big)\frac{D(\delta_x, L_2)[u^1, u^2]}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]}$$
$$+ \big(F_2 - \langle L_2, u\rangle\big)\frac{D(L_1, \delta_x)[u^1, u^2]}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]},$$

$$v(x) = \frac{D(L_1, L_2, \delta_x)[u^1, u^2, u]}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]} + F_1\frac{D(\delta_x, L_2)[u^1, u^2]}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]} + F_2\frac{D(L_1, \delta_x)[u^1, u^2]}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]}.$$

Ši išvada yra pirmojo skyriaus 1.3 išvados atskiras atvejis.

Tegul $\mathcal{L}$ yra Šturmo ir Liuvilio operatorius (1.5) su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis. Jeigu

$$U = \big\{u \in C^2[0, L] \colon \alpha_0 u'(0) + \beta_0 u(0) = 0,\ \alpha_1 u'(1) + \beta_1 u(1) = 0\big\},\ F = C[0, L],$$

tai egzistuoja vienas ir tik vienas sprendinys $u(x)$, kuris tenkina (1.5) lygtį ir yra apibrėžtas formulėje

$$u(x) = \int_0^l G(x, y) f(y)\, dy, \tag{2.6}$$

kur $G(x, s)$ yra Gryno funkcija, tenkinanti šias savybes [35, 105, 140]:

1. $G(x, s)$ yra tolydžioji taškuose $(x, s) \in [0, L]^2$;
2. $\mathcal{L}G(x, s) = 0$, kai $x \neq s$;
3. išvestinės šuolis $G'(s + 0, s) - G'(s - 0, s) = 1/p(s)$;
4. $G(x, s) = G(s, x)$.

Šios savybės teisingos tik klasikinėms kraštinėms sąlygoms. Uždaviniai su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis yra nesavijungiai, todėl turime nesimetrines Gryno funkcijas, kurios gali būti net netolydžiosios. Todėl Gryno funkcijas suprasime kaip apibendrintuosius fundamentaliuosius sprendinius, kurie buvo aprašyti pirmajame disertacijos skyriuje.

Performuluosime pirmojo skyriaus 1.5 lemą ir 1.2 teoremą antros eilės diferencialiniam uždaviniui:

2.1 lema [žr. 1.5 lemą]. *Šturmo ir Liuvilio uždavinio* (1.5) *su dviem homogeninėmis sąlygomis* $\langle L_1, u\rangle = 0$, $\langle L_2, u\rangle = 0$ *Gryno funkcija yra*

$$\begin{aligned} G(x,s) &= G^c(x,s) - \big\langle L_1(y), G^c(y,s)\big\rangle \frac{D(\delta_x, L_2)[u^1,u^2]}{D(L_1,L_2)[u^1,u^2]} \\ &\quad - \big\langle L_2(y), G^c(y,s)\big\rangle \frac{D(L_1,\delta_x)[u^1,u^2]}{D(L_1,L_2)[u^1,u^2]} \\ &= \frac{1}{D(L_1,L_2)[u^1,u^2]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u^1(x) \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u^2(x) \\ \langle L_1(\cdot), G^c(\cdot,s)\rangle & \langle L_2(\cdot), G^c(\cdot,s)\rangle & G^c(x,s) \end{vmatrix} \\ &= \frac{D(L_1,L_2,\delta_x)[u^1,u^2,G^c(\cdot,s)]}{D(L_1,L_2)[u^1,u^2]}. \end{aligned}$$

2.2 teiginys [žr. 1.2 teoremą]. *Sąryšis tarp Gryno funkcijų* $G_v(x,s)$ *ir* $G_u(x,s)$ *uždaviniams*

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ \langle l_1, u\rangle = 0, \quad \langle l_2, u\rangle = 0; \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}v = f, \\ \langle L_1, v\rangle = 0, \quad \langle L_2, v\rangle = 0 \end{cases} \tag{2.7}$$

yra

$$\begin{aligned} G^v(x,s) &= G^u(x,s) - \big\langle L_1(y), G^u(y,s)\big\rangle \frac{D(\delta_x, L_2)}{D(L_1,L_2)} \\ &\quad - \big\langle L_2(y), G^u(y,s)\big\rangle \frac{D(L_1,\delta_x)}{D(L_1,L_2)} \\ &= \frac{1}{D(L_1,L_2)[u^1,u^2]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u^1(x) \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u^2(x) \\ \langle L_1(\cdot), G^u(\cdot,s)\rangle & \langle L_2(\cdot), G^u(\cdot,s)\rangle & G^u(x,s) \end{vmatrix} \\ &= \frac{D(L_1,L_2,\delta_x)[u^1,u^2,G^u(\cdot,s)]}{D(L_1,L_2)[u^1,u^2]}. \end{aligned} \tag{2.8}$$

3. Gryno funkcijų pritaikymas uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

1987 m. M. Sapagovas ir R. Čiegis studijavo stacionarųjį pradinį–kraštinį uždavinį su viena klasikine ir viena Samarskio ir Bitsadzės tipo nelokaliąja kraštine sąlyga [124]. Šis darbas paskatino Lietuvos mokslininkus užsiimti įvairių uždavinių su nelokaliosiomis sąlygomis tyrinėjimu. M. Sapagovas ir R. Čiegis su mokiniais nagrinėjo diferencialinį [28] ir diskretųjį [28, 29], vienmatį ir daugiamatį [125, 127], stacionarųjį [28] ir nestacionarųjį [29, 122] uždavinius su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. A. Štikonas su benraautoriais straipsniuose [97, 126, 132, 134] analizavo šių uždavinių spektrą.

Ntouyasas [93] transformavo m-taškius kraštinius uždavinius prie 4-taškių kraštinių uždavinių ir tyrė sprendinių egzistavimą. Problemos su 3-taškėmis nelokaliosiomis sąlygomis nagrinėjamos straipsniuose [56, 64, 88, 92, 155]. Zao [155] konstravo Gryno funkcijas ir pateikė šių funkcijų egzistavimo sąlygas. Hanas (Han) [56] ir Ma [88] tyrė teigiamų sprendinių egzistavimą ir vienatį taikydami nejudamojo taško teoremą kūgyje. m-taškiai kraštiniai uždaviniai nagrinėjami straipsniuose [23, 85, 116, 139]. Truongas (Truong), Ngocas (Ngoc) ir Longas (Long) [139] nustatė teigiamų sprendinių egzistavimą taikydami Guo ir Krasnoselskio nejudamojo taško teoremą ir monotonišką iteracinį metodą. Cheungas (Cheung) ir Renas (Ren) [23] sujungė apatinio sprendinio metodą su topologiško laipsnio metodu ir parodė, kad kraštinis uždavinys turi bent vieną teigiamą sprendinį su tam tikromis augimo sąlygomis. Visuose šiuose straipsniuose buvo konstruojamos Gryno funkcijos tiesiniams uždaviniams.

Panagrinėkime Gryno funkciją uždaviniams

$$\mathcal{L}u := -\big(p(x)u'\big)' + q(x)u = f(x), \tag{3.1}$$

$$\langle L_1, u\rangle := \langle l_1, u\rangle - \gamma_1\langle k_1, u\rangle = 0, \quad \langle L_2, u\rangle := \langle l_2, u\rangle - \gamma_2\langle k_2, u\rangle = 0, \tag{3.2}$$

čia $p(x) \geqslant p_0 > 0$, $p \in C^1[0,1]$, $q \in C[0,1]$, ir $f \in C[0,1]$. Dauguma problemų su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis galima užrašyti šiuo pavidalu, čia $\langle l_i, u\rangle := \langle l_i(x), u(x)\rangle$ yra klasikinė dalis ir $\langle k_i, u\rangle := \langle k_i(x), u(x)\rangle$, $i = 1, 2$, yra nelokalioji kraštinių sąlygų dalis. Pavyzdžiui, funkcionalai k_i, $i = 1, 2$, gali būti daugiataškės ($\xi_j \in [0,1]$, $j = 1, \ldots, n$) arba integralinės nelokaliosios kraštinės sąlygos

$$\big\langle k, u(t)\big\rangle = \sum_{j=1}^{n}\big(\varkappa_j u(\xi_j) + \kappa_j u'(\xi_j)\big), \qquad \big\langle k, u(t)\big\rangle = \int\limits_0^1 \varkappa(t)u(t)\,dt,$$

ir funkcionalai l_i, $i = 1, 2$, gali būti lokaliosios (klasikinės) kraštinės sąlygos

$$\big\langle l_1, u(t)\big\rangle = \alpha_1 u(0) + \beta_1 u'(0), \qquad \big\langle l_2, u(t)\big\rangle = \alpha_2 u(1) + \beta_2 u'(1),$$

čia parametrai $|\alpha_i| + |\beta_i| > 0$, $i = 1, 2$.

Jeigu $\gamma_1, \gamma_2 = 0$, tai (3.1)–(3.2) uždavinys tampa klasikiniu. Tarkime, kad klasikiniu atveju egzistuoja Gryno funkcija $G^{\mathrm{cl}}(x, s)$.

(3.1)–(3.2) uždavinio Gryno funkcija egzistuoja, jei $\vartheta := D(L_1, L_2)[u^1, u^2] \neq 0$. Šiuo atveju, kai $L_i = l_i - \gamma_i k_i$, $i = 1, 2$, (2.8) lygtį galima užrašyti tokiu būdu:

$$\begin{aligned} G(x,s) = \frac{1}{D(L_1, L_2)[u^1, u^2]} &\begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u^1(x) \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u^2(x) \\ -\gamma_1\langle k_1(\cdot), G^{\mathrm{cl}}(\cdot, s)\rangle & -\gamma_2\langle k_2(\cdot), G^{\mathrm{cl}}(\cdot, s)\rangle & G^{\mathrm{cl}}(x,s) \end{vmatrix} \\ = G^{\mathrm{cl}}(x,s) + \big(&\gamma_2\big\langle k_2, G^{\mathrm{cl}}(\cdot, s)\big\rangle D(l_1, \delta_x)\big[u^1, u^2\big] \\ + \gamma_1&\big\langle k_1, G^{\mathrm{cl}}(\cdot, s)\big\rangle D(\delta_x, l_2)\big[u^1, u^2\big] \\ + \gamma_1&\gamma_2 D(k_1, k_2)\big[D\big[u^1, u^2\big](x, \cdot), G^{\mathrm{cl}}(\cdot, s)\big]\big)/D(L_1, L_2) \end{aligned} \tag{3.3}$$

kur

$$\begin{aligned} \vartheta := D(L_1, L_2) = D(l_1, l_2)\big[u^1, u^2\big] - \gamma_1 D(k_1, l_2)\big[u^1, u^2\big] \\ - \gamma_2 D(l_1, k_2)\big[u^1, u^2\big] + \gamma_1\gamma_2 D(k_1, k_2)\big[u^1, u^2\big]. \end{aligned} \tag{3.4}$$

3.1. Uždaviniai su 4-taškėmis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

Panagrinėsime 4-taškius kraštinius uždavinius, kai $p(x) = 1$, $q(x) = 0$.

Tarkime, kad $\{u^1, u^2\}$ yra fundamentalioji sistema, tenkinanti homogeninę lygtį $-u'' = 0$, ir pradines sąlygas

$$\begin{cases} u^1(0) = 1, \\ (u^1)'(0) = 0, \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} u^2(0) = 0, \\ (u^2)'(0) = 1. \end{cases}$$

Tuomet $\{u^1(x) := 1, u^2(x) := x\}$ ir

$$D\big[u^1, u^2\big](x, y) = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = y - x.$$

Panagrinėkime tiesinę antros eilės diferencialinę lygtį

$$-u'' = f(x) \tag{3.5}$$

su nelokaliosiomis 4-taškėmis kraštinėmis sąlygomis:

$$u(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \qquad u(1) = \gamma_2 u(\xi_2); \tag{3.6a}$$

$$u(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \qquad u(1) = \gamma_2 u'(\xi_2); \tag{3.6b}$$

$$u(0) = \gamma_1 u'(\xi_1), \qquad u(1) = \gamma_2 u(\xi_2); \tag{3.6c}$$

$$u(0) = \gamma_1 u'(\xi_1), \qquad u(1) = \gamma_2 u'(\xi_2); \tag{3.6d}$$

$$u(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \qquad u'(1) = \gamma_2 u(\xi_2); \tag{3.6e}$$

$$u(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \qquad u'(1) = \gamma_2 u'(\xi_2); \tag{3.6f}$$

$$u(0) = \gamma_1 u'(\xi_1), \qquad u'(1) = \gamma_2 u(\xi_2); \tag{3.6g}$$

$$u(0) = \gamma_1 u'(\xi_1), \qquad u'(1) = \gamma_2 u'(\xi_2); \tag{3.6h}$$

$$u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \qquad u(1) = \gamma_2 u(\xi_2); \tag{3.6i}$$

$$u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \qquad u(1) = \gamma_2 u'(\xi_2); \tag{3.6j}$$

$$u'(0) = \gamma_1 u'(\xi_1), \qquad u(1) = \gamma_2 u(\xi_2); \tag{3.6k}$$

$$u'(0) = \gamma_1 u'(\xi_1), \qquad u(1) = \gamma_2 u'(\xi_2); \tag{3.6l}$$

ir

$$u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \qquad u'(1) = \gamma_2 u'(\xi_2); \tag{3.7a}$$

$$u'(0) = \gamma_1 u'(\xi_1), \qquad u'(1) = \gamma_2 u(\xi_2); \tag{3.7b}$$

$$u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \qquad u'(1) = \gamma_2 u(\xi_2); \tag{3.7c}$$

$$u'(0) = \gamma_1 u'(\xi_1), \qquad u'(1) = \gamma_2 u'(\xi_2); \tag{3.7d}$$

Kai kurios Gryno funkcijų išraiškos lygties (3.5) su 3-taškėmis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (3.6) arba (3.7) (kai $\gamma_1 = 0$ arba $\gamma_2 = 0$) pateiktos straipsnyje [155]. Dauguma daugiataškių nelokaliųjų sąlygų gali būti transformuotos į (3.6) arba (3.7) tipo nelokaliąsias kraštines sąlygas [93].

Išsamiai ištirsime vieną atvejį. Kiti atvejai nagrinėjami analogiškai.

Panagrinėkime (3.5) ir (3.6a) uždavinį. Šiuo atveju $\langle l_1, u\rangle = u(0)$, $\langle l_2, u\rangle = u(1)$, $\langle k_1, u\rangle = u(\xi_1)$, $\langle k_2, u\rangle = u(\xi_2)$ ir

$$\vartheta = 1 - \gamma_1(1-\xi_1) - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\gamma_2(\xi_1 - \xi_2).$$

Jeigu $1 - \gamma_1(1-\xi_1) - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\gamma_2(\xi_1 - \xi_2) \neq 0$, tai iš (3.3) formulės gauname

$$\begin{aligned} G(x,s) = G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) &- \frac{\gamma_1(x-1-\gamma_2(x-\xi_2))}{1 - \gamma_1(1-\xi_1) - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\gamma_2(\xi_1 - \xi_2)} \cdot G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_1, s) \\ &+ \frac{\gamma_2(x-\gamma_1(x-\xi_1))}{1 - \gamma_1(1-\xi_1) - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\gamma_2(\xi_1 - \xi_2)} \cdot G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_2, s) \end{aligned}$$

čia $G_1^{\mathrm{cl}}(x,s)$ yra klasikinė Gryno funkcija (kai kraštinių sąlygų dešinioji pusė yra nulinė: $u(0) = u(1) = 0$):

$$G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) = \begin{cases} s(1-x), & s \leqslant x, \\ x(1-s), & x \leqslant s. \end{cases} \tag{3.8}$$

Įstatę (3.8) išraišką į ankstesnę lygybę, gauname (3.5), (3.6a) uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijos išreikštinę formulę

$$\begin{aligned} G(x,s) = \frac{(x-\gamma_1 x + \gamma_1\xi_1)(1-s)}{1 - \gamma_1(1-\xi_1) - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\gamma_2(\xi_1 - \xi_2)} &- \begin{cases} x-s, & s \leqslant x, \\ 0, & s \geqslant x, \end{cases} \\ + \frac{\gamma_1(\gamma_2(x-\xi_2) - x + 1)}{1 - \gamma_1(1-\xi_1) - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\gamma_2(\xi_1 - \xi_2)} &\cdot \begin{cases} s-\xi_1, & s \leqslant \xi_1, \\ 0, & s \geqslant \xi_1, \end{cases} \\ + \frac{\gamma_2(x-\gamma_1(x-\xi_1))}{1 - \gamma_1(1-\xi_1) - \gamma_2\xi_2 - \gamma_1\gamma_2(\xi_1 - \xi_2)} &\cdot \begin{cases} s-\xi_2, & s \leqslant \xi_2, \\ 0, & s \geqslant \xi_2. \end{cases} \end{aligned}$$

Diferencialinės lygties (3.5) su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (3.6) egzistavimo sąlygos pateiktos 2.1 lentelėje.

Uždavinių su 4-taškėmis nelokaliosiomis sąlygomis (3.6) Gryno funkcijos pateiktos 2.2 lentelėje, čia G_1^{cl}, G_2^{cl} ir G_3^{cl} yra atitinkamai Gryno funkcijos uždaviniams su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis: $u(0) = u(1) = 0$ (2.1 a) pav.), $u(0) = u'(1) = 0$ (2.1 b) pav.) ir $u'(0) = u(1) = 0$ (2.1 c) pav.):

2.1 lentelė. Diferencialinės lygties (3.5) su NKS (3.6) egzistavimo sąlygos

Atvejis	NKS	Gryno funkcijų egzistavimo sąlygos
(3.6a)	$u(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$\vartheta = 1-\gamma_1(1-\xi_1)-\gamma_2\xi_2-\gamma_1\gamma_2(\xi_1-\xi_2)\neq 0$
(3.6b)	$u(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$\vartheta = 1-\gamma_1(1-\xi_1)-\gamma_2+\gamma_1\gamma_2\neq 0$
(3.6c)	$u(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$\vartheta = 1+\gamma_1-\gamma_2\xi_2-\gamma_1\gamma_2\neq 0$
(3.6d)	$u(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$\vartheta = 1+\gamma_1-\gamma_2\neq 0$
(3.6e)	$u(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u'(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$\vartheta = 1-\gamma_1-\gamma_2\xi_2-\gamma_1\gamma_2(\xi_1-\xi_2)\neq 0$
(3.6f)	$u(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u'(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$\vartheta = 1-\gamma_1-\gamma_2+\gamma_1\gamma_2\neq 0$
(3.6g)	$u(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u'(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$\vartheta = 1-\gamma_2\xi_2-\gamma_1\gamma_2\neq 0$
(3.6h)	$u(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u'(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$\vartheta = 1-\gamma_2\neq 0$
(3.6i)	$u'(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$\vartheta = -1-\gamma_1(1-\xi_1)+\gamma_2+\gamma_1\gamma_2(\xi_2-\xi_1)\neq 0$
(3.6j)	$u'(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$\vartheta = -1-\gamma_1(1-\xi_1)+\gamma_1\gamma_2\neq 0$
(3.6k)	$u'(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$\vartheta = -1+\gamma_1+\gamma_2-\gamma_1\gamma_2\neq 0$
(3.6l)	$u'(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$\vartheta = -1+\gamma_1\neq 0$

$$G_1^{\mathrm{cl}}(x,s)=\begin{cases} s(1-x), & s\leqslant x,\\ x(1-s), & x\leqslant s;\end{cases}\qquad G_2^{\mathrm{cl}}(x,s)=\begin{cases} s, & s\leqslant x,\\ x, & x\leqslant s;\end{cases}$$

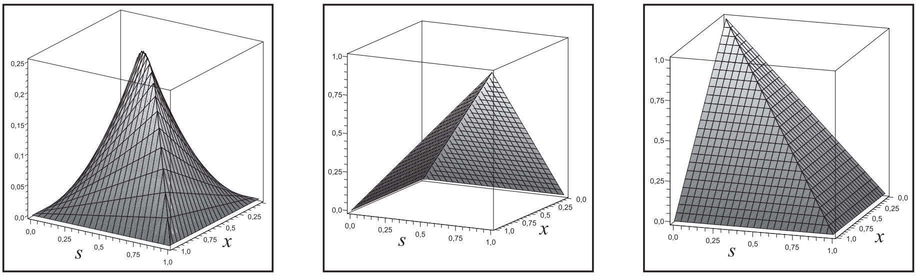
$$G_3^{\mathrm{cl}}(x,s)=\begin{cases} 1-x, & s\leqslant x,\\ 1-s, & x\leqslant s.\end{cases} \tag{3.9}$$

2.2 lentelė. Diferencialinės lygties (3.5) su NKS (3.6) Gryno funkcijos

Atvejis	NKS	Gryno funkcija $G(x,s)$
(3.6a)	$u(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$G_1^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1-x+\gamma_2(x-\xi_2))\frac{\gamma_1}{\vartheta}G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(x-\gamma_1(x-\xi_1))\frac{\gamma_2}{\vartheta}G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6b)	$u(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$G_1^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1-x-\gamma_2)\frac{\gamma_1}{\vartheta}G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(x-\gamma_1(x-\xi_1))\frac{\gamma_2}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6c)	$u(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$G_1^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1-x+\gamma_2(x-\xi_2))\frac{\gamma_1}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(x+\gamma_1)\frac{\gamma_2}{\vartheta}G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6d)	$u(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$G_1^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1-x-\gamma_2)\frac{\gamma_1}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(x+\gamma_1)\frac{\gamma_2}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6e)	$u(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u'(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$G_2^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1+\gamma_2(x-\xi_2))\frac{\gamma_1}{\vartheta}G_2^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(x-\gamma_1(x-\xi_1))\frac{\gamma_2}{\vartheta}G_2^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6f)	$u(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u'(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$G_2^{\mathrm{cl}}(x,s)+\frac{\gamma_1}{1-\gamma_1}\cdot G_2^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(x-\gamma_1(x-\xi_1))\frac{\gamma_2}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_2^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6g)	$u(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u'(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$G_2^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1+\gamma_2(x-\xi_2))\frac{\gamma_1}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_2^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(x+\gamma_1)\frac{\gamma_2}{\vartheta}G_2^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6h)	$u(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u'(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$G_2^{\mathrm{cl}}(x,s)+\gamma_1\frac{d}{dx}G_2^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(x+\gamma_1)\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}\frac{d}{dx}G_2^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6i)	$u'(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$G_3^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1-x+\gamma_2(x-\xi_2))\frac{\gamma_1}{\vartheta}G_3^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(-1-\gamma_1(x-\xi_1))\frac{\gamma_2}{\vartheta}G_3^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6j)	$u'(0)=\gamma_1 u(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$G_3^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1-x-\gamma_2)\frac{\gamma_1}{\vartheta}G_3^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+(-1-\gamma_1(x-\xi_1))\frac{\gamma_2}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_3^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6k)	$u'(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u(\xi_2)$	$G_3^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1-x+\gamma_2(x-\xi_2))\frac{\gamma_1}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_3^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+\frac{\gamma_2}{1-\gamma_2}G_3^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$
(3.6l)	$u'(0)=\gamma_1 u'(\xi_1)$, $u(1)=\gamma_2 u'(\xi_2)$	$G_3^{\mathrm{cl}}(x,s)+(1-x-\gamma_2)\frac{\gamma_1}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_3^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $+\gamma_2\frac{d}{dx}G_3^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s)$

Šio tyrimo rezultatai apibendrinti teoremoje.

2.1 teorema. *Uždavinių* (3.5), (3.6) *Gryno funkcijos neegzistuoja tada ir tik tada, kai taškas* (γ_1,γ_2) *yra*:



a) $G_1^{\mathrm{cl}}(x,s)$ b) $G_2^{\mathrm{cl}}(x,s)$ c) $G_3^{\mathrm{cl}}(x,s)$

2.1 pav. Uždavinių su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijų grafikai

1. *tiesėje,* (3.6d), (3.6h), (3.6l) *atvejais visiems* ξ_1, ξ_2; (3.6a), (3.6e), (3.6i) *kai* $\xi_1 = \xi_2$;

2. *dviejose statmenosiose tiesėse,* (3.6f), (3.6k) *atvejais visiems* ξ_1, ξ_2; (3.6a) *kai* $\xi_2 \neq \xi_1 = 0$ *arba* $\xi_1 \neq \xi_2 = 1$; (3.6i) *kai* $\xi_2 = 1$; (3.6b) *kai* $\xi_1 = 0$; (3.6c) *kai* $\xi_2 = 1$; (3.6e) *kai* $\xi_1 = 0$;

3. *hiperbolėje, kitais atvejais.*

Jei (3.5), (3.6a) uždavinyje $\gamma_1 = 0$, tai Gryno funkcija lygi

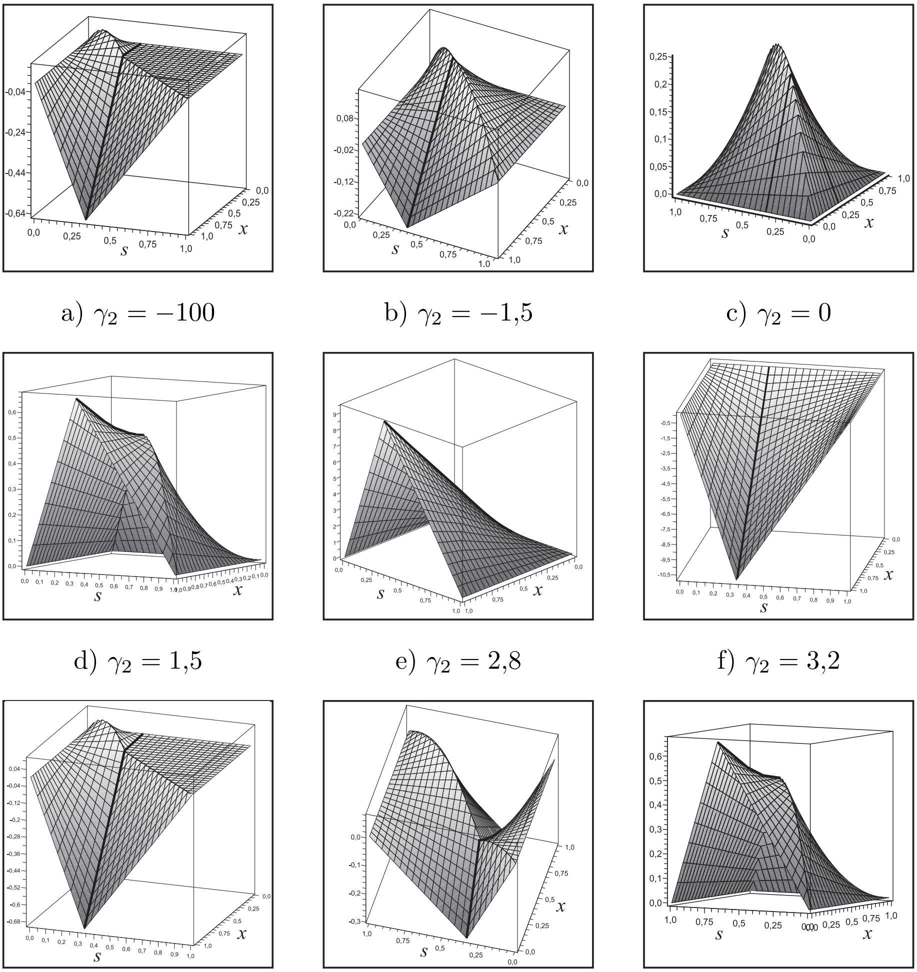
$$G(x,s) = G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{x}{1-\gamma_2\xi_2}\gamma_2 G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s). \tag{3.10}$$

Kai $\gamma_2 = 0$, Gryno funkcija yra

$$G(x,s) = G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{1-x}{1-\gamma_1(1-\xi_1)}\gamma_1 G_1^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s). \tag{3.11}$$

Klasikinei Gryno funkcijai yra teisinga lygybė $G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) = G_1^{\mathrm{cl}}(1-x,1-s)$. Taigi, atliktus pakeitimus $s \to 1-s$, $x \to 1-x$, $\xi_2 \to 1-\xi_1$ ir $\gamma_2 \to \gamma_1$, iš (3.10) lygties galima lengvai gauti (3.11) išraišką, ir atvirkščiai, t. y. Gryno funkcija, kai $\gamma_1 = 0$, yra tokia pati, kai $\gamma_2 = 0$. Grafikuose 2.2 d) ir i) pavaizduotos Gryno funkcijos, kai parametrai: d) $\gamma_1 = 0$; $\gamma_2 = 1{,}5$; $\xi_2 = 1/3$; ir i) $\gamma_2 = 0$; $\gamma_1 = 1{,}5$; $\xi_1 = 2/3$.

Kai $\xi_1 = \xi_2 = 1/3$ Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga yra $\vartheta = 1 - \frac{2}{3}\gamma_1 - \frac{1}{3}\gamma_2 \neq 0$. Gryno funkcijų grafikai su $\gamma_1 = 0$ ir skirtingomis γ_2 pateikti 2.2 a)–g)



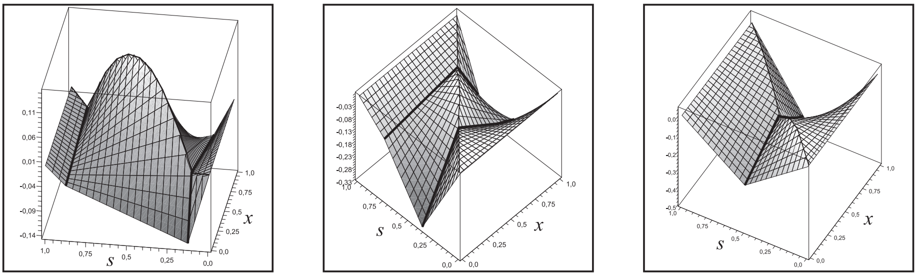
a) $\gamma_2 = -100$ b) $\gamma_2 = -1{,}5$ c) $\gamma_2 = 0$

d) $\gamma_2 = 1{,}5$ e) $\gamma_2 = 2{,}8$ f) $\gamma_2 = 3{,}2$

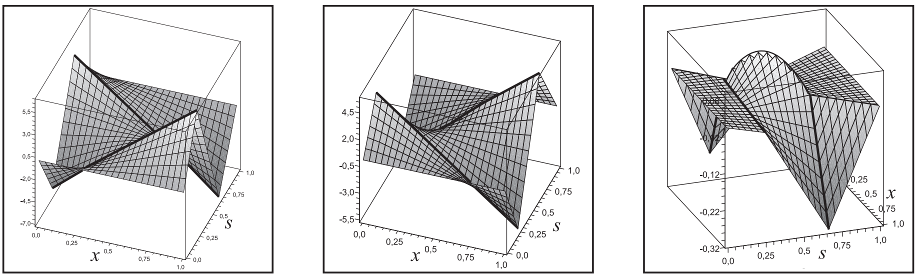
g) $\gamma_2 = 100$ h) $\gamma_1 = 4,\ \gamma_2 = 4$ i) $\gamma_1 = 1{,}5$

2.2 pav. Gryno funkcijų grafikai, kai a)–g) $\xi_2 = 1/3$; $\gamma_1 = 0$ ir parametrai $\gamma_2 = -100; -1{,}5; 0; 1{,}5; 2{,}8; 3{,}2; 100$; h) $\xi_2 = 1/3$; $\gamma_1 = 4$; $\gamma_2 = 4$; i) $\xi_1 = 2/3$; $\gamma_2 = 0$; $\gamma_1 = 1{,}5$

grafikuose. Kai γ_2 artėja prie minus arba plius begalybės ($\gamma_2 = -100, 100$ atitinkamai 2.2 a) ir g) pav.) Gryno funkcijos yra „vienodos“. Jei $\gamma_2 \to 0$ (2.2 b) ir d) pav.), tai Gryno funkcija panaši į klasikinę Gryno funkciją (2.2 c) pav.). Kai $\gamma_1 = 0$, egzistavimo sąlyga yra $\gamma_2 \neq 3$. Grafikuose 2.2 e) ($\gamma_2 = 2{,}8$) ir 2.2 f) ($\gamma_2 = 3{,}2$) pavaizduotos Gryno funkcijos, kai γ_2 artėja prie parametro, kada



a) $\xi_1 = 7/8;\ \xi_2 = 1/8$ b) $\xi_1 = 6/8;\ \xi_2 = 3/8$ c) $\xi_1 = 1/2;\ \xi_2 = 1/2$



d) $\gamma_1 = -2;\ \gamma_2 = -3$ e) $\gamma_1 = -2;\ \gamma_2 = -2{,}7$ f) $\gamma_1 = 15;\ \gamma_2 = 10$

2.3 pav. Gryno funkcijų grafikai, kai a)–c) $\gamma_1 = 2;\ \gamma_2 = 4$ ir d)–f) $\xi_1 = 2/3;\ \xi_2 = 1/4$

Gryno funkcija neegzistuoja, šiuo atveju prie $\gamma_2 = 3$. Atvejis, kai γ_1, γ_2 yra nenulinės reikšmės, pavaizduotas 2.2 h) pav.

Grafike 2.3 pavaizduotos Gryno funkcijos, kai γ_i ir ξ_i yra nenuliniai. a)–c) pav. yra fiksuoti parametrai $\gamma_1 = 2$ ir $\gamma_2 = 4$, o d)–f) fiksuoti $\xi_1 = 2/3$ ir $\xi_2 = 1/4$. Visais atvejais Gryno funkcijų išvestinės turi trūkius tiesėse $s = \xi_i$, $i = 1, 2$ ir $s = x$. d)–f) atvejais Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga yra $12 - 4\gamma_1 - 3\gamma_2 - 5\gamma_1\gamma_2 \neq 0$. Vienas iš daugelio neegzistavimo taškų yra $\gamma_1 = -2$, $\gamma_2 = -\frac{20}{7}$. 2.3 d), e) pav. γ_1 ir γ_2 reikšmės artimos šioms reikšmėms.

Toliau panagrinėkime diferencialinę lygtį (3.5) su kraštinėmis nelokaliosiomis sąlygomis (3.7). Uždavinio $-u'' = f(x)$, $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$ nulis yra tikrinė reikšmė, o nenulinės konstantos – tikriniai vektoriai. Tuomet šio uždavinio Gryno funkcija neegzistuoja ir (3.5), (3.7) uždavinių Gryno funkcijas

2.3 lentelė. Diferencialinės lygties (3.5) su NKS (3.7) egzistavimo sąlygos

Atvejis	NKS	Gryno funkcijų egzistavimo sąlygos
(3.7a)	$u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1),\ u'(1) = \gamma_2 u'(\xi_2)$	$\vartheta = -\gamma_1(1-\gamma_2) \neq 0$
(3.7b)	$u'(0) = \gamma_1 u'(\xi_1),\ u'(1) = \gamma_2 u(\xi_2)$	$\vartheta = \gamma_2(1-\gamma_1) \neq 0$
(3.7c)	$u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1),\ u'(1) = \gamma_2 u(\xi_2)$	$\vartheta = \gamma_2 - \gamma_1 - \gamma_1\gamma_2(\xi_1 - \xi_2) \neq 0$
(3.7d)	$u'(0) = \gamma_1 u'(\xi_1),\ u'(1) = \gamma_2 u'(\xi_2)$	$\vartheta = 0$, Gryno funkcija neegzistuoja

negalima tiesiogiai išreikšti per uždavinio $-u'' = f(x)$, $u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$ klasikinę Gryno funkciją. Taip pat pastebėsime, kad (3.5), (3.7d) atveju Gryno funkcija neegzistuoja.

Paimkime klasikines kraštines sąlygas: (A) $u(0) - u'(0) = 0$, $u'(1) = 0$; (B) $u'(0) = 0$, $u(1) - u'(1) = 0$; (C) $u(0) - u'(0) = 0$, $u(1) - u'(1) = 0$. (3.5) diferencialinės lygties su šiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcijų išraiškas galima gauti iš 2.1 ir 2.2 lentelių (kai $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 0$, $\xi_1 = 0$ atveju (3.6g) arba (3.6h); kai $\gamma_1 = 0$, $\gamma_2 = 1$, $\xi_2 = 1$ atveju (3.6j) arba (3.6l); kai $\gamma_1 = 1$, $\gamma_2 = 1$, $\xi_1 = 0$, $\xi_2 = 1$ atveju (3.6d) arba (3.6g) arba (3.6j); atitinkamai):

$$\text{(A)}\quad G_4^{\mathrm{cl}}(x,s) = G_2^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{d}{dx}G_2^{\mathrm{cl}}(0,s) = \begin{cases} s+1, & s \leqslant x, \\ x+1, & s \geqslant x; \end{cases}$$

$$\text{(B)}\quad G_5^{\mathrm{cl}}(x,s) = G_3^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{d}{dx}G_3^{\mathrm{cl}}(1,s) = \begin{cases} -x, & s \leqslant x, \\ -s, & s \geqslant x; \end{cases}$$

$$\text{(C)}\quad G_6^{\mathrm{cl}}(x,s) = G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) - x\frac{d}{dx}G_1^{\mathrm{cl}}(0,s) + (x+1)\frac{d}{dx}G_1^{\mathrm{cl}}(1,s)$$
$$= \begin{cases} -x(s+1), & s \leqslant x, \\ -s(x+1), & s \geqslant x. \end{cases}$$

Diferencialinės lygties (3.5) su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (3.7) Gryno funkcijų egzistavimo sąlygos pateiktos 2.3 lentelėje.

(3.7a)–(3.7c) kraštines sąlygas galima perrašyti kita forma:

$$\begin{cases} u'(0) - u(0) = \langle k_1, u\rangle := \gamma_1 u(\xi_1) - u(0), \\ u'(1) = \langle k_2, u\rangle := \gamma_2 u'(\xi_2); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(0) = \langle k_1, u\rangle := \gamma_1 u'(\xi_1), \\ u'(1) - u(1) = \langle k_2, u\rangle := \gamma_2 u(\xi_2) - u(1); \end{cases}$$

$$\begin{cases} u'(0) - u(0) = \langle k_1, u\rangle := \gamma_1 u(\xi_1) - u(0), \\ u'(1) - u(1) = \langle k_2, u\rangle := \gamma_2 u(\xi_2) - u(1); \end{cases}$$

Tuomet iš (3.3) lygties (kurioje $\gamma_1 = \gamma_2 = 1$) pirmo uždavinio Gryno funkcija yra

$$\begin{aligned} G(x,s) = G_4^{\mathrm{cl}}(x,s) - \bigl(-1 - \gamma_2(-1)\bigr)\frac{1}{\vartheta}\bigl(\gamma_1 G_4^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s) - G_4^{\mathrm{cl}}(0,s)\bigr) \\ + \bigl(-1 - \gamma_1(x-\xi_1)\bigr)\frac{\gamma_1}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_4^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s) \end{aligned}$$

arba

$$\begin{aligned} G(x,s) = G_4^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{1}{\gamma_1}G_4^{\mathrm{cl}}(0,s) - G_4^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s) \\ - \bigl(1 + \gamma_1(x-\xi_1)\bigr)\frac{\gamma_2}{\vartheta}\frac{d}{dx}G_4^{\mathrm{cl}}(\xi_2,s). \end{aligned}$$

Įstatę G_4^{cl} į šią lygtį, gauname (3.5), (3.7a) uždavinio Gryno funkcija:

$$\begin{aligned} G(x,s) = \frac{1}{\gamma_1} - \begin{cases} s, & s \leqslant x, \\ x, & s \geqslant x, \end{cases} - \begin{cases} s, & s \leqslant \xi_1, \\ \xi_1, & s \geqslant \xi_1, \end{cases} \\ + \bigl(1 + \gamma_1(x-\xi_1)\bigr)\frac{\gamma_2}{\gamma_1(1-\gamma_2)} \begin{cases} 0, & s \leqslant \xi_2, \\ 1, & s \geqslant \xi_2. \end{cases} \end{aligned}$$

(3.5), (3.7a)–(3.7c) uždavinių Gryno funkcijų išraiškos pateiktos 2.4 lentelėje.

2.2 išvada. *Jeigu* (3.5), (3.6) *ir* (3.5), (3.7) *uždavinių Gryno funkcijos egzistuoja, tai jas galima išreikšti per klasikines Gryno funkcijas ir jų išvestines.*

2.4 lentelė. Diferencialinės lygties (3.5) su NKS (3.7) Gryno funkcijos

Atvejis	NKS	Gryno funkcija $G(x, s)$
(3.7a)	$u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1)$, $u'(1) = \gamma_2 u'(\xi_2)$	$G_4^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{1}{\gamma_1} G_4^{\mathrm{cl}}(0,s) - G_4^{\mathrm{cl}}(\xi_1,s)$ $- (1 + \gamma_1(x - \xi_1)) \frac{\gamma_2}{\vartheta} \frac{d}{dx} G_4^{\mathrm{cl}}(\xi_2, s)$
(3.7b)	$u'(0) = \gamma_1 u'(\xi_1)$, $u'(1) = \gamma_2 u(\xi_2)$	$G_5^{\mathrm{cl}}(x,s) + (1 + \gamma_2(x - \xi_2)) \frac{\gamma_1}{\vartheta} \frac{d}{dx} G_5^{\mathrm{cl}}(\xi_1, s)$ $- G_5^{\mathrm{cl}}(\xi_2, s) + \frac{1}{\gamma_2} G_5^{\mathrm{cl}}(1, s)$
(3.7c)	$u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1)$, $u'(1) = \gamma_2 u(\xi_2)$	$G_6^{\mathrm{cl}}(x,s) + (1 + \gamma_2(x - \xi_2)) \frac{\gamma_1}{\vartheta} G_6^{\mathrm{cl}}(\xi_1, s) - G_6^{\mathrm{cl}}(0, s)$ $- (1 + \gamma_1(x - \xi_1)) \frac{\gamma_2}{\vartheta} G_6^{\mathrm{cl}}(\xi_2, s) - G_6^{\mathrm{cl}}(1, s)$

3.2. Uždavinys su dviem integralinio tipo NKS

Panagrinėkime uždavinį

$$-u'' = f(x), \quad x \in (0, 1), \tag{3.12}$$

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 \alpha_1(x) u(x)\, dx, \qquad u(1) = \gamma_2 \int_0^1 \alpha_2(x) u(x)\, dx, \tag{3.13}$$

čia $\alpha_1, \alpha_2 \in L^1(0,1)$. Šiuo atveju $l_1(x) = u(0)$, $l_2(x) = u(1)$, $\langle k_1(x), u(x)\rangle = \int_0^1 \alpha_1(x) u(x)\, dx$, $\langle k_2(x), u(x)\rangle = \int_0^1 \alpha_2(x) u(x)\, dx$ ir $D(x, y) = y - x$. Taigi, šiam uždaviniui gauname, kad

$$\vartheta := D(L_1, L_2) = 1 - \gamma_1 \int_0^1 \alpha_1(x)(1 - x)\, dx - \gamma_2 \int_0^1 \alpha_2(x) x\, dx$$
$$- \gamma_1 \gamma_2 \int_0^1 \int_0^1 \alpha_1(x) \alpha_2(y)(x - y)\, dx\, dy.$$

Be to, iš (3.3) lygties matyti, kad

$$G(x,s) = G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{\gamma_1 (1 - x + \gamma_2 \int_0^1 \alpha_2(t)(x - t)\, dt)}{\vartheta} \cdot \int_0^1 \alpha_1(t) G_1^{\mathrm{cl}}(t, s)\, dt$$
$$+ \frac{\gamma_2 (x - \gamma_1 \int_0^1 \alpha_1(t)(x - t)\, dt)}{\vartheta} \cdot \int_0^1 \alpha_2(t) G_1^{\mathrm{cl}}(t, s)\, dt,$$

kai $\vartheta \neq 0$. Toliau pateiksime du pavyzdžius su svorio funkcijomis α_1 ir α_2.

Jeigu $\alpha_1 = \alpha_2 = 1$, tai nelokaliosios kraštinės sąlygos (3.13) tampa

$$u(0) = \gamma_1 \int_0^1 u(x)\,dx, \qquad u(1) = \gamma_2 \int_0^1 u(x)\,dx,$$

ir Gryno funkcija, kai $\vartheta = 1 - (\gamma_1 + \gamma_2)/2 \neq 0$, yra

$$\begin{aligned} G(x,s) &= G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{\gamma_1(1-x)+\gamma_2 x}{\vartheta} \cdot \int_0^1 G_1^{\mathrm{cl}}(t,s)\,dt \\ &= \begin{cases} s(1-x), & s \leqslant x, \\ x(1-s), & x \leqslant s, \end{cases} + \frac{\gamma_1(1-x)+\gamma_2 x}{2-(\gamma_1+\gamma_2)} \cdot s(1-s). \end{aligned}$$

Uždavinio su viena klasikine kraštine sąlyga ($\gamma_1 = 0$) ir kita integraline kraštine sąlyga $u(1) = \gamma_2 \int_{\xi_0}^{\xi_1} u(x)\,dx$ (šiuo atveju $\alpha_2(x)$ charakteristinė funkcija intervale $[\xi_0, \xi_1] \subset [0,1]$) Gryno funkcija yra:

$$G(x,s) = G_1^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{\gamma_2 x}{\vartheta} \cdot \int_{\xi_0}^{\xi_1} G_1^{\mathrm{cl}}(t,s)\,dt, \quad \vartheta = 1 - \gamma_2\bigl(\xi_1^2 - \xi_0^2\bigr)/2 \neq 0.$$

Šiuo atveju Gryno funkcija yra sudėtingesnė

$$\begin{aligned} G(x,s) = &\begin{cases} s(1-x), & s \leqslant x, \\ x(1-s), & x \leqslant s, \end{cases} + \frac{\gamma_2 x}{1-\gamma_2(\xi_1^2-\xi_0^2)/2} \\ &\times \begin{cases} s((1-\xi_0)^2 - (1-\xi_1)^2)/2, & s \leqslant \xi_0, \\ (1-s)(s^2-\xi_0^2)/2 + s((1-s)^2-(1-\xi_1)^2)/2, & \xi_0 \leqslant s \leqslant \xi_1, \\ (1-s)(\xi_1^2-\xi_0^2)/2, & \xi_1 \leqslant s. \end{cases} \end{aligned}$$

3.3. Uždavinys su operatoriumi $\mathcal{L}u := -u'' + u$

Anksčiau pateiktuose pavyzdžiuose nagrinėjome uždavinius su operatoriumi $\mathcal{L}u := -u''$. Dabar panagrinėsime uždavinį, kai $\mathcal{L}u := -u'' + u$:

$$-u'' + u = f(x), \tag{3.14}$$

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = \gamma u(\xi). \tag{3.15}$$

Išsprendę homogeninę diferencialinę lygtį su dviejų tipų pradinėmis sąlygomis

$$\begin{cases} -u'' + u = 0, \\ u(0) = 0, \\ u'(0) = 1, \end{cases} \quad \text{ir} \quad \begin{cases} -u'' + u = 0, \\ u(0) = 1, \\ u'(0) = 0, \end{cases}$$

gauname du tiesiškai nepriklausomus sprendinius $u^1(x) = \operatorname{sh} x$ ir $u^2(x) = \operatorname{ch} x$. Šiuo atveju

$$D[u^1, u^2](x, y) = \begin{vmatrix} \operatorname{sh} x & \operatorname{sh} y \\ \operatorname{ch} x & \operatorname{ch} y \end{vmatrix} = \operatorname{sh}(x - y).$$

Tuomet iš (3.3) ir (3.4) lygčių gauname $\vartheta = \gamma \operatorname{sh} \xi - \operatorname{sh} 1$. Jei $\gamma \operatorname{sh} \xi \neq \operatorname{sh} 1$, tai

$$G(x, s) = G_7^{\mathrm{cl}}(x, s) + \frac{\gamma \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1 - \gamma \operatorname{sh} \xi} \cdot G_7^{\mathrm{cl}}(\xi, s), \tag{3.16}$$

čia $G_7^{\mathrm{cl}}(x, s)$ yra (3.14)–(3.15) uždavinio, kai $\gamma = 0$, Gryno funkcija, t. y.

$$G_7^{\mathrm{cl}}(x, s) = \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh}(1 - s)}{\operatorname{sh} 1} + \begin{cases} \operatorname{sh}(s - x), & s \leqslant x, \\ 0, & s \geqslant x. \end{cases}$$

Įstatę $G_7^{\mathrm{cl}}(x, s)$ į (3.16) lygtį, gauname Gryno funkcijos išraišką

$$G(x, s) = \frac{\operatorname{sh} x \cdot \operatorname{sh}(1 - s)}{\operatorname{sh} 1 - \gamma \operatorname{sh} \xi} + \begin{cases} \operatorname{sh}(s - x), & s \leqslant x, \\ 0, & s \geqslant x, \end{cases}$$

$$+ \frac{\gamma \operatorname{sh} x}{\operatorname{sh} 1 - \gamma \operatorname{sh} \xi} \cdot \begin{cases} \operatorname{sh}(s - x), & s \leqslant \xi, \\ 0, & s \geqslant \xi. \end{cases}$$

3.4. Uždavinys su operatoriumi $\mathcal{L}u := -u'' - u$

Panagrinėkime

$$-u'' - u = f(x), \tag{3.17}$$

$$u(0) = 0, \qquad u(1) = \gamma u(\xi). \tag{3.18}$$

Analogiškai kaip praeitame pavyzdyje fundamentalioji sistema yra $u_1(x) = \sin x$, $u_2(x) = \cos x$. Šiuo atveju

$$D\left[u^1, u^2\right](x,y) = \begin{vmatrix} \sin x & \sin y \\ \cos x & \cos y \end{vmatrix} = \sin(x-y).$$

Iš (3.4) lygties gauname $\vartheta = \gamma \sin\xi - \sin 1$. Uždavinio $-u'' - u = f(x)$, $u(0) = 0$, $u(1) = 0$, klasikinė Gryno funkcija turi formą

$$G_8^{\mathrm{cl}}(x,s) = \frac{\sin x \cdot \sin(1-s)}{\sin 1} + \begin{cases} \sin(s-x), & s \leqslant x, \\ 0, & s \geqslant x. \end{cases}$$

Jei $\gamma \sin\xi \neq \sin 1$, tai iš (3.3) lygties matyti, kad

$$\begin{aligned} G(x,s) &= G_8^{\mathrm{cl}}(x,s) + \frac{\gamma \sin x}{\sin 1 - \gamma \sin\xi} \cdot G_8^{\mathrm{cl}}(\xi, s) \\ &= \frac{\sin x \cdot \sin(1-s)}{\sin 1 - \gamma \sin\xi} + \begin{cases} \sin(s-x), & s \leqslant x, \\ 0, & s \geqslant x, \end{cases} \\ &+ \frac{\gamma \sin x}{\sin 1 - \gamma \sin\xi} \cdot \begin{cases} \sin(s-\xi), & s \leqslant \xi, \\ 0, & s \geqslant \xi. \end{cases} \end{aligned}$$

3.5. Uždavinys su operatoriumi $\mathcal{L}u := -u'' - \frac{2x}{1+x^2}u'$

Panagrinėkime antros eilės uždavinį su dviem nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$-u'' - \frac{2x}{1+x^2}u' = f, \quad x \in (0,1), \tag{3.19}$$

$$u(0) = \delta u(\xi), \quad \xi \in (0,1), \qquad u(1) = \gamma u(\nu), \quad \nu \in (0,1). \tag{3.20}$$

(3.19) homogeninės lygties fundamentalioji sistema yra $u_1(x) = 4/\pi$, $u_2(x) = \operatorname{artg} x$. Uždavinio su pradinėmis sąlygomis $u(0) = u'(0) = 0$ Gryno funkcija lygi

$$G^c(x,s) = H(x-s)(\operatorname{artg} s - \operatorname{artg} x)\left(1+s^2\right).$$

(3.19) diferencialinės lygties su Dirichlė kraštinėmis sąlygomis $u(0) = u(1) = 0$ Gryno funkcija turi išraišką

$$G^d(x,s) = G^c(x,s) - \frac{4}{\pi} \operatorname{artg} x \cdot G^c(1,s). \tag{3.21}$$

Uždavinio su (3.20) nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkcija egzistuoja, jei $\vartheta := D(L_1, L_2)[u^1, u^2] = (1-\delta) - \gamma(1-\delta)\frac{4}{\pi}\operatorname{artg}\nu + \delta(1-\gamma)\frac{4}{\pi}\operatorname{artg}\xi \neq 0$ ir

$$G(x,s) = G^d(x,s) - \delta G^d(\xi,s)\left((1-\gamma)\frac{4}{\pi}\operatorname{artg}x - 1 + \frac{4}{\pi}\gamma\operatorname{artg}\nu\right)/\vartheta + \gamma G^d(\nu,s)\left((1-\delta)\frac{4}{\pi}\operatorname{artg}x + \frac{4}{\pi}\delta\operatorname{artg}\xi\right)/\vartheta. \tag{3.22}$$

Taip pat pasinaudojant 2.1 lema, uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkciją galima išreikšti per pradinio uždavinio Gryno funkciją:

$$G(x,s) = G^c(x,s) - \delta G^c(\xi,s)\left((1-\gamma)\frac{4}{\pi}\operatorname{artg}x - 1 + \frac{4}{\pi}\gamma\operatorname{artg}\nu\right)/\vartheta - \big(G^c(1,s) - \gamma G^c(\nu,s)\big)\left((1-\delta)\frac{4}{\pi}\operatorname{artg}x + \frac{4}{\pi}\delta\operatorname{artg}\xi\right)/\vartheta. \tag{3.23}$$

Įstatę G^c į (3.23) lygtį, gauname Gryno funkcijos išraišką.

Nagrinėkime (3.20) kraštinių sąlygų atskirą atvejį, kai $\delta = 0$, $\gamma = 2$, $\nu = \sqrt{3}/3$, t. y. $u(0) = 0$, $u(1) = 2u(\sqrt{3}/3)$. Šiuo atveju

$$G(x,s) = 3\big(1+s^2\big)\operatorname{artg}x\left(1 - \frac{4}{\pi}\operatorname{artg}s\right) + \big(1+s^2\big)\begin{cases}\operatorname{artg}x - \operatorname{artg}s, & x > s,\\ 0, & x \leqslant s,\end{cases} - 6\big(1+s^2\big)\operatorname{artg}x\begin{cases}\frac{4}{6} - \frac{4}{\pi}\operatorname{artg}s, & s < \sqrt{3}/3,\\ 0, & s \geqslant \sqrt{3}/3.\end{cases}$$

4. Antrojo skyriaus išvados

Apibendrinant šį skyrių galima teigti, kad Gryno funkciją stacionariajam uždaviniui su įvairiomis sąlygomis galima išreikšti per panašaus uždavinio Gryno funkciją, ir šis sąryšis pateiktas (2.8) formulėje. Sąlyga $D(L_1, L_2) \neq 0$ tenkina uždavinio su funkcinėmis sąlygomis būtiną ir pakankamą Gryno funkcijos egzistavimo sąlygą. (2.8) formulė gali būti pritaikyta plačiai problemų klasei su nepastoviais koeficientais ir skirtingomis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

3 skyrius

Antros eilės diskretusis uždavinys

Šiame skyriuje nagrinėjamas antros eilės diskretusis uždavinys su dviem sąlygomis, kurios yra aprašytos tiesiškai nepriklausomais tiesiniais funkcionalais. Surandamas šio uždavinio sprendinys ir pateikiamos Gryno funkcijos išraiška ir egzistavimo sąlyga, jei žinoma homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Užrašomas uždavinių su ta pačia lygtimi ir skirtingomis sąlygomis dviejų Gryno funkcijų sąryšis. Gauti rezultatai pritaikomi uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Pagrindiniai šio skyriaus rezultatai išspausdinti straipsnyje [A4].

Šiame skyriuje nagrinėsime diskrečiąją lygtį

$$a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \tag{0.1}$$

čia $a^2, a^0 \neq 0$. Ši lygtis yra analogiška tiesinei diferencialinei lygčiai

$$b_2(x)u''(x) + b_1(x)u'(x) + b_0(x)u(x) = f(x).$$

Siekiant įvertinti kraštinio uždavinio su diskrečiąja lygtimi sprendinį galima jį išreikšti per Gryno funkciją [117]. Bachvalovas ir bendraautoriai [10] nagrinėjo Gryno funkciją diskrečiajam kraštiniam uždaviniui paprasčiausiu atveju (Dirichlė kraštinis uždavinys).

Monografijose [118, 119] nagrinėjami tiesioginis metodas ir iteracinis metodas diskrečiųjų lygčių sprendimui bei jų pritaikymas skirtuminėms lygtims. Aprašyti įvairūs perkelties algoritmo (monotoniško, nemonotoniško, ciklinio ir t. t.) variantai vienmatėms 3-taškėms lygtims. Be to, nustatyti šiuolaikiniai ekonomiški iteraciniai metodai sprendžiant stačiakampyje Puasono skirtumines lygtis su įvairaus tipo kraštinėmis sąlygomis.

Chungas ir Yau [24] tyrinėjo diskrečiąsias Gryno funkcijas ir jų sąryšį su diskrečiosiomis Laplaso lygtimis. Ieškant Gryno funkcijų, jie nagrinėjo keletą metodų. Liu ir bendraautoriai [82] pateikė diskrečiosios Gryno funkcijos įvertį.

(0.1) lygties Gryno funkcijų išraiškų ieškosime naudodami konstantų varijavimo metodo diskrečiuoju variantu [119]. Šio metodo pranašumas tame, kad Gryno funkciją galima sukonstruoti nehomogeninei lygčiai (0.1) su kintamaisiais koeficientais a^2, a^1, a^0 ir skirtingomis sąlygomis, pavyzdžiui, nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis. Šio skyriaus pagrindiniai rezultatai suformuluoti 3.1 teoremoje, 3.5 lemoje, ir 3.2 teoremoje. 3.1 teorema naudojama siekiant gauti lygties su diskrečiuoju operatoriumi ir dviem tiesiškai nepriklausomomis sąlygomis sprendinius, jei žinoma homogeninės lygties fundamentalioji sistema. 3.2 teorema pateikia Gryno funkcijos išraišką ir leidžia ją surasti lygčiai su dviem sąlygomis, kai žinoma tos pačios lygties, bet su kitomis sąlygomis, Gryno funkcija. 3.5 lema yra atskiras šios teoremos atvejis, kai žinoma uždavinio su diskrečiosiomis (pradinėmis) sąlygomis Gryno funkcija. Šiame skyriuje rezultatus pritaikysime kraštiniams uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis: iš pradžių sukonstruosime Gryno funkciją uždaviniui su klasikinėmis kraštinėmis sąlygoms; uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkciją sukonstruosime arba tiesiogiai (3.5 lema), arba per klasikinio uždavinio Gryno funkciją (3.2 teorema). Taip pat pateiksime Gryno funkcijos būtinąją ir pakankamą egzistavimo sąlygą. Šio darbo rezultatai gali būti naudojami kvazitiesinių uždavinių tyrime.

1. Žymėjimai

Apibrėžkime determinantų savybes. Tegul $\mathbb{K}=\mathbb{R}$ arba $\mathbb{K}=\mathbb{C}$ ir $1<n\in\mathbb{N}$. Visiems $a_j^i, b_j^i\in\mathbb{K}$, $i,j=1,2$, yra teisinga lygybė

$$\begin{vmatrix} \begin{vmatrix} b_1^1 & a_1^1 \\ b_1^2 & a_1^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_2^1 & a_1^1 \\ b_2^2 & a_1^2 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} b_1^1 & a_2^1 \\ b_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} b_2^1 & a_2^1 \\ b_2^2 & a_2^2 \end{vmatrix} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} b_1^1 & b_2^1 \\ b_1^2 & b_2^2 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} a_1^1 & a_2^1 \\ a_1^2 & a_2^2 \end{vmatrix}. \tag{1.1}$$

Įrodymas išplaukia iš Laplaso skleidinio teoremos [107].

Tegul $X=\{0,1,\dots,n\}$, $\tilde{X}=\{0,1,\dots,n-2\}$. $F(X):=\{u\mid u:X\to\mathbb{K}\}$ yra realių (kompleksinių) funkcijų tiesinė erdvė. Tarkime, kad $F(X)\cong\mathbb{K}^{n+1}$ ir funkcijos δ^i, $i=0,1,\dots,n$, čia $\delta^i(j)=\delta_i^j$, $j\in X$ (δ_m^n yra Kronekerio simbolis: $\delta_m^n=1$, jei $m=n$, ir $\delta_m^n=0$, jei $m\neq n$), formuoja šios tiesinės erdvės bazę. Taigi, visiems $u\in F(X)$ egzistuoja vienintelis rinkinys $(u_1,\dots,u_n)\in\mathbb{K}^n$, kad $u=\sum_{k=0}^n u_k\delta^k$. Paimkime vektorinę funkciją $\boldsymbol{u}=[u^1,u^2]\in F^2(X)$, ir nagrinėkime matricinę funkciją $[\boldsymbol{u}]:X^2\to M_{2\times2}(\mathbb{K})\cong\mathbb{K}^4$ ir determinantą $D[\boldsymbol{u}]_{ij}:X^2\to\mathbb{K}$:

$$[\boldsymbol{u}]_{ij}=\left[u^1,u^2\right]_{ij}:=\begin{pmatrix} u_i^1 & u_j^1 \\ u_i^2 & u_j^2 \end{pmatrix},$$

$$D[\boldsymbol{u}]_{ij}=\det[\boldsymbol{u}]_{ij}=\det\left[u^1,u^2\right]_{ij}:=\begin{vmatrix} u_i^1 & u_j^1 \\ u_i^2 & u_j^2 \end{vmatrix}.$$

Diskrečiųjų lygčių teorijoje Vronskio determinantas $W[\boldsymbol{u}]_i$ žymimas taip:

$$W[\boldsymbol{u}]_j:=\begin{vmatrix} u_{j-1}^1 & u_{j-1}^2 \\ u_j^1 & u_j^2 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} u_{j-1}^1 & u_j^1 \\ u_{j-1}^2 & u_j^2 \end{vmatrix}=D[\boldsymbol{u}]_{j-1,j},\quad j=1,\dots,n. \tag{1.2}$$

Tegul (kai $W[\boldsymbol{u}]_{j+2}\neq0$)

$$V[\boldsymbol{u}]_{ij}:=\frac{D[\boldsymbol{u}]_{j+1,i}}{W[\boldsymbol{u}]_{j+2}}=\frac{D[\boldsymbol{u}]_{j+1,i}}{D[\boldsymbol{u}]_{j+1,j+2}},\quad i\in X,\ j=-1,0,1,\dots,n-2.$$

Tarkime, $V[\boldsymbol{u}]_{i,n-1}=V[\boldsymbol{u}]_{in}=0$, $i\in X$. Pastebėsime, kad $V[\boldsymbol{u}]_{j+1,j}=0$, $V[\boldsymbol{u}]_{j+2,j}=1$, kai $j\in\tilde{X}$.

Jei $[\bar{\boldsymbol{u}}]_{ij} = \mathbf{P} \cdot [\boldsymbol{u}]_{ij}$, čia $\mathbf{P} = (p_n^m) \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, tai

$$\det[\bar{\boldsymbol{u}}]_{ij} = \det[\boldsymbol{u}]_{ij} \cdot \det \mathbf{P}, \qquad W[\bar{\boldsymbol{u}}]_i = W[\boldsymbol{u}]_i \cdot \det \mathbf{P}. \tag{1.3}$$

Jei $W[\boldsymbol{u}] \neq 0$ ir $\mathbf{P} \in GL_2(\mathbb{K}) := \{\mathbf{P} \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})\colon \det \mathbf{P} \neq 0\}$, tuomet $V[\bar{\boldsymbol{u}}] = V[\boldsymbol{u}]$. Taigi funkcija $V[\boldsymbol{u}]_{ij}$ yra invariantinė bazės $\{u^1, u^2\}$ atžvilgiu ir toliau naudosime žymėjimą V_{ij}.

3.1 lema. *Jei $\boldsymbol{w} = [w^1, w^2] \in F^2(X)$, tai yra teisinga lygybė*

$$\begin{vmatrix} D[\boldsymbol{w}]_{ik} & D[\boldsymbol{w}]_{jk} \\ D[\boldsymbol{w}]_{il} & D[\boldsymbol{w}]_{jl} \end{vmatrix} = D[\boldsymbol{w}]_{ij} \cdot D[\boldsymbol{w}]_{kl}, \quad i, j, k, l \in X. \tag{1.4}$$

Įrodymas. Jei (1.1) lygtyje laikome, kad $b_1^m = w_i^m$, $b_2^m = w_j^m$, $a_1^m = w_k^m$, $a_2^m = w_l^m$, $m = 1, 2$, gauname (1.4) lygybę. $\square$

3.1 išvada. *Jei $\boldsymbol{w} = [w^1, w^2] \in F(X^2)$, tai yra teisinga lygybė*

$$W\big[D[\boldsymbol{w}]_{\cdot k}, D[\boldsymbol{w}]_{\cdot l}\big]_i := \begin{vmatrix} D[\boldsymbol{w}]_{i-1,k} & D[\boldsymbol{w}]_{ik} \\ D[\boldsymbol{w}]_{i-1,l} & D[\boldsymbol{w}]_{il} \end{vmatrix} = W[\boldsymbol{w}]_i \cdot D[\boldsymbol{w}]_{kl}, \tag{1.5}$$

$k, l \in X$, $i = 1, \ldots, n$.

Erdvėje $F(X)$ panagrinėkime tiesinių funkcionalų erdvę $F^*(X)$. Funkcionalų reikšmes f, priklausančias nuo funkcijos u, žymėsime $\langle f, u\rangle$, $\langle f^k, u_k\rangle$. Funkcionalai δ_j, $j = 0, 1, \ldots, n$ formuoja bazės $\{\delta^i\}_{i=0}^n$ dualiąją bazę. Taigi $\langle \delta_j, u\rangle = u_j$, o $\langle f, u\rangle = \sum_{k=0}^n f^k u_k$. Jei $f \in F^*(X)$, $g \in F^*(Y)$, čia $X = \{0, 1, \ldots, n\}$ ir $Y = \{0, 1, \ldots, m\}$, tai tiesinis funkcionalas (dekartinė sandauga) $f \cdot g \in F^*(X \times Y)$ yra:

$$\big\langle f^k \cdot g^l, w_{kl}\big\rangle := \big\langle f^k, \big\langle g^l, w_{kl}\big\rangle\big\rangle, \quad w_{kl} \in F(X \times Y).$$

Apibrėžkime matricą

$$(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] := \begin{pmatrix} \langle f, w^1\rangle & \langle g, w^1\rangle \\ \langle f, w^2\rangle & \langle g, w^2\rangle \end{pmatrix}$$

ir determinantą

$$D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] := \left\langle f^k \cdot g^l, D[\boldsymbol{w}]_{kl} \right\rangle = \begin{vmatrix} \langle f, w^1 \rangle & \langle g, w^1 \rangle \\ \langle f, w^2 \rangle & \langle g, w^2 \rangle \end{vmatrix} = \det(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}],$$

čia $\boldsymbol{f} = (f, g)$, $\boldsymbol{w} = [w^1, w^2]$. Pavyzdžiui,

$$D(f, \delta_j)[\boldsymbol{w}] = \left\langle f^k \cdot \delta_j^l, D[\boldsymbol{w}]_{kl} \right\rangle = \begin{vmatrix} \langle f, w^1 \rangle & w_j^1 \\ \langle f, w^2 \rangle & w_j^2 \end{vmatrix},$$

$$D(\delta_i, \delta_j)[\boldsymbol{w}] = \left\langle \delta_i^k \cdot \delta_j^l, D[\boldsymbol{w}]_{kl} \right\rangle = D[\boldsymbol{w}]_{ij},$$

$$\begin{aligned} D(\boldsymbol{f})\big[\boldsymbol{w}, w^0\big]_i &:= D(\boldsymbol{f}, \delta_i)\big[\boldsymbol{w}, w^0\big] = \left\langle f \cdot g \cdot \delta_i, D\big[\boldsymbol{w}, w^0\big] \right\rangle \\ &= \begin{vmatrix} \langle f, w^1 \rangle & \langle g, w^1 \rangle & w_i^1 \\ \langle f, w^2 \rangle & \langle g, w^2 \rangle & w_i^2 \\ \langle f, w^0 \rangle & \langle g, w^0 \rangle & w_i^0 \end{vmatrix}. \end{aligned}$$

Tarkime, funkcijos $w^1, w^2 \in F(X)$ yra tiesiškai nepriklausomos ir $\operatorname{span}\{w^1, w^2\} = F(X)$.

3.2 lema. *Funkcionalai f, g yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai $D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] \neq 0$.*

Įrodymas. Funkcionalai f, g yra tiesiškai nepriklausomi, jei $\alpha_1 f + \alpha_2 g = 0$, kai $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$. Tada $\langle \alpha_1 f + \alpha_2 g, w \rangle = 0$ visiems $w \in \operatorname{span}\{w^1, w^2\}$. Funkcijų sistema $\{w^1, w^2\}$ yra bazė ir minėta lygybė yra ekvivalenti sąlygai

$$\alpha_1 \begin{pmatrix} \langle f, w^1 \rangle \\ \langle f, w^2 \rangle \end{pmatrix} + \alpha_2 \begin{pmatrix} \langle g, w^1 \rangle \\ \langle g, w^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \langle \alpha_1 f + \alpha_2 g, w^1 \rangle \\ \langle \alpha_1 f + \alpha_2 g, w^2 \rangle \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Tuomet funkcionalai f, g yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai vektoriai

$$\begin{pmatrix} \langle f, w^1 \rangle \\ \langle f, w^2 \rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} \langle g, w^1 \rangle \\ \langle g, w^2 \rangle \end{pmatrix}$$

yra tiesiškai nepriklausomi. Bet šie vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai

$$\begin{vmatrix} \langle f, w^1 \rangle & \langle g, w^1 \rangle \\ \langle f, w^2 \rangle & \langle g, w^2 \rangle \end{vmatrix} \neq 0. \qquad \square$$

Jei $\bar{\boldsymbol{f}} = \boldsymbol{f}\mathbf{P}_f$, $\bar{\boldsymbol{w}} = \mathbf{P}_w\boldsymbol{w}$, čia $\mathbf{P}_f, \mathbf{P}_w \in M_{2\times 2}(\mathbb{K})$, tai

$$D(\bar{\boldsymbol{f}})[\bar{\boldsymbol{w}}] = \det \mathbf{P}_w \cdot D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] \cdot \det \mathbf{P}_f, \tag{1.6}$$

$$D(\bar{\boldsymbol{f}}, h)\big[\bar{\boldsymbol{w}}, w^0\big] = \det \mathbf{P}_w \cdot D(\boldsymbol{f}, h)\big[\boldsymbol{w}, w^0\big] \cdot \det \mathbf{P}_f. \tag{1.7}$$

2. Specialioji bazė dvimatėje sprendinių erdvėje

Panagrinėkime homogeninę tiesinę diskrečiąją lygtį

$$\mathcal{L}u := a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = 0, \quad i \in \tilde{X}, \tag{2.1}$$

čia $a^2, a^0 \neq 0$. Tegul $S \subset F(X)$ yra sprendinių dvimatė tiesinė erdvė ir $\{u^1, u^2\}$ yra šios tiesinės erdvės fiksuota bazė. Panagrinėkime lygtis:

$$\langle L_1, u\rangle = 0, \qquad \langle L_2, u\rangle = 0, \quad u \in S, \tag{2.2}$$

čia $L_1, L_2 \in S^*$ yra tiesiškai nepriklausomi tiesiniai funkcionalai ir pažymėkime $\boldsymbol{L} = (L_1, L_2)$. Įveskime naujas funkcijas

$$\bar{v}_i^1 := D(\delta_i, L_2)[\boldsymbol{u}], \qquad \bar{v}_i^2 := D(L_1, \delta_i)[\boldsymbol{u}]. \tag{2.3}$$

Šioms funkcijoms $\langle L_m, \bar{v}^n\rangle = \delta_m^n D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]$, $m, n = 1, 2$, t. y. $\bar{v}^n \in \operatorname{Ker} L_m$, $m \neq n$. Taigi funkcija $\bar{v}^1$ tenkina lygtį $\langle L_2, u\rangle = 0$, o funkcija $\bar{v}^2$ tenkina $\langle L_1, u\rangle = 0$. $\{u^1, u^2\}$ bazėje funkcijų $\bar{v}^1$ ir $\bar{v}^2$ komponentės atitinkamai yra

$$\begin{pmatrix} \langle L_2, u^2\rangle \\ -\langle L_2, u^1\rangle \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} -\langle L_1, u^2\rangle \\ \langle L_1, u^1\rangle \end{pmatrix}.$$

Tuomet gauname, kad funkcijos $\bar{v}^1$, $\bar{v}^2$ yra tiesiškai nepriklausomos tada ir tik tada, kai

$$\begin{vmatrix} \langle L_2, u^2\rangle & -\langle L_1, u^2\rangle \\ -\langle L_2, u^1\rangle & \langle L_1, u^1\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle \end{vmatrix} \neq 0.$$

Bet šis determinantas lygus nuliui tada ir tik tada, kai $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = 0$. Šiuos rezultatus ir 3.2 lemą apibendrinsime lemoje.

3.3 lema. *Tegul* $\{u^1, u^2\}$ *yra tiesinės erdvės* S *bazė. Tada šie teiginiai yra ekvivalentūs*:

a) *funkcionalai* L_1, L_2 *yra tiesiškai nepriklausomi*;

b) *funkcijos* $\bar{v}^1$, $\bar{v}^2$ *yra tiesiškai nepriklausomos*;

c) $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$.

(1.1) formulėje paimkime $b_1^m = u_i^m$, $b_2^m = u_j^m$, $a_n^m = \langle L_n, u^m \rangle$, $m, n = 1, 2$. Tada

$$\begin{vmatrix} D(\delta_i, L_1)[\boldsymbol{u}] & D(\delta_j, L_1)[\boldsymbol{u}] \\ D(\delta_i, L_2)[\boldsymbol{u}] & D(\delta_j, L_2)[\boldsymbol{u}] \end{vmatrix} = D[\boldsymbol{u}]_{ij} \cdot D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}].$$

Šios lygybės kairioji pusė lygi

$$\begin{vmatrix} D(\delta_i, L_2)[\boldsymbol{u}] & D(\delta_j, L_2)[\boldsymbol{u}] \\ D(L_1, \delta_i)[\boldsymbol{u}] & D(L_1, \delta_j)[\boldsymbol{u}] \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \bar{v}_i^1 & \bar{v}_j^1 \\ \bar{v}_i^2 & \bar{v}_j^2 \end{vmatrix}.$$

Iš (2.3) lygybės gauname, kad

$$D[\bar{\boldsymbol{v}}] = D[\boldsymbol{u}] \cdot D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]. \tag{2.4}$$

Analogiškai

$$W[\bar{\boldsymbol{v}}] = W[\boldsymbol{u}] \cdot D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]. \tag{2.5}$$

3.4 lema. *Tegul* $\{u^1, u^2\}$ *yra* (2.1) *homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Tada* (2.5) *lygybė yra teisinga ir*

$$W[\bar{\boldsymbol{v}}] \neq 0 \quad \Leftrightarrow \quad D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0.$$

3.3 lemos teiginiai yra ekvivalentūs sąlygai $W[\bar{\boldsymbol{v}}] \neq 0$.

3.2 išvada. *Jeigu funkcionalai* L_1, L_2 *yra tiesiškai nepriklausomi, t. y.* $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$, *ir*

$$v_i^1 := \frac{D(\delta_i, L_2)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \qquad v_i^2 := \frac{D(L_1, \delta_i)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \tag{2.6}$$

t. y. $\boldsymbol{v} = \bar{\boldsymbol{v}}/D(\boldsymbol{L})$, *tai dvi bazės* $\{v^1, v^2\}$ *ir* $\{L_1, L_2\}$ *yra biortogonaliosios*:

$$\left\langle L_m, v^n \right\rangle = \delta_m^n, \quad m, n = 1, 2, \tag{2.7}$$

ir

$$D[\boldsymbol{v}] = \frac{D[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})}, \qquad W[\boldsymbol{v}] = \frac{W[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})}, \qquad V[\boldsymbol{v}] = V[\boldsymbol{u}]. \tag{2.8}$$

3.1 pastaba. 3.3 lemos teiginiai yra teisingi, jei vietoj $\{\bar{v}^1, \bar{v}^2\}$ paimsime $\{v^1, v^2\}$.

3.2 pastaba. Jeigu $\{\bar{u}^1, \bar{u}^2\}$ yra kita fundamentalioji sistema, ir $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{P}\boldsymbol{u}$, čia $\mathbf{P} \in GL_2(\mathbb{K})$, tai

$$\frac{D(\delta_i, L_2)[\bar{\boldsymbol{u}}]}{D(\boldsymbol{L})[\bar{\boldsymbol{u}}]} = \frac{D(\delta_i, L_2)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \qquad \frac{D(L_1, \delta_i)[\bar{\boldsymbol{u}}]}{D(\boldsymbol{L})[\bar{\boldsymbol{u}}]} = \frac{D(L_1, \delta_i)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}$$

(žr. (1.6)). Taigi apibrėžimas $\boldsymbol{v} := [v^1, v^2]$ yra invariantiškas bazės $\{u^1, u^2\}$ atžvilgiu: $v_i^1 = D(\delta_i, L_2)/D(\boldsymbol{L})$, $v_i^2 = D(L_1, \delta_i)/D(\boldsymbol{L})$.

3. Diskrečioji lygtis su dviem sąlygomis

Tegul $\{u^1, u^2\}$ yra homogeninės lygties

$$\mathcal{L}u := a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = 0, \quad a_i^2, a_i^0 \neq 0, \; i \in \tilde{X}, \tag{3.1}$$

sprendiniai. Tuomet $D[\boldsymbol{u}]_{i\cdot}$ yra (3.1) lygties sprendinys, t. y.

$$a_i^2 D[\boldsymbol{u}]_{i+2,j} + a_i^1 D[\boldsymbol{u}]_{i+1,j} + a_i^0 D[\boldsymbol{u}]_{ij} = 0, \quad i \in \tilde{X}, \; j \in X. \tag{3.2}$$

Kai $j = i + 1$, iš šios lygties išplaukia, kad $-a_i^2 W[\boldsymbol{u}]_{i+2} + a_i^0 W[\boldsymbol{u}]_{i+1} = 0$. Tuomet $W[\boldsymbol{u}]_i \equiv 0$ (kai $\{u^1, u^2\}$ yra tiesiškai priklausomi sprendiniai) arba $W[\boldsymbol{u}]_i \neq 0$ visiems $i = 1, \ldots, n$ (fundamentaliosios sistemos atveju).

Panagrinėkime nehomogeninę lygtį

$$\mathcal{L}u := a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \quad i \in \tilde{X}, \tag{3.3}$$

su dviem sąlygomis

$$\langle L_1, u \rangle = g_1 \in \mathbb{K}, \qquad \langle L_2, u \rangle = g_2 \in \mathbb{K}, \tag{3.4}$$

čia L_1, L_2 yra tiesiškai nepriklausomi funkcionalai.

3.1. Nehomogeninio uždavinio sprendinys

(3.1) lygties bendras sprendinys yra $u = C_1u^1 + C_2u^2$, čia C_1, C_2 yra laisvosios konstantos ir $\{u^1, u^2\}$ yra šios homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Pakeiskime konstantas C_1, C_2 atitinkamai funkcijomis $c_1, c_2 \in F(X)$ (konstantų varijavimo metodas [119]). Įstatę

$$u_{f;i} = c_{1;i}u_i^1 + c_{2;i}u_i^2, \quad i \in X, \tag{3.5}$$

į (3.3) lygtį ir pažymėję $d_{ki} = \sum_{l=1}^{2}[c_{l;i+k} - c_{l;i}]u_{i+k}^l$, $k = -1, 0, 1, 2$, $i = \max(0, -k), \ldots, \min(n-k, n)$ [119], gauname

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_{k=0}^{2} a_i^k u_{f;i+k} = \sum_{k=0}^{2} a_i^k \sum_{l=1}^{2} c_{l;i+k}u_{i+k}^l = \sum_{k=0}^{2} a_i^k d_{ki} + \sum_{k=0}^{2} a_i^k \sum_{l=1}^{2} c_{l;i}u_{i+k}^l \\ &= \sum_{k=0}^{2} a_i^k d_{ki} + \sum_{l=1}^{2} c_{l;i}\left[\sum_{k=0}^{2} a_i^k u_{i+k}^l\right]. \end{aligned}$$

Kadangi funkcijos u^1 ir u^2 yra (3.1) homogeninės lygties sprendiniai, tai

$$f_i = \sum_{k=0}^{2} a_i^k d_{ki}, \quad \text{kai } i \in \tilde{X}. \tag{3.6}$$

Pažymėkime $b_{li} = c_{l;i+1} - c_{l;i}$, $l = 1, 2$. Tada, kai $k = 0, 1, 2$,

$$d_{ki} - d_{k-1,i+1} = \sum_{l=1}^{2}(c_{l;i+k} - c_{l;i})u_{i+k}^l - \sum_{l=1}^{2}(c_{l;i+k} - c_{l;i+1})u_{i+k}^l = \sum_{l=1}^{2} b_{li}u_{i+k}^l$$

ir

$$\sum_{k=0}^{2} a_i^k(d_{ki} - d_{k-1,i+1}) = \sum_{l=1}^{2} b_{li}\sum_{k=0}^{2} a_i^k u_{i+k}^l = 0.$$

Iš šių lygybių, (3.6) lygtį galima užrašyti taip ($d_{0i} = 0$ pagal apibrėžimą):

$$f_i = \sum_{k=0}^{2} a_i^k d_{ki} = \sum_{k=0}^{2} a_i^k d_{k-1,i+1} = a_i^2 d_{1,i+1} + a_i^0 d_{-1,i+1}.$$

Paimkime $d_{-1,i+1} = 0$, $i = 0, \ldots, n-1$. Tada $d_{1,i+1} = f_i/a_i^2$ visiems $i \in \tilde{X}$ ir

$$\begin{cases} b_{1,i+1}u_{i+1}^1 + b_{2,i+1}u_{i+1}^2 = 0, \\ b_{1,i+1}u_{i+2}^1 + b_{2,i+1}u_{i+2}^2 = f_i/a_i^2, \end{cases} \quad i \in \tilde{X}. \tag{3.7}$$

Kadangi u^1, u^2 yra tiesiškai nepriklausomos, tai determinantas $W[\boldsymbol{u}]$ nelygus nuliui ir lygčių sistema (3.7) turi vienintelį sprendinį

$$b_{1,i+1} = c_{1;i+2} - c_{1;i+1} = -\frac{u^2_{i+1} f_i}{a_i^2 W[\boldsymbol{u}]_{i+2}}, \quad b_{2,i+1} = c_{2;i+2} - c_{2;i+1} = \frac{u^1_{i+1} f_i}{a_i^2 W[\boldsymbol{u}]_{i+2}}.$$

Tuomet

$$c_{1;i} = -\sum_{j=0}^{i-2} \frac{u^2_{j+1} f_j}{a_j^2 W[\boldsymbol{u}]_{j+2}} + c_{1;1}, \qquad c_{2;i} = \sum_{j=0}^{i-2} \frac{u^1_{j+1} f_j}{a_j^2 W[\boldsymbol{u}]_{j+2}} + c_{2;1}, \quad i = 2, \dots, n,$$

ir nehomogeninės lygties (su sąlygomis $u_0 = u_1 = 0$) sprendinys yra

$$u_i = \sum_{j=0}^{i-2} \frac{f_j}{a_j^2 W[\boldsymbol{u}]_{j+2}} \begin{vmatrix} u^1_{j+1} & u^1_i \\ u^2_{j+1} & u^2_i \end{vmatrix} = \sum_{j=0}^{i-2} \frac{D[\boldsymbol{u}]_{j+1,i}}{W[\boldsymbol{u}]_{j+2}} \frac{f_j}{a_j^2} = \sum_{j=0}^{i-2} \frac{V_{ij}}{a_j^2} f_j \tag{3.8}$$

kai $i = 2, \dots, n$. Pažymėkime funkciją $G^c \in F(X \times \tilde{X})$:

$$G^c_{ij} := H_{i-j} V_{ij} / a_j^2, \qquad H_i := \begin{cases} 1, & i > 0, \\ 0, & i \leqslant 0. \end{cases}$$

Tuomet (3.8) lygtis yra

$$u_i = \sum_{j=0}^{n-2} G^c_{ij} f_j = \left(G^c_{ij}, f_j\right)_X = \left(G^c_{i,\cdot}, f\right)_X, \quad i \in X, \tag{3.9}$$

čia $(w, g)_X = (w_l, g_l)_X := \sum_{l=0}^{n-2} w_l g_l$, $w, g \in F(\tilde{X})$. Taigi, gavome bendro sprendinio išraišką $u_i = (G^c_{i,\cdot}, f)_X + C_1 u^1_i + C_2 u^2_i$. Šią formulę panaudosime, kai fundamentaliąją sistemą parinksime specialiąja baze $\{v^1, v^2\}$ (žr. (2.6)). Šiuo atveju turime

$$u_i = \left(G^c_{i,\cdot}, f\right)_X + C_1 v^1_i + C_2 v^2_i, \quad i \in X. \tag{3.10}$$

Paimkime homogenines sąlygas

$$\langle L_1, u \rangle = 0, \qquad \langle L_2, u \rangle = 0. \tag{3.11}$$

Įstatę bendrą sprendinį (3.10) į homogenines sąlygas ir pasinaudoję (2.7), surandame reikšmes

$$C_1 = -\left\langle L_1^k, \left(G^c_{k,\cdot}, f\right)_X \right\rangle = -\left(\left\langle L_1^k, G^c_{k,\cdot} \right\rangle, f\right)_X,$$
$$C_2 = -\left\langle L_2^k, \left(G^c_{k,\cdot}, f\right)_X \right\rangle = -\left(\left\langle L_2^k, G^c_{k,\cdot} \right\rangle, f\right)_X.$$

Taigi diskrečiosios lygties su dviem homogeninėmis sąlygomis sprendinio išraiška yra

$$\begin{aligned} u_{f;i} &= \big(G^c_{i,\cdot}, f\big)_X - v^1_i\big(\langle L^k_1, G^c_{k,\cdot}\rangle, f\big)_X - v^2_i\big(\langle L^k_2, G^c_{k,\cdot}\rangle, f\big)_X \\ &= \big(\langle \delta^k_i - \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i, G^c_{k,\cdot}\rangle, f\big)_X, \end{aligned} \tag{3.12}$$

čia $v^1_i = D(\delta_i, L_2)/D(\boldsymbol{L})$, $v^2_i = D(L_1, \delta_i)/D(\boldsymbol{L})$, $\boldsymbol{v}_i = [v^1_i, v^2_i]$, $\boldsymbol{L}^k = (L^k_1, L^k_2)$, $i, k \in X$, $\boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i := L^k_1 v^1_i + L^k_2 v^2_i$.

3.2. Homogeninės lygties su dviem sąlygomis sprendinys

Panagrinėkime homogeninę lygtį (3.1) su sąlygomis (3.4):

$$\mathcal{L}u = 0, \qquad \langle L_1, u\rangle = g_1, \qquad \langle L_2, u\rangle = g_2.$$

Šio uždavinio sprendinys yra

$$u_{0;i} = g_1 \cdot v^1_i + g_2 \cdot v^2_i, \quad i \in X. \tag{3.13}$$

Nehomogeninio uždavinio sprendinys yra tokios formos: $u_i = u_{f;i} + u_{0;i}$ (žr. (3.12) ir (3.13)). Tuomet gauname (3.3)–(3.4) uždavinio sprendinio formulę.

3.1 teorema. (3.3)–(3.4) *uždavinio sprendinys yra*

$$u_i = \big(\langle \delta^k_i - \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i, G^c_{k,\cdot}\rangle, f\big)_X + g_1 \cdot v^1_i + g_2 \cdot v^2_i, \quad i \in X. \tag{3.14}$$

(3.14) formulė gali būti efektyviai panaudota tiesinės diskrečiosios lygties su įvairiomis a^0, a^1, a^2, su bet kokia funkcija f, bet kokiais funkcionalais L_1, L_2, ir bet kokiomis g_1, g_2, sprendinių radimui su sąlyga, kad yra žinoma homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Ši formulė taip pat yra naudinga Gryno funkcijos konstravimui.

3.3. Dviejų sprendinių sąryšis

Panagrinėkime du uždavinius su ta pačia diskrečiąja lygtimi, bet su skirtingomis sąlygomis:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ \langle l_m, u\rangle = f_m, \quad m = 1, 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}v = f, \\ \langle L_m, v\rangle = F_m, \quad m = 1, 2, \end{cases} \tag{3.15}$$

ir $D(\boldsymbol{L}) \neq 0$. Skirtumas $w = v - u$ tenkina uždavinį

$$\begin{cases} \mathcal{L}w = 0, \\ \langle L_m, w\rangle = F_m - \langle L_m, u\rangle, \quad m = 1, 2. \end{cases}$$

Tada iš (3.13) formulės matyti, kad

$$w_i = (F_1 - \langle L_1, u\rangle)v_i^1 + (F_2 - \langle L_2, u\rangle)v_i^2, \quad i \in X, \tag{3.16}$$

arba

$$v_i = u_i + \big(F_1 - \langle L_1, u\rangle\big)\frac{D(\delta_i, L_2)}{D(\boldsymbol{L})} + \big(F_2 - \langle L_2, u\rangle\big)\frac{D(L_1, \delta_i)}{D(\boldsymbol{L})}, \; i \in X. \tag{3.17}$$

Tai reiškia, kad (3.15) antro uždavinio sprendinį galima išreikšti per pirmo uždavinio sprendinį.

3.3 išvada. *Uždaviniams* (3.15) *yra teisingas sąryšis tarp dviejų sprendinių*:

$$v_i = \frac{1}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}\begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u_i^1 \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u_i^2 \\ \langle L_1, u\rangle - F_1 & \langle L_2, u\rangle - F_2 & u_i \end{vmatrix}, \quad i \in X. \tag{3.18}$$

Įrodymas. Išskaidę (3.18) lygties determinantą pagal paskutinę eilutę, gausime (3.17) formulę. $\square$

3.3 pastaba. (3.18) išraiškoje determinantas yra lygus

$$\begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u_i^1 \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u_i^2 \\ \langle L_1, u\rangle & \langle L_2, u\rangle & u_i \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u_i^1 \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u_i^2 \\ F_1 & F_2 & 0 \end{vmatrix}.$$

Šiuo atveju (3.18) formulę galima užrašyti kaip:

$$v_i = \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_i)[\boldsymbol{u}, u]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} + \frac{F_1 D(\delta_i, L_2)[\boldsymbol{u}] + F_2 D(L_1, \delta_i)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \quad i \in X. \tag{3.19}$$

Pastebėsime, kad šioje formulėje funkcija u yra tik pirmame naryje ir v_i yra invariantinė bazės $\{u^1, u^2\}$ atžvilgiu.

4. Gryno funkcijos

4.1. Diskrečiųjų Gryno funkcijų apibrėžimai

Paaiškinsime ir pateiksime diskrečiosios Gryno funkcijos apibrėžimą [117, 119]. Tarkime, kad $\mathbb{K} = \mathbb{R}$ ir $X_n := X = \{0, 1, \ldots, n\}$. Tegul $A : F(X_n) \to F(X_{n-m}) = \operatorname{Im} A$ yra tiesinis operatorius, $0 \leqslant m \leqslant n$. Nagrinėsime operatorinę lygtį $Au = f$, čia $u \in F(X_n)$ yra nežinoma, o $f \in F(X_{n-m})$ yra duota funkcija. Ši operatorinė lygtis, diskrečiuoju atveju, yra ekvivalenti tiesinių lygčių sistemai

$$\sum_{i=0}^{n} a_{ji} u_i = f_j, \quad j = 0, 1, \ldots, n-m, \tag{4.1}$$

t. y. $\mathbf{Au} = \mathbf{f}$, čia $\mathbf{u} \in \mathbb{R}^{n+1}$, $\mathbf{f} \in \mathbb{R}^{n-m+1}$, $\mathbf{A} = (a_{ji}) \in M_{(n+1)\times(n-m+1)}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rank} \mathbf{A} = n - m + 1$. Turime $\dim \operatorname{Ker} A = m$. Kai $m > 0$, norint gauti vienintelį sprendinį, turime pridėti papildomas sąlygas. Paimkime $M - n + m$ homogenines tiesines lygtis:

$$\sum_{i=0}^{n} b_{ji} u_i = 0, \quad j = 1, \ldots, M - n + m, \tag{4.2}$$

čia $\mathbf{B} = (b_{ji}) \in M_{(n+1)\times(M-n+m)}(\mathbb{R})$, $\operatorname{rank} \mathbf{B} = M - n + m$, ir pažymėkime

$$\tilde{a}_{ji} := \begin{cases} a_{ji}, & j = 0, 1, \ldots, n-m, \\ b_{j-n+m,i}, & j = n-m+1, \ldots, M, \end{cases} \qquad i \in X_n, \tag{4.3}$$

$$\tilde{f}_j := \begin{cases} f_j, & j = 0, 1, \ldots, n-m, \\ 0, & j = n-m+1, \ldots, M. \end{cases} \tag{4.4}$$

Gauname tiesinių lygčių sistemą $\tilde{\mathbf{A}}\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{f}}$, čia $\tilde{\mathbf{f}} = (\tilde{f}_j) \in M_{(n+1)\times 1}(\mathbb{R})$, $\tilde{\mathbf{A}} = (\tilde{a}_{ji}) \in M_{(n+1)\times(M+1)}(\mathbb{R})$. Būtina sprendinio vienaties sąlyga yra $M \geqslant n$. Papildomos lygtys (4.2) apibrėžia tiesinį operatorių $B : F(X_n) \to F(X_{M-n+m})$ ir operatorinę lygtį $Bu = 0$. Tuomet gauname uždavinį:

$$Au = f, \quad Bu = 0. \tag{4.5}$$

Jei (4.5) uždavinio sprendinys tenkina išraišką

$$u_i = \sum_{j=0}^{n-m} G_{ij} f_j, \quad i \in X_n, \tag{4.6}$$

tuomet $G \in F(X_n \times X_{n-m})$ vadinama operatoriaus A su sąlyga $Bu = 0$ *diskrečiąja Gryno funkcija.* Gryno funkcija egzistuoja, jei $\operatorname{Ker} A \cap \operatorname{Ker} B = \{0\}$. Ši sąlyga ekvivalenti sąlygai $\det \tilde{\mathbf{A}} \neq 0$, kai $M = n$. Šiuo atveju Gryno funkcijos išraišką (4.6) galima lengvai gauti iš Kramerio formulės arba iš lygties $\mathbf{u} = \tilde{\mathbf{A}}^{-1}\tilde{\mathbf{f}}$. Jei $\tilde{\mathbf{A}}^{-1} = (g_{ij})$, tai $G_{ij} = g_{ij}$, kai $i \in X_n$, $j \in X_{n-m}$ ir $\mathbf{AG} = \mathbf{E}$, $\mathbf{BG} = \mathbf{O}$, čia $\mathbf{G} = (G_{ij}) \in M_{(n+1)\times(n-m+1)}(\mathbb{R})$ (arba $\sum_{k=0}^{n} a_{ik} G_{kj} = \delta_j^i$, $i \in X_{n-m}$, $\sum_{k=0}^{n} b_{ik} G_{kj} = 0$, $i \in X_m$, $j \in X_{n-m}$). Taigi, $[G_{0j}, \dots, G_{nj}]$ yra (4.5) uždavinio vienintelis sprendinys su $f_j = [\delta_j^0, \dots, \delta_j^n]$, $j \in X_{n-m}$.

3.1 pavyzdys. Kai $m = 2$, (4.6) formulė gali būti užrašyta kaip

$$u_i = \sum_{j=0}^{n-2} G_{ij} f_j = (G_{i,\cdot}, f)_X, \quad i \in X_n. \tag{4.7}$$

Funkcija $G^c \in F(X \times \tilde{X})$ yra (3.3) uždavinio su diskrečiosiomis (pradinėmis) sąlygomis $u_0 = u_1 = 0$ Gryno funkcijos atskiras atvejis. Kai $m = 2$, (4.7) lygtis yra tokia pati kaip (3.9), $\tilde{X} = X_{n-2}$.

3.4 pastaba. Panagrinėkime atvejį, kai $m = 2$. Jeigu $f_i = \bar{f}_{i+1}$, čia funkcija $\bar{f}$ yra apibrėžta aibėje $\bar{X} := \{1, 2, \dots, n-1\}$, tai naudosime paslinktąją Gryno funkciją $\bar{G} \in F(X \times \bar{X})$:

$$u_i = \sum_{j=1}^{n-1} \bar{G}_{ij} \bar{f}_j, \quad \bar{G}_{ij} := G_{i,j-1}, \quad i \in X_n. \tag{4.8}$$

Baigtinėms skirtuminėms schemoms diskrečiosios funkcijos apibrėžtos taškuose $x_i \in [0, L]$ ir $f_i = f(x_i)$. Įveskime tinklus atkarpoje $[0, L]$:

$$\bar{\omega}^h = \{0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = L\},$$
$$\omega^h = \bar{\omega}^h \setminus \{x_0, x_n\}, \qquad \tilde{\omega}^h = \bar{\omega}^h \setminus \{x_{n-1}, x_n\} \tag{4.9}$$

su žingsniu $h_i = x_i - x_{i-1}$, $1 \leqslant i \leqslant n$, $h_0 = h_{n+1} = 0$, ir pusiau sveikąjį tinklą

$$\omega^h_{1/2} = \bigl\{x_{i+\frac{1}{2}} \bigm| x_{i+\frac{1}{2}} = (x_i + x_{i+1})/2,\ 0 \leqslant i \leqslant n-1\bigr\} \tag{4.10}$$

su žingsniu $h_{i+\frac{1}{2}} = (h_i + h_{i+1})/2$, $0 \leqslant i \leqslant n$. Apibrėžkime skaliarinę sandaugą

$$(U, V)_{\bar\omega^h} := \sum_{i=0}^{n} U_i V_i h_{i+\frac{1}{2}},$$

čia $U, V \in F(\bar\omega^h)$, ir tinklinius operatorius

$$(\delta Z)_{i+\frac{1}{2}} = \frac{Z_{i+1} - Z_i}{h_{i+1}},\ Z \in F\bigl(\bar\omega^h\bigr), \qquad (\delta Z)_i = \frac{Z_{i+\frac{1}{2}} - Z_{i-\frac{1}{2}}}{h_{i+\frac{1}{2}}},\ Z \in F\bigl(\omega^h_{1/2}\bigr).$$

Jei $A : F(\bar\omega^h) \to F(\omega)$ ir $f \in F(\omega)$, čia $\omega = \bar\omega^h, \omega^h, \tilde\omega^h$, tai Gryno funkcija $G \in F(\bar\omega^h \times \omega)$ gali būti apibrėžta tokiu būdu:

$$u_i = \sum_{j:\, x_j \in \omega} G_{ij} f_j, \quad i \in X_n. \tag{4.11}$$

Daugelyje taikymų naudojama diskrečioji Gryno funkcija G^h [117, 118] apibrėžta formule:

$$u_i = \sum_{j=0}^{n} G^h_{ij} f_j h_{j+\frac{1}{2}} = \bigl(G^h_{i,\cdot}, f\bigr)_{\bar\omega^h}, \quad i \in X_n, \tag{4.12}$$

čia $f_j = 0$, kai $x_j \in \bar\omega^h \setminus \omega$. Sąryšis tarp šių funkcijų yra:

$$G^h_{ij} = \frac{G_{ij}}{h_{j+\frac{1}{2}}} \quad \text{kai } j\colon x_j \in \omega, \qquad G^h_{ij} = 0 \quad \text{kai } j\colon x_j \in \bar\omega^h \setminus \omega.$$

Taigi, jeigu žinome funkciją G_{ij}, tai galima apskaičiuoti G^h_{ij}, ir atvirkščiai. Jei $h_i \equiv 1$ $(L = n)$, tai G^h_{ij} sutampa su G_{ij}.

Pastebėsime, kad Vronskio determinantas irgi gali būti apibrėžtas tokiu būdu [10]:

$$W^h[\boldsymbol{u}]_j = \begin{vmatrix} u^1_{j-1} & u^2_{j-1} \\ \delta u^1_{j-\frac{1}{2}} & \delta u^2_{j-\frac{1}{2}} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} u^1_{j-1} & u^2_{j-1} \\ \frac{u^1_j - u^1_{j-1}}{h_j} & \frac{u^2_j - u^2_{j-1}}{h_j} \end{vmatrix} = \frac{W[\boldsymbol{u}]_j}{h_j}, \quad j = 1, \dots, n.$$

4.2. Tiesinės diskrečiosios lygties su įvairiomis sąlygomis Gryno funkcijos

Panagrinėkime nehomogeninę lygtį (3.3) su operatoriumi: $\mathcal{L} : U \to F(X)$, čia sąlygos apibrėžia poerdvį $U = \{\boldsymbol{u} \in F(X) \colon \langle L_1, u\rangle = 0,\ \langle L_2, u\rangle = 0\}$.

3.5 lema. *Uždavinio* (3.3) *su homogeninėmis sąlygomis* $\langle L_1, u\rangle = 0$, $\langle L_2, u\rangle = 0$, *čia funkcionalai* L_1 *ir* L_2 *yra tiesiškai nepriklausomi, Gryno funkcija yra lygi*:

$$G_{ij} = \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_i)[\boldsymbol{u}, G^c_{\cdot,j}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \quad i \in X,\ j \in \tilde{X}. \tag{4.13}$$

Įrodymas. Iš 3.1 teoremos, kai $g_1, g_2 = 0$, sprendinio išraiška

$$u_i = \big(\langle \delta_i^k - \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i, G^c_{k,\cdot}\rangle, f\big)_X, \quad i \in X,$$

čia $v_i^1 = D(\delta_i, L_2)/D(\boldsymbol{L})$, $v_i^2 = D(L_1, \delta_i)/D(\boldsymbol{L})$. Tuomet Gryno funkcija yra:

$$\begin{aligned} G_{ij} &= \big\langle \delta_i^k - \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i, G^c_{kj}\big\rangle \\ &= G^c_{ij} - \big\langle L_1^k, G^c_{kj}\big\rangle \frac{D(\delta_i, L_2)}{D(\boldsymbol{L})} - \big\langle L_2^k, G^c_{kj}\big\rangle \frac{D(L_1, \delta_i)}{D(\boldsymbol{L})}. \end{aligned} \tag{4.14}$$

Išskleidę determinantą

$$D(\boldsymbol{L}, \delta_i)\big[\boldsymbol{u}, G^c_{\cdot,j}\big] = \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u_i^1 \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u_i^2 \\ \langle L_1^k, G^c_{kj}\rangle & \langle L_2^k, G^c_{kj}\rangle & G^c_{ij} \end{vmatrix}$$

pagal paskutinę eilutę ir padaliję iš $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]$, gauname (4.14) lygybės dešiniąją pusę. Taigi lema įrodyta. $\square$

Jei $\bar{\boldsymbol{u}} = \mathbf{P}\boldsymbol{u}$, čia $\mathbf{P} \in GL_2(\mathbb{R})$, tai Gryno funkcija $G_{ij} = G[\bar{\boldsymbol{u}}]_{ij} = G[\boldsymbol{u}]_{ij}$, t. y. ji yra invariantiška bazės $\{u^1, u^2\}$ atžvilgiu.

Tolesnis rezultatas apie uždavinių su tuo pačiu f

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ \langle l_m, u\rangle = 0, \quad m = 1, 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}v = f, \\ \langle L_m, v\rangle = 0, \quad m = 1, 2, \end{cases} \tag{4.15}$$

dviejų Gryno funkcijų G^u_{ij} ir G^v_{ij} sąryšį yra naudingas uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis teoriniame tyrime.

3.2 teorema. *Jeigu Gryno funkcija G^u egzistuoja ir funkcionalai L_1 ir L_2 yra tiesiškai nepriklausomi, tai*

$$G^v_{ij} = \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_i)[\boldsymbol{u}, G^u_{\cdot,j}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \quad i \in X, \ j \in \tilde{X}. \tag{4.16}$$

Įrodymas. Kai $F_1, F_2 = 0$, (3.17) lygybė užrašoma taip:

$$v = u - \langle L_1, u\rangle v^1 - \langle L_2, u\rangle v^2.$$

Jei $u_i = (G^u_{i,\cdot}, f)_X$, tai

$$\begin{aligned} v_i &= u_i - \sum_{k=0}^{n} u_k L_1^k v_i^1 - \sum_{k=0}^{n} u_k L_2^k v_i^2 \\ &= \left(G^u_{i,\cdot} - \sum_{k=0}^{n} G^u_{k,\cdot} L_1^k v_i^1 - \sum_{k=0}^{n} G^u_{k,\cdot} L_2^k v_i^2, f \right)_X. \end{aligned}$$

Taigi Gryno funkcija G^v yra

$$\begin{aligned} G^v_{ij} &= G^u_{ij} - \sum_{k=0}^{n} G^u_{kj} L_1^k v_i^1 - \sum_{k=0}^{n} G^u_{kj} L_2^k v_i^2 \\ &= \left\langle \delta_i^k - L_1^k v_i^1 - L_2^k v_i^2, G^u_{kj} \right\rangle = \left\langle \delta_i^k - \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i, G^u_{kj} \right\rangle. \end{aligned}$$

Tolesnis šios teoremos įrodymas pakartoja 3.5 lemos įrodymą (vietoj G^c paėmus G^u). □

3.5 pastaba. Pirma, (4.16) lygybę galima perrašyti

$$G^v_{ij} = G^u_{ij} - \left\langle L_1^k, G^u_{kj} \right\rangle \frac{D(\delta_i, L_2)}{D(\boldsymbol{L})} - \left\langle L_2^k, G^u_{kj} \right\rangle \frac{D(L_1, \delta_i)}{D(\boldsymbol{L})}, \tag{4.17}$$

antra, (4.16) lygybėje galima užrašyti determinanto išraišką:

$$G^v_{ij} = \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_i)[\boldsymbol{u}, G^u_{\cdot,j}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} = \frac{1}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u_i^1 \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u_i^2 \\ \langle L_1^k, G^u_{kj}\rangle & \langle L_2^k, G^u_{kj}\rangle & G^u_{ij} \end{vmatrix}. \tag{4.18}$$

Formulės (4.17) ir (4.18) leidžia lengvai rasti lygties su dviem sąlygomis Gryno funkciją, jei žinoma tos pačios lygties, bet su kitomis sąlygomis, Gryno funkcija. Lygybė

$$u_i = (G_{i,\cdot}, f)_X + g_1 v_i^1 + g_2 v_i^2, \quad i \in X \tag{4.19}$$

gali būti pritaikyta lygties su skirtuminiu operatoriumi ir bet kokiomis dviem tiesinėmis įvairiomis (pradinėmis arba kraštinėmis arba nelokaliosiomis kraštinėmis) sąlygomis sprendinių paieškai, jei žinoma homogeninės lygties fundamentalioji sistema.

5. Gryno funkcijų pritaikymas uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

Panagrinėsime uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$\mathcal{L}u := a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \quad i \in \tilde{X}, \tag{5.1}$$

$$\langle L_1, u\rangle := \langle \kappa_1, u\rangle - \gamma_1 \langle \varkappa_1, u\rangle = 0, \tag{5.2}$$

$$\langle L_2, u\rangle := \langle \kappa_2, u\rangle - \gamma_2 \langle \varkappa_2, u\rangle = 0 \tag{5.3}$$

Gryno funkciją. (5.1)–(5.3) forma galima užrašyti daugelį uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (NKS), kur $\langle \kappa_m, u\rangle := \langle \kappa_m^i, u_i\rangle$, $m = 1, 2$ yra klasikinė dalis, ir $\langle \varkappa_m, u\rangle := \langle \varkappa_m^i, u_i\rangle$, $m = 1, 2$ yra nelokalioji kraštinių sąlygų dalis.

Jei $\gamma_1, \gamma_2 = 0$, tai (5.1)–(5.3) uždavinys tampa klasikiniu. Tarkime, kad klasikiniu atveju Gryno funkcija G_{ij}^{cl} egzistuoja. Tada (5.1)–(5.3) uždavinio Gryno funkcija egzistuos, jei $\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$. Kai $L_m = \kappa_m - \gamma_m \varkappa_m$, $m = 1, 2$,

$$\vartheta = D(\kappa_1, \kappa_2)[\boldsymbol{u}] - \gamma_1 D(\varkappa_1, \kappa_2)[\boldsymbol{u}] - \gamma_2 D(\kappa_1, \varkappa_2)[\boldsymbol{u}] + \gamma_1\gamma_2 D(\varkappa_1, \varkappa_2)[\boldsymbol{u}].$$

Kadangi $\langle \kappa_m^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\rangle = 0$, $m = 1, 2$, tai (4.18) lygtį galima užrašyti tokiu būdu

$$\begin{aligned} G_{ij} &= G_{ij}^{\mathrm{cl}} + \gamma_1 v_i^1 \left\langle \varkappa_1^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\right\rangle + \gamma_2 v_i^2 \left\langle \varkappa_2^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\right\rangle \\ &= G_{ij}^{\mathrm{cl}} + \gamma_1 \left\langle \varkappa_1^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\right\rangle \frac{D(\delta_i, L_2)}{\vartheta} + \gamma_2 \left\langle \varkappa_2^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\right\rangle \frac{D(L_1, \delta_i)}{\vartheta} \\ &= \frac{1}{\vartheta} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \langle L_2, u^1\rangle & u_i^1 \\ \langle L_1, u^2\rangle & \langle L_2, u^2\rangle & u_i^2 \\ -\gamma_1 \langle \varkappa_1^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\rangle & -\gamma_2 \langle \varkappa_2^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\rangle & G_{ij}^{\mathrm{cl}} \end{vmatrix}. \end{aligned} \tag{5.4}$$

3.2 pavyzdys. Panagrinėkime diferencialinę lygtį su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$-u'' = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{5.5}$$

$$u(0) = \gamma_0 u(\xi_0), \qquad u(1) = \gamma_1 u(\xi_1), \quad 0 < \xi_0, \xi_1 < 1. \tag{5.6}$$

Įveskime (4.9) tinklą $\bar{\omega}^h$. Pažymėkime $u_i = u(x_i)$, $f_i = f(x_i)$ kai $x_i \in \bar{\omega}^h$. Tarkime, kad taškai ξ_0, ξ_1 sutampa su tinklo taškais, t. y. $\xi_0 = x_{s_0}$, $\xi_1 = x_{s_1}$. Tada (5.5), (5.6) uždavinys gali būti aproksimuotas baigtinių skirtumų schema

$$-\delta^2 u_i = f_i, \quad x_i \in \omega^h, \tag{5.7}$$

$$u_0 = \gamma_0 u_{s_0}, \qquad u_n = \gamma_1 u_{s_1}. \tag{5.8}$$

Tada (5.7) lygtį galima užrašyti taip:

$$a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_{i+1}, \quad i \in \tilde{X}, \tag{5.9}$$

čia

$$a_i^2 = -\frac{1}{h_{i+2} h_{i+\frac{3}{2}}}, \quad a_i^1 = \frac{2}{h_{i+2} h_{i+1}}, \quad a_i^0 = -\frac{1}{h_{i+1} h_{i+\frac{3}{2}}}, \quad i \in \tilde{X}.$$

Imkime fundamentaliąją sistemą $u_i^1 = 1$, $u_i^2 = x_i$. Tuomet

$$D[\boldsymbol{u}]_{ij} = \begin{vmatrix} u_i^1 & u_j^1 \\ u_i^2 & u_j^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ x_i & x_j \end{vmatrix} = x_j - x_i, \ i,j \in X, \qquad W_j = h_j, \ j = 1, \dots, n,$$

$$V_{ij} = \frac{x_i - x_{j+1}}{h_{j+2}}, \ j = -1, 0, 1, \dots, n-2, \qquad V_{i,n-1} = V_{in} = 0, \ i \in X,$$

ir

$$G_{ij}^c = H_{i-j} V_{ij} / a_j^2 = H_{i-j}(x_{j+1} - x_i) h_{j+\frac{3}{2}}. \tag{5.10}$$

Uždavinio su kraštinėmis sąlygomis $u_0 = u_n = 0$ determinantas $D(L)[\boldsymbol{u}] = 1$ ir

$$\begin{aligned} D(L, \delta_i)\big[\boldsymbol{u}, G_{\cdot,j}^c\big] &= G_{ij}^c - x_i G_{nj}^c \\ &= H_{i-j}(x_{j+1} - x_i) h_{j+\frac{3}{2}} - H_{n-j} x_i (x_{j+1} - 1) h_{j+\frac{3}{2}}. \end{aligned}$$

Dirichlė uždavinio Gryno funkciją G^{cl} išreiškiame per pradinio uždavinio Gryno funkciją G^c

$$G^{\mathrm{cl}}_{ij} = G^c_{ij} - x_i G^c_{nj}. \tag{5.11}$$

Gauname „klasikinės“ Gryno funkcijos išraišką:

$$\begin{aligned} G^{\mathrm{cl}}_{ij} &= h_{j+\frac{3}{2}}\big(H_{i-j}(x_{j+1}-x_i) + H_{n-j}x_i(1-x_{j+1})\big) \\ &= h_{j+\frac{3}{2}} \begin{cases} x_i(1-x_{j+1}), & i \leqslant j+1, \\ x_{j+1}(1-x_i), & i \geqslant j+1, \end{cases} \qquad i \in X,\ j \in \tilde{X} \end{aligned} \tag{5.12}$$

arba (žr. (4.8) ir (4.12))

$$\bar{G}^{\mathrm{cl}}_{ij} = h_{j+\frac{1}{2}} \begin{cases} x_i(1-x_j), & x_i \leqslant x_j, \\ x_j(1-x_i), & x_i \geqslant x_j, \end{cases} \qquad i \in X,\ j \in \bar{X} \tag{5.13}$$

$$\bar{G}^{\mathrm{cl},h}_{ij} = \begin{cases} x_i(1-x_j), & 0 \leqslant x_i \leqslant x_j \leqslant 1, \\ x_j(1-x_i), & 0 \leqslant x_j \leqslant x_i \leqslant 1, \end{cases} \qquad i, j \in X. \tag{5.14}$$

3.6 pastaba. Pastebėsime, kad lygtyje (5.9) f indeksas yra paslinkęs (žr. (5.1)).

Gryno funkcija $\bar{G}^{\mathrm{cl},h}$ yra tokia pati kaip monografijoje [10] ir lygi (5.5)–(5.6) diferencialinio uždavinio tinklo taškuose Gryno funkcijai

$$\bar{G}^{\mathrm{cl}}(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant 1, \\ y(1-x), & 0 \leqslant y \leqslant x \leqslant 1 \end{cases} \tag{5.15}$$

kai $\gamma_0 = \gamma_1 = 0$.

„Nelokaliojo“ uždavinio su kraštinėmis sąlygomis $u_0 = \gamma_0 u_{s_0}$, $u_n = \gamma_1 u_{s_1}$,

$$\vartheta := D(L)[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} \langle L_1, 1\rangle & \langle L_2, 1\rangle \\ \langle L_1, x\rangle & \langle L_2, x\rangle \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1-\gamma_0\cdot 1 & 1-\gamma_1\cdot 1 \\ x_0-\gamma_0 x_{s_0} & x_n - \gamma_1 x_{s_1} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\gamma_0 & 1-\gamma_1 \\ -\gamma_0\xi_0 & 1-\gamma_1\xi_1 \end{vmatrix} = 1 - \gamma_0(1-\xi_0) - \gamma_1\xi_1 + \gamma_0\gamma_1(\xi_1-\xi_0).$$

Iš (5.4) formulės matyti, kad

$$\bar{G}^h_{ij} = \bar{G}^{\mathrm{cl},h}_{ij} + \gamma_0 \frac{1 - x_i + \gamma_1(x_i - \xi_1)}{\vartheta} \bar{G}^{\mathrm{cl},h}_{s_0 j} + \gamma_1 \frac{x_i - \gamma_0(x_i - \xi_0)}{\vartheta} \bar{G}^{\mathrm{cl},h}_{s_1 j}, \tag{5.16}$$

jei $\vartheta \neq 0$. Kai $\vartheta = 0$, Gryno funkcija neegzistuoja. Įstatę uždavinio su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis Gryno funkciją $\bar{G}^{\mathrm{cl},h}$ į (5.16) lygybę, gauname Gryno funkciją uždaviniui su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$\bar{G}^h_{ij} = \begin{cases} x_i(1-x_j), & x_i \leqslant x_j, \\ x_j(1-x_i), & x_i \geqslant x_j, \end{cases}$$
$$+ \gamma_0 \frac{1 - x_i + \gamma_1(x_i - \xi_1)}{1 - \gamma_0(1-\xi_0) - \gamma_1\xi_1 + \gamma_0\gamma_1(\xi_1 - \xi_0)} \begin{cases} \xi_0(1-x_j), & \xi_0 \leqslant x_j, \\ x_j(1-\xi_0), & \xi_0 \geqslant x_j, \end{cases}$$
$$+ \gamma_1 \frac{x_i - \gamma_0(x_i - \xi_0)}{1 - \gamma_0(1-\xi_0) - \gamma_1\xi_1 + \gamma_0\gamma_1(\xi_1 - \xi_0)} \begin{cases} \xi_1(1-x_j), & \xi_1 \leqslant x_j, \\ x_j(1-\xi_1), & \xi_1 \geqslant x_j. \end{cases}$$

Ši formulė atitinka diferencialinio uždavinio (5.5)–(5.6) Gryno funkciją [106]:

$$\bar{G}(x,y) = \begin{cases} x(1-y), & x \leqslant y, \\ x_j(1-x), & x \geqslant y, \end{cases}$$
$$+ \gamma_0 \frac{1 - x + \gamma_1(x - \xi_1)}{1 - \gamma_0(1-\xi_0) - \gamma_1\xi_1 + \gamma_0\gamma_1(\xi_1 - \xi_0)} \begin{cases} \xi_0(1-y), & \xi_0 \leqslant y, \\ x_j(1-\xi_0), & \xi_0 \geqslant y, \end{cases}$$
$$+ \gamma_1 \frac{x - \gamma_0(x - \xi_0)}{1 - \gamma_0(1-\xi_0) - \gamma_1\xi_1 + \gamma_0\gamma_1(\xi_1 - \xi_0)} \begin{cases} \xi_1(1-y), & \xi_1 \leqslant y, \\ x_j(1-\xi_1), & \xi_1 \geqslant y. \end{cases}$$

3.3 pavyzdys. Panagrinėkime uždavinį

$$-u'' = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{5.17}$$

$$u(0) = \gamma_0 \int_0^1 \alpha^0(x) u(x)\, dx, \qquad u(1) = \gamma_1 \int_0^1 \alpha^1(x) u(x)\, dx, \tag{5.18}$$

čia $\alpha^0, \alpha^1 \in L_1(0,1)$.

(5.17), (5.18) uždavinys gali būti aproksimuotas skirtuminiu uždaviniu

$$-\delta^2 u_i = f_i, \quad x_i \in \omega^h, \tag{5.19}$$

$$u_0 = \gamma_0 \big(A^0, u\big)_K, \qquad u_n = \gamma_1 \big(A^1, u\big)_K, \tag{5.20}$$

čia A^0, A^1 yra integralinėse kraštinėse sąlygose svorio funkcijų α^0, α^1 aproksimacijos, $(A, u)_K$ yra integralo $\int_0^1 A(x)u(x)\,dx$ aproksimacijos kvadratūrinė formulė (pavyzdžiui, trapecijų formulė $(A, u)_{\text{trap}} := \sum_{k=0}^{n} A_k u_k h_{k+\frac{1}{2}}$).

Uždavinio su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis ($\gamma_0 = \gamma_1 = 0$, $u_i^1 = 1$, $u_i^2 = x_i$) Gryno funkcijos išraiška pateikta 3.2 pavyzdyje. (5.19)–(5.20) uždavinio Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga yra $\vartheta \neq 0$, čia

$$\begin{aligned}
\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] &= \begin{vmatrix} 1 - \gamma_0 (A^0, 1)_K & 1 - \gamma_1 (A^1, 1)_K \\ -\gamma_0 (A^0, x)_K & 1 - \gamma_1 (A^1, x)_K \end{vmatrix} \\
&= 1 - \gamma_0 \big(A^0, 1 - x\big)_K - \gamma_1 \big(A^1, x\big)_K + \gamma_0 \gamma_1 \begin{vmatrix} (A^0, 1 - x)_K & (A^0, x)_K \\ (A^1, 1 - x)_K & (A^1, x)_K \end{vmatrix}
\end{aligned}$$

(ši sąlyga gauta straipsniuose [28, 29]) ir iš 3.2 teoremos Gryno funkcija yra

$$\begin{aligned}
G_{ij} = G_{ij}^{\text{cl}} &+ \gamma_0 \big(1 - x_i + \gamma_1 \big(x_i \big(A^1, 1\big)_K - \big(A^1, x\big)_K\big)\big) \big(A^0, G_{\cdot,j}^{\text{cl}}\big)_K / \vartheta \\
&+ \gamma_1 \big(x_i - \gamma_0 \big(x_i \big(A^0, 1\big)_K - \big(A^0, x\big)_K\big)\big) \big(A^1, G_{\cdot,j}^{\text{cl}}\big)_K / \vartheta,
\end{aligned} \tag{5.21}$$

čia G_{ij}^{cl} apibrėžta (5.12) formule.

Diferencialinio uždavinio (5.17)–(5.18) Gryno funkcija pateikta straipsnyje [107]. Šiam uždaviniui

$$\begin{aligned}
\vartheta = 1 - \gamma_0 \int_0^1 \alpha_0(x)(1 - x)\,dx - \gamma_1 \int_0^1 \alpha_1(x) x\,dx \\
- \gamma_0 \gamma_1 \int_0^1 \int_0^1 \alpha_0(x) \alpha_1(y)(x - y)\,dx\,dy
\end{aligned}$$

ir

$$G(x,y) = \bar{G}^{\mathrm{cl}}(x,y) + \frac{\gamma_0(1-x+\gamma_1\int_0^1 \alpha_1(t)(x-t)\,dt)}{\vartheta}\cdot\int\limits_0^1 \alpha_0(t)\bar{G}^{\mathrm{cl}}(t,y)\,dt$$

$$+\frac{\gamma_1(x-\gamma_0\int_0^1 \alpha_0(t)(x-t)\,dt)}{\vartheta}\cdot\int\limits_0^1 \alpha_1(t)\bar{G}^{\mathrm{cl}}(t,y)\,dt$$

jei $\vartheta \neq 0$, čia $\bar{G}^{\mathrm{cl}}(x,y)$ apibrėžta (5.15) lygtyje.

3.7 pastaba. (5.12) išraiškas galima įstatyti į (5.21) ir gauti išreikštinę Gryno funkcijos formulę, bet ji būtų gana sudėtinga. Pastebėsime, jei $(A^0,u)_K = u_{s_0}$, $(A^1,u)_K = u_{s_1}$, tai diskretusis uždavinys (5.19)–(5.20) yra toks pat kaip (5.7)–(5.8). Pavyzdžiui, tai atsitinka, jei trapecijos formulė yra naudojama aproksimacijai α^l, $l=0,1$ ir jei paimsime $A_i^l = \delta_i^{s_l}/h_{s_l+\frac{1}{2}}$. Matome, kad šiuo atveju galima gauti tą pačią Gryno funkcijos išraišką (5.16) kaip 3.3 pavyzdyje.

3.4 pavyzdys. Panagrinėkime baigtinių skirtumų schemą

$$-\delta^2 u_i = f_i, \quad x_i \in \omega^h, \tag{5.22}$$

$$u_0 = \alpha_0 u_1 + \gamma_0 u_{n-1}, \qquad u_n = \alpha_1 u_1 + \gamma_1 u_{n-1}. \tag{5.23}$$

Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga (kai fundamentalioji sistema yra $\{1-x, x\}$) yra

$$\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} 1-\alpha_0(1-h_1)-\gamma_0 h_n & -\alpha_1(1-h_1)-\gamma_1 h_n \\ -\alpha_0 h_1 - \gamma_0(1-h_n) & 1-h_n-\alpha_1 h_1-\gamma_1(1-h_n) \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 1-\alpha_0 & \gamma_0 \\ \alpha_1 & 1-\gamma_1 \end{vmatrix} + h_1 \begin{vmatrix} \alpha_0 & 1-\gamma_0 \\ \alpha_1 & 1-\gamma_1 \end{vmatrix} + h_n \begin{vmatrix} 1-\alpha_0 & \gamma_0 \\ 1-\alpha_1 & \gamma_1 \end{vmatrix} \neq 0.$$

Panagrinėkime trijų tipų diskrečiąsias kraštines sąlygas ($\alpha_0=\gamma_1=0$, $\gamma_0=\alpha_1=1$; $\alpha_0=\alpha_1=(1+h_1/h_n)^{-1}$, $\gamma_0=\gamma_1=(1+h_n/h_1)^{-1}$; $\alpha_0=0$, $\gamma_0=1$, $\alpha_1=h_n/h_1$, $\gamma_1=1-h_n/h_1$):

$$u_0 = u_{n-1}, \qquad u_1 = u_n, \tag{5.24}$$

$$u_0 = u_n, \qquad \delta u_{\frac{1}{2}} = \delta u_{n-\frac{1}{2}}, \tag{5.25}$$

$$u_0 = u_{n-1}, \qquad \delta u_{\frac{1}{2}} = \delta u_{n-\frac{1}{2}}. \tag{5.26}$$

Visais atvejais $\vartheta = 0$. Todėl (5.22) lygties su (5.24)–(5.26) sąlygomis Gryno funkcijos neegzistuoja.

6. Trečiojo skyriaus išvados

Diskrečiojo uždavinio su įvairiomis sąlygomis diskrečioji Gryno funkcija yra susijusi su panašaus uždavinio Gryno funkcija ir šis sąryšis išreikštas (4.16)–(4.18) lygybėmis. Gryno funkcija egzistuoja, jei $\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$. Jeigu uždavinio su įvairiomis sąlygomis Gryno funkcija ir homogeninės diskrečiosios lygties fundamentalioji bazė yra žinomos, tai galima rasti Gryno funkciją uždaviniui su ta pačia lygtimi, bet su kitomis sąlygomis. Tai parodyta keliuose pavyzdžiuose su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis, bet lygybės (4.16)–(4.18) gali būti pritaikytos plačiai uždavinių klasei su įvairiomis kraštinėmis sąlygomis.

Gauti rezultatai yra panašūs (analogiški) diferencialinio uždavinio rezultatams [106, 107].

4 skyrius

m-tosios eilės diskretusis uždavinys

Šiame skyriuje apibendrinami trečiojo skyriaus rezultatai. Nagrinėjamas m-tosios eilės diskretusis uždavinys su įvairiomis sąlygomis. Užrašomas šio uždavinio sprendinys ir pateikiama Gryno funkcija, jei žinoma homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Suformuluotas dviejų Gryno funkcijų sąryšis, kuris leidžia surasti diskrečiosios lygties su įvairiomis sąlygomis Gryno funkciją, jei žinoma tos pačios lygties, bet su kitomis sąlygomis, Gryno funkcija. Kadangi šio skyriaus rezultatai apibendrina antros eilės diskrečiojo uždavinio rezultatus, tai įrodymai nepateikiami, kai jie yra visiškai analogiški (arba pirmojo skyriaus, arba trečiojo skyriaus teiginių įrodymams). Šio skyriaus rezultatai pristatomi straipsnyje [A10].

Straipsnyje [109], buvo išnagrinėta antros eilės diskrečioji lygtis. Buvo gauti šio uždavinio sprendinys ir Gryno funkcija. Taip pat užrašytas sąryšis tarp dviejų diskrečiųjų Gryno funkcijų.

Šiame skyriuje nagrinėsime m-tosios eilės diskrečiąją lygtį

$$a_i^m u_{i+m} + \cdots + a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \tag{0.1}$$

čia $a^m, a^0 \neq 0$, kuri atitinka m-tosios eilės tiesinę diferencialinę lygtį

$$b_m(x)u^{(m)}(x) + \cdots + b_2(x)u''(x) + b_1(x)u'(x) + b_0(x)u(x) = f(x).$$

Uždavinius su aukštesnės eilės diferencialine ir diskrečiąją (arba skirtumine) lygtimi su skirtingomis kraštinėmis sąlygomis nagrinėjo A. A. Samarskis [117, 119], A. V. Gulinas [118], N. S. Bachvalovas [10], J. R. L. Vebas, G. Infantė ir D. Frankas [147], J. Hendersonas [58] ir kiti matematikai. Dauguma iš jų konstravo Gryno funkcijas sprendinių savybių tyrimui. Ganbaris [44] palygina diskrečių ir Šturmo ir Liuvilio tolydžių uždavinių savybes. Jis parodė, kad abiem atvejais Gryno funkcijos turi analogiškas išraiškas. Sangas ir bendraautoriai [120] tyrė netiesinę diskrečiąją ketvirtos eilės lygtį su Lidstone kraštinėmis sąlygomis. Naudodami monotonišką iteracinį metodą, jie įrodė teigiamų sprendinių egzistavimą, vienatį ir iteracinio metodo konvergavimą. Singuliariojo aukštesnės eilės tolydžiojo ir diskrečiojo kraštinio uždavinio sprendinių egzistavimas ir vienatis nagrinėjami straipsnyje [153]. Taip pat diskrečoji Gryno funkcija buvo konstruojama straipsnyje [138].

1. Žymėjimai

Apibendrinsime trečiojo skyriaus apibrėžimus ir žymėjimus.

Tegul $X=\{0,1,\dots,n\}$, $\tilde{X}=\{0,1,\dots,n-m\}$. Paimkime vektorinę funkciją $\boldsymbol{u}=[u^1,\dots,u^m]\in F^m(X)$ ir $\boldsymbol{i}=(i_1,\dots,i_m)\in X^m$, ir nagrinėkime matricinę funkciją $[\boldsymbol{u}]:X^m\to M_{m\times m}(\mathbb{K})$ ir jos funkcinį determinantą $D[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{i}}:X^m\to\mathbb{K}$:

$$[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{i}}=\left[u^1,\dots,u^m\right]_{i_1\dots i_m}:=\begin{pmatrix} u^1_{i_1} & \cdots & u^1_{i_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ u^m_{i_1} & \cdots & u^m_{i_m}\end{pmatrix},$$

$$D[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{i}}=\det[\boldsymbol{u}]_{\boldsymbol{i}}=\det\left[u^1,\dots,u^m\right]_{i_1\dots i_m}:=\begin{vmatrix} u^1_{i_1} & \cdots & u^1_{i_m}\\ \cdots & \cdots & \cdots\\ u^m_{i_1} & \cdots & u^m_{i_m}\end{vmatrix}.$$

Diskrečiųjų lygčių teorijoje Vronskio determinantas $W[\boldsymbol{u}]_j$ ir determinantas $\widetilde{W}[\boldsymbol{u}]_{ij}$ apibrėžiami tokiu būdu:

$$W[\boldsymbol{u}]_j := \begin{vmatrix} u^1_{j-m+1} & \cdots & u^m_{j-m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u^1_{j-1} & \cdots & u^m_{j-1} \\ u^1_j & \cdots & u^m_j \end{vmatrix} = D[\boldsymbol{u}]_{j-m+1,\dots,j}, \quad j = m-1,\dots,n,$$

$$\widetilde{W}[\boldsymbol{u}]_{ij} := \begin{vmatrix} u^1_{j-m+1} & \cdots & u^m_{j-m+1} \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ u^1_{j-1} & \cdots & u^m_{j-1} \\ u^1_i & \cdots & u^m_i \end{vmatrix}, \quad i \in X,\ j = m-1,\dots,n+1.$$

Šių dviejų determinantų paskutinės eilutės elementai turi tuos pačius adjunktus ir yra teisingos lygybės

$$W[\boldsymbol{u}]_j = \sum_{k=1}^{m} u^k_j (-1)^{m-k} W_k[\boldsymbol{u}]_{j-1},$$
$$\widetilde{W}[\boldsymbol{u}]_{ij} = \sum_{k=1}^{m} u^k_i (-1)^{m-k} W_k[\boldsymbol{u}]_{j-1}$$

čia $W_k[\boldsymbol{u}]_{j-1} := W[u^1,\dots,u^{k-1},u^{k+1},\dots,u^m]_{j-1}$.

Kai $W[\boldsymbol{u}]_{j+m} \neq 0$, pažymėkime

$$V[\boldsymbol{u}]_{ij} := \frac{\widetilde{W}[\boldsymbol{u}]_{i,j+m}}{W[\boldsymbol{u}]_{j+m}}, \quad i \in X,\ j \in -1,\dots,n-m.$$

$V[\boldsymbol{u}]_{i,n-k} = 0$, $k = 0,\dots,m-1$, $i \in X$. Pastebėsime, kad $V[\boldsymbol{u}]_{j+k,j} = 0$, $k = 1,\dots,m-1$, $V[\boldsymbol{u}]_{j+m,j} = 1$, kai $j \in \tilde{X}$.

Erdvėje $F(X)$ nagrinėsime tiesinių funkcionalų erdvę $F^*(X)$. Pažymėkime $\boldsymbol{f} = (f_1,\dots,f_m)$, $\boldsymbol{w} = [w^1,\dots,w^m]$ ir apibrėžkime determinantą

$$D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] := \det(f_1,\dots,f_m)\big[w^1,\dots,w^m\big] = \begin{vmatrix} \langle f_1, w^1\rangle & \cdots & \langle f_m, w^1\rangle \\ \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle f_1, w^m\rangle & \cdots & \langle f_m, w^m\rangle \end{vmatrix}.$$

Jeigu funkcijos $w^1,\dots,w^m \in F(X)$ yra tiesiškai nepriklausomos, ir $\operatorname{span}\{w^1,\dots,w^m\} = F(X)$, tuomet teisinga lema.

4.1 lema. *Funkcionalai $f_1,\dots,f_m$ yra tiesiškai nepriklausomi tada ir tik tada, kai $D(\boldsymbol{f})[\boldsymbol{w}] \neq 0$.*

Pažymėkime $\boldsymbol{L} = (L_1, \dots, L_m)$. Įveskime funkcijas

$$\bar{v}_i^k := D(L_1, \dots, L_{k-1}\delta_i, L_{k+1}, \dots, L_m)[\boldsymbol{u}], \quad k = 1, \dots, m. \tag{1.1}$$

Šioms funkcijoms $\langle L_l, \bar{v}^k \rangle = \delta_l^k D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]$, $k, l = 1, \dots, m$, t. y. $\bar{v}^k \in \operatorname{Ker} L_l$, kai $k \neq l$.

Jei $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$, tai apibrėžkime naujas funkcijas

$$v_i^k := \frac{D(L_1, \dots, L_{k-1}, \delta_i, L_{k+1}, \dots, L_m)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \quad k = 1, \dots, m. \tag{1.2}$$

Tada $(L_l, v^k) = \delta_l^k$, t. y. šios dvi bazės yra biortogonalios.

2. Diskrečioji m-tosios eilės skirtuminė lygtis su m įvairiomis sąlygomis

Tegul $\{u^1, \dots, u^m\}$ yra homogeninės lygties

$$\mathcal{L}u := a_i^m u_{i+m} + \dots + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = 0, \quad a_i^m, a_i^0 \neq 0, \quad i \in \tilde{X}. \tag{2.1}$$

sprendiniai. Tada $D[\boldsymbol{u}]_{ij_1 \dots j_{m-1}}$ yra (2.1) lygties sprendinys, t. y.

$$a_i^m D[\boldsymbol{u}]_{i+m, j_1 \dots j_{m-1}} + \dots + a_i^1 D[\boldsymbol{u}]_{i+1, j_1 \dots j_{m-1}} + a_i^0 D[\boldsymbol{u}]_{ij_1 \dots j_{m-1}} = 0, \tag{2.2}$$

$i \in \tilde{X}$, $j \in X$. Kai $j_k = i + k$, $k = 1, \dots, m-1$, iš šios lygybės išplaukia, kad

$$a_i^m D[\boldsymbol{u}]_{i+m, i+1, \dots, i+m-1} + a_i^0 D[\boldsymbol{u}]_{i, i+1, \dots, i+m-1} = 0,$$

arba

$$(-1)^{m-1} a_i^m W[\boldsymbol{u}]_{i+m} + a_i^0 W[\boldsymbol{u}]_{i+m-1} = 0.$$

Gauname, kad $W[\boldsymbol{u}]_i \equiv 0$ (atvejis kai $\{u^1, \dots, u^m\}$ yra tiesiškai priklausomi sprendiniai) arba $W[\boldsymbol{u}]_i \neq 0$ visiems $i = 1, \dots, n$ (fundamentaliosios sistemos atveju).

Panagrinėkime nehomogeninę skirtuminę lygtį

$$\mathcal{L}u := a_i^m u_{i+m} + \dots + a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \quad i \in \tilde{X}, \tag{2.3}$$

su sąlygomis

$$\langle L_1, u\rangle = g_1 \in \mathbb{K}, \quad \dots, \quad \langle L_m, u\rangle = g_m \in \mathbb{K}, \tag{2.4}$$

čia $L_1, \dots, L_m$ yra tiesiškai nepriklausomi funkcionalai. Pažymėkime $\boldsymbol{L} = (L_1, \dots, L_m)$, $\boldsymbol{g} = (g_1, \dots, g_m)$.

2.1. Nehomogeninio uždavinio su homogeninėmis sąlygomis sprendinys

(2.1) lygties bendrasis sprendinys yra $u = C_1u^1 + \dots + C_mu^m$, čia $C_1, \dots, C_m$ yra laisvosios konstantos ir $\{u^1, \dots, u^m\}$ yra homogeninės lygties fundamentalioji sistema. Pakeiskime konstantas $C_1, \dots, C_m$ atitinkamai funkcijomis $c_1, \dots, c_m \in F(X)$ (konstantų varijavimo metodas [119]). Tada, įstatę

$$u_{f;i} = c_{1;i}u_i^1 + \dots + c_{m;i}u_i^m, \quad i \in X, \tag{2.5}$$

į (2.3) lygtį ir pažymėję $d_{ki} = \sum_{l=1}^m [c_{l;i+k} - c_{l;i}]u_{i+k}^l$, $k = -1, 0, 1, \dots, m$, $i = \max(0, -k), \dots, \min(n-k, n)$ [119], gauname

$$\begin{aligned} f_i &= \sum_{k=0}^m a_i^k u_{f;i+k} = \sum_{k=0}^m a_i^k \sum_{l=1}^m c_{l;i+k}u_{i+k}^l = \sum_{k=0}^m a_i^k d_{ki} + \sum_{k=0}^m a_i^k \sum_{l=1}^m c_{l;i}u_{i+k}^l \\ &= \sum_{k=0}^m a_i^k d_{ki} + \sum_{l=1}^m c_{l;i}\left[\sum_{k=0}^m a_i^k u_{i+k}^l\right]. \end{aligned}$$

Funkcijos $u^1, \dots, u^m$ yra (2.1) homogeninės lygties sprendiniai. Todėl

$$f_i = \sum_{k=0}^m a_i^k d_{ki}, \quad \text{kai } i \in \tilde{X}. \tag{2.6}$$

Pažymėkime $b_{li} = c_{l;i+1} - c_{l;i}$, $l = 1, \dots, m$. Tada ($k = 0, 1 \dots, m$)

$$d_{ki} - d_{k-1,i+1} = \sum_{l=1}^m (c_{l;i+k} - c_{l;i})u_{i+k}^l - \sum_{l=1}^m (c_{l;i+k} - c_{l;i+1})u_{i+k}^l = \sum_{l=1}^m b_{li}u_{i+k}^l$$

ir

$$\sum_{k=0}^m a_i^k (d_{ki} - d_{k-1,i+1}) = \sum_{l=1}^m b_{li} \sum_{k=0}^m a_i^k u_{i+k}^l = 0.$$

(2.6) lygybę galima perrašyti kaip

$$f_i = \sum_{k=0}^m a_i^k d_{ki} = \sum_{k=0}^m a_i^k d_{k-1,i+1}.$$

Paimkime $d_{k-1,i+1} = 0$, kai $k = 0, \dots, m-1$, $i = 0, \dots, n-1$. Tada $d_{m-1,i+1} = f_i/a_i^m$ visiems $i = 0, \dots, n-1$ ir gauname lygčių sistemą:

$$\begin{cases} b_{1,i+1}u_{i+1}^1 + \dots + b_{m,i+1}u_{i+1}^m = 0, \\ b_{1,i+1}u_{i+2}^1 + \dots + b_{m,i+1}u_{i+2}^m = 0, \\ \dots \\ b_{1,i+1}u_{i+m-1}^1 + \dots + b_{m,i+1}u_{i+m-1}^m = 0, \\ b_{1,i+1}u_{i+m}^1 + \dots + b_{m,i+1}u_{i+m}^m = f_i/a_i^m, \end{cases} \quad i \in \tilde{X}. \tag{2.7}$$

Kadangi $u^1, \dots, u^m$ yra tiesiškai nepriklausomos, tai determinantas $W[\boldsymbol{u}]_{i+m}$ nelygus nuliui ir (2.7) sistema turi vienintelį sprendinį

$$b_{1,i+1} = c_{1;i+2} - c_{1;i+1} = \frac{(-1)^{m+1}W_1[\boldsymbol{u}]_{i+m-1}f_i}{a_i^m W[\boldsymbol{u}]_{i+m}},$$
$$b_{2,i+1} = c_{2;i+2} - c_{2;i+1} = \frac{(-1)^{m+2}W_2[\boldsymbol{u}]_{i+m-1}f_i}{a_i^m W[\boldsymbol{u}]_{i+m}},$$
$$\dots$$
$$b_{m,i+1} = c_{m;i+2} - c_{m;i+1} = \frac{(-1)^{2m}W_m[\boldsymbol{u}]_{i+m-1}f_i}{a_i^m W[\boldsymbol{u}]_{i+m}}.$$

Tada

$$c_{1;i} = (-1)^{m+1}\sum_{j=0}^{i-2}\frac{W_1[\boldsymbol{u}]_{j+m-1}f_j}{a_j^m W[\boldsymbol{u}]_{j+m}} + c_{1;1}, \quad \dots,$$
$$c_{m;i} = (-1)^{2m}\sum_{j=0}^{i-2}\frac{W_m[\boldsymbol{u}]_{j+m-1}f_j}{a_j^m W[\boldsymbol{u}]_{j+m}} + c_{m;1}, \quad i = 2, \dots, n,$$

ir nehomogeninės lygties (kai sąlygos $u_0 = u_1 = \dots = u_{m-1} = 0$) sprendinys yra

$$\begin{aligned} u_i &= \sum_{l=1}^{m} c_{l;i}u_i^l = \sum_{l=1}^{m} u_i^l(-1)^{m-l}\sum_{j=0}^{i-2}\frac{W_l[\boldsymbol{u}]_{j+m-1}f_j}{a_j^m W[\boldsymbol{u}]_{j+m}} \\ &= \sum_{j=0}^{i-2}\frac{f_j}{a_j^m W[\boldsymbol{u}]_{j+m}}\sum_{l=1}^{m} u_i^l(-1)^{m-l}W_l[\boldsymbol{u}]_{j+m-1} \\ &= \sum_{j=0}^{i-2}\frac{\widetilde{W}[\boldsymbol{u}]_{i,j+m}f_j}{a_j^m W[\boldsymbol{u}]_{j+m}} = \sum_{j=0}^{i-m}\frac{\widetilde{W}[\boldsymbol{u}]_{i,j+m}f_j}{a_j^m W[\boldsymbol{u}]_{j+m}}, \end{aligned} \tag{2.8}$$

kai $i = m, \ldots, n$, nes $\widetilde{W}[\boldsymbol{u}]_{i,j+m} = 0$ kai $j = i - m + 1, \ldots, i - 2$. Įveskime funkciją $G^c \in F(X \times \tilde{X})$:

$$G^c_{ij} := H_{i-j} V_{ij} / a^m_j. \tag{2.9}$$

Tada (2.8) lygybę, kai sąlygos $u_0 = u_1 = \cdots = u_{m-1} = 0$, galima užrašyti tokiu būdu

$$u_i = \sum_{j=0}^{n-m} G^c_{ij} f_j = \left(G^c_{ij}, f_j\right)_X = \left(G^c_{i,\cdot}, f\right)_X, \quad i \in X, \tag{2.10}$$

čia $(w, g)_X = (w_l, g_l)_X := \sum_{l=0}^{n-m} w_l g_l$, $w, g \in F(\tilde{X})$. Taigi gavome bendrojo sprendinio išraišką $u_i = (G^c_{i,\cdot}, f)_X + \sum_{l=1}^{m} C_l u^l_i$. Šią formulę pritaikysime specialiajai bazei $\{v^1, \ldots, v^m\}$ (žr. (1.2)). Šiuo atveju turime

$$u_i = \left(G^c_{i,\cdot}, f\right)_X + \sum_{l=1}^{m} C_l v^l_i, \quad i \in X. \tag{2.11}$$

Imkime homogenines sąlygas

$$\langle L_1, u \rangle = 0, \quad \ldots, \quad \langle L_m, u \rangle = 0. \tag{2.12}$$

Įstatę bendrąjį sprendinį (2.11) į homogenines sąlygas ir panaudoję lygybę $\langle L_l, v^k \rangle = \delta^k_l$, $k, l = 1, \ldots, m$, surandame

$$C_l = -\left\langle L^k_l, \left(G^c_{k,\cdot}, f\right)_X \right\rangle = -\left(\left\langle L^k_l, G^c_{k,\cdot} \right\rangle, f\right)_X, \quad l = 1, \ldots, m.$$

Tada gauname sprendinio išraišką diskrečiajai lygčiai su m homogeninėmis sąlygomis:

$$\begin{aligned} u_{f;i} &= \left(G^c_{i,\cdot}, f\right)_X - \left(\sum_{l=1}^{m} \left\langle L^k_l v^l_i, G^c_{k,\cdot} \right\rangle, f \right)_X \\ &= \left(\left\langle \delta^k_i - \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i, G^c_{k,\cdot} \right\rangle, f\right)_X, \end{aligned} \tag{2.13}$$

čia $v^l_i = D(L_1, \ldots, L_{l-1}, \delta_i, L_{l+1}, \ldots, L_m)/D(\boldsymbol{L})$, $\boldsymbol{v}_i = [v^1_i, \ldots, v^m_i]$, $\boldsymbol{L}^k = (L^k_1, \ldots, L^k_m)$, $i, k \in X$, $\boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i := L^k_1 v^1_i + \cdots + L^k_m v^m_i$.

4.1 teorema. *Uždavinio* (2.3)–(2.4) *sprendinys yra išreiškiamas formule*

$$u_i = \left(\left\langle \delta^k_i - \boldsymbol{L}^k \boldsymbol{v}_i, G^c_{k,\cdot} \right\rangle, f\right)_X + g_1 \cdot v^1_i + \cdots + g_m \cdot v^m_i, \quad i \in X. \tag{2.14}$$

Panagrinėkime du uždavinius su ta pačia nehomogenine diskrečiąja lygtimi:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ \langle l_k, u\rangle = f_k, \quad k = 1, \dots, m, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}v = f, \\ \langle L_k, v\rangle = F_k, \quad k = 1, \dots, m, \end{cases} \tag{2.15}$$

ir $D(\boldsymbol{L}) \neq 0$.

4.1 išvada. *Uždavinių* (2.15) *sprendiniai susieti formule*:

$$\begin{aligned} v_i &= \frac{1}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \cdots & \langle L_m, u^1\rangle & u_i^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m\rangle & \cdots & \langle L_m, u^m\rangle & u_i^m \\ \langle L_1, u\rangle - F_1 & \cdots & \langle L_m, u\rangle - F_m & u_i \end{vmatrix} \\ &= u_i + \big(F_1 - \langle L_1, u\rangle\big) v_i^1 + \cdots + \big(F_m - \langle L_m, u\rangle\big) v_i^m \\ &= u_i + \big(F_1 - \langle L_1, u\rangle\big) \frac{D(\delta_i, L_2, \dots, L_m)}{D(\boldsymbol{L})} + \cdots \\ &\quad + \big(F_m - \langle L_m, u\rangle\big) \frac{D(L_1, \dots, L_{m-1}, \delta_i)}{D(\boldsymbol{L})}, \quad i \in X. \end{aligned} \tag{2.16}$$

4.1 pastaba. (2.16) lygtį taip pat galima užrašyti kaip:

$$\begin{aligned} v_i = {} & \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_i)[\boldsymbol{u}, u]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \\ & + \frac{F_1 D(\delta_i, L_2, \dots, L_m)[\boldsymbol{u}] + \cdots + F_m D(L_1, \dots, L_{m-1}, \delta_i)[\boldsymbol{u}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \quad i \in X. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Pastebėsime, kad šioje formulėje funkcija u yra tik pirmame naryje ir v_i yra invariantinė bazės $\{u^1, \dots, u^m\}$ atžvilgiu.

3. Gryno funkcijos

Diskrečiųjų uždavinių Gryno funkcija bendruoju atveju (m-osios eilės lygčiai) apibrėžta ir išsamiai aprašyta trečiame skyriuje (žr. 4.1 poskyryje).

Panagrinėkime nehomogeninę lygtį (2.3) su operatoriumi: $\mathcal{L} : U \to F(X)$, kai homogeninės sąlygos apibrėžia poerdvį $U = \{\boldsymbol{u} \in F(X) \colon \langle L_1, u\rangle = 0,\ \dots,\ \langle L_m, u\rangle = 0\}$.

4.2 lema. (2.3) *uždavinio su homogeninėmis sąlygomis* $\langle L_1, u\rangle = 0, \ldots, \langle L_m, u\rangle = 0$, *kai funkcionalai* $L_1, \ldots, L_m$ *yra tiesiškai nepriklausomi, Gryno funkcija yra lygi*

$$G_{ij} = \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_i)[\boldsymbol{u}, G^c_{\cdot,j}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]}, \quad i \in X,\ j \in \tilde{X}. \tag{3.1}$$

Suformuluosime dviejų nehomogeninių uždavinių su tuo pačiu f:

$$\begin{cases} \mathcal{L}u = f, \\ \langle l_k, u\rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \end{cases} \qquad \begin{cases} \mathcal{L}v = f, \\ \langle L_k, v\rangle = 0, \quad k = 1, \ldots, m, \end{cases} \tag{3.2}$$

dviejų Gryno funkcijų G^u_{ij} ir G^v_{ij} sąryšį.

4.2 teorema. *Jei Gryno funkcija* G^u *egzistuoja ir funkcionalai* $L_1, \ldots, L_m$ *yra tiesiškai nepriklausomi, tai*

$$\begin{aligned} G^v_{ij} &= \frac{D(\boldsymbol{L}, \delta_i)[\boldsymbol{u}, G^u_{\cdot,j}]}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \\ &= \frac{1}{D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}]} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \cdots & \langle L_m, u^1\rangle & u^1_i \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m\rangle & \cdots & \langle L_m, u^m\rangle & u^m_i \\ \langle L^k_1, G^u_{kj}\rangle & \cdots & \langle L^k_m, G^u_{kj}\rangle & G^u_{ij} \end{vmatrix} \\ &= G^u_{ij} - \left\langle L^k_1, G^u_{kj}\right\rangle \frac{D(\delta_i, L_2, \ldots, L_m)}{D(\boldsymbol{L})} - \cdots \\ &\quad - \left\langle L^k_m, G^u_{kj}\right\rangle \frac{D(L_1, \ldots, L_{m-1}, \delta_i)}{D(\boldsymbol{L})}, \quad i \in X,\ j \in \tilde{X}. \end{aligned} \tag{3.3}$$

Formulė (3.3) leidžia lengvai surasti m-tosios eilės diskrečiosios lygties su m įvairiomis sąlygomis Gryno funkciją, jei žinoma tos pačios lygties, bet su kitomis sąlygomis, Gryno funkcija. Lygtį

$$u_i = (G_{i,\cdot}, f)_X + g_1 v^1_i + \cdots + g_m v^m_i, \quad i \in X, \tag{3.4}$$

galima panaudoti lygties su skirtuminiu operatoriumi ir su bet kokiomis m tiesinėmis įvairiomis (pradinėmis arba kraštinėmis arba nelokaliosiomis kraštinėmis) sąlygomis sprendinių konstravimui, jei yra žinomas homogeninės lygties fundamentalioji sistema.

4. Gryno funkcijų pritaikymas uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

Šiame poskyryje nagrinėsime uždavinio su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$\mathcal{L}u := a_i^m u_{i+m} + \cdots + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \quad i \in \tilde{X}, \tag{4.1}$$

$$\langle L_1, u\rangle := \langle \kappa_1, u\rangle - \gamma_1 \langle \varkappa_1, u\rangle = 0, \quad \ldots, \tag{4.2}$$

$$\langle L_m, u\rangle := \langle \kappa_m, u\rangle - \gamma_m \langle \varkappa_m, u\rangle = 0. \tag{4.3}$$

Gryno funkciją. Šiuo pavidalu galima užrašyti daugumą uždavinių su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis, kur $\langle \kappa_l, u\rangle := \langle \kappa_l^i, u_i\rangle$, $l = 1, \ldots, m$, yra klasikinė dalis, ir $\langle \varkappa_l, u\rangle := \langle \varkappa_l^i, u_i\rangle$, $l = 1, \ldots, m$, yra kraštinių sąlygų nelokalioji dalis.

Jei $\gamma_1, \ldots, \gamma_m = 0$, tai uždavinys (4.1)–(4.3) tampa klasikiniu. Tarkime, klasikiniu atveju Gryno funkcija G_{ij}^{cl} egzistuoja. Tada (4.1)–(4.3) uždavinio Gryno funkcija egzistuoja, jei $\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$. Funkcionalams $L_l = \kappa_l - \gamma_l \varkappa_l$, $l = 1, \ldots, m$, gauname

$$\vartheta = \sum_{j_1, \ldots, j_m = 0}^{1} \gamma_1^{j_1} \cdots \gamma_m^{j_m} D\big(\big((1-j_1)\kappa_1 - j_1 \varkappa_1\big), \ldots, \big((1-j_m)\kappa_m - j_m \varkappa_m\big)\big)[\boldsymbol{u}].$$

Kadangi $\langle \kappa_l^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\rangle = 0$, $l = 1, \ldots, m$, tai (3.3) lygybė gali būti perrašyta

$$\begin{aligned}
G_{ij} &= G_{ij}^{\mathrm{cl}} + \gamma_1 v_i^1 \big\langle \varkappa_1^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\big\rangle + \cdots + \gamma_m v_i^m \big\langle \varkappa_m^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\big\rangle \\
&= G_{ij}^{\mathrm{cl}} + \gamma_1 \big\langle \varkappa_1^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\big\rangle \frac{D(\delta_i, L_2, \ldots, L_m)}{\vartheta} + \cdots \\
&\quad + \gamma_m \big\langle \varkappa_m^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\big\rangle \frac{D(L_1, \ldots, L_{m-1}, \delta_i)}{\vartheta} \\
&= \frac{1}{\vartheta} \begin{vmatrix} \langle L_1, u^1\rangle & \cdots & \langle L_m, u^1\rangle & u_i^1 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \langle L_1, u^m\rangle & \cdots & \langle L_m, u^m\rangle & u_i^m \\ -\gamma_1 \langle \varkappa_1^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\rangle & \cdots & -\gamma_m \langle \varkappa_m^k, G_{kj}^{\mathrm{cl}}\rangle & G_{ij}^{\mathrm{cl}} \end{vmatrix}.
\end{aligned} \tag{4.4}$$

4.1 pavyzdys. Panagrinėkime diferencialinę lygtį su trimis nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis

$$u''' = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{4.5}$$

$$u(0) = \gamma_0 u(\xi_0), \quad u'(0) = \gamma_1 u(\xi_1), \quad u(1) = \gamma_2 u(\xi_2), \quad 0 < \xi_0, \xi_1, \xi_2 < 1. \tag{4.6}$$

Įveskime diskrečiuosius tinklus $\bar{\omega}^h$ ir $\omega^h_{1/2}$ su žingsniais h_i ir $h_{i+1/2}$ kaip trečiajame skyriuje, (4.9) ir (4.10) lygtyse. Pažymėkime $u_i = u(x_i)$, $f_i = f(x_i)$, kai $x_i \in \bar{\omega}^h$. Tada (4.5), (4.6) uždavinys gali būti aproksimuotas baigtinių skirtumų schema

$$\left(\delta^3 u\right)_{i+1/2} = \bar{f}_{i+1/2}, \quad x_i \in \omega^h_{1/2} \setminus \{x_{1/2}, x_{n-1/2}\}, \tag{4.7}$$

$$u_0 = \gamma_0 u_{s_0}, \quad u_1 = u_0 + \gamma_1 h_1 u_{s_1}, \quad u_n = \gamma_2 u_{s_2}. \tag{4.8}$$

Tarkime, kad taškai ξ_0, ξ_1, ξ_2 sutampa su tinklo taškais, t. y. $\xi_0 = x_{s_0}$, $\xi_1 = x_{s_1}$, $\xi_2 = x_{s_2}$.

(4.7) lygtį galima užrašyti tokia forma

$$a_i^3 u_{i+3} + a_i^2 u_{i+2} + a_i^1 u_{i+1} + a_i^0 u_i = f_i, \quad i \in \tilde{X}, \tag{4.9}$$

čia

$$a_i^3 = \frac{1}{h_{i+2} h_{i+5/2} h_{i+3}}, \qquad a_i^2 = -\frac{2h_{i+3/2} + h_{i+3}}{h_{i+3/2} h_{i+2}^2 h_{i+3}}, \qquad a_i^1 = \frac{h_{i+1} + 2h_{i+5/2}}{h_{i+1} h_{i+2}^2 h_{i+5/2}},$$
$$a_i^0 = -\frac{1}{h_{i+2} h_{i+1} h_{i+3/2}}, \qquad f_i = \bar{f}_{i+1/2}, \quad i \in \tilde{X}.$$

Paimkime fundamentaliąją sistemą: $u_i^1 = 1$, $u_i^2 = x_i$, $u_i^3 = x_i^2$. Panagrinėkime du atvejus.

Pirmas atvejis. Panagrinėkime uždavinį su kraštinėmis sąlygomis $u_0 = u_1 = u_2 = 0$.

Turime, kad

$$\widetilde{W}[\boldsymbol{u}]_{i,j+3} = \begin{vmatrix} u_{j+1}^1 & u_{j+2}^1 & u_i^1 \\ u_{j+1}^2 & u_{j+2}^2 & u_i^2 \\ u_{j+1}^3 & u_{j+2}^3 & u_i^3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ x_{j+1} & x_{j+2} & x_i \\ x_{j+1}^2 & x_{j+2}^2 & x_i^2 \end{vmatrix}$$
$$= h_{j+2}(x_i - x_{j+2})(x_i - x_{j+1}), \quad i \in X, \; j = -1, \ldots, n-2,$$

$$W_{j+3}=\begin{vmatrix}1 & 1 & 1\\ x_{j+1} & x_{j+2} & x_{j+3}\\ x_{j+1}^2 & x_{j+2}^2 & x_{j+3}^2\end{vmatrix}=h_{j+3}h_{j+2}(x_{j+3}-x_{j+1}),\ j=-1,\dots,n-3,$$

$$V_{ij}=\frac{(x_i-x_{j+2})(x_i-x_{j+1})}{(x_{j+3}-x_{j+2})(x_{j+3}-x_{j+1})},\quad i\in X,\ j=-1,0,1,\dots,n-3,$$

$$V_{i,n-2}=V_{i,n-1}=V_{in}=0,\quad i\in X.$$

Tada uždavinio su kraštinėmis sąlygomis $u_0=u_1=u_2=0$ Gryno funkcija yra

$$\begin{aligned}G_{ij}^c&=\frac{H_{i-j}V_{ij}}{a_j^3}=H_{i-j}\frac{(x_i-x_{j+2})(x_i-x_{j+1})}{2}h_{j+2}\\&=\frac{h_{j+2}}{2}\begin{cases}(x_i-x_{j+2})(x_i-x_{j+1}), & 0\leqslant j+1\leqslant i\leqslant n,\\ 0, & 0\leqslant i\leqslant j+1\leqslant n-2.\end{cases}\end{aligned}\tag{4.10}$$

Diferencialinio uždavinio $u'''=f(x)$, $u(0)=u'(0)=u''(0)=0$ Gryno funkcija yra (žr. pirmojo skyriaus, (5.6) formulę):

$$G^{\mathrm{cl}}(x,s)=H(x-s)\frac{(s-x)^2}{2}=\begin{cases}\frac{(s-x)^2}{2}, & 0\leqslant s\leqslant x\leqslant 1,\\ 0, & 0\leqslant x\leqslant s\leqslant 1.\end{cases}$$

Antras atvejis. Uždaviniui su kraštinėmis sąlygomis $u_0=u_1=u_n=0$ turime $D(L)[\boldsymbol{u}]=x_1(1-x_1)$,

$$D(L,\delta_i)\big[\boldsymbol{u},G_{\cdot,j}^c\big]=x_1(1-x_1)G_{ij}^c-x_1x_i(x_i-x_1)G_{nj}^c,$$

ir Dirichlė uždavinio Gryno funkciją G^{cl} išreiškiame per pradinio uždavinio Gryno funkciją G^c

$$G_{ij}^{\mathrm{cl}}=G_{ij}^c-\frac{x_i(x_i-x_1)}{1-x_1}G_{nj}^c.\tag{4.11}$$

Gauname „klasikinės“ Gryno funkcijos išraišką:

$$\begin{aligned}G_{ij}^{\mathrm{cl}}&=h_{j+2}\bigg(H_{i-j}\frac{(x_i-x_{j+2})(x_i-x_{j+1})}{2}\\&\quad-H_{n-j}\frac{x_i(x_i-x_1)(1-x_{j+2})(1-x_{j+1})}{2(1-x_1)}\bigg)\\&=h_{j+2}\begin{cases}\frac{(x_i-1)(x_i(x_{j+2}+x_{j+1}-x_1)+x_{j+1}x_{j+2}(x_1-x_i-1))}{2(1-x_1)}, & 0\leqslant j+1\leqslant i\leqslant n,\\ -\frac{x_i(x_i-x_1)(1-x_{j+2})(1-x_{j+1})}{2(1-x_1)} & 0\leqslant i\leqslant j+1\leqslant n-2.\end{cases}\end{aligned}\tag{4.12}$$

Diferencialinio uždavinio $u''' = f(x)$, $u(0) = u'(0) = u(1) = 0$ Gryno funkcija yra

$$G^{\mathrm{cl}}(x,s) = H(x-s)\frac{(s-x)^2}{2} - \frac{x^2(s-1)^2}{2}$$
$$= \frac{1}{2}\begin{cases} s(1-x)(s+sx-2x), & 0 \leqslant s \leqslant x \leqslant 1, \\ -x^2(s-1)^2, & 0 \leqslant x \leqslant s \leqslant 1. \end{cases}$$

Dabar nagrinėkime sąlygas

$$u_0 = \gamma_0 u_{s_0}, \quad u_1 = u_0 + \gamma_1 h_1 u_{s_1}, \quad u_n = \gamma_2 u_{s_2}, \tag{4.13}$$

čia $s_0 \neq 0, 1$, $s_1 \neq 1$, $s_2 \neq n$.

„Nelokaliajam“ uždaviniui su kraštinėmis sąlygomis (4.13),

$$\vartheta := D(L)[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} 1-\gamma_0\cdot 1 & -\gamma_1 h_1\cdot 1 & 1-\gamma_2\cdot 1 \\ x_0-\gamma_0 x_{s_0} & x_1 - x_0 - \gamma_1 h_1 x_{s_1} & x_n - \gamma_2 x_{s_2} \\ x_0^2 - \gamma_0 x_{s_0}^2 & x_1^2 - x_0^2 - \gamma_1 h_1 x_{s_1}^2 & x_n^2 - \gamma_2 x_{s_2}^2 \end{vmatrix}$$
$$= \begin{vmatrix} 1-\gamma_0 & -\gamma_1 h_1 & 1-\gamma_2 \\ -\gamma_0\xi_0 & x_1 - \gamma_1 h_1 \xi_1 & 1-\gamma_2\xi_2 \\ -\gamma_0\xi_0^2 & x_1^2 - \gamma_1 h_1 \xi_1^2 & 1-\gamma_2\xi_2^2 \end{vmatrix} = x_1(1-x_1) - \gamma_0 x_1(1-\xi_0)(1-x_1+\xi_0)$$
$$-\gamma_1 h_1 \xi_1(1-\xi_1) + \gamma_2\xi_2 x_1(x_1-\xi_2) + \gamma_0\gamma_1 h_1(1-\xi_0)(1-\xi_1)(\xi_1-\xi_0)$$
$$-\gamma_0\gamma_2 x_1(x_1-\xi_0-\xi_2)(\xi_2-\xi_0) + \gamma_1\gamma_2 h_1\xi_1\xi_2(\xi_2-\xi_1)$$
$$-\gamma_0\gamma_1\gamma_2 h_1(\xi_1-\xi_0)(\xi_2-\xi_0)(\xi_2-\xi_1).$$

Iš (4.4) lygties matyti, kad

$$G_{ij} = G_{ij}^{\mathrm{cl}} + \frac{\gamma_0}{\vartheta} G_{s_0 j}^{\mathrm{cl}} \begin{vmatrix} -\gamma_1 h_1 & 1-\gamma_2 & 1 \\ x_1 - \gamma_1 h_1\xi_1 & 1-\gamma_2\xi_2 & x_i \\ x_1^2 - \gamma_1 h_1 \xi_1^2 & 1-\gamma_2\xi_2^2 & x_i^2 \end{vmatrix}$$
$$-\frac{\gamma_1 h_1}{\vartheta} G_{s_1 j}^{\mathrm{cl}} \begin{vmatrix} 1-\gamma_0 & 1-\gamma_2 & 1 \\ -\gamma_0\xi_0 & 1-\gamma_2\xi_2 & x_i \\ -\gamma_0\xi_0^2 & 1-\gamma_2\xi_2^2 & x_i^2 \end{vmatrix} + \frac{\gamma_2}{\vartheta} G_{s_2 j}^{\mathrm{cl}} \begin{vmatrix} 1-\gamma_0 & -\gamma_1 h_1 & 1 \\ -\gamma_0\xi_0 & x_1 - \gamma_1 h_1\xi_1 & x_i \\ -\gamma_0\xi_0^2 & x_1^2 - \gamma_1 h_1\xi_1^2 & x_i^2 \end{vmatrix}$$

$$= G_{ij}^{\mathrm{cl}} + \frac{\gamma_0}{\vartheta}\big(x_1(1-x_i)(1+x_i-x_1) + \gamma_1 h_1(1-x_i)(x_i-\xi_1)(1-\xi_1)$$
$$+ \gamma_2 x_1(x_i-\xi_2)(x_i-x_1+\xi_2) + \gamma_1\gamma_2 h_1(x_i-\xi_1)(x_i-\xi_2)(\xi_2-\xi_1)\big)G_{s_0 j}^{\mathrm{cl}}$$
$$+ \frac{\gamma_1 h_1}{\vartheta}\big(x_i(1-x_i) - \gamma_0(1-x_i)(x_i-\xi_0)(1-\xi_0) + \gamma_2 x_i\xi_2(x_i-\xi_2)$$
$$- \gamma_0\gamma_2(x_i-\xi_0)(x_i-\xi_2)(\xi_2-\xi_0)\big)G_{s_1 j}^{\mathrm{cl}}$$
$$+ \frac{\gamma_2}{\vartheta}\big(x_i x_1(x_i-x_1) - \gamma_0 x_1(x_i-\xi_0)(x_i-x_1+\xi_0) - \gamma_1 h_1 x_i\xi_1(x_i-\xi_1)$$
$$+ \gamma_0\gamma_1 h_1(x_i-\xi_0)(x_i-\xi_1)(\xi_1-\xi_0)\big)G_{s_2 j}^{\mathrm{cl}} \tag{4.14}$$

jei $\vartheta \neq 0$. Jei $\vartheta = 0$, Gryno funkcija neegzistuoja.

4.2 pastaba. Kraštines sąlygas $u_0 = u_1 = u_n = 0$ perrašome kita forma: $u_0 = u_1 = 0$, $u_2 = (u_2 - u_n)$. Trečios eilės skirtuminės lygties (4.9) su šiomis sąlygomis Gryno funkcija yra

$$G_{ij} = G_{ij}^c - \frac{x_i(x_i-x_1)}{1-x_1}\big(G_{2j}^c - G_{nj}^c\big),$$

čia G^c yra (4.9) lygties su pradinėmis sąlygomis $u_0 = u_1 = u_2 = 0$ Gryno funkciją (4.10).

4.2 pavyzdys. Panagrinėkime uždavinį

$$u''' = f(x), \quad x \in (0,1), \tag{4.15}$$

$$u(0) = 0, \qquad u'(0) = 0, \qquad u(1) = \gamma_0 \int\limits_0^1 \alpha^0(x)u(x)\,dx, \tag{4.16}$$

čia $\alpha^0 \in L_1(0,1)$.

Uždavinys (4.15)–(4.16) gali būti aproksimuotas baigtinių skirtumų schema

$$(\delta^3 u)_i = f_i, \quad x_i \in \omega^h, \tag{4.17}$$

$$u_0 = 0, \qquad u_1 = 0, \qquad u_n = \gamma_0(A^0, u)_K, \tag{4.18}$$

čia A^0 yra integralinėse kraštinėse sąlygose svorio funkcijų α^0 aproksimacijos, $(A,u)_K$ yra kvadratūrinė formulė integralo $\int_0^1 A(x)u(x)\,dx$ aproksimacijai (pavyzdžiui, trapecijos formulė $(A,u)_{\mathrm{trap}} := \sum_{k=0}^n A_k u_k h_{k+\frac{1}{2}}$).

Uždavinio su klasikinėmis kraštinėmis sąlygomis ($\gamma_0 = 0$, $u_i^1 = 1$, $u_i^2 = x_i$, $u_i^3 = x_i^2$) Gryno funkcijos išraiška aprašyta 4.1 pavyzdyje. (4.17)–(4.18) uždavinio Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga yra $\vartheta \neq 0$, čia

$$\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 - \gamma_0 (A^0, 1)_K \\ 0 & x_1 & 1 - \gamma_0 (A^0, x)_K \\ 0 & x_1^2 & 1 - \gamma_0 (A^0, x^2)_K \end{vmatrix}$$
$$= x_1(1 - x_1) + \gamma_0 x_1 \big(x_1 \big(A^0, x\big)_K - \big(A^0, x^2\big)_K \big)$$

ir iš 4.2 teoremos Gryno funkcija yra lygi

$$\begin{aligned} G_{ij} &= G_{ij}^{\mathrm{cl}} + \frac{\gamma_0}{\vartheta} x_1 x_i (x_i - x_1) \big(A^0, G_{\cdot,j}^{\mathrm{cl}}\big)_K \\ &\quad + \frac{1}{\vartheta} x_i \big(x_i \big(1 - \gamma_0 \big(A^0, x\big)_K\big) - 1 + \gamma_0 \big(A^0, x^2\big)_K \big) G_{1j}, \end{aligned} \tag{4.19}$$

čia G_{ij}^{cl} aprašyta formulėje (4.10).

4.3 pavyzdys. Panagrinėkime uždavinį

$$u''' = f(x), \quad x \in (0, 1), \tag{4.20}$$

$$u(\xi_0) = \gamma_0 \int_0^1 \alpha^0(x) u(x)\, dx, \qquad u(\xi_1) = \gamma_1 \int_0^1 \alpha^1(x) u(x)\, dx,$$
$$u(\xi_2) = \gamma_2 \int_0^1 \alpha^2(x) u(x)\, dx, \tag{4.21}$$

čia $0 \leqslant \xi_0 \leqslant \xi_1 \leqslant \xi_2 \leqslant 1$, $\alpha^0, \alpha^1, \alpha^2 \in L_1(0, 1)$.

Šiam uždaviniui

$$\begin{aligned} \vartheta &= D\big(\delta(x - \xi_0) \cdot \delta(x - \xi_1) \cdot \delta(x - \xi_2)\big)[\boldsymbol{u}] - \gamma_0 D\big(\alpha_0 \cdot \delta(x - \xi_1) \cdot \delta(x - \xi_2)\big)[\boldsymbol{u}] \\ &\quad - \gamma_1 D\big(\delta(x - \xi_0) \cdot \alpha_1 \cdot \delta(x - \xi_2)\big)[\boldsymbol{u}] - \gamma_2 D\big(\delta(x - \xi_0) \cdot \delta(x - \xi_1) \cdot \alpha_2\big)[\boldsymbol{u}] \\ &\quad + \gamma_0\gamma_1 D\big(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \delta(x - \xi_2)\big)[\boldsymbol{u}] + \gamma_0\gamma_2 D\big(\alpha_0 \cdot \delta(x - \xi_1) \cdot \alpha_2\big)[\boldsymbol{u}] \\ &\quad + \gamma_1\gamma_2 D\big(\delta(x - \xi_0) \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2\big)[\boldsymbol{u}] - \gamma_0\gamma_1\gamma_2 D\big(\alpha_0 \cdot \alpha_1 \cdot \alpha_2\big)[\boldsymbol{u}] \\ &= \begin{vmatrix} 1 - \gamma_0 \int_0^1 \alpha^0(x)\, dx & 1 - \gamma_1 \int_0^1 \alpha^1(x)\, dx & 1 - \gamma_2 \int_0^1 \alpha^2(x)\, dx \\ \xi_0 - \gamma_0 \int_0^1 \alpha^0(x) x\, dx & \xi_1 - \gamma_1 \int_0^1 \alpha^1(x) x\, dx & \xi_2 - \gamma_2 \int_0^1 \alpha^2(x) x\, dx \\ \xi_0^2 - \gamma_0 \int_0^1 \alpha^0(x) x^2\, dx & \xi_1^2 - \gamma_1 \int_0^1 \alpha^1(x) x^2\, dx & \xi_2^2 - \gamma_2 \int_0^1 \alpha^2(x) x^2\, dx \end{vmatrix} \end{aligned}$$

ir Gryno funkcija, kai $\vartheta \neq 0$, yra

$$G(x,y) = G^c(x,y) - \frac{\overline{G}_0^c(y)}{\vartheta} \begin{vmatrix} 1-\gamma_1\int_0^1 \alpha^1(x)\,dx & 1-\gamma_2\int_0^1 \alpha^2(x)\,dx & 1 \\ \xi_1-\gamma_1\int_0^1 \alpha^1(x)x\,dx & \xi_2-\gamma_2\int_0^1 \alpha^2(x)x\,dx & x \\ \xi_1^2-\gamma_1\int_0^1 \alpha^1(x)x^2\,dx & \xi_2^2-\gamma_2\int_0^1 \alpha^2(x)x^2\,dx & x^2 \end{vmatrix}$$

$$+ \frac{\overline{G}_1^c(y)}{\vartheta} \begin{vmatrix} 1-\gamma_0\int_0^1 \alpha^0(x)\,dx & 1-\gamma_2\int_0^1 \alpha^2(x)\,dx & 1 \\ \xi_0-\gamma_0\int_0^1 \alpha^0(x)x\,dx & \xi_2-\gamma_2\int_0^1 \alpha^2(x)x\,dx & x \\ \xi_0^2-\gamma_0\int_0^1 \alpha^0(x)x^2\,dx & \xi_2^2-\gamma_2\int_0^1 \alpha^2(x)x^2\,dx & x^2 \end{vmatrix}$$

$$- \frac{\overline{G}_2^c(y)}{\vartheta} \begin{vmatrix} 1-\gamma_0\int_0^1 \alpha^0(x)\,dx & 1-\gamma_1\int_0^1 \alpha^1(x)\,dx & 1 \\ \xi_0-\gamma_0\int_0^1 \alpha^0(x)x\,dx & \xi_1-\gamma_1\int_0^1 \alpha^1(x)x\,dx & x \\ \xi_0^2-\gamma_0\int_0^1 \alpha^0(x)x^2\,dx & \xi_1^2-\gamma_1\int_0^1 \alpha^1(x)x^2\,dx & x^2 \end{vmatrix}$$

čia $\overline{G}_i^c(y) = G^c(\xi_i, y) - \gamma_i \int_0^1 \alpha^i(x) G^c(x,y)\,dx$, $i = 0,1,2$, ir $G^c(x,y) = H(x-y)\frac{(x-y)^2}{2}$ yra diskrečiosios funkcijos G_{ij}^c analogas [108].

Uždavinys (4.20)–(4.21) gali būti aproksimuotas baigtinių skirtumų schema

$$\left(\delta^3 u\right)_i = f_i, \quad x_i \in \omega^h, \tag{4.22}$$

$$u_{s_0} = \gamma_0\left(A^0, u\right)_K, \qquad u_{s_1} = \gamma_1\left(A^1, u\right)_K, \qquad u_{s_2} = \gamma_2\left(A^2, u\right)_K, \tag{4.23}$$

čia A^0, A^1, A^2 yra integralinėse kraštinėse sąlygose svorio funkcijų α^0, α^1, α^2 aproksimacijos, $(A,u)_K$ yra integralo $\int_0^1 A(x)u(x)\,dx$ aproksimacijos kvadratūrinė formulė (pavyzdžiui, trapecijų formulė $(A,u)_{\mathrm{trap}} := \sum_{k=0}^n A_k u_k h_{k+\frac{1}{2}}$) ir taškai ξ_0, ξ_1, ξ_2 sutampa su tinklo taškais, t. y. $\xi_0 = x_{s_0}$, $\xi_1 = x_{s_1}$, $\xi_2 = x_{s_2}$.

Uždavinio (4.22)–(4.23) Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga yra $\vartheta \neq 0$, čia

$$\vartheta := D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] = \begin{vmatrix} 1-\gamma_0(A^0,1)_K & 1-\gamma_1(A^1,1)_K & 1-\gamma_2(A^2,1)_K \\ \xi_0-\gamma_0(A^0,x)_K & \xi_1-\gamma_1(A^1,y)_K & \xi_2-\gamma_2(A^2,z)_K \\ \xi_0^2-\gamma_0(A^0,x^2)_K & \xi_1^2-\gamma_1(A^1,y^2)_K & \xi_2^2-\gamma_2(A^2,z^2)_K \end{vmatrix}$$

ir iš 4.2 teoremos Gryno funkcija yra

$$G_{ij} = \frac{1}{\vartheta} \begin{vmatrix} 1-\gamma_0(A^0,1)_K & 1-\gamma_1(A^1,1)_K & 1-\gamma_2(A^2,1)_K & 1 \\ \xi_0-\gamma_0(A^0,x)_K & \xi_1-\gamma_1(A^1,y)_K & \xi_2-\gamma_2(A^2,z)_K & x_i \\ \xi_0^2-\gamma_0(A^0,x^2)_K & \xi_1^2-\gamma_1(A^1,y^2)_K & \xi_2^2-\gamma_2(A^2,z^2)_K & x_i^2 \\ G_{s_0 j}^c-\gamma_0(A^0,G_{ij}^c)_K & G_{s_1 j}^c-\gamma_1(A^1,G_{ij}^c)_K & G_{s_2 j}^c-\gamma_2(A^2,G_{ij}^c)_K & G_{ij}^c \end{vmatrix}.$$

5. Ketvirtojo skyriaus išvados

m-tosios eilės diskrečiojo uždavinio atveju, lieka teisingos visos trečiojo skyriaus išvados: Gryno funkcija egzistuoja, jei $D(\boldsymbol{L})[\boldsymbol{u}] \neq 0$; Gryno funkcija išsireiškia per pradinio uždavinio Gryno funkciją (žr. (3.1) formulę); Gryno funkcija išsireiškia per kito uždavinio su ta pačia lygtimi (bet su kitomis sąlygomis) Gryno funkciją (žr. (3.3) formulę); Pateikta keletas pavyzdžių uždaviniams su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis (žr. (4.4) formulę), bet visi rezultatai gali būti pritaikyti tiesiniams uždaviniams su įvairiomis tiesinėmis kraštinėmis sąlygomis. Visi šio skyriaus rezultatai atitinka pirmojo skyriaus rezultatus ir net daugumos teiginių formuluotės visiškai sutampa (diferencialiniu ir diskrečiuoju atvejais).

Bendrosios išvados

1. Išanalizuotos m-tosios eilės tiesinės nehomogeninės diferencialinė ir diskrečioji lygtys su įvairiomis sąlygomis. Gautos šių uždavinių sprendinių išraiškos ir Gryno funkcijos.

2. Tiesinio nehomogeninio uždavinio, kurio sąlygos užrašomos tiesiniais funkcionalais, būtina ir pakankama Gryno funkcijos egzistavimo sąlyga yra tų funkcionalų tiesinis nepriklausomumas.

3. Gryno funkcijos uždaviniams su ta pačia lygtimi yra susietos sąryšiu. Jei žinome vieną Gryno funkciją ir homogeninės lygties fundamentaliąją sistemą, tai kito uždavinio su ta pačia lygtimi, bet su kitomis sąlygomis, Gryno funkciją galima išreikšti per pirmojo uždavinio Gryno funkciją.

4. Formulės gali būti pritaikytos plačiai uždavinių klasei su nepastoviais koeficientais ir įvairiomis kraštinėmis sąlygomis, tame tarpe su nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

5. Gautos Gryno funkcijų formulės yra vienodos tiek diferencialiniu, tiek diskrečiuoju atvejais. Gryno funkcijų egzistavimo sąlygos irgi formuluojamos vienodai.

Literatūros sąrašas

[1] A. Alsaedi. Approximation of solutions for second-order m-point nonlocal boundary value problems via the method of generalized quasilinearization. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–17, 2011. Doi:10.1155/2011/929061.

[2] Y. An. Global structure of nodal solutions for second-order m-point boundary value problems with superlinear nonlinearities. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–12, 2011. Doi:10.1155/2011/715836.

[3] D.R. Anderson. Green's function for a third-order generalized right focal problem. *J. Math. Anal. Appl.*, **288**(1):1–14, 2003. Doi:10.1016/S0022-247X(03)00132-X.

[4] D.R. Anderson, T.O. Anderson and M.M. Kleber. Green's function and existence of solutions for a functional focal differential equation. *Electron. J. Differential Equations*, **2006**(12):1–14, 2006.

[5] G. Anello. On a perturbed Dirichlet problem for a nonlocal differential equation of Kirchhoff type. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–10, 2011. Doi:10.1155/2011/891430.

[6] M.P. Árciga A. Asymptotics for nonlinear evolution equation with module-fractional derivative on a half-line. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–29, 2011. Doi:10.1155/2011/946143.

[7] U.M. Ascher, R.D. Russell and R.M. Mattheij. *Numerical Solution of Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations*. SIAM, 1995.

[8] R.I. Avery. A generalization of the Leggett–Williams fixed point theorem. *Math. Sci. Res. Hot-Line*, **3**(7):9–14, 1999.

[9] R.I. Avery and A.C. Peterson. Three positive fixed points of nonlinear operators on ordered Banach spaces. *Comput. Math. Appl.*, **42**:313–322, 2001. Doi:10.1016/S0898-1221(01)00156-0.

[10] Н.С. Бахвалов, Н.Л. Жидков, Г.М. Кобелъков. *Численные Методы*. Лаборатория Базовых Знаний, 2003.

[11] Z. Bai. Existence of solutions for some third-order boundary-value problems. *Electron. J. Differential Equations*, **2008**(25):1–6, 2008.

[12] Z. Bai and W. Ge. Existence of three positive solutions for some second-order boundary value problems. *Comput. Math. Appl.*, **48**:699–707, 2004. Doi:10.1016/j.camwa.2004.03.002.

[13] M. Benchohra, J.J. Nieto and A. Ouahab. Second-order boundary value problem with integral boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–9, 2011. Doi:10.1155/2011/260309.

[14] А.В. Бицадзе, А.А. Самарский. О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач. *ДАН СССР*, **185**(4):739–740, 1969.

[15] M. Bôcher. Green's functions in space of one dimension. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **7**(7):297–299, 1901. Doi:10.1090/S0002-9904-1901-00802-6.

[16] A. Boucherif. Discontinuous parabolic problems with a nonlocal initial condition. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–10, 2011. Doi:10.1155/2011/965759.

[17] H. Burkhardt. Sur les fonctions de green relatives à un domain d'une dimension. *Bulletin de la S.M.F.*, **22**:71–75, 1894.

[18] A. Cabada. An overview of the lower and upper solutions method with nonlinear boundary value conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–18, 2011. Doi:10.1155/2011/893753.

[19] A. Cabada, J.A. Cid and L. Sanchez. Existence of solutions for elliptic systems with nonlocal terms in one dimension. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–12, 2011. Doi:10.1155/2011/518431.

[20] J.R. Cannon. The solution of the heat equation subject to specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, **21**(2):155–160, 1963.

[21] B. Chen, Y. Mi and C. Mu. A quasilinear parabolic system with nonlocal boundary condition. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–18, 2011. Doi:10.1155/2011/750769.

[22] P. Chen. Mixed monotone iterative technique for impulsive periodic boundary value problems in Banach spaces. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–13, 2011. Doi:10.1155/2011/421261.

[23] W.-S. Cheung and J. Ren. Positive solution for m-point boundary value problems. *J. Math. Anal. Appl.*, **303**(4):565–575, 2005. Doi:10.1016/j.jmaa.2004.08.056.

[24] F.R.K. Chung and S.-T. Yau. Discrete Green's functions. *J. Combin. Theory Ser. A*, **91**:191–214, 2000. Doi:10.1006/jcta.2000.3094.

[25] Р.Ю. Чегис. Численное решение задачи теплопроводности с интегральным условием. *Liet. Mat. Rink.*, **24**(4):209–215, 1984.

[26] R. Čiegis. Finite-difference schemes for nonlinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions. In M. Ahues, C. Constanda and A. Largillier(Eds.), *Integral Methods in Science and Engineering: Analytic and Numerical Techniques*, pp. 47–52. Birkhäuser, Boston, 2004.

[27] R. Čiegis. Economical difference schemes for the solution of a two-dimensional parabolic problem with an integral condition. *Differ. Equ.*, **41**(7):1025–1029, 2005. Doi:10.1007/s10625-005-0244-9.

[28] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė and O. Subač. Stationary problems with nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.*, **6**(2):178–191, 2001. Doi:10.1080/13926292.2001.9637157.

[29] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė and O. Subač. A monotonic finite-difference scheme for a parabolic problem with nonlocal conditions. *Differ. Equ.*, **38**(7):1027–1037, 2002. Doi:10.1023/A:1021167932414.

[30] R. Čiegis and N. Tumanova. Numerical solution of parabolic problems with nonlocal boundary conditions. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **31**(12):1318–1329, 2010. Doi:10.1080/01630563.2010.526734.

[31] R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė and M. Sapagovas. On the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **9**(2):109–116, 2004.

[32] E.A. Coddington and N. Levison. *Theory of Ordinary Differential Equations.* McGraw Hill Book Co., Inc., New York, Toronto, London, 1955.

[33] D. Courant and G.F. Hilbert. *Methods of Mathematical Physics.* Wiley–Interscience Publications, New York, 1953.

[34] Y. Cui and Y. Zou. Existence and uniqueness of solutions for fourth-order boundary-value problems in Banach spaces. *Electron. J. Differential Equations*, **2009**(33):1–8, 2009.

[35] D.G. Duffy. *Green's Functions with Applications.* Chapman & Hall/CRC Press, 2001.

[36] M. Feng. Multiple positive solutions of fourth-order impulsive differential equations with integral boundary conditions and one-dimensional p-Laplacian. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–26, 2011. Doi:10.1155/2011/654871.

[37] M. Feng, X. Zhang and W.G. Ge. New existence results for higher-order nonlinear fractional differential equation with integral boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–20, 2011. Doi:10.1155/2011/720702.

[38] M. Feng, X. Zhang and X. Yang. Positive solutions of nth-order nonlinear impulsive differential equation with nonlocal boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–19, 2011. Doi:10.1155/2011/456426.

[39] N.M. Ferrers. *Mathematical Papers of the Late George Green.* The University Press, Cambridge, 1871.

[40] H.M. Fried. *Green's Functions and Ordered Exponentials.* Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2002.

[41] C. Gao and H. Luo. Positive solutions to nonlinear first-order nonlocal BVPs with parameter on time scales. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–15, 2011. Doi:10.1155/2011/198598.

[42] Y. Gao and M. Pei. Solvability for two classes of higher-order multi-point boundary value problems at resonance. *Bound. Value Probl.*, **2008**:1–14, 2008. Doi:10.1155/2008/723828.

[43] W. Ge. *Boundary Value Problems for Ordinary Differential Equations.* Science Press, Beijing, 2007.

[44] K. Ghanbari. Similarities of discrete and continuous Sturm–Liouville problems. *Electron. J. Differential Equations*, **2007**(172):1–8, 2007.

[45] J.R. Graef, L. Kong and B. Yang. Positive solutions of a nonlinear higher order boundary-value problem. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **2009**(spec. nr.):276–285, 2009.

[46] A.V. Gulin, N.I. Ionkin and V.A. Morozova. Difference schemes with nonlocal boundary conditions. *Comput. Methods Appl. Math.*, **1**(1):62–71, 2001.

[47] A.V. Gulin, N.I. Ionkin and V.A. Morozova. Stability of a nonlocal two-dimensional finite-difference problem. *Differ. Equ.*, **37**(7):970–978, 2001. Doi:10.1023/A:1011961822115.

[48] A.V. Gulin, N.I. Ionkin and V.A. Morozova. Stability criterion of difference schemes for the heat conduction equation with nonlocal boundary conditions. *Comput. Methods Appl. Math.*, **6**(1):31–55, 2006.

[49] A.V. Gulin, N.I. Ionkin and V.A. Morozova. Study of the norm in stability problems for nonlocal difference schemes. *Differ. Equ.*, **42**(7):974–984, 2006. Doi:10.1134/S0012266106070068.

[50] A.V. Gulin and V.A. Morozova. On the stability of a nonlocal finite-difference boundary value problem. *Differ. Equ.*, **39**(7):962–967, 2003. Doi:10.1023/B:DIEQ.0000009192.30909.13.

[51] A.V. Gulin and V.A. Morozova. Stability of the two-parameter set of nonlocal difference schemes. *Comput. Methods Appl. Math.*, **9**(1):79–99, 2009.

[52] A.V. Gulin, V.A. Morozova and N.S. Udovichenko. Stability criterion for a family of nonlocal difference schemes. *Differ. Equ.*, **46**(7):973–990, 2010. Doi:10.1134/S0012266110070050.

[53] A.V. Gulin, V.A. Morozova and N.S. Udovichenko. Stability of a nonlocal difference problem with a complex parameter. *Differ. Equ.*, **47**(8):1116–1129, 2011. Doi:10.1134/S0012266111080064.

[54] A.V. Gulin and N.S. Udovichenko. A nonlocal difference operator with a complex parameter in the boundary condition. *Differ. Equ.*, **43**(7):923–928, 2007. Doi:10.1134/S0012266107070075.

[55] L.-J. Guo, J.-P. Sun and Y.-H. Zhao. Multiple positive solutions for nonlinear third-order three-point boundary-value problems. *Electron. J. Differential Equations*, **2007**(112):1–7, 2007.

[56] X. Han. Positive solutions for a three-point boundary value problem at resonance. *J. Math. Anal. Appl.*, **336**:556–568, 2007. Doi:10.1016/j.jmaa.2007.02.069.

[57] X. Hao, L. Liu and Y. Wu. Positive solutions for nonlinear nth-order singular nonlocal boundary value problems. *Bound. Value Probl.*, **2007**:1–10, 2007. Doi:10.1155/2007/74517.

[58] J. Henderson and S.K. Ntouyas. Positive solutions for systems of nth order three-point nonlocal boundary value problems. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **2007**(18):1–12, 2007.

[59] V.A. Il'in and E.I. Moiseev. Nonlocal boundary value problem of the first kind for a Sturm–Liouville operator in its differential and finite difference aspects. *Differ. Equ.*, **23**(7):803–810, 1987.

[60] V.A. Il'in and E.I. Moiseev. Nonlocal boundary value problem of the second kind for a Sturm–Liouville operator. *Differ. Equ.*, **23**(8):979–987, 1987.

[61] В.А. Ильин, Е.И. Моисеев. Двумерная нелокальная краевая задача для оператора Пуассона в дифференциальной и разностной трактовках. *Матем. Моделирование*, **2**(8):139–156, 1990.

[62] G. Infante. Eigenvalues of some non-local boundary-value problems. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, **46**:75–86, 2003. Doi:10.1017/S0013091501001079.

[63] G. Infante. Eigenvalues and positive solutions of ODEs involving integral boundary conditions. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **2005**:436–442, 2005.

[64] G. Infante. Positive solutions of some three-point boundary value problems via fixed point index for weakly inward a-proper maps. *Fixed Point Theory Appl.*, **2005**(2):177–184, 2005. Doi:10.1155/FPTA.2005.177.

[65] G. Infante. Positive solutions of nonlocal boundary value problems with singularities. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **2009**:377–384, 2009.

[66] G. Infante and J.R.L. Webb. Positive solutions of some nonlocal boundary value problems. *Abstr. Appl. Anal.*, **18**:1047–1060, 2003. Doi:10.1155/S1085337503301034.

[67] G. Infante and J.R.L. Webb. Three-point boundary value problems with solutions that change sign. *J. Integral Equations Appl.*, **15**(1):37–57, 2003. Doi:10.1216/jiea/1181074944.

[68] Н.И. Ионкин. Решение одной краевой задачи теории теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. *Дифференциальные Уравнения*, **13**(2):294–304, 1977.

[69] Н.И. Ионкин, В.А. Морозова. Двумерное уравнение теплопроводности с нелокальными краевыми условиями. *Дифференциальные Уравнения*, **36**(7):884–888, 2000.

[70] Н.И. Ионкин, Е.А. Валикова. О собственных значениях и собственных функциях одной неклассической краевой задачи. *Матем. Моделирование*, **8**(1):53–63, 1996.

[71] F. Ivanauskas, T. Meškauskas and M. Sapagovas. Stability of difference schemes for two-dimensional parabolic equations with non-local boundary conditions. *Appl. Math. Comput.*, **215**(7):2716–2732, 2009. Doi:10.1016/j.amc.2009.09.012.

[72] Y. Ji and Y. Guo. The existence of countably many positive solutions for nonlinear nth-order three-point boundary value problems. *Bound. Value Probl.*, **2009**:1–18, 2009. Doi:10.1155/2009/572512.

[73] W. Jiang. Positivie solutions for a high-order multi-point boundary-value problem in Banach spaces. *Electron. J. Differential Equations*, **2008**(70):1–11, 2008.

[74] E. Kamke. *Differentialgleichungen: Lösungsmethoden und Lösungen, I, Gewöhnliche Differentialgleichungen.* B. G. Teubner, Leipzig, 1977.

[75] Л.И. Камынин. Об одной краевой задаче теории теплопроводности с неклассическими граничными условиями. *Журнал Вычислительной Математики и Математической Физики*, **4**(6):1006–1024, 1964.

[76] A.N. Kolmogorov and S.V. Fomin. *Introductory Real Analysis.* Dover Publications, Inc., New York, 2000. (Revised English Edition)

[77] A.I. Kostrikin. *Introduction to Algebra.* Springer-Verlag, Berlin, 1982.

[78] K.Q. Lan. Positive characteristic values and optimal constants for three-point boundary value problems. In *Differential & Difference Equations and Applications*, pp. 623–633. Hindawi Publ. Corp., New York, 2006.

[79] E.K. Lee and Y.-H. Lee. Multiple positive solutions of a singular Emden–Fowler

type problem for second-order impulsive differential systems. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–22, 2011. Doi:10.1155/2011/212980.

[80] Y. Li and T. Zhang. Multiple positive solutions for second-order p-Laplacian dynamic equations with integral boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–17, 2011. Doi:10.1155/2011/867615.

[81] X. Lin. Existence of solutions to a nonlocal boundary value problem with nonlinear growth. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–15, 2011. Doi:10.1155/2011/416416.

[82] J. Liu, B. Jia and Q. Zhu. An estimate for the three-dimensional discrete Green's function and applications. *J. Math. Anal. Appl.*, **370**(2):350–363, 2010. Doi:10.1016/j.jmaa.2010.05.002.

[83] J. Liu and H.-R. Sun. Multiple positive solutions for m-point boundary value problem on time scales. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–11, 2011. Doi:10.1155/2011/591219.

[84] Y. Liu and D. O'Regan. Multiplicity results using bifurcation techniques for a class of fourth-order m-point boundary value problems. *Bound. Value Probl.*, **2009**:1–20, 2009. Doi:10.1155/2009/970135.

[85] X. Lv and M. Pei. Existence and uniqueness of positive solution for a singular nonlinear second-order m-point boundary value problem. *Bound. Value Probl.*, **2010**:1–16, 2010. Doi:10.1155/2010/254928.

[86] H. Ma. Positive solution for m-point boundary-value problem of fourth-order. *J. Math. Anal. Appl.*, **321**:37–49, 2006. Doi:10.1016/j.jmaa.2005.08.015.

[87] Q. Ma. Existence of positive solutions for the symmetry three-point boundary-value problem. *Electron. J. Differential Equations*, **2007**(154):1–8, 2007.

[88] R.Y. Ma. Positive solutions of a nonlinear three-point boundary-value problem. *Electron. J. Differential Equations*, **1998**(34):1–8, 1998.

[89] R.Y. Ma. Existence of positive solutions for superlinear semipositone m-point boundary value problems. *Proc. Edinb. Math. Soc. (2)*, **46**:279–292, 2003. Doi:10.1017/S0013091502000391.

[90] R.Y. Ma. A survey on nonlocal boundary value problems. *Appl. Math. E-Notes*, **7**:257–279, 2007.

[91] R.Y. Ma and T. Chen. Existence of positive solutions of fourth-order problems with integral boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–17, 2011. Doi:10.1155/2011/297578.

[92] R.Y. Ma and B. Thompson. Global behavior of positive solutions of nonlinear three-point boundary value problems. *Nonlinear Anal.*, **60**(4):685–701, 2005. Doi:10.1016/j.na.2004.09.044.

[93] S.K. Ntouyas. Nonlocal initial and boundary value problems: A survey. In A. Cañada, P. Drábek and A. Fonda(Eds.), *Handbook of Differential Equations: Ordinary Differential Equations, vol. 2*, pp. 461–558. North-Holland, Amsterdam, 2005. Doi:10.1016/S1874-5725(05)80008-2.

[94] A.P. Palamides and A.N. Veloni. A singular third-order 3-point boundary-value problem with nonpositive Green's function. *Electron. J. Differential Equations*, **2007**(151):1–13, 2007.

[95] S. Pečiulytė and A. Štikonas. Parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis suvedimas į integralinę lygtį. In *Informacinė Visuomenė ir Universitetinės Studijos*, pp. 246–250. VDU, Kaunas, 2004.

[96] S. Pečiulytė and A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal two-point boundary conditions. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **11**(1):47–78, 2006.

[97] S. Pečiulytė and A. Štikonas. On positive eigenfunctions of Sturm–Liouville problem with nonlocal two-point boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **12**(2):215–226, 2007. Doi:10.3846/1392-6292.2007.12.215-226.

[98] S. Pečiulytė, O. Štikonienė and A. Štikonas. Sturm–Liouville problem for stationary differential operator with nonlocal integral boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **10**(4):377–392, 2005. Doi:10.1080/13926292.2005.9637295.

[99] P. Pietramala. A note on a beam equation with nonlinear boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–14, 2011. Doi:10.1155/2011/376782.

[100] A.D. Polyanin. *Handbook of Linear Partial Differential Equations for Engineers and Scientists.* Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2002.

[101] A.D. Pontryagin. *Ordinary Differential Equations.* Addison–Wesley, Reading, MA, 1962.

[102] J. Ren, W.-S. Cheung and Z. Cheng. Existence and Lyapunov stability of periodic solutions for generalized higher-order neutral differential equations. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–21, 2011. Doi:10.1155/2011/635767.

[103] G. Rickayzen. *Green's Functions and Condensed Matter.* Academic Press, 1980.

[104] B. Riemann. Ueber die Fortpflanzung ebener Luftwellen von endlicher Schwingungsweite. *Abhandlungen der Koniglichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Gottingen*, **8**:43–65, 1860.

[105] G.F. Roach. *Green's Functions.* Cambridge University Press, Cambridge, 1982.

[106] S. Roman and A. Štikonas. Green's functions for stationary problems with nonlocal boundary conditions. *Lith. Math. J.*, **49**(2):190–202, 2009. Doi:10.1007/s10986-009-9041-0.

[107] A. Štikonas and S. Roman. Stationary problems with two additional conditions and formulae for Green's functions. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **30**(9):1125–1144, 2009. Doi:10.1080/01630560903420932.

[108] S. Roman and A. Štikonas. Third-order linear differential equation with three additional conditions and formula for Green's function. *Lith. Math. J.*, **50**(4):426–446, 2010. Doi:10.1007/s10986-010-9097-x.

[109] S. Roman and A. Štikonas. Green's function for discrete second-order problems with nonlocal boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–23, 2011. Doi:10.1155/2011/767024.

[110] S. Roman. Linear differential equation with additional conditions and formulae for Green's function. *Math. Model. Anal.*, **16**(3):401–417, 2011. Doi:10.3846/13926292.2011.602125.

[111] S. Roman and A. Štikonas. Green's functions for stationary problems with four-point nonlocal boundary conditions. In V. Kleiza, S. Rutkauskas and A. Štikonas(Eds.), *Differential Equations and Their Applications (DETA'2009)*, pp. 123–130. Kaunas University of Technology, 2009.

[112] S. Roman and A. Štikonas. Nelokaliųjų stacionariųjų kraštinių uždavinių Gryno funkcijos. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **48/49**:333–337, 2008.

[113] S. Roman and A. Štikonas. The properties of Green's functions for one stationary problem with nonlocal boundary conditions. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **50**:340–344, 2009.

[114] S. Roman and A. Štikonas. Linear ODE with nonlocal boundary conditions and Green's functions for such problems. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **51**:379–384, 2010.

[115] S. Roman and A. Štikonas. Green's function for discrete problems with nonlocal boundary conditions. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **52**, 2011. priimtas spaudai

[116] B.P. Rynne. Spectral properties and nodal solutions for second-order, m-point, boundary value problems. *Nonlinear Anal.*, **67**(12):3318–3327, 2007. Doi:10.1016/j.na.2006.10.014.

[117] A.A. Samarskii. *The Theory of Difference Schemes.* Marcel Dekker, Inc., New York, Basel, 2001.

[118] А.А. Самарский, А.В. Гулин. *Численные Методы.* Наука, Москва, 1989.

[119] А.А. Самарский, Е.С. Николаев. *Методы Решения Сеточных Уравнений.* Наука, Москва, 1978.

[120] Y. Sang, Z. Wei and W. Dong. Existence and uniqueness of positive solutions for discrete fourth-order Lidstone problem with a parameter. *Adv. Difference Equ.*, **2010**:1–18, 2010. Doi:10.1155/2010/971540.

[121] M.P. Sapagovas. The eigenvalues of some problem with a nonlocal condition. *Differ. Equ.*, **38**(7):1020–1026, 2002. Doi:10.1023/A:1021115915575.

[122] M. Sapagovas. On the stability of a finite-difference scheme for nonlocal parabolic boundary-value problems. *Lith. Math. J.*, **48**(3):339–356, 2008. Doi:10.1007/s10986-008-9017-5.

[123] M. Sapagovas and R. Čiegis. The numerical solution of some nonlocal problems. *Lith. Math. J.*, **27**(2):348–356, 1987.

[124] М.П. Сапаговас, Р.Ю. Чегис. О некоторых краевых задачах с нелокальным условием. *Дифференциальные Уравнения*, **23**(7):1268–1274, 1987.

[125] M. Sapagovas, G. Kairytė, O. Štikonienė and A. Štikonas. Alternating direction method for a two-dimensional parabolic equation with a nonlocal boun-

dary condition. *Math. Model. Anal.*, **12**(1):131–142, 2007. Doi:10.3846/1392-6292.2007.12.131-142.

[126] M.P. Sapagovas and A. Štikonas. On the structure of the spectrum of a differential operator with a nonlocal condition. *Differ. Equ.*, **41**(7):1010–1018, 2005. Doi:10.1007/s10625-005-0242-y.

[127] M.P. Sapagovas and O. Štikonienė. A fourth-order alternating-direction method for difference schemes with nonlocal condition. *Lith. Math. J.*, **49**(3):309–317, 2009. Doi:10.1007/s10986-009-9057-5.

[128] A. Skučaitė, K. Skučaitė-Bingelė, S. Pečiulytė and A. Štikonas. Investigation of the spectrum for the Sturm–Liouville problem with one integral boundary condition. *Nonlinear Anal. Model. Control*, **15**(4):501–512, 2010.

[129] C. Song and X. Gao. Positive solutions for third-order p-Laplacian functional dynamic equations on time scales. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–11, 2011. Doi:10.1155/2011/279752.

[130] I. Stakgold. *Green's Functions and Boundary Value Problems.* Wiley–Interscience Publications, New York, 1979.

[131] I. Stakgold and M. Holst. *Green's Functions and Boundary Value Problems.* Wiley–Interscience, Hoboken, NJ, 2010.

[132] A. Štikonas. The Sturm–Liouville problem with a nonlocal boundary condition. *Lith. Math. J.*, **47**(3):336–351, 2007. Doi:10.1007/s10986-007-0023-9.

[133] A. Štikonas. Investigation of characteristic curve for Sturm–Liouville problem with nonlocal boundary conditions on torus. *Math. Model. Anal.*, **16**(1):1–22, 2011. Doi:10.3846/13926292.2011.552260.

[134] A. Štikonas and O. Štikonienė. Characteristic functions for Sturm–Liouville problems with nonlocal boundary conditions. *Math. Model. Anal.*, **14**(2):229–246, 2009. Doi:10.3846/1392-6292.2009.14.229-246.

[135] J.-P. Sun and J. Wei. Existence of positive solution for semipositone second-order three-point boundary-value problem. *Electron. J. Differential Equations*, **2008**(41):1–7, 2008.

[136] J.-P. Sun and H.-E. Zhang. Existence of solutions to third-order m-point

boundary-value problems. *Electron. J. Differential Equations*, **2008**(125):1–9, 2008.

[137] Y. Sun. Eigenvalues and symmetric positive solutions for a three-point boundary-value problem. *Electron. J. Differential Equations*, **2005**(127):1–7, 2005.

[138] D. Takači. The operator Green function. *Zd. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat.*, **24**(2):53–61, 1994.

[139] L.X. Truong, L.T.P. Ngoc and N.T. Long. Positive solutions for an m-point boundary-value problem. *Electron. J. Differential Equations*, **2008**(111):1–11, 2008.

[140] B.C. Владимиров. *Уравнения Математической Физики.* Наука, Москва, 1981.

[141] R. Vrabel. Nonlocal four-point boundary value problem for the singularly perturbed semilinear differential equations. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–9, 2011. Doi:10.1155/2011/570493.

[142] S.-P. Wang and L.-Y. Tsai. Existence results of three-point boundary value problems for second-order ordinary differential equations. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–18, 2011. Doi:10.1155/2011/901796.

[143] J.R.L. Webb. Remarks on positive solutions of some three point boundary value problems. In *Proceedings of the Fourth International Conference on Dynamical Systems and Differential Equations, May 24–27, 2002*, pp. 905–915. Wilmington, NC, USA, 2003.

[144] J.R.L. Webb. Multiple positive solutions of some nonlinear heat flow problems. *Discrete Contin. Dyn. Syst.*, **2005**:895–903, 2005.

[145] J.R.L. Webb. Positive solutions of some higher order nonlocal boundary value problems. *Electron. J. Qual. Theory Differ. Equ.*, **29**:1–15, 2009.

[146] J.R.L. Webb and G. Infante. Nonlocal boundary value problems of arbitrary order. *J. London Math. Soc.*, **79**:238–258, 2009. Doi:10.1112/jlms/jdn066.

[147] J.R.L. Webb, G. Infante and D. Franco. Positive solutions of nonlinear fourth order boundary value problems with local and nonlocal boundary conditions.

Proc. Roy. Soc. Edinburgh Sect. A, **138**:427–446, 2008. Doi:10.1017/S0308210506001041.

[148] Z. Wei and C. Pang. Multiple sign-changing solutions for fourth order m-point boundary value problems. *Nonlinear Anal.*, **66**(4):839–855, 2007. Doi:10.1016/j.na.2005.12.026.

[149] D. Xie, Y. Liu and C. Bai. Green's function and positive solutions of a singular nth-order three-point boundary value problem on time scales. *Electron. J. Differential Equations*, **2009**(38):1–14, 2009.

[150] H. Xu. New fixed point theorems of mixed monotone operators and applications to singular boundary value problems on time scales. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–14, 2011. Doi:10.1155/2011/567054.

[151] J. Xu and Z. Wei. Positive solutions for multipoint boundary-value problem with parameters. *Electron. J. Differential Equations*, **2008**(106):1–8, 2008.

[152] B. Yang. Positive solutions of a third-order three-point boundary-value problem. *Electron. J. Differential Equations*, **2008**(99):1–10, 2008.

[153] C. Yuan, D. Jiang and Y. Zhang. Existence and uniqueness of solutions for singular higher order continuous and discrete boundary value problems. *Bound. Value Probl.*, **2008**:1–11, 2008. Doi:10.1155/2008/123823.

[154] X. Zhang, X. Yang and M. Feng. Minimal nonnegative solution of nonlinear impulsive differential equations on infinite interval. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–15, 2011. Doi:10.1155/2011/684542.

[155] Z. Zhao. Positive solutions for singular three-point boundary-value problems. *Electron. J. Differential Equations*, **2007**(156):1–8, 2007.

[156] Z. Zhao. Exact solutions of a class of second-order nonlocal boundary value problems and applications. *Appl. Math. Comput.*, **215**:1926–1936, 2009. Doi:10.1016/j.amc.2009.07.043.

Autorės publikacijos disertacijos tema

[A1] S. Roman and A. Štikonas. Green's functions for stationary problems with nonlocal boundary conditions. *Lith. Math. J.*, **49**(2):190–202, 2009. Doi:10.1007/s10986-009-9041-0.

[A2] A. Štikonas and S. Roman. Stationary problems with two additional conditions and formulae for Green's functions. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **30**(9):1125–1144, 2009. Doi:10.1080/01630560903420932.

[A3] S. Roman and A. Štikonas. Third-order linear differential equation with three additional conditions and formula for Green's function. *Lith. Math. J.*, **50**(4):426–446, 2010. Doi:10.1007/s10986-010-9097-x.

[A4] S. Roman and A. Štikonas. Green's function for discrete second-order problems with nonlocal boundary conditions. *Bound. Value Probl.*, **2011**:1–23, 2011. Doi:10.1155/2011/767024.

[A5] S. Roman. Linear differential equation with additional conditions and formulae for Green's function. *Math. Model. Anal.*, **16**(3):401–417, 2011. Doi:10.3846/13926292.2011.602125.

[A6] S. Roman and A. Štikonas. Green's functions for stationary problems with four-point nonlocal boundary conditions. In V. Kleiza, S. Rutkauskas and A. Štikonas(Eds.), *Differential Equations and Their Applications (DETA'2009)*, pp. 123–130. Kaunas University of Technology, 2009.

[A7] S. Roman and A. Štikonas. Nelokaliųjų stacionariųjų kraštinių uždavinių Gryno funkcijos. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **48/49**:333–337, 2008.

[A8] S. Roman and A. Štikonas. The properties of Green's functions for one stationary problem with nonlocal boundary conditions. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **50**:340–344, 2009.

[A9] S. Roman and A. Štikonas. Linear ODE with nonlocal boundary conditions and Green's functions for such problems. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **51**:379–384, 2010.

[A10] S. Roman and A. Štikonas. Green's function for discrete problems with nonlocal boundary conditions. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **52**, 2011. priimtas spaudai

Svetlana ROMAN

GRYNO FUNKCIJOS UŽDAVINIAMS
SU NELOKALIOSIOMIS KRAŠTINĖMIS SĄLYGOMIS

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai (P 000),
Matematika (01 P)

Svetlana ROMAN

GREEN'S FUNCTIONS FOR BOUNDARY-VALUE PROBLEMS
WITH NONLOCAL BOUNDARY CONDITIONS

Doctoral Dissertation

Physical sciences (P 000),
Mathematics (01 P)