ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Kristina Pikturnaitė

ATSTATYMO PROCESO TIKIMYBINIŲ MATŲ ASIMPTOTINIS ATSKIRIAMUMAS

Magistro darbas

Darbo vadovas
doc. Vaidotas Kanišauskas

Šiauliai, 2011

TURINYS

ĮVADAS

XX a. viduryje pasirodžius Le Kamo [8] darbams apie tikimybinių matų lokalų asimptotinį normalumą, taip pat Černovo [2], Salihovo [9] darbams apie artimų paprastų hipotezių asimptotinį atskiriamumą, atsirado būtinybė išplėtoti atsitiktinių procesų tikimybinių matų asimptotinio atskiriamumo teoriją. Apie tai buvo pasirodę nemažai darbų. Išskirti galima dvi knygas Širiajevo knygą ,,Verojatnost" [10], skirtą aukštųjų mokyklų studentams, kurioje pateikti šios teorijos pagrindai ir Linkovo monografija ,,Asimptotiniai atsitiktinių procesų statistiniai metodai" [7], kurioje išsamiai pateikti naujausi pasiekimai. Šią knygą, kaip pagrindinį šaltinį, naudojome darbe. Reikia pažymėti, kad Linkovo [7] knygoje yra pateikti kriterijai, kurių dėka galima ištirti konkrečių tikimybinių matų asimptotinį atskiriamumą. Taip pat šie kriterijai remiasi Helingerio integralo asimptotinėmis savybėmis, kai laikas didėja. Nagrinėjamo proceso Helingerio integralai buvo surasti autorės bakalauro darbe. Taigi, šis magistro darbas yra tam tikra prasme bakalauro darbo tęsinys ištiriant naujas atstatymo proceso savybes.

Darbo tikslas – nagrinėti tikimybinių matų asimptotinį atskiriamumą.

Uždaviniai. Ištirti:

- atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi,
- eksponentinio atstatymo proceso,
- geometrinio atstatymo proceso,

konkrečių tikimybinių matų asimptotinį atskiriamumą.

1. TEORIJA

1.1. TIKIMYBINIŲ MATŲ ASIMPTOTINIS ATSKIRIAMUMAS

Pradžioje susipažinsime su pagrindinėmis sąvokomis, kurios pateiktos Linkovo [7] knygoje.

Tegul $\left(\mathcal{X}^t, \mathcal{B}^t, P^t, \widetilde{P}^t\right)$, $t \in R_+$ – statistinių eksperimentų šeima, kurioje $\mathcal{X}^t$ – stebėjimų aibė, $\mathcal{B}^t$ yra $\mathcal{X}^t$ poaibių σ-algebra, o P^t ir $\widetilde{P}^t$ – tikimybiniai matai.

1 apibrėžimas. Matų šeimos $\left(P^t\right)$ ir $\left(\widetilde{P}^t\right)$ vadinamos visiškai asimptotiškai atskiriamos, $\left(\text{žymima } \left(P^t\right)\Delta\left(\widetilde{P}^t\right)\right)$, jei egzistuoja skaičių seka $t_n \uparrow \infty$, $n \to \infty$ ir aibės $A_n \in \mathcal{B}^t$ tokios, kad

$$P^{t_n}\left(A_n\right) \to 0 \text{ ir } \widetilde{P}^{t_n}\left(A_n\right) \to 1,\ n \to \infty.$$

Priešingu atveju šeimos $\left(P^t\right)$ ir $\left(\widetilde{P}^t\right)$ vadinamos visiškai asimptotiškai neatskiriamos, žymimos $\left(P^t\right)\overline{\Delta}\left(\widetilde{P}^t\right)$.

2 apibrėžimas. α – eilės Helingerio integralu $H\left(\alpha; \widetilde{P}^t, P^t\right)$ vadinsime dydį

$$H\left(\alpha; \widetilde{P}^t, P^t\right) = \mathbb{E}_Q^t \widetilde{z}_t^{\alpha} z_t^{1-\alpha},$$

kai $\alpha \in [0,1]$, čia $z_t = \dfrac{dP^t}{dQ^t}$, $\widetilde{z}_t = \dfrac{d\widetilde{P}^t}{dQ^t}$, Q^t – dominuojantis matas, t.y. $P^t \ll Q^t$, $\widetilde{P}^t \ll Q^t$.

Suformuluosime pagrindinį kriterijų, kuriuo tikrinamas tikimybinių matų asimptotinis atskiriamumas.

Teorema [7]. Tokios sąlygos yra ekvivalenčios:

a) $\left(P^t\right) \Delta \left(\widetilde{P}^t\right)$,

b) $\varliminf_{t\to\infty} H\left(\alpha; \widetilde{P}^t, P^t\right) = 0$, kai $\alpha \in (0,1)$.

1.2. DIDŽIŲJŲ NUOKRYPIŲ TEORIJOS ELEMENTAI

Susipažinsime su didžiųjų nuokrypių teorijos dalimi, kurią pateikė Elis [3].

1 apibrėžimas. Tegu $X \subset R^d$ su Borelio aibe $\mathcal{B}$. Sakykime, kad $I : X \to [0, \infty)$ yra didžiųjų nuokrypių greičio funkcija, jei:

a) $I \neq \infty$,

b) I iš apačios pusiau tolydi,

c) $\forall L \geq 0$ $\{x : I(x) \leq L\}$ yra kompaktas.

2 apibrėžimas. Sakoma, kad tikimybinių matų šeima $\{P_n : n \in N\}$ erdvėje $(X, \mathcal{B})$ tenkina didžiųjų nuokrypių principą su greičio funkcija $I(x)$, jei:

$$\overline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln P_n(K) \leq -\inf_{x\in K} I(x),$$

su kiekviena uždara aibe K iš X ir

$$\underline{\lim_{n\to\infty}} \frac{1}{n} \ln P_n(G) \geq -\inf_{x\in G} I(x),$$

su kiekviena netuščia atvira aibe G iš X.

Įveskime funkciją:

$$c_n(t) = \frac{1}{a_n} \log M_n\{\exp < t, W_n >\}, \ n = 1,2,..., \ t \in R^d,$$

kur $\{a_n : n = 1,2,...\}$ yra seka teigiamų skaičių, artėjančių į begalybę, M_n žymi vidurkį mato P_n atžvilgiu ir $<,>$ žymi euklidinę sandaugą erdvėje R^d.

Apibrėžiame sąlygas (B):

1) kiekviena funkcija $c_n(t)$ yra baigtinė, kai $t \in R^d$;

2) egzistuoja funkcija $c(t) = \lim_{n\to\infty} c_n(t)$, kai $t \in R^d$.

Nurodysime funkcijų $c_n(t)$ ir $c(t)$ savybes.

1 lema. Tarkime, kad patenkintos sąlygos (B). Tuomet funkcijos $c_n(t)$ ir $c(t)$ yra iškilos erdvėje R^d.

1 išvada. Kai patenkintos sąlygos (B), funkcija $c(t)$ yra tolydi ir iškila erdvėje R^d. Šios išvados dėka tikimybinių matų šeimai $\{P_n : n \in N\}$ galima apibrėžti Legendre-Fenchel transformaciją:

$$I_w(z) = \sup_{t \in R^d} \{< t, z > -c(t)\}, \; z \in R^d ,$$

kuri visiškai charakterizuoja didžiųjų nuokrypių principą, būdama didžiųjų nuokrypių greičio funkcija.

Teorema (didžiųjų nuokrypių teorema). Tarkime, kad patenkintos sąlygos (B) ir $Q_n(A) = P\left(\frac{W_n}{a_n} \in A\right), \; A \in \mathcal{B}(R^d).$ Tuomet teisingi teiginiai:

1) funkcija $I_w(z)$ yra iškila, uždara ir neneigiama;
2) $\inf_{z = R^d} I_w(z) = 0;$
3) $\forall L \geq 0, \; \{x : I_w(x) \leq L\}$ yra kompaktas;
4) $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n\{K\} \leq \inf_{z \in K} I_w(z)$ su kiekviena uždara aibe K iš $\mathcal{B}(R^d)$;
5) tarkime, kad funkcija $c(t)$ yra diferencijuojama $\forall t.$ Tuomet $\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{a_n} \log Q_n\{G\} \geq -\inf_{z \in G} I_w(z)$ su kiekviena atvira $G \in \mathcal{B}(R^d)$.

2 išvada. Jei funkcija $c(t)$ yra diferencijuojama $\forall t$, tada tikimybių matų šeima $\{Q_n : n = 1,2,...\}$ tenkina didžiųjų nuokrypių principą su greičio funkcija I_w. Tos teorijos klasikinė iliustracija yra Kramerio gauti rezultatai paprasčiausiu atveju nagrinėjant nepriklausomus ir vienodai pasiskirsčiusius atsitiktinius dydžius $X_1,..., X_n$. Jei imsime, kad $a_n(t) = n, \; t = \lambda,$ o $W_n = S_n, \; S_n = X_1 + ... + X_n$ ir pritaikysime čia nurodytą teoriją, gausime tokį rezultatą:

2 lema. Jei $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$, kur $X_1, X_2,..., X_n$ – nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, kuriems galioja Kramerio sąlyga, kai $\lambda \in R_+$

$$Me^{\lambda |X_1|} < \infty,$$

$$\varphi(\lambda) = Me^{\lambda X_1} < \infty.$$

Tada, kai $X \in (\mu, \infty)$

$$\lim_{t\to\infty} n^{-1} \log P\left(\frac{S_n}{n} > x\right) = -I(x).$$

Kai $X \in (-\infty, \mu)$

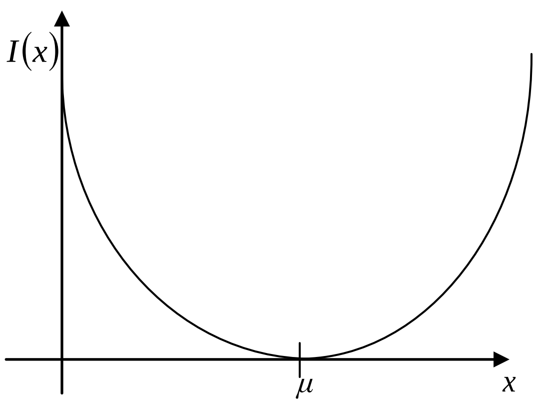
$$\lim_{t\to\infty} n^{-1} \log P\left(\frac{S_n}{n} < x\right) = -I(x).$$

Čia $\mu = MX_1$, o $I(x) = \sup_{\lambda}(x\lambda - \ln\varphi(\lambda))$ – atitinkama didžiųjų nuokrypių greičio funkciją.

Funkcija $I(x)$ tenkina tokias sąlygas:

1) $I(x) \geq 0,\ \forall x \in R,\ R = (-\infty, +\infty),$
2) $I(x_1) \leq I(x_2),$ kai $\mu < x_1 < x_2,$
3) $I(x_1) \leq I(x_2),$ kai $x_1 < x_2 < \mu,$
4) $I(\mu) = 0,$ kai $0 < \mu < +\infty.$

$I(x)$ funkcijos grafikas:



1.3. TIKIMYBINIŲ MATŲ ABSOLIUTUS TOLYDUMAS

Tarkime, kad turime mačią erdvę $\{\Omega, \mathbf{A}\}$ ir du matus φ ir ρ joje.

Apibrėžimas. Jei iš lygybės $\rho(A) = 0,\ A \in \mathbf{A}$ atsiranda $\varphi(A) = 0,$ sakome, kad matas ρ yra absoliučiai tolydus mato φ atžvilgiu. Žymime $\rho << \varphi$.

Teorema (Radono-Nikodimo [10]). Jei φ ir ρ yra matai mačioje erdvėje $\{\Omega, \mathbf{A}\}$, matas φ yra σ – baigtinis, o matas ρ – absoliučiai tolydus mato φ atžvilgiu, tai egzistuoja neneigiama **A** – mati funkcija f, kiekvienai $A \in \mathbf{A}$ tenkinanti lygybę

$$\rho(A) = \int_A f(x)\, \varphi\, (dx).$$

Jei matas ρ yra σ – baigtinis, tai funkcija f yra beveik visur baigtinė. Jei, be funkcijos f, yra dar ir kita **A** – mati funkcija g, visoms $A \in \mathbf{A}$ tenkinanti lygybę

$$\rho(A) = \int_A g(x)\, \varphi\, (dx),$$

tai funkcijos f ir g yra beveik visur lygios mato φ atžvilgiu.

Funkcija f dažnai vadinama mato ρ Radono-Nikodimo išvestine mato φ atžvilgiu ir žymima $\dfrac{d\rho}{d\varphi}$. Ji turi daugelį savybių.

Kai $\rho << \varphi$ ir $\varphi << \rho$, žymime $\rho \sim \varphi$ ir sakome, kad matai ekvivalentūs.

Jei φ ir ρ yra du baigtiniai tikimybiniai matai, nusakyti formulėmis:

$$\varphi(A) = \sum_{i: x_i \in A} p(x_i), \qquad A \in \mathcal{B}(X), \text{ kur } X = \{x_1, x_2, ..., x_n\},$$

čia $p(x_i) > 0$, $i = 1,2,...,n$;

$$\rho(A) = \sum_{i: y_i \in A} q(y_i), \qquad A \in \mathcal{B}(Y), \text{ kur } Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\},$$

čia $q(y_i) > 0$, $i = 1,2,...,m$, tada $\rho \sim \varphi$, jei $X = Y$, t.y. $x_i = y_i$, $m = n$. Šiuo atveju galime rašyti

$$\rho(A) = \sum_{i: x_i \in A} \left\{ \frac{q(x_i)}{p(x_i)} \right\} p(x_i) \text{ ir } \frac{d\rho}{d\varphi}(x) = \frac{q(x)}{p(x)}, \; x \in X.$$

1.4. HELINGERIO INTEGRALO FORMULĖS

Tarkime, kad $(\mathbb{E}, \mathcal{E})$ – Blakvelo erdvė, $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, Q)$ – stochastinė bazė, P_1 ir P_2 – tikimybiniai matai mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, μ – sveikaskaitis atsitiktinis matas erdvėje $(R_+ \times \mathbb{E}, \mathcal{B}(R_+) \otimes \mathcal{E})$ su $(Q, \mathbb{F})$ – kompensatoriumi ν_0, tokiu, kad $\nu_0(\{t\} \times \mathbb{E}) \equiv 0$.

Įvedame sąlygas.

B1. Tikimybiniai matai P_i, $i = 1,2$, tokie, kad su kiekvienu $t \geq 0$

$$P_i^t \sim Q^t,$$

čia $P_i^t = P_i\big|_{\mathcal{F}_t}$, o lokalaus tankio procesas turi pavidalą

$$z_i^t = \frac{dP_i^t}{dQ^t} = \mathcal{E}_t(Y_i), \quad i = 1,2, \quad t \geq 0,$$

kur $\mathcal{E}_t(\cdot)$ – stochastinė eksponentė, o $Y_i(t) = (V_i - 1) * (\mu - \nu_0)_t$.

B2. $V_i = \dfrac{d\nu_i}{d\nu_0} - (\nu_i - (P_i, \mathbb{F})$ – mato μ kompensatorius) – griežtai teigiamos $\mathcal{P}(\mathbb{F}) \otimes \mathcal{E}$ – mačios tokios funkcijos, kad su visais $t \in R_+$, $i = 1,2$,

$$\left(1 - \sqrt{V_i}\right)^2 * \nu_{0t} < \infty \ , \ Q - \text{ beveik visur.}$$

Čia naudojami sutrumpinimai $g * \mu_t = \int_0^t \int_{\mathbb{E}} g(s,x)\mu(ds,dx)$, o $\mathcal{P}$ žymi numatomų funkcijų erdvę.

Teorema [4]. Tarkime, kad patenkintos B1, B2 sąlygos. Tada su kiekvienu $\alpha \in (0,1)$

$$H_t(\alpha) = \mathbb{E}_Q e^{(-h_t(\alpha))}\ \mathcal{E}_t(M(\alpha)) = \mathbb{E}_{Q_1} e^{(-h_t(\alpha))},$$

$$H_t(\alpha) = \mathbb{E}_Q e^{(-d_t(\alpha))}\ \mathcal{E}_t(N(\alpha)) = \mathbb{E}_{Q_2} e^{(-d_t(\alpha))},$$

$$h_t(\alpha) = \left(\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2 - V_1^{\alpha} V_2^{1-\alpha}\right) * \nu_{0t} \geq 0,$$

$$d_t(\alpha) = \ln \frac{\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2}{V_1^{\alpha} V_2^{1-\alpha}} * \mu_t \geq 0,$$

$$M_t(\alpha) = \left(V_1^{\alpha} V_2^{1-\alpha} - 1\right) * (\mu - v_0)_t\,,$$

$$N_t(\alpha) = \left(\alpha V_1 + (1-\alpha)V_2 - 1\right) * (\mu - v_0)_t\,,$$

kur Q_1 – matas, atitinkantis kompensatorių $v_{Q_1}(t) = V_1^{\alpha} V_2^{1-\alpha} * v_{0t}$, o Q_2 – matas, atitinkantis kompensatorių $v_{Q_2}(t) = \alpha v_1(t) + (1-\alpha) v_2(t)$.

2. GAUTI REZULTATAI

2.1. ATSTATYMO PROCESAS SU TOLYDŽIU KOMPENSATORIUMI

Pritaikysime 1.4 paragrafe pateiktas formules atstatymo procesui.

Nagrinėjame skaičiuojantį procesą $N_t = \sum_{n\geq 1} \mathbb{1}(T_n \leq t),\ \ t \in R_+$ su atitinkančiais dydžiais $\tau_i = T_i - T_{i-1},\ \ i = 1,2,...\ \ (T_0 = 0)$, kurie yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę. Jie yra charakterizuojami pasiskirstymo funkcijos $P(\tau_1 \leq t) = F(\theta, t),\ \ \theta \in \Theta.$ Tarkime,

$$F(\theta,t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t k(\theta,s)ds\right\},\ \ \theta \in \Theta,$$

tai reiškia, kad ją atitinkantis procesas N_t turi tolydų kompensatorių. Jei $F(\theta,t)$ tolydi funkcija, tai ją atitinkantis procesas tolydus.

Įveskime matą $P(\alpha)\ \ \alpha \in (0,1)$ atitinkantį atstatymo procesą N_t tokį, kad pakankamai gausioje mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ tarpiniai atstatymo momentai $\tau_i,\ \ i = 1,2,...,$ turi pasiskirstymo funkciją pavidalu

$$F(t) = F_{\alpha,\theta_1,\theta_2}(t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t (\alpha k(\theta_1,s) + (1-\alpha)k(\theta_2,s))ds\right\},\ \ \alpha \in (0,1),\ \ \theta_1,\theta_2 \in \Theta. \qquad (1)$$

Pagal 1.4 Helingerio integralas $H_t(\alpha; P^t_{\theta_1}, P^t_{\theta_2}),\ \ \alpha \in (0,1),\ \ \theta_1,\theta_2 \in \Theta$ gali būti pavaizduotas pavidalu

$$H_t(\alpha; P^t_{\theta_1}, P^t_{\theta_2}) = \mathbb{E}\exp\{-d^t(\alpha)\}, \qquad (2)$$

kur

$$d^t(\alpha) = \int_0^t \ln g(\alpha, s - T_{N_{s-}})dN_s = \sum_{r=1}^{N_t} \ln g(\alpha, \tau_r),$$

$$g(\alpha,x) = \frac{\alpha k(\theta_1,x) + (1-\alpha)k(\theta_2,x)}{k(\theta_1,x)^{\alpha} k(\theta_2,x)^{1-\alpha}},$$

o $\mathbb{E}$ yra matematinis vidurkis, atitinkantis matą $P(\alpha)$ ir $\theta_1 \neq \theta_2$.

Norėdami gauti pagrindinį rezultatą, pasinaudosime pagalbine lema.

Lema [5]. Turime atstatymo procesą $N_t,\ \ t \geq 0.$ Tarkime, kad šio proceso tarpiniai atstatymo momentai $\tau_i = T_i - T_{i-1},\ \ i = \overline{1,n}$ tenkina Kramerio sąlygą:

$$\psi(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty \text{ su tam tikru } \lambda > 0. \tag{3}$$

Tada tikimybinis matas

$$\mu_t(B) = P\left(\frac{N_t}{t} \in B\right),\ \ B \in \mathcal{B}(R_+)$$

tenkina didžiųjų nuokrypių principą su greičio funkcija $I_N(x)$ pavidalu

$$I_N(x) = x\Lambda\left(\frac{1}{x}\right),$$

čia $\Lambda(x)$ yra didžiųjų nuokrypių greičio funkcija, atitinkanti atsitiktinį dydį τ_1, t.y.

$$\Lambda(x) = \sup_\lambda(x\lambda - \ln\psi(\lambda)).$$

Šiuo atveju pagrindinis rezultatas išplaukia iš tokios teoremos.

1 teorema [6]. Tarkime, kad egzistuoja $\lambda > 0,$ toks, kad $\psi(\lambda) = \mathbb{E}e^{\lambda\tau_1} < \infty$ (Kramerio sąlyga). Tada

$$\lim_{t\to\infty} t^{-1}\ln H_t\left(\alpha; P^t_{\theta_1}, P^t_{\theta_2}\right) = -\inf_{0\leq x\leq \frac{b}{a}}(x + I(x)),\ \ \alpha \in (0,1),$$

kur

$$0 < a = a(\alpha) = \mathbb{E}\tau_1 < \infty,\ \ b = b(\alpha) = \mathbb{E}\ln g(\theta, \tau_1) < \infty,$$

$$I(x) = \frac{x}{b}\Lambda\left(\frac{b}{x}\right),\quad \Lambda(y) = \sup_\lambda(y\lambda - \ln\psi(\lambda)).$$

Išvada. Atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi Helingerio integralas $H_t\left(\alpha; P^t_{\theta_1}, P^t_{\theta_2}\right)$, kai $\theta_1 \neq \theta_2$ turi asimptotinę formulę

$$H_t\left(\alpha; P^t_{\theta_1}, P^t_{\theta_2}\right) = \exp\left\{-t\left[\inf_{x\in\left[0,\frac{b}{a}\right]}(x + I(x)) + o(1)\right]\right\}, \tag{4}$$

čia a, b – tam tikros žinomos konstantos, $o(1) \to 0$, kai $t \to \infty.$

Pastaba. (2) pavidalas susiję̧s su pasiskirstymo funkcija $F(t)$, apibrėžta (1) formule, kuriai galioja (3) Kramerio sąlyga. Nesunku matyti, kad ši sąlyga patenkinta, kai pradinėms pasiskirstymo funkcijoms $F(\theta_i, t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t k(\theta_i, s)ds\right\}$, $i = 1,2$ patenkinama Kramerio sąlyga.

2 teorema. Atstatymo proceso N_t su tolydžiais kompensatoriais tikimybiniai matai $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$, kai $\theta_1 \neq \theta_2$ yra visiškai asimptotiškai atskiriami, jei pasiskirstymo funkcijos $F(\theta_i, t) = 1 - \exp\left\{-\int_0^t k(\theta_i, s)ds\right\}$ tenkina Kramerio sąlygą:

$$\psi(\lambda, \theta_i) = \mathbb{E}_{\theta_i} e^{\lambda \tau_1} < \infty,\ i = 1,2 \text{ su tam tikru } \lambda > 0.$$

Įrodymas.

Remiantis (4) formule matome, kad

$$\lim_{t \to \infty} H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = \lim_{t \to \infty} \exp\left\{-t\left[\inf_{x \in \left[0, \frac{b}{a}\right]}\left(x + I(x)\right) + o(1)\right]\right\} = 0,$$

nes pagal $I(x)$ savybių 1.2 punktą $\inf_{x \in \left[0, \frac{b}{a}\right]}\left(x + I(x)\right) > 0.$

Įrodymas baigtas

2.2. GEOMETRINIS ATSTATYMO PROCESAS

Nagrinėsime atstatymo procesą $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \leq t)$, kuriame tarpiniai atstatymo momentai $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ turi geometrinį skirstinį:

$$P_\theta\left(\tau_1 = k\right) = \theta(1 - \theta)^{k-1},\ \ \theta \in \Theta = (0,1)\ ,\ k = 1,2,\ldots$$

Trumpai pateiksime žinomus rezultatus iš darbo [1].

1 lema. Geometrinio atstatymo proceso N_t ($\mathcal{F}_t, P_\theta$) – kompensatorius apskaičiuojamas pagal formulę

$$A_t(\theta) = \theta[t], \ \theta \in \Theta, \ t \geq 0.$$

čia $[t]$ – sveikoji skaičiaus *t* dalis.

2 lema. Geometrinis atstatymo procesas N_t turi Binominį skirstinį, t.y.

$$P_\theta\{N_t = k\} = C_{[t]}^k \theta^k (1-\theta)^{[t]-k}, \ k = 0,1,2,\ldots,[t], \ \theta \in \Theta.$$

1 teorema. Tarkime, kad N_t yra geometrinis atstatymo procesas. Tada

$P_{\theta_1}^t \sim P_{\theta_2}^t$, $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ ir $\theta_1 \neq \theta_2$ ir tankio procesas $z_t = \dfrac{dP_{\theta_1}^t}{dP_{\theta_2}^t}$ turi pavidalą

$$z_t = z_t(\theta_1, \theta_2) = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2}\right)^{N_t} \left(\frac{1-\theta_1}{1-\theta_2}\right)^{[t]-N_t}.$$

2 teorema. Geometrinio atstatymo proceso Helingerio integralas apskaičiuojamas pagal formulę

$$H_t(\alpha) = H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = \mathbb{E}_Q z_t(\theta_1, \theta_2)^\alpha z_t(\theta_2, \theta_1)^{1-\alpha} = \left[\theta_1{}^\alpha \theta_2^{1-\alpha} + (1-\theta_1)^\alpha (1-\theta_2)^{1-\alpha}\right]^{[t]}.$$

Geometrinio atstatymo proceso Helingerio integralą $H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right)$ asimptotiškai tiriame toliau ir gausime vieną iš pagrindinių rezultatų.

3 teorema. Kai $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$, $\alpha \in (0,1)$ teisinga formulė

$$\lim_{t \to \infty} H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = 0.$$

Įrodymas.

Kai $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ akivaizdu, kad

$$f(\theta_1) = \theta_1{}^\alpha \theta_2^{1-\alpha} + (1-\theta_1)^\alpha (1-\theta_2)^{1-\alpha} > 0.$$

Kad gautume teoremos rezultatą, pakanka įrodyti, jog $f(\theta_1) < 1$. Tiriame funkciją $f(\theta_1)$:

$$f'(\theta_1) = \alpha\theta_1^{\alpha-1}\theta_2^{1-\alpha} - \alpha(1-\theta_1)^{\alpha-1}(1-\theta_2)^{1-\alpha}.$$

Prilyginame nuliui:

$$\alpha\theta_1^{\alpha-1}\theta_2^{1-\alpha} - \alpha(1-\theta_1)^{\alpha-1}(1-\theta_2)^{1-\alpha} = 0.$$

Iš čia

$$\alpha\theta_1^{\alpha-1}\theta_2^{1-\alpha} = \alpha(1-\theta_1)^{\alpha-1}(1-\theta_2)^{1-\alpha}$$

$$\left(\frac{1}{\theta_2}-1\right)^{1-\alpha} = \left(\frac{1}{\theta_1}-1\right)^{\alpha-1}.$$

Vadinasi $\theta_1 = \theta_2$ vienintelis $f(\theta_1)$ ekstremumo taškas. Pasirodo, kad tai maksimumo taškas, nes

$$f''(\theta_1) = \alpha(\alpha-1)\theta_1^{\alpha-2}\theta_2^{1-\alpha} + \alpha(\alpha-1)(1-\theta_1)^{\alpha-2}(1-\theta_2)^{1-\alpha}$$

ir

$$f''(\theta_2) = \frac{\alpha(\alpha-1)}{\theta_2(1-\theta_2)} < 0.$$

Taigi

$$f(\theta_2) = \max_{0<\theta_1<1} f(\theta_1) = \theta_2^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} + (1-\theta_2)^{\alpha}(1-\theta_2)^{1-\alpha} = 1.$$

Vadinasi, su visais $\theta_1, \theta_2 \in (0,1)$ ir $\theta_2 \neq \theta_1$

$$0 < f(\theta_1) = \theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} + (1-\theta_1)^{\alpha}(1-\theta_2)^{1-\alpha} < 1.$$

Įrodymas baigtas

Išvada. Kai $\theta_1 \neq \theta_2$ geometrinio atstatymo proceso tikimybiniai matai $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$ yra visiškai asimptotiškai atskiriami.

2.3. EKSPONENTINIS ATSTATYMO PROCESAS

Nagrinėsime atstatymo procesą $N_t = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{1}(T_n \le t)$, kurio tarpiniai atstatymo momentai $\tau_i = T_i - T_{i-1}$ turi eksponentinį skirstinį su pasiskirstymo funkcija:

$$F_\theta(t) = P_\theta(\tau_1 \le t) = 1 - e^{-\theta t}, \ \theta > 0 \ , \quad t \ge 0. \tag{5}$$

Remiantis bakalauro darbu [1] yra gauti tokie rezultatai:

1 lema. Eksponentinio atstatymo proceso N_t kompensatorius turi pavidalą

$$A_t(\theta) = \theta t .$$

2 lema. Eksponentinis atstatymo procesas turi Puasono skirstinį su parametru $t\theta$, t.y.

$$P_\theta(N_t = k) = \frac{(t\theta)^k}{k!} e^{-\theta t}, \ k = 0,1,2,\dots .$$

3 lema. Eksponentinio atstatymo proceso N_t tankio procesas z_t užrašomas formule

$$z_t = z_t(\theta_1, \theta_2) = \exp\left\{ N_t \ln \frac{\theta_1}{\theta_2} - t(\theta_1 - \theta_2) \right\} = \left(\frac{\theta_1}{\theta_2} \right)^{N_t} e^{-t(\theta_1 - \theta_2)}.$$

4 lema. Eksponentinio atstatymo proceso Helingerio integralas apskaičiuojamas pagal formulę

$$H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = \mathbb{E}_Q z_t(\theta_1, \theta_2)^\alpha z_t(\theta_2, \theta_1)^{1-\alpha} = \exp\left\{ -t\left(\theta_1 \alpha + (1-\alpha)\theta_2 - \theta_1^{\alpha} \theta_2^{1-\alpha}\right)\right\}. \tag{6}$$

Išvada. Eksponentinio atstatymo proceso Helingerio integralui teisinga asimptotinė formulė

$$H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = \lim_{t \to \infty} \frac{1}{t} \ln H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = -\left(\theta_1 \alpha + (1-\alpha)\theta_2 - \theta_1^{\alpha} \theta_2^{1-\alpha}\right).$$

Įrodysime pagalbinę lemą.

5 lema. Kai $\theta_1 \neq \theta_2$ teisinga formulė

$$\theta_1\alpha + \theta_2(1-\alpha) - \theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} > 0. \qquad (7)$$

Įrodymas.

Pažymėkime

$$g(\theta_1) = \theta_1\alpha + \theta_2(1-\alpha) - \theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha}.$$

Įrodysime, kad $g(\theta_1) > 0,$ kai $\theta_1 \neq \theta_2$. Tuo tikslu ieškome funkcijos $g(\theta_1)$ ekstremumų:

$$g'(\theta_1) = \alpha - \alpha\theta_1^{\alpha-1}\theta_2^{1-\alpha}.$$

Prilyginame nuliui:

$$\alpha - \alpha\theta_1^{\alpha-1}\theta_2^{1-\alpha} = 0$$

$$\theta_1^{\alpha-1} = \theta_2^{\alpha-1}.$$

Vadinasi, $\theta_1 = \theta_2$. O tai yra funkcijos $g(\theta_1)$ minimumo taškas, nes

$$g''(\theta_1) = -\alpha(\alpha-1)\theta_1^{\alpha-2}\theta_2^{1-\alpha} = \alpha(1-\alpha)\theta_1^{\alpha-2}\theta_2^{1-\alpha} > 0\,,$$

su kiekvienu $\theta_1 > 0.$ Taigi

$$g(\theta_2) = \min_{\theta_1>0} g(\theta_1) = \alpha\theta_2 + (1-\alpha)\theta_2 - \theta_2^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} = 0$$

yra gerai žinoma nelygybė [5]

$$0 \leq g(\theta_1), \text{ su visais } \theta_1.$$

Vadinasi,

$$g(\theta_1) = \alpha\theta_1 + (1-\alpha)\theta_2 - \theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} > 0,$$

kai $\theta_1 \neq \theta_2$.

Įrodymas baigtas

Teorema. Kai $\theta_1, \theta_2 > 0$, $\theta_1 \neq \theta_2$, $\alpha \in (0,1)$ teisinga formulė

$$\lim_{t\to\infty} H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = 0$$

ir tikimybiniai matai $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$ yra visiškai asimptotiškai atskiriami.

Įrodymas.

Pagal (6) ir (7) formules matome, kad

$$\lim_{n\to\infty} H_t\left(\alpha; P_{\theta_1}^t, P_{\theta_2}^t\right) = \lim_{n\to\infty} \exp\left\{-t\left(\theta_1\alpha + (1-\alpha)\theta_2 - \theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha}\right)\right\} = e^{-\infty} = 0,$$

nes $\theta_1\alpha + (1-\alpha)\theta_2 - \theta_1^{\alpha}\theta_2^{1-\alpha} > 0$, kai $\theta_1 \neq \theta_2$ pagal 4 lemą.

Įrodymas baigtas

IŠVADOS

Nagrinėti atvejai:

1) atstatymo procesas su tolydžiu kompensatoriumi;
2) eksponentinis atstatymo procesas;
3) geometrinis atstatymo procesas.

Šiais atvejais atstatymo procesą $N_t,\ t \geq 0$ atitinka tikimybinis matas $P_\theta^t = P_\theta \big|_{\mathcal{F}_t^N}$.

Darbe buvo spręstas atstatymo procesų tikimybinių matų asimptotinio atskiriamumo uždavinys. Nustatyta, kad bet kuri tų matų pora $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$ yra visiškai asimptotiškai atskiriama, kai jų parametrai nesutampa, t.y. $\theta_1 \neq \theta_2,\ \ \theta_1, \theta_2 \in \Theta$ visais turimais atvejais, tik atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi atveju dar reikalaujama Kramerio sąlygos patenkinimo.

ATSTATYMO PROCESO TIKIMYBINIŲ MATŲ ASIMPTOTINIS ATSKIRIAMUMAS

SUTRUMPINIMAS

Darbe nagrinėjamas atstatymo proceso asimptotinio atskiriamumo uždavinys. Darbo pradžioje, teorinėje dalyje, pateikiamos būtinos sąvokos, apibrėžimai, naudojamos teoremos ir kriterijai iš tikimybinių matų asimptotinio atskiriamumo teorijos, iš didžiųjų nuokrypių teorijos ir Helingerio integralo teorijos. Kadangi tikimybinių matų asimptotinis atskiriamumas tiesiogiai susijęs su atitinkama Helingerio integralo asimptotika, darbe rasti visi nagrinėjami Helingerio integralai. Tai pat ištirta Helingerio integralo asimptotika, kai laikas neapibrėžtai didėja. Remiantis tuo, nustatyta, kad atstatymo proceso su tolydžiu kompensatoriumi, eksponentinio atstatymo proceso, geometrinio atstatymo proceso bet kuri tikimybinių matų pora $P_{\theta_1}^t$ ir $P_{\theta_2}^t$ yra asimptotiškai atskiriama, kai jų parametrai nesutampa, t.y. $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

ASYMPTOTIC SEPARABILITY OF PROBABILITY MEASURES OF RENEWAL PROCESS

SUMMARY

The Paper analysis a problem of asymptotic separability for a renewal process. The theoretical part of the Paper provides essential concepts, definitions, theorems and criteria that are used in the following theories: asymptotic separability of probability measures, large deviations theory and Hellinger integral theory. All Hellinger integrals under analysis have been found in the Paper, because asymptotic separability of probability measures is directly related to respective asymptotics of Hellinger integral. Asymptotics of Hellinger integral when time increases indefinitely was also examined. The findings allowed to determine that any pair of probability measures $P_{\theta_1}^t$ and $P_{\theta_2}^t$ of the renewal process with continuous compensator, exponential renewal process and geometric renewal process are asymptotically separable when their parameters differ, i.e. $\theta_1 \neq \theta_2$, $\theta_1, \theta_2 \in \Theta$.

LITERATŪRA

1. Adomaitienė K. *Atstatymo procesai su determinuotais kompensatoriais*. Šiaulių universitetas, Bakalauro darbas (2009).
2. Chernoff H. *A measure of asymptotic efficiency for tests of a hypothesis based on the sum of observations.* Ann. Math. Statist., 23, 493-507 (1952).
3. Ellis R.S. *Entropy, Large Deviations and Statistical Mechanics*. Springer, Berlin (1985).
4. Kanišauskas V. *Асимптотическая формула интеграла Хеллингера для процессоb bосстаноbления* . Lietuvos matematikos rinkinys, 39 (4), 493-497 (1999).
5. Kanišauskas V. *Асимптотически минимаксное различение дbух простых гипотез* . Lietuvos matematikos rinkinys, 38 (2), 169-184 (1998).
6. Kanišauskas V. *Dvi atstatymo proceso Helingerio transformacijos asimptotinės formulės.* Fizikos ir matematikos fakulteto mokslinio seminaro darbai. ISSN 1392-7086, T. 3, Šiauliai, 2000, p. 21-26.
7. Линьков Ю. Н. *Асимптотические методы статистики случайных процессоb.* Наукова Думка, Киев (1993).
8. Le Cam L. *Locally asymptotically normal families of distributions*. Univ. Calif. Publ. Statist., 3, 27-98 (1960).
9. Salikhov N.P. *Asymptotic properties of error probabilities of tests for discriminating betweens several multinomial testing schemes*. Dolk. Akad. Nauk. SSSR, 209(1), 54-57 (1973).
10. Ширяев А. Н. *Вероятность*. Москва, Наука (1989).