VILNIAUS UNIVERSITETAS

JELENA SALNIKOVA

GERBER-SHIU DISKONTUOTOS BAUDOS FUNKCIJOS TYRIMAS

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

2011, Vilnius

Disertacija rengta 2006 - 2010 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Jonas Šiaulys (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

Konsultantas:

prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P)

Turinys

Įvadas

Tyrimo objektas. Disertacijoje nagrinėjama Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija klasikiniame rizikos bei Erlang(2) modeliuose ir su šiais modeliais susiję uždaviniai. Taip pat buvo tyrinėjamos atstatymo proceso didelių nuokrypių tikimybių su svoriais savybes.

Mokslinė problema ir aktualumas. Bankroto teorija yra draudos matematikos atšaka, kurios pagrindas matematinių ir statistinių modelių kūrimas ir taikymas skaičiuojant įvairius dydžius, susijusius su draudimo bendrovės veikla, jos mokumu ir galimu bankrotu. Daugelio šios teorijos metodų ir technikų pagrindas yra stochastiniai procesai. Yra žinoma daug darbų, kuriuose draudiko kapitalas modeliuojamas pasitelkus stochastinius procesus. Paprastai yra nagrinėjamas ne vien tik kapitalas, bet ir tokie svarbūs dydžiai kaip bankroto laikas, bankroto tikimybė, draudiko sukauptas kapitalas prieš bankrotą ir kapitalo stoka bankroto metu. Vienas iš pirmųjų stochastinių procesų naudą, modeliuojant draudėjo sukauptą kapitalą, atskleidė švedų aktuaras Filip Lundberg. Savo darbe (žr. [39]) jis pasiūlė modelį, kuriame draudėjo kapitalo kitimą aprašė pasitelkdamas sudėtinį Puasono procesą. Vėliau šį procesą nagrinėjo Cramer (žr. [10]) ir daugelis kitų autorių. Procesas, aprašantis draudėjo kapitalo kitimą, buvo išplėstas ir apibendrintas įvairiomis kryptimis, pavyzdžiui, į procesą buvo įtraukta palūkanų norma, o proceso papildomi svyravimai buvo modeliuojami Brauno judesiu. Taip pat buvo tyrinėjamas atskiras modelio atvejis esant papildomai kapitalo investavimo galimybei. Daugeliu atvejų pagrindinis tikslas buvo draudiko sukaupto kapitalo prieš bankrotą ir kapitalo stokos bankroto metu pasiskirstymų radimas, bankroto laiko Laplaso transformacijos skaičiavimas ir bankroto tikimybės gavimas. Gerber ir Shiu (žr. [23]) 1998 metais pasiūlė nagrinėti dar vieną dydį, susijusį su draudimo bendrovės veikla, būtent diskontuotą baudos funkciją. Šios funkcijos reikšmės atspindi būsimo bankroto vertės vidurkį nagrinėjamu momentu. Atsižvelgiant į šios funkcijos elgesį, draudimo bendrovė gali pasirinkti tokią investavimo ir rezervų formavimo politiką, kad ateityje išvengti bankroto. Literatūroje ši funkcija žinoma kaip Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija ir ji iki šiol yra plačiai negrinėjama įvairių autorių. Pagrindinis daugelio darbų tikslas yra gauti patogią skaičiuoti Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos išraišką. Pastaraisiais metais yra nagrinėjamas šios funkcijos asimptotinis elgesys, kai draudimo bendrovės pradinis kapitalas artėja į begalybę.

Galima teigti, kad bankroto teorija yra aktuali iki šiol. Sudėtinis Puasono modelis ir Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija yra išsamiai tyrinėjamos daugelio autorių. Tačiau yra daug neišnagrinėtų problemų, susijusių su minėta funkcija ir modeliu. Dėl šios priežasties Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos tyrimas su įvairiais rizikos modeliais yra svarbus ir aktualus.

Tyrimo tikslai ir uždaviniai. Pagrindinis disertacinio darbo tikslas išsamiai išnagrinėti Gerber-Shiu diskontuotą baudos funkciją klasikiniame rizikos modelyje ir gauti jos asimptotinę formulę Erlang(2) modelyje. Nemažai dėmesio bus skirta atstatymo proceso ir jo savybių analizei. Pagrindiniai darbo uždaviniai:

- Gauti Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos tikslią išraišką klasikiniame rizikos modelyje su žalomis, turinčiomis mišrų eksponentinį pasiskirstymą ir išanalizuoti šios funkcijos elgesį esant įvairioms parametrų reikšmėms;

- Rasti tikslias Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos baigtiniame intervale išraiškas klasikiniame rizikos modelyje su žalomis, pasiskirsčiusiomis pagal eksponentinį dėsnį;
- Išanalizuoti Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotinį elgesį Erlang(2) rizikos procese su subeksponentinėmis žalomis;
- Ištirti atstatymo proceso eksponentinės eilės momento uodegos ribinį elgesį.

Tyrimo metodai ir priemonės. Sprendžiant iškeltus uždavinius buvo naudojami bendri analiziniai, tikimybių teorijos ir kompleksinio kintamojo funkcijų teorijos metodai. Darbe buvo pritaikyti eksponentinės transformacijos metodas, Laplaso transformacijos metodas, atstatymo lygties motodas ir rezidiumų metodas.

Pateikiami ginti darbo rezultatai. Gynimui pateikiami darbo rezultatai:

- Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos išraiška klasikiniame rizikos modelyje su žalomis, turinčiomis mišrų eksponentinį pasiskirstymą;
- Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos baigtiniame laiko intervale išraiškos klasikiniame rizikos modelyje su žalomis, pasiskirsčiusiomis pagal eksponentinį dėsnį;
- Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotinė formulė Erlang(2) rizikos procese su subeksponentinėmis žalomis;
- Atstatymo proceso eksponentinės eilės momento uodegos ribos savybė.

Mokslinis naujumas ir praktinė svarba. Gerber ir Shiu pasiūlyta diskontuotos baudos funkcijos koncepciją bei metodologija buvo labai naudinga sprendžiant įvairias aktuarines problemas. Taikant šią funkciją atsirado galimybė nagrinėti tokius dydžius, kaip bankroto tikimybė, draudiko sukaupto kapitalo prieš bankrotą, kapitalo stokos bankroto metu pasiskirstymus ir bankroto laiką. Ši funkcija rizikos teorijoje yra vadinama autorių vardais, t.y. Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija. Minėta funkcija buvo plačiai nagrinėjama ne tik su sudėtiniu Puasono bei atstatymo rizikos modeliais, bet ir su kitais modeliais, tokiais kaip: Puasono rizikos modelis su difuzija, Kokso rizikos modelis, Markovo rizikos modelis, Levy rizikos modelis, bei su modeliais, į kuriuos buvo įtraukti įvairūs ekonominiai faktoriai.

Rizikos teorijoje minėtos funkcijos tyrimas vyksta įvairiomis kryptimis. Paprastai ši funkcija tyrinėjama klasikiniame rizikos modelyje, kai žalos turi eksponentinį, Erlang'o ir eksponentinių derinių skirstynius. Daugumos darbų tikslas yra gauti šios funkcijos tikslą išraišką ir ištirti jos pagrindines analitines savybes. Šiame darbe yra gauta ir išanalizuota diskontuotos baudos funkcijos išraiška klasikiniame rizikos modelyje su žalomis, turinčiomis mišrų eksponentinį pasiskirstymą. Taip pat ši funkcija buvo tyrinėjama baigtiniame laiko intervale klasikiniame rizikos modelyje su eksponentinėmis žalomis. Šiais atvejais gautos diskontuotos baudos funkcijos išraiškos gali būti panaudotos tyrinėjant šios funkcijos elgesį, parenkant įvarias parametrų reikšmes.

Kadangi Gerber-Shiu funkcija paprastai nagrinėjama su įvairiais rizikos modeliais, tapo aktualu ištirti atstatymo procesą, kuris yra bet kokio modelio pagrindas. Šis procesas paprastai rodo įvykusių žalų skaičių konkrečiu laiko memento. Šiame darbe išnagrinėtos pagrindinės atstatymo proceso savybės, o rezultatas buvo pritaikytas tyrinėjant baigtinio laiko bankroto tikimybę. Šiuo atveju išskirtos atstatymo proceso savybės gali būti pritaikytos nagrinėjant atstatymo rizikos modelį bei kitus modelius ir įvairias bankroto problemas.

Disertaciniame darbe taip pat buvo nagrinėjama diskontuotos baudos funkcijos asimptotika. Iš pirmo žvilgsnio gali pasirodyti, kad asimptotinių problemų tyrimas nėra naudingas, nes asimptotinės formulės negali būti taikomos realiame gyvenime. Tačiau geros asimptotinės formulės turi paprastas ir aiškias išraiškas, kuriose jau yra panaikinti nereikalingi faktoriai. Be to, dažniausiai šios formulės galioja, kai pradinis kapitalas santykinai didelis, o tai leidžia išsamiau ištirti diskontuotą baudos funkciją. Reikėtų pridurti, kad yra parašyti tik keli darbai, kuriuose nagrinėjam šios funkcijos asimptotikos problema. Šiame darbe gauta diskontuotos baudos funkcijos asimptotinė formulė Erlang(2) modelyje su subeksponentinėmis žalomis leidžia išanalizuoti šios funkcijos elgesį ir savybes pradiniam kapitalui artėjant prie begalybės. Šis rezultatas gali būti panaudotas gilesnei funkcijos analizei parenkant konkrečius žalų skirstinius.

Darbo rezultatų aprobavimas, publikacijos. Pagrindiniai darbo rezultatai buvo pristatyti trejose Lietuvos vietinėse konferencijose ir publikuoti šiuose Moksliniuose periodiniuose leidiniuose:

- J. Šiaulys, J. Kočetova, *On the Discounted Penalty Function for Claims Having Mixed Exponential Distribution*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 11(4), p. 413 - 426, 2006.
- J. Kočetova, J. Šiaulys, R. Leipus, *A property of the renewal counting process with application to the finite-time ruin probability*, LMJ, 49(1), p. 55 - 61, 2008.
- J. Kočetova, J. Šiaulys, *Investigation of the Gerber-Shiu discounted penalty function on finite time horizon*, Information Technology and Control, 39(1), 18-24, 2010.
- J. Kočetova, J. Šiaulys, *Asymptotic behaviour of the Gerber-Shiu discounted penalty function in the Erlang(2) risk process with subexponential claims*, Nonlinear Analysis: Modelling and Control, 2011. (išiųstas į leidinį).

Darbo struktūra. Disertaciją sudaro įvadas, keturi skyriai, darbo išvados ir literatūros sąrašas. Darbo apimtis - 63 puslapiai. Disertacijoje panauduoti 61 mokslinės literatūros šaltinių. Disertacijos turinys atspindi tyriamąjį objektą, darbo tikslą ir spendžiamus uždavinius.

1 Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos tyrimas

Įvadas. Sparre Andersen [1] 1957 metais pristatė matematinį modelį, kuris po to buvo naudojamas draudimo bendrovės veiklos aprašymui. Šiame modelyje draudiko sukauptą kapitalą laiko momentu t aprašo procesas $\{U(t),\, t \geq 0\}$

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \tag{1.1}$$

čia u yra draudėjo pradinis kapitalas, c - įmokų dažnis. $\{N(t),\, t \geq 0\}$ skaičiuojamasis procesas intervale $[0, \infty)$, kuris aprašo žalų įvykusių iki momento t skaičių, t.y.

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_i \leq t\}}. \tag{1.2}$$

Laiko tarpai $\theta_1, \theta_2, \ldots$ tarp žalų įvykimo momentų yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Žalos $Y_1, Y_2, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai turintys pasiskirstymo funkciją $H(y) = P(Y_1 \leq y)$ ir baigtinį vidurkį EY_1. Nagrinėjamu atveju Y_i yra i-tos žalos dydis. Be to, žalos $Y_1, Y_2, \ldots$ nepriklauso nuo dydžių $\theta_1, \theta_2, \ldots$. Taip apibrėžtas modelis vadinamas rizikos atstatymo modeliu arba Sparre Andersen modeliu.

Atskiru atveju, kai procesas $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu λ, o θ_1 yra eksponentiškai pasiskirstęs, t.y. kai

$$P(\theta_1 \leq y) = \begin{cases} 0 & jei\ y < 0; \\ 1 - e^{-\lambda y} & jei\ y \geq 0. \end{cases}$$

rizikos modelis apibrėžtas anksčiau vadinamas klasikiniu Lundbergo modeliu (klasikiniu rizikos modeliu) arba sudėtiniu Puasono modeliu. Sparre Andresen modelį yra sunkiau nagrinėti, nei sudėtinį Puasono modelį, nes nežinomi dydžių, generuojančių procesą $N(t)$ skirstiniai, taip pat nežinomos dydžių E(N(t)) ir Var(N(t)) išraiškos. Todėl dažniausiai modelis yra nagrinėjamas parenkant konkrečius tarplaikių ir žalų pasiskirstymus. Pavyzdžiui, Dickson ir Hipp [12] tyrinėjo atvėjį, kai tarplaikiai pasiskirstę pagal Erlang(2) dėsnį, tuo tarpu Gerber ir Shiu [24] bei Li ir Garrido [35] analizavo atvejį, kai tarplaikiai turi Erlang(n) skirstinius.

Literatūroje dažnai nagrinėjamas sudėtinis Puasono procesas su palūkanu norma. Pirmas šį procesą pradėjo nagrinėti Segerdahl [43]. Vėliau pradėjo tyrinėti ir kiti autoriai (žr. [3], [15], [25], [48], [49]), kurie iš esmės sutelkė savo dėmėsį ties bankroto tikimybės radimu. Šiame modelyje laikoma, kad draudiko kapitalas yra investuojamas ir gaunamos palūkanos. Jeigu laikyti, kad palūkanų galia yra δ, tai rezervas laiko momentu t yra aprašomas tokia lygybe

$$U(t) = ue^{\delta t} + c\frac{e^{\delta t} - 1}{\delta} - \int_0^t e^{\delta(t-s)} dS(s),$$

čia $S(t) = Y_1 + Y_2 + \ldots + Y_{N(t)}$ žalų įvykusių iki momento t suma.

Taip pat reikėtų paminėti sudėtinį Puasono procesą su difuzija. Pirmieji šį procesą aprašė Dufresne ir Gerber [17]. Pagal juos draudiko kapitalas momentu t nusakomas lygybe

$$U(t) = u + ct - S(t) + \sigma W(t),$$

čia $\{W(t)\}$ yra standartinis Brauno judesys, o $\sigma > 0$ yra nepastovumo koeficientas. Procesas $\sigma W(t)_{t \geq 0}$ nusako akumuliuotų žalų, premijų intensivumo arba investuoto kapitalo svyravimus. Sudėtinis Puasono procesas su difuzija yra Levy proceso atskiras atvejis, todėl galima nagrinėti Levy procesų klasę su kaupiamuoju procesu $U(t)$ kuris turi tik neigiamus šuolius. Nemažai straipsnių buvo skirta šio proceso nagrinėjimui. Daugumoje iš jų tyrinėjama bankroto tikimybė (žr. pavyzdžiui [26], [30], [61]) ir diskontuota baudos funkcija (žr. pavyzdžiui [21]).

Toliau apibrėšime diskretaus laiko rizikos modelį, kuris aprašo sukauptą kapitalą tik diskrečiais laiko momentais. Šis modelis yra supaprastintas Spare Andersen modelio atvejis. Diskretaus modelio atveju, draudiko kapitalą aprašo procesas

$$U(n) = u + n - \sum_{i=1}^{N(n)} Y_i,\ n = 1, 2, ...,$$

čia $u \in \mathbb{N}$ pradinis kapitalas, o $Y_1, Y_2, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami sveikaskaičiai atsitiktiniai dydžiai su skirstiniu $h(x) = P(Y_1 = x)$, $x = 1, 2, ...$ Nagrinėjamu atveju atsitiktinis dydis Y_1 turi pasiskirstymo funkciją

$$H(x) = 1 - \overline{H}(x) = \sum_{k=0}^{[x]} P(Y_1 = k)$$

Be to, paprastai laikoma, kad Y_1 vidurkis $EY_1 = \mu$ yra baigtinis. $N(n)$ yra skaičiuojamasis procesas, aprašantis ivykusių žalų skaičių iki momento n t.y.

$$N(n) = \max\{k : \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_k \leq n\},$$

Tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę teigiami atsitiktiniai dydžiai su skirstiniu $k(t) = P(\theta_1 = t)$, $t = 1, 2, ...$ ir pasiskirstymo funkcija

$$K(t) = \sum_{k=1}^{[t]} P(\theta_1 = k)$$

Dydžiai $\{\theta_1, i \in \mathbb{N}^+\}$ ir $\{Y_i, i \in \mathbb{N}^+\}$ yra nepriklausomi. Be to, yra tenkinama gryno pelno sąlyga $E\theta_1 = (1 + \widehat{\theta})\mu$ su teigiamu saugumo koeficientu $\widehat{\theta}$. Taip apibrėžtas modelis pasižymi geromis matematinėmis savybėmis, dėl kurių jį patogu nagrinėti ir taikyti rizikos teorijoje. Tačiau, šis modelis nėra taip plačia tyrinėjamas, kaip Spare Andersen ar klasikinis modeliai.

1.1 Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos apibrėžimas

Šiame skyrelyje apibrėšime kelias pagrindines sąvokas ir pateiksime Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos apibrėžimą. Laiko momentą T, kai sukauptas draudimo bendrovės kapitalas $U(t)$ iš (1.1) lygybės pirmą kartą krenta žemiau nulio

$$T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0 | U(0) = u\} \tag{1.3}$$

vadinsime bankroto momentu. Jeigu $U(t) \geq 0$ su visais t, tuomet $T = \infty$. Funkcija

$$\psi(u) = P(T < \infty)$$

vadinama bankroto tikimybe. Yra žinoma, kad bankrotas įvyksta su tikimybe 1, t.y.

$$\psi(u) = P(T < \infty) = 1$$

kai $EY_1 - cE\theta_1 \geq 0$. Kad ši nelygybė būtų nepatenkinta, turėtų būti tenkinama gryno pelno sąlyga. Pagal šią sļygą

$$c = \frac{EY_1}{E\theta_1}(1 + \widehat{\theta}),$$

kur $\widehat{\theta} > 0$ yra saugumo koeficientas.

Gerber ir Shiu [23] 1998 metais pasiūlė vietoj bankroto tikimybės klasikiniame rizikos modelyje analizuoti diskontuotą baudos funkciją, kuri rodo būsimo bankroto diskontuotą dabartinę vertę ir bendru atveju užrašoma tokia lygybe

$$\phi_\omega(u) = E(e^{-\delta T}\omega(U(T-), |U(T)|)\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u). \tag{1.4}$$

Čia $U(T-)$ sukauptas kapitalas prieš bankroto momentą ir $|U(T)|$ yra kapitalo deficitas bankroto metu. Funkcija $\omega(x, y)$, $0 \le x$, $y < \infty$ yra neneigiama dviejų argumentų funkcija, o $\delta > 0$ yra palūkanų norma. Atskiru atveju, kai $\omega(x, y) \equiv 1$ funkciją iš (1.4) lygybės galima užrašyti taip:

$$\phi(u) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u). \tag{1.5}$$

Nagrinėjamu atveju laikoma, kad bankroto momentu T draudimo bendrovės bankroto dydis prilyginamas vienetui. Kai $\delta = 0$ ir $\omega(x, y) \equiv 1$ funkcija $\phi_\omega(u)$ patampa bankroto tikimybe

$$\psi(u) = P(T < \infty).$$

Pastebėkime, kad (1.4) lygybėje paėmus $\omega(x, y) \equiv 1$, gausime bankroto laiko T Laplaso transformaciją su parametru δ. Jeigu toje pačioje lygybėje $\delta = 0$ ir $\omega(x, y) = \mathbf{I}_{\{x\le x_1, y\le x_2\}}$ fiksuotiems x_1 ir x_2, turėsime dydžių $U(T-)$ ir $|U(T)|$ pasiskirstymo funkciją. Kai $\omega(x, y) = x^k y^l$ ir $\delta = 0$ gausime dydžių $U(T-)$ ir $|U(T)|$ momentus. Taigi atitinkamai parenkant funkciją $\omega(x, y)$ galima nagrinėti įvairius dydžius, susijusius su bankroto momentu T ir su proceso $U(t)$ charakteristikomis momentu T.

1.2 Diskontuotos baudos funkcijos $\phi_\omega(u)$ atstatymo lygtis

Nagrinėkime klasikinį rizikos modelį (žr. įvadą), kuriame kapitalo procesas $U(t)$ aprašomas (1.1) lygybe. Tegul $N(t)$ iš (1.2) lygybės yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu λ. Žalos $Y_1, Y_2, ...$, nepriklausančios nuo proceso $N(t)$, yra teigiami nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija $H(y) = P(Y_1 \le y)$. Esant auksčiau išvardintoms sąlygoms nagrinėsime Gerber-Shiu diskontuotą baudos funkciją $\phi_\omega(u)$ apibrėžtą (1.4) lygybėje. Gerber and Shiu [23] parodė, kad ši funkcija tenkina defektyvią atstatymo lygtį

$$\begin{aligned} \phi_\omega(u) &= \frac{\lambda}{c}\int_0^u \phi_\omega(u-x)\int_x^\infty e^{-\rho(y-x)}dH(y)dx \\ &+ \frac{\lambda}{c}e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho x}\int_x^\infty \omega(x, y-x)dH(y)dx. \end{aligned} \tag{1.6}$$

kur $\rho = \rho(\delta)$ yra vienintelis neneigiamas Lundbergo lygties

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\rho y}H(y)dy = \lambda + \delta - c\rho$$

sprendinys.

Parinkus funkciją $\omega(x, y)$ galima nagrinėti sukaupto kapitalo pasiskirstymą prieš bankrotą ir po jo, o taip pat bankroto laiko Laplaso transformaciją. Čia reikėtų pridurti, kad bankroto laiko Laplaso transformacijos pagalba galima gauti bankroto laiko aukštesnės eilės momentus. Tai yra labai naudinga, nes dauguma gautų rezultatų apsiribodavo tik bankroto laiko pirmo momento nagrinėjimu.

1999 metais Lin ir Willmot [37] savo straipsnyje nagrinėjo diskontuotą baudos funkciją $\phi_\omega(u)$ ir parodė, kad (1.6) lygtis gali būti užrašyta tokia forma

$$\phi_\omega(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \phi_\omega(u-y)dG(y) + \frac{1}{1+\beta}B(u), \quad u \geq 0, \tag{1.7}$$

kur $\beta > 0$, $G(x) = 1 - \overline{G}(x)$ yra pasiskirstymo funkcija, kuriai $G(0) = 0$ ir $B(u)$ tolydi funkcija su visais $u \geq 0$.

Apibrėžkime tokį sudėtinį geometrinį pasiskirstymą

$$\overline{K}(u) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{(1+\beta)^{n+1}}\overline{G}^{*n}(u),$$

čia $G^{*n}(u)$ yra funkcijos $G(u)$ n-osios sąsūkos su pačios savimi uodega. Toliau suformuluosime teoremą, kurioje (1.7) lygties sprendinys išreiškiamas per funkciją $\overline{K}(u)$ (žr. Lin ir Willmot [37] 2.1 teoremą).

Teorema 1.1 *Atstatymo lygties (1.7) sprendinį galima užrašyti tokia forma*

$$\phi_\omega(u) = \frac{1}{\beta}\int_0^u B(u-y)dK(y) + \frac{1}{1+\beta}B(u), \quad u \geq 0$$

arba

$$\phi_\omega(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-y)dB(y) - \frac{B(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}B(u), \quad u \geq 0.$$

Jeigu funkcija $B(u)$ yra diferencijuojama, tai

$$\phi_\omega(u) = -\frac{1}{\beta}\int_0^u \overline{K}(u-x)B'(x)dx - \frac{B(0)}{\beta}\overline{K}(u) + \frac{1}{\beta}B(u). \tag{1.8}$$

Tokia (1.8) lygties sprendinio forma dažnai analizuojama su tokiomis svarbiomis pasiskirstymo klasėmis kaip: eksponentinis ir jo kombinacijos bei mišriais Erlango.

Daug fundamentalių rezultatų yra gauta apie Gerber-Shiu diskontuotą baudos funkciją, kai funkcija $\omega(x,y) \equiv 1$. Vieną iš jų 2000 metais gavo Lin ir Willmot [59]. Jie parodė, kad funkcija $\phi(u)$ iš (1.5) lygybės gali būti išreikšta per sudėtinio geometrinio pasiskirstymo uodegą, t.y.

$$\phi(u) = \sum_{n=1}^{\infty}(1-\phi)\phi^n \bar{F}^{*n}(u) \tag{1.9}$$

kur

$$\bar{F}(x) = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{H}(u+y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{H}(y)dy}, \tag{1.10}$$

$$\phi = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{H}(y)dy}{(1+\widehat{\theta})EY}, \tag{1.11}$$

ir ρ yra vienintelis neneigiamas Lundbergo lygties sprendinys

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\rho y}H(y)dy = \lambda + \delta - c\rho. \tag{1.12}$$

Nagrinėjamu atveju $\bar{F}^{*n}$ yra funkcijos yra funkcijos F n-osios sąsūkos su pačios savimi uodega.

(1.9) lygybės forma yra patogi nagrinėjimui, o parinkus įvairius žalų skirstinius galima detaliau ištirti funkcijos $\phi(u)$ savybes.

1.3 Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija Sparre Andersen rizikos modelyje

Šiame skyrelyje nagrinėsime Sparre Andersen rizikos modelį (žr. įvadą), kuriame procesas

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{\theta_1+\theta_2+...+\theta_i \le t\}}$$

yra atstatymo skaičiuojamasis procesas su nepriklausomais vienodai pasiskirsčiusiais atsitiktiniais tarplaikiais $\theta_1, \theta_2, ...$, o kapitalo procesas aprašomas (1.1) lygybe. Tegul žalos $Y_1, Y_2, ...$, nepriklausančios nuo proceso $N(t)$, yra neneigiami, nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija H ir tankio funkcija h.

Toliau nagrinėsime Sparre Andersen modelį su žalomis, turinčiomis Cox'o pasiskirstymą. Tegul K ir k yra bet kurio atsitiktinio dydžio θ_i pasiskirstymo ir tankio funkcijos. Apibrėžkime žalų įvykimo momentų seką $\{Z_j,\, j \in N\}$, kur $Z_j = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_j$, $j \in \mathbb{N}^+$ su sąlyga, kad $Z_0 = 0$. Nagrinėjamu atveju, žalų tankio funkcijos Laplaso transformacija $\tilde{h}$ apibrėžiama taip

$$\tilde{h}(s) = \frac{\lambda^* + s\beta(s)}{\prod_{i=1}^{n}(s+\lambda_i)^{r_i}}, \quad s \in C \tag{1.13}$$

kur $\lambda^* = \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i)^{r_i}$. Čia $r_i \in \mathbb{N}^+$, $i = 1, ..., n$ ir $\beta(s)$ yra $r-2$ (arba mažesnės) eilės polinomas su $r = r_1 + ... + r_n$. λ_i yra skirtingi teigiami dydžiai. Nagrinėjamu atveju, Laplaso transformacija $\tilde{h}$ iš (1.13) lygybės gali būti užrašyta tokia lygybe

$$\tilde{h}(s) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} a_{i,j}\left(\frac{\lambda_i}{s+\lambda_i}\right)^j, \quad s \in C,$$

čia

$$a_{i,j} = \frac{\left(\frac{1}{\lambda_i}\right)^j}{(r_i-j)!}\frac{d^{r_i-j}}{ds^{r_i-j}}\frac{\lambda^*+s\beta(s)}{\prod_{k=1,\,k\neq i}^{n}(s+\lambda_k)^{r_k}}\Bigg|_{s=-\lambda_i}. \tag{1.14}$$

Kai žalos turi Cox'o pasiskirtymą, žalų tankio funkcija gali būti užrašyta tokia forma

$$h(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} a_{i,j}\tau_{\lambda_i,j}(y),\ y \ge 0, \tag{1.15}$$

kur

$$\tau_{\lambda_i,j}(y) = \frac{(\lambda_i)^j y^{j-1} e^{-\lambda_i y}}{(j-1)!}, \tag{1.16}$$

yra Erlang(j) tankio funkcija su parametru $\lambda_i > 0$. Toliau, išskleidę $(x+y)^j$ gauname, kad

$$\tau_{\lambda_i,j}(x+y) = \lambda_i^{-1}\sum_{k=1}^{j}\tau_{\lambda_i,j-k+1}(x)\tau_{\lambda_i,k}(y).$$

Pakeitę sumavimo tvarką, nesunkiai gauname, kad

$$h(x+y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}\eta_{i,j}(x)\tau_{\lambda_i,j}(y)$$

kur

$$\eta_{i,j}(x) = \lambda_i^{-1}\sum_{k=j}^{r_i} a_{i,k}\tau_{\lambda_i,j-k+1}(x).$$

Čia $a_{i,k}$ yra iš (1.14) lygybės. Toliau nesunku surasti sąlyginę tankio funkciją (šiuo atveju pritaikoma (2.6) lygtis iš Willmot straipsnio [56])

$$h_x(y) = \frac{h(x+y)}{\overline{H}(x)},$$

kurią galima užrašyti tokia forma

$$h_x(y) = \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} \eta^*_{i,j}(x)\tau_{\lambda_i,j}(y),$$

čia

$$\eta^*_{i,j}(x) = \eta_{i,j}(x)/\overline{H}(x). \tag{1.17}$$

Auksčiau paminėtas Sparre Andersen modelis bei apibrėžti dydžiai buvo naudojami Landriault ir Willmot [32] straipsnyje, kuriame autoriai tyrinėjo diskontuotą baudos funkciją $\phi_\omega(u)$, kai funkcija $\omega(x, y)$ priklauso tik nuo kapitalo deficito bankroto metu. O tiksliau, jie nagrinėjo atvejį, kai $\omega(x, y) = e^{-sx}\omega_1(y)$ ir tokio pavidalo Gerber-Shiu diskontuotą baudos funkciją

$$\phi_{\omega,s}(u) = E(e^{-\delta T - sU(T^-)}\omega(|U(T)|)\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u), \quad s \geq 0. \tag{1.18}$$

Straipsnyje buvo gautos funkcijos $\phi_{\omega,s}(u)$ Laplaso transformacija bei funkcijų $\phi_{\omega,0}(u)$ ir $\phi_{\omega,s}(u)$ išraiskos. Prieš pateikiant vieną šio straipsnio rezultatų, pažymėkime

$$\gamma_\delta = \int_0^\infty h_\delta(x|0)dx \tag{1.19}$$

su

$$h_\delta(x|0) = \int_0^\infty e^{-\delta t}h_1(x, t|0)dt,$$

kur $h_1(x, t|0)$ yra kapitalo prieš bakrotą ir bankroto laiko tankio funkcija su pradiniu kapitalu lygiu nuliui. Taip pat tegul $X_{\lambda,j}$ yra atsitiktinis dydis su Erlang funkcija $\tau_{\lambda,j}$ iš (1.16) lygybės.

Teiginys 1.1 *Sakykime Sparre Andersen modelyje žalos turi Cox'o pasiskirstymą su tankio funkcija iš (1.15) lygties. Tuomet funkcijos $\phi_{\omega,s}(u)$ Laplaso transformacija užrašoma tokia lygybe*

$$\tilde{\phi}_{\omega,s}(z) = \frac{\gamma_\delta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} \sum_{k=j}^{r_i} \xi_{\delta,s}(i,k)E\Big[\omega_1(X_{\lambda_i,k-j+1})\Big]\tilde{\tau}_{\lambda_i,j}(s+z)}{1 - \gamma_\delta \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^{r_i} \lambda_i \xi_{\delta,0}(i,j)\tilde{\tau}_{\lambda_i,j}(z)}, \tag{1.20}$$

čia

$$\xi_{\delta,s}(i,k) = \lambda_i^{-1}\int_0^\infty e^{-sx}\eta^*_{i,k}(x)\frac{h_\delta(x|0)}{\gamma_\delta}dx, \tag{1.21}$$

kur $\eta^*_{i,k}(x)$ ir γ_δ yra atitinkamai iš (1.17) ir (1.19) lygybių, o $\tilde{\tau}_{\lambda_i,j}(s)$ yra funkcijos $\tau_{\lambda,j}$ iš (1.16) lygybės Laplaso transformacija.

Pastebėkime, kad pažymėjus $A_{-i}(z) = \prod_{j=1, j\neq i}^n (\lambda_j + z)^{r_j}$ ir atlikus nesunkius pertvarkymus (1.20) lygybėje gauname

$$\tilde{\phi}_{\omega,s}(z) = \frac{\tilde{\alpha}_{\delta,s}(z)}{\tilde{\alpha}_\delta(z)}\prod_{i=1}^n\left(\frac{\lambda_i + z}{\lambda_i + s + z}\right)^{r_i}, \tag{1.22}$$

kur $\tilde{\alpha}_{\delta,s}(z)$ ir $\tilde{\alpha}_{\delta}(z)$ yra atitinkamai $r-1$ ir r laipsnių daugianariai, kurie apibrėžiami sekančiomis išraiškomis

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{\delta,s}(z) &= \gamma_\delta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}\sum_{k=j}^{r_i} \xi_{\delta,s}(i,k) E\Big[\omega_1(X_{i,k-j+1})\Big] \\ &\times (\lambda_i)^j(\lambda_i+s+z)^{r_i-j}A_{-i}(s+z)\end{aligned} \tag{1.23}$$

ir

$$\begin{aligned}\tilde{\alpha}_{\delta}(z) &= \prod_{i=1}^{n}(\lambda_i+z)^{r_i} \\ &- \gamma_\delta \sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i} \xi_{\delta,0}(i,j)(\lambda_i)^{j+1}(\lambda_i+z)^{r_i-j}A_{-i}(z).\end{aligned} \tag{1.24}$$

Prieš formuluojant kitus Landriault ir Willmot [32] straipsnio rezultatus pateiksime Lundbergo lygties apibrėžimą. Nagrinėkime kapitalo procesą $\underline{U}=\{U(t),t\geq 0\}$ ir laiko momentus $\sigma_0=0$ ir $\sigma_k=\inf\{t>\sigma_{k-1}:U(t)<U(\sigma_{k-1})\}$. Kapitalą laiko momentu σ_k žymėsime $U_k=U(\sigma_k)$. Rizikos atstatymo modelyje dydžiai $V_k=U_k-U_{k-1}$, $(k=1,2,...)$ proceso $\underline{U}$ atžvilgiu yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Iš čia išplaukia, kad procesas $\left\{e^{-\delta\sigma_k-zU_k},k\in\mathbb{N}^+\right\}$ yra diskretaus laiko martingalas, jei

$$E\Big[e^{-\delta\sigma_1}e^{-zV_1}\Big]=1. \tag{1.25}$$

Ši lygybė yra glaudžiai susijusi su gerai žinomą Lundbergo lygtimi. Iš tikrųjų, rizikos modelyje atsitiktiniai vektoriai $\{(\theta_k,Y_k),\ k=1,2,...\}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę, o tai reiškia, kad

$$\begin{aligned}E\Big[e^{-\delta\sigma_1}e^{-zV_1}\Big] &= E\Big[E\Big[e^{-\delta\sigma_1}e^{-zV_1}\Big|N(\sigma_1)\Big]\Big] \\ &= P_{N(\sigma_1)}\left(E\Big[e^{-\delta\theta_1}e^{-z(Y_1-c\theta_1)}\Big]\right),\end{aligned} \tag{1.26}$$

kur $P_{N(\sigma_1)}(z)=E\Big[z^{N(\sigma_1)}\Big]$ yra a.d $N(\sigma_1)$ generojančioji funkcija. Iš (1.26) lygybės seka, kad (1.25) lygybė galioja tada ir tik tai tada, kai

$$E\Big[e^{-\delta\theta_1}e^{-z(Y_1-c\theta_1)}\Big]=1. \tag{1.27}$$

Literatūroje lygtis (1.25) yra vadinama Lundbergo lygtimi. Toliau laikysime, kad visi (1.27) lygties sprendiniai $\{R_i(\delta)\}_{i=1}^{r}$ yra skirtingi.

Landriault ir Willmot [32] straipsnyje parodyta, kad rizikos procese su bet kokiais tarplaikiais ir žalomis, turinčiomis Cox'o pasiskirstymą su tankiu iš (1.15) lygybės, Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija $\phi_{\omega,s}(u)$ užrašoma lygybe

$$\phi_{\omega,s}(u)=\sum_{k=1}^{r}\vartheta_{\delta,s}(k)(-R_k)e^{R_k u}+\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{r_i}\zeta_{\delta,s}(i,j)\tau_{s+\lambda_i,j}(u)$$

kur $\tau_{\lambda_i,j}(y)$ yra iš (1.16) lygybės,

$$\begin{aligned}\zeta_{\delta,s}(i,j) &= \frac{\left(\frac{1}{s+\lambda_i}\right)^j}{(r_i-j)!} \\ &\times \frac{d^{r_i-j}}{dz^{r_i-j}}\frac{\tilde{\beta}_{\delta,s}(z)}{\prod_{m=1}^{r}(z-R_m)\prod_{p=1,\,p\neq i}^{n}(\lambda_p+s+z)^{r_p}}\Bigg|_{z=-(\lambda_i+s)},\end{aligned}$$

$$\vartheta_{\delta,s}(k) = \frac{1}{-R_k} \frac{\tilde{\beta}_{\delta,s}(R_k)}{\prod_{m=1,\, m\neq k}^{r} (R_k - R_m) \prod_{p=1}^{n} (\lambda_p + s + R_k)^{r_p}}. \tag{1.28}$$

Šiose lygybėse dydis $\tilde{\beta}_{\delta,s}(z)$, kuris užrašomas tokia forma

$$\begin{aligned} \tilde{\beta}_{\delta,s}(z) &= \sum_{l=1}^{r} \frac{(-R_l)\tilde{\alpha}_{\delta,s}(R_l)}{\tilde{\alpha}_\delta(0)} \left(\prod_{m=1,m\neq l}^{r} \frac{(z-R_m)(-R_m)}{R_l - R_m} \right) \\ &\times \prod_{p=1}^{n} (\lambda_p + z)^{r_p}. \end{aligned} \tag{1.29}$$

yra $2r-1$ laipsnio daugianaris. $\{R_i(\delta)\}_{i=1}^r$ yra (1.25) Lunbergo lygties sprendiniai, o dydžiai $\tilde{\alpha}_{\delta,s}(z)$ ir $\tilde{\alpha}_\delta(z)$ yra iš (1.23) ir (1.24) lygybių.

Atskiru atveju, kai (1.18) lygybėje $s = 0$ turėsime

$$\phi_{\omega,0}(u) = \sum_{k=1}^{r} \vartheta_{\delta,0}(k)(-R_k)e^{R_k u},$$

kur $\vartheta_{\delta,0}$ yra apibrėžta (1.28) lygybėje su $s = 0$.

Sparre Andersen modelis taip pat buvo tyrinėjamas Willmot [56] darbe, kuriame buvo pristatyti kelį įdomūs rezultatai apie funkciją $\phi_\omega(u)$ iš (1.4) lygybės. Autorius parodė, kad ši funkcija tenkina defektyvią atstatymo lygti ir rado jos tikslią išraišką, žaloms iš siauriasnės skirstynių klasės, negu Landriault ir Willmot [32] darbe. Prieš formuluojant šios rezultatus, apibrėžkime kelis svarbius dydžius. Sakykime, kaip ir anksčiau, žalos $Y_1, Y_2, ...$ turi pasiskirstymo funkciją H ir tankio funkciją h. Tegul funkcija $p(x, y, t|0)$ yra sukaupto kapitalo prieš bankrotą $U(T-)$, kapitalos stokos bankroto metu $|U(t)|$ ir bankroto laiko T defektyvi tankio funkcija, kurią galima užrašyti taip

$$p(x, y, t|0) = h_x(y)p_1(x, t|0),$$

čia

$$h_x(y) = \frac{h(x+y)}{\overline{H}(x)},\ y > 0,$$

o $p_1(x, t|0)$ yra sukaupto kapitalo prieš bankrotą ir bankroto laiko defektyvi tankio funkcija, kai $U(0) = 0$. Tuomet diskontuotą tankį galima užrašyti taip

$$\int_0^\infty e^{-\delta t} p(x, y, t|0)dt = h_x(y)p_\delta(x|0),$$

kur

$$p_\delta(x|0) = \int_0^\infty e^{-\delta t} p_1(x, t|0)dt.$$

Ši funkcija gali būti interpretuota, kaip sukaupto kapitalo prieš bankrotą diskontuotas defektyvus marginalus tankis.

Willmot [56] savo straipsnyje gavo kelis fundamentalius rezultatus apie Gerber-Shiu diskontuotą baudos funkciją $\phi_\omega(u)$. Jie įrodė teoremą, kurioje parodė, kad ši funkcija tenkina defektyvią atstatymo lygtį.

Teorema 1.2 *Tegul, žalos Sparre Andersen modelyje turi pasiskirstymo funkciją H ir tankio funkciją h. Tuomet funkcija $\phi_\omega(u)$ tenkina tokią defektyvią atstatymo lygtį*

$$\begin{aligned}\phi_\omega(u) &= \phi_\delta \int_0^u \phi_\omega(u-y) f_\delta(y)dy \\ &+ \int_u^\infty \int_0^\infty \omega(x+u, y-u) h_x(y) p_\delta(x|0)dxdy,\end{aligned}$$

čia

$$f_\delta(y) = \int_0^\infty h_x(y)\left(\frac{p_\delta(x|0)}{\gamma_\delta}\right)dx,$$

o γ_δ iš (1.19) lygybės.

Jeigu 1.2 teoremoje $\omega(x,y) = \omega_1(y)$, galima tyrinėti diskonruota baudos funkcija iš (1.18) lygybės su $s = 0$. Taigi, nagrinėjamu atveju funkcija

$$\phi_{\omega,0}(u) = E(e^{-\delta T}\omega(|U(T)|)\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u)$$

tenkina tokią atstatymo lygtį

$$\phi_{\omega,0}(u) = \gamma_\delta \int_0^u \phi_{\omega,0}(u-y) f_\delta(y)dy + \gamma_\delta \int_u^\infty \omega_1(u-y) f_\delta(y)dy.$$

Atskiru atveju, kai $\omega(x,y) \equiv 1$ gauname, kad

$$\phi_{\omega,0}(u) = E\{e^{-\delta T}\mathbf{I}(T < \infty)|U(0) = u\} = \phi(u)$$

ir funkcija $\phi(u)$ tenkina tokią atstatymo lygtį

$$\phi(u) = \gamma_\delta \int_0^u \phi(u-y) f_\delta(y)dy + \gamma_\delta \overline{F}_\delta(u),$$

kur $\overline{F}_\delta(u) = 1 - F_\delta(u) = \int_u^\infty f_\delta(y)dy$.

Pateikti rezultatai Willmot [56] darbe buvo pritaikyti, nagrinėjant atskirą atvejį, kai žalos turi eksponentinį pasiskirstymą, t.y. kai funkcija $H(y) = 1 - e^{-\beta y}$, $y \geq 0$. Buvo gautos jau anksčiau minėtų funkcijų $\phi_{\omega,s}(u)$ ir $\phi_{\omega,0}(u)$ išraiškos, t.y. buvo parodyta kad

$$\phi_{\omega,s}(u) = \frac{E\Big(\omega_1(Y)\Big)\tilde{k}\big(\delta + c(\beta+s)\big)}{s + \beta\tilde{k}\big(\delta + c(\beta+s)\big)}\left\{se^{-(\beta+s)u} + \gamma_\delta \beta e^{-\beta(1+\gamma_\delta)u}\right\}$$

ir

$$\phi_{\omega,0}(u) = E\Big(\omega_1(Y)\Big)\phi(u),$$

čia

$$E\Big(\omega_1(Y)\Big) = \beta\int_0^\infty \omega_1(y)e^{-\beta y}dy,$$

$$\phi(u) = \left(1 - \frac{R_\delta}{\beta}\right)e^{-R_\delta u}.$$

Dydis γ_δ yra iš (1.19) lygybės, o $R_\delta = \beta(1-\gamma_\delta)$ yra Lundbergo lygties

$$1 - \frac{R_\delta}{\alpha} = \tilde{k}(\delta + cR_\delta)$$

neneigiamas sprendinys. Funkcija $\tilde{k}$ yra atsitiktinio dydžio θ_1 tankio funkcijos Laplaso transfromacija.

1.4 Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija stacionariame rizikos modelyje

Willmot ir Dickson [58] analizavo Gerber-Shiu diskontuotą baudos funkciją stacionariame rizikos modelyje. Šiame modelyje, kaip ir anksčiau kapitalo procesas $U(t)$ aprašomas (1.1) lygybe, o $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ yra atstatymo skaičiuojamasis procesas iš (1.2) lygybės. Tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, ...$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Dydis θ_1 turi pasiskirstymo funkciją $K(t) = P(\theta_1 \leq t)$, tankio funkciją $k(t) = K'(t)$ ir baigtinį vidurkį $E\theta_1 = \int_0^\infty \overline{K}(t)dt < \infty$. Tarp stacionaraus rizikos proceso ir standartinio rizikos atstatymo proceso yra tik vienas esminis skirtumas, t.y. šiame procese laiko moment iki pirmos žalos tankio funkciją $\overline{K}(t)/E\theta_1$.

Toliau stacionariam procesui bankroto laikas bus žymimas T_e. Nagrinėsime Gerber-Shiu diskontuotą baudos funkciją

$$\phi_e(u) = E(e^{-\delta T_e}\omega(U(T_e-), |U(T_e)|)\mathbf{I}_{\{T_e<\infty\}}|U(0) = u).$$

Willmot ir Dickson [58] darbe funkcija $\phi_e(u)$ buvo išreikšta per funkciją $\phi_\omega(u)$ iš (1.4) lygybės. Šiuo atveju buvo įrodyta tokia teorema.

Teorema 1.3 *Stacionariame rizikos modelyje Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija $\phi_e(u)$ tenkina tokią lygtį*

$$\phi_e(u) = \frac{1}{1+\widehat{\theta}}\int_0^u \phi_\omega(u-t)dH_1(t) + q(u),$$

čia

$$q(u) = e^{-\frac{\delta}{c}u}\int_u^\infty e^{-\frac{\delta}{c}t}\left(\tau(t) - \frac{\delta}{c(1+\widehat{\theta})}\int_0^t m(t-y)dH_1(y)\right)dt$$

ir

$$\tau(u) = \frac{1}{(1+\widehat{\theta})EY_1}\int_u^\infty \omega(u, y-u)dH(y), \tag{1.30}$$

$$H_1(y) = \frac{\int_0^y \overline{H}(t)dt}{EY_1}.$$

Willmot ir Dickson [58] nagrinėjo atskirą šios teoremos atvejį su žalomis, turinčiomis eksponentinį pasiskirstymą su intensyvumu λ ir vidurkiu $E\theta_1 = 1/\lambda$. Nagrinėjamu atveju turime, kad $\phi_e(u) = \phi_\omega(u)$. Taigi,

$$\phi_e(u) = \phi\int_0^u \phi_e(u-t)dB(t) + e^{\rho u}\int_u^\infty e^{-\rho t}\tau(t)dt, \tag{1.31}$$

čia $\tau(u)$ yra iš (1.30) lygybės ir

$$\overline{B}(x) = 1 - B(t) = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho t}\overline{H}(x+t)dt}{\int_0^\infty e^{-\rho t}\overline{H}(t)dt}.$$

Aišku, kad (1.31) lygtis yra stacionaraus modelio Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos $\phi_e(u)$ defektyvi atstatymo lygtis.

1.5 Diskonutota baudos funkcija, kai žalos pasiskirstę pagal mišrų eksponentinį dėsnį

Drekic and Willmot [16] 2003 metais klasikiniame rizikos modelyje rado diskontuotos baudos funkcijos

$$\phi(u) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u)$$

išraišką, kai žalos yra pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį, t.y. kai $\bar{H}(y) = e^{-\mu y}$.(žr. [59], [20] ir [37]) Autoriai parodė, kad

$$\phi(u) = \varphi e^{-\mu u(1-\varphi)},$$

kur

$$\varphi = \frac{\mu}{(1+\widehat{\theta})(\mu+\rho)} \quad \text{ir} \quad \rho = \frac{\lambda+\delta-c\mu+\sqrt{(\lambda+\delta+c\mu)^2-4c\lambda\mu}}{2c}.$$

Šiame skyrelyje klasikiniame rizikos modelyje bus gauta Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos $\phi(u)$ išraiška, kai žalos $Y_1, Y_2, \ldots$ pasiskirstę pagal mišrų eksponentinį dėsnį, t.y. bus išnagrinėtas atvejis, kai su visais $y \geq 0$

$$P(Y_1 \leq y) = H(y) = \alpha(1-e^{-\sigma y}) + (1-\alpha)(1-e^{-\nu y}), \tag{1.32}$$

kur $\nu, \sigma > 0,\ \ 0 \leq \alpha \leq 1$. Taip pat nagrinėjama funkcija bus pavaizduota grafiškai ir tuo pačiu bus parodyta funkcijos priklausomybė nuo įvairių parametrų: nuo pradinio kapitalo u, palūkanų normos δ, saugos koeficiento $\widehat{\theta}$, Puasono proceso intensyvumo λ ir nuo žalų pasiskirstymo parametrų σ, ν, α.

Teorema 1.4 *Sakykime žalos $Y_1, Y_2, \ldots$ klasikiniame rizikos modelyje turi pasiskirstymo funkciją H(y) apibrėžtą (1.32) lygybe. Tegul $\lambda > 0$ yra homogeninio Puasono proceso intensyvumas, o $\widehat{\theta} > 0$ yra saugos koeficientas. Tuomet*

$$\begin{aligned}
\phi(u) &= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(1-\phi)\phi^n}{(a+b)^n}\Bigg[b^n e^{-\nu u}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(u\nu)^j}{j!} + a^n e^{-\sigma u}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(u\sigma)^j}{j!} \\
&+ \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(a\sigma)^k(b\nu)^{n-k}\left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\mathcal{V}_1\right. \\
&+ \left.\left.\frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\mathcal{V}_2\right)\right],
\end{aligned} \tag{1.33}$$

čia

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_1 &= \frac{e^{-\sigma u}}{(n-k-1)!}\sum_{i=0}^{k-1}\left(\binom{k-1}{i}\frac{(n-k+i-1)!(\sigma-\nu)^{k-n-i}}{\sigma^{k-i}}\right. \\
&\times \left.\sum_{j=0}^{k-1-i}\frac{(u\sigma)^j(k-1-i)!}{j!}\right),
\end{aligned} \tag{1.34}$$

$$\begin{aligned}
\mathcal{V}_2 &= \frac{e^{-\nu u}}{(k-1)!}\sum_{i=0}^{n-k-1}\left(\binom{n-k-1}{i}\frac{(i+k-1)!(\nu-\sigma)^{-i-k}}{\nu^{n-k-i}}\right. \\
&\times \left.\sum_{j=0}^{n-k-1-i}\frac{(u\nu)^j(n-k-1-i)!}{j!}\right),
\end{aligned} \tag{1.35}$$

$$
\begin{aligned}
a =&\alpha(\rho-\nu), \quad b=(1-\alpha)(\rho-\sigma),\\
\phi =&\frac{\sigma\nu(\alpha\nu+(1-\alpha)\sigma+\rho)}{(1+\widehat{\theta})(\alpha\nu+\sigma(1-\alpha))(\rho+\sigma)(\rho+\nu)},\\
\rho =&\frac{1}{6}\sqrt[3]{E+12\sqrt{F}}-\frac{2C-\frac{2}{3}B^2}{\sqrt[3]{E+12\sqrt{F}}}-\frac{B}{3},\\
E =&36BC-108D-8B^3,\\
F =&12C^2-3B^2C^2-54BCD+81D^2+12B^3D,\\
B =&(\nu+\sigma)-\frac{\lambda+\delta}{c},\\
C =&\nu\sigma-\frac{(\lambda+\delta)(\sigma+\nu)}{c}+\frac{\lambda}{c}(\alpha\sigma+(1-\alpha)\nu),\\
D =&-\frac{\delta\nu\sigma}{c},\\
c =&\frac{\lambda(\alpha\nu+(1-\alpha)\sigma)}{\nu\sigma}(1+\widehat{\theta}).
\end{aligned}
$$

Įrodymas. Taikant lygybę (1.9) (žr. 1.2 poskyrį) bus įrodyta (1.33) lygybė. Tegu

$$\bar{H}(y)=1-H(y)=\alpha e^{-\sigma y}+(1-\alpha)e^{-\nu y}, \quad y\geq 0.$$

Žalos Y_1 vidurkis yra

$$EY_1=\frac{\alpha}{\sigma}+\frac{1-\alpha}{\nu}=\frac{\alpha\nu+(1-\alpha)\sigma}{\sigma\nu}.$$

(1.33) lygybės įrodymas bus iškaidytas į tris dalis.

I. Iš pradžių rasime dydį ϕ. Iš (1.11) turime

$$
\begin{aligned}
\phi &= \frac{\sigma\nu}{(1+\theta)(\alpha\nu+(1-\alpha)\sigma)}\int_0^\infty e^{-\rho y}(\alpha e^{-\sigma y}+(1-\alpha)e^{-\nu y})dy\\
&= \frac{\sigma\nu(\alpha\nu+(1-\alpha)\sigma+\rho)}{(1+\theta)(\alpha\nu+\sigma(1-\alpha))(\rho+\sigma)(\rho+\nu)}, \qquad (1.36)
\end{aligned}
$$

kur ρ yra neneigiamas Lundbergo lygties

$$\frac{\lambda\alpha\sigma}{\rho+\sigma}+\frac{\lambda(1-\alpha)\nu}{\rho+\nu}=\lambda+\delta-c\rho \qquad (1.37)$$

sprendinys. Čia

$$c=\frac{\lambda(\alpha\nu+(1-\alpha)\sigma)}{\nu\sigma}(1+\theta).$$

Lygtis (1.37) yra ekvivalenti tokiai lygčiai

$$c\rho^3-(\lambda+\delta-c(\nu+\sigma))\rho^2+(\lambda(\alpha\sigma+(1-\alpha)\nu)-(\lambda+\delta)(\sigma+\nu)+c\nu\sigma)\rho-\delta\nu\sigma=0.$$

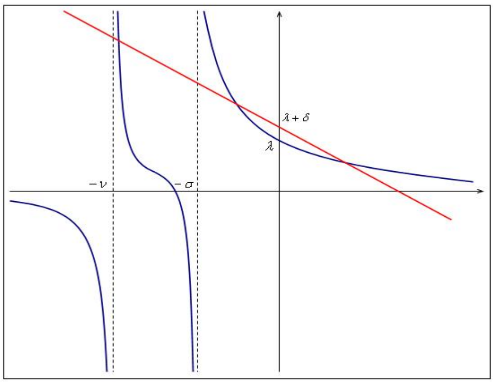
Tegul

$$
\begin{aligned}
B =&(\nu+\sigma)-\frac{\lambda+\delta}{c}, \quad D=-\delta\nu\sigma,\\
C =&\nu\sigma-\frac{(\lambda+\delta)(\sigma+\nu)}{c}+\frac{\lambda}{c}(\alpha\sigma+(1-\alpha)\nu).
\end{aligned}
$$

Taigi, gauname

$$\rho^3 + B\rho^2 + C\rho + D = 0. \tag{1.38}$$

Iš grafiko (pav. 1) matosi, kad (1.37) lygtis turi vienintelį neneigimą šaknį



Pav.1. Lygties (1.37) sprendiniai.

Taigi (1.38) lygtis taip pat turi vienintelį neneigiamą šaknį:

$$\rho = \frac{1}{6}\sqrt[3]{E + 12\sqrt{F}} - \frac{2C - \frac{2}{3}B^2}{\sqrt[3]{E + 12\sqrt{F}}} - \frac{B}{3},$$

kur

$$E = 36BC - 108D - 8B^3,$$
$$F = 12C^2 - 3B^2C^2 - 54BCD + 81D^2 + 12B^3D.$$

II. Dabar rasime pasiskirtstymo funkciją $F(u)$. Pritaikius (1.10) gauname

$$\bar{F}(u) = \frac{\alpha(\rho + \nu)e^{-\sigma u} + (1-\alpha)(\rho + \sigma)e^{-\nu u}}{\alpha(\rho + \nu) + (1-\alpha)(\rho + \sigma)}.$$

Tegul

$$a = \alpha(\rho + \nu), \quad b = (1-\alpha)(\rho + \sigma).$$

Tuomet pasiskirstymo funkcijos F uodega galima užrašyti taip

$$\bar{F}(u) = \frac{ae^{-\sigma u} + be^{-\nu u}}{a+b},$$

Iš čia gauname, kad

$$F(u) = \frac{a(1 - e^{-\sigma u}) + b(1 - e^{-\nu u})}{a+b}.$$

III. Šioje dalyje bus gauta $\bar{F}^{*n}(u)$ išraišką. Nagrinėjamu atveju pasiskirstymo funkcijos $F(u)$ tankis

$$p(u) = F'(u) = \frac{a\sigma e^{-\sigma u} + b\nu e^{-\nu u}}{a+b},$$

ir charakteristinė funkcija

$$\varphi(t) = \int_0^\infty e^{itu} p(u) du = \frac{1}{a+b}\left(\frac{a\sigma}{\sigma - it} + \frac{b\nu}{\nu - it}\right).$$

Tuomet pasiskirstymo funkcijų sąsūkos $F^{*n}(u)$ charakteristinė funkcija yra

$$\begin{aligned} \hat{\varphi}(t) &= \frac{1}{(a+b)^n}\left(\frac{a\sigma}{\sigma - it} + \frac{b\nu}{\nu - it}\right)^n \\ &= \frac{1}{(a+b)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{a\sigma}{\sigma - it}\right)^k\left(\frac{b\nu}{\nu - it}\right)^{n-k}. \end{aligned} \tag{1.39}$$

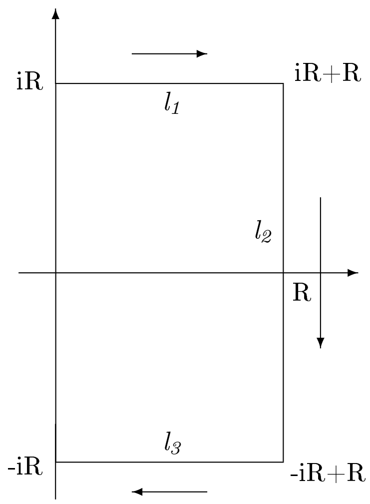
Pritaikius apvertimo formulę (1.39) lygčiai, gauname, kad pasiskirstymo funkcijų sąsūkos $F^{*n}(u)$ tankis

$$\begin{aligned} \hat{p}(u) &= \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty} e^{-itu}\hat{\varphi}(t) dt \qquad (1.40) \\ &= \frac{1}{(a+b)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(a\sigma)^k (b\nu)^{n-k}\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itu}}{(\sigma - it)^k(\nu - it)^{n-k}} dt. \end{aligned}$$

Tam, kad gauti $\hat{p}(u)$ išraišką reikia paskaičiuoti tokį integralą

$$\mathcal{J} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{e^{-itu}}{(\sigma - it)^k(\nu - it)^{n-k}} dt = \frac{1}{2\pi i}\lim_{R\to\infty}\int_{\mathcal{L}_R}\frac{e^{-su}}{(\sigma - s)^k(\nu - s)^{n-k}} ds,$$

čia $\mathcal{L}_R = \{it : t \in [-R, R]\}$ yra integravimo kontūras. Prie integravimo kontūro $\mathcal{L}_R$ pridedame atkarpas l_1, l_2, l_3 ir gauname uždarą kontūrą γ_R (žr. pav. 2).



Pav.2. Uždaras kontūras γ_R.

Aišku, kad

$$\begin{aligned} \left|\int_{l_1}\frac{e^{-su} ds}{(s-\sigma)^k(s-\nu)^{n-k}}\right| &\leq \int_0^R \frac{e^{-uu} du}{\left(\sqrt{(u-\sigma)^2 + R^2}\right)^k\left(\sqrt{(u-\nu)^2 + R^2}\right)^{n-k}} \\ &< \frac{1}{R^n}\int_0^R e^{-uu} du < \frac{1}{uR^n}. \end{aligned}$$

Analogiškai gauname, kad

$$\left|\int_{l_3}\frac{e^{-su}}{(s-\sigma)^k(s-\nu)^{n-k}} ds\right| < \frac{1}{uR^n}$$

ir

$$\left| \int_{l_2} \frac{e^{-su}}{(s-\sigma)^k (s-\nu)^{n-k}} ds \right| < \frac{2e^{-Ru}}{R^{n-1}}.$$

Taigi, remiantis rezidiumų teorema, turime

$$\begin{aligned} \mathcal{J} &= \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-su}}{(\sigma-s)^k (\nu-s)^{n-k}} ds \\ &= ((-1)^{n+1} \left(\underset{s=\sigma}{Res} \frac{e^{-su}}{(s-\sigma)^k (s-\nu)^{n-k}} + \underset{s=\nu}{Res} \frac{e^{-su}}{(s-\sigma)^k (s-\nu)^{n-k}} \right). \end{aligned}$$

Pastebėkime, kad $s=\sigma$ yra k-tos eilės polius, o $s=\nu$ yra *(n-k)*-tos eilės polius. Todėl gauname, kad

$$\underset{s=\sigma}{Res} \frac{e^{-su}}{(s-\sigma)^k (s-\nu)^{n-k}} = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{s\to\sigma} \left(\frac{e^{-su}}{(s-\nu)^{n-k}} \right)^{(k-1)}$$

ir

$$\underset{s=\nu}{Res} \frac{e^{-su}}{(s-\sigma)^k (s-\nu)^{n-k}} = \frac{1}{(n-k-1)!} \lim_{s\to\nu} \left(\frac{e^{-su}}{(s-\sigma)^k} \right)^{(n-k-1)},$$

visiems $k = 1, ..., n-1$. Kadangi

$$(e^{-zu}(z-d)^{-m})^{(l)} = (-1)^l e^{-zu} \sum_{i=0}^{l} \binom{l}{i} u^{l-i} \frac{(m+i-1)!}{(m-1)!} (z-d)^{-(m+i)}$$

gauname, kad

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(k-1)!} \lim_{s\to\sigma} \left(\frac{e^{-su}}{(s-\nu)^{(n-k)}} \right)^{(k-1)} \\ &= \frac{(-1)^{k-1} e^{-\sigma u}}{(k-1)!} \sum_{i=0}^{k-1} \binom{k-1}{i} u^{k-1-i} \frac{(n-k+i-1)!}{(n-k-1)!} (\sigma-\nu)^{k-n-i} \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} &\frac{1}{(n-k-1)!} \lim_{s\to\nu} \left(\frac{e^{-su}}{(s-\sigma)^k} \right)^{(n-k-1)} \\ &= \frac{(-1)^{n-k-1} e^{-\nu u}}{(n-k-1)!} \sum_{i=0}^{n-k-1} \binom{n-k-1}{i} u^{n-k-1-i} \frac{(i+k-1)!}{(k-1)!} (\nu-\sigma)^{-i-k} \end{aligned}$$

visiems $k = 1, \ldots, n-1$. Jeigu $k=0$ turime

$$\begin{aligned} \frac{1}{2\pi i} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-su} ds}{(\nu-s)^n} &= (-1)^{n+1} \underset{s=\nu}{Res} \frac{e^{-su}}{(s-\nu)^n} \\ &= \lim_{s\to\nu} \frac{(-1)^{n+1}}{(n-1)!} (e^{-su})^{(n-1)} = \frac{e^{-\nu u} u^{n-1}}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Jei $k=n$, analogiškai bus

$$\frac{1}{2\pi} \lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} \frac{e^{-su} ds}{(\sigma-s)^n} = \frac{e^{-\sigma u} u^{n-1}}{(n-1)!}.$$

Taigi, remiantis gautomis lygybėmis ir (1.40) gauname

$$\begin{aligned}\hat{p}(u) &= \frac{1}{(a+b)^n}\Bigg[(b\nu)^n\frac{e^{-\nu u}u^{n-1}}{(n-1)!} + (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(a\sigma)^k(b\nu)^{n-k}\\ &\times \left(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\mathcal{U}_1 + \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\mathcal{U}_2\right) + (a\sigma)^n\frac{e^{-\sigma u}u^{n-1}}{(n-1)!}\Bigg],\end{aligned}$$

kur

$$\mathcal{U}_1 = e^{-\sigma u}\sum_{i=0}^{k-1}\binom{k-1}{i}u^{k-1-i}(\sigma-\nu)^{k-n-i}\frac{(n-k+i-1)!}{(n-k-1)!},$$

$$\mathcal{U}_2 = e^{-\nu u}\sum_{i=0}^{n-k-1}\binom{n-k-1}{i}u^{n-k-1-i}(\nu-\sigma)^{-i-k}\frac{(k+i-1)!}{(k-1)!}.$$

Todėl pasiskirstymo funkcijų sąsūkos $F^{*n}(u)$ uodegos išraiška yra

$$\begin{aligned}\bar{F}^{*n}(u) &= \int_u^\infty \hat{p}(y)dy = \frac{1}{(a+b)^n}\Bigg[\frac{(b\nu)^n}{(n-1)!}\int_u^\infty e^{-\nu y}y^{n-1}dy\\ &+ (-1)^{n+1}\sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(a\sigma)^k(b\nu)^{n-k}\Bigg(\frac{(-1)^{k-1}}{(k-1)!}\int_u^\infty \mathcal{U}_1 dy\\ &+ \frac{(-1)^{n-k-1}}{(n-k-1)!}\int_u^\infty \mathcal{U}_2 dy\Bigg) + \frac{(a\sigma)^n}{(n-1)!}\int_u^\infty e^{-\sigma u}u^{n-1}dy\Bigg].\end{aligned} \tag{1.41}$$

Pastebėkime, kad

$$\int_u^\infty e^{-\mu y}y^m dy = \frac{e^{-\mu u}}{\mu^{m+1}}\sum_{j=0}^{m}\frac{(u\mu)^j m!}{j!}.$$

Įstačius gautą išraišką į (1.41), gauname

$$\begin{aligned}\bar{F}^{*n}(u) &= \frac{1}{(a+b)^n}\Bigg[b^n e^{-\nu u}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(u\nu)^j}{j!} + \sum_{k=1}^{n-1}\binom{n}{k}(a\sigma)^k(b\nu)^{n-k}\\ &\times \left(\frac{(-1)^{n+k}}{(k-1)!}\mathcal{V}_1 + \frac{(-1)^k}{(n-k-1)!}\mathcal{V}_2\right)\\ &+ a^n e^{-\sigma u}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(u\sigma)^j}{j!}\Bigg],\end{aligned} \tag{1.42}$$

čia dydžiai $\mathcal{V}_1$ ir $\mathcal{V}_2$ yra apibrėžti (1.34) ir (1.35) lygybėse.

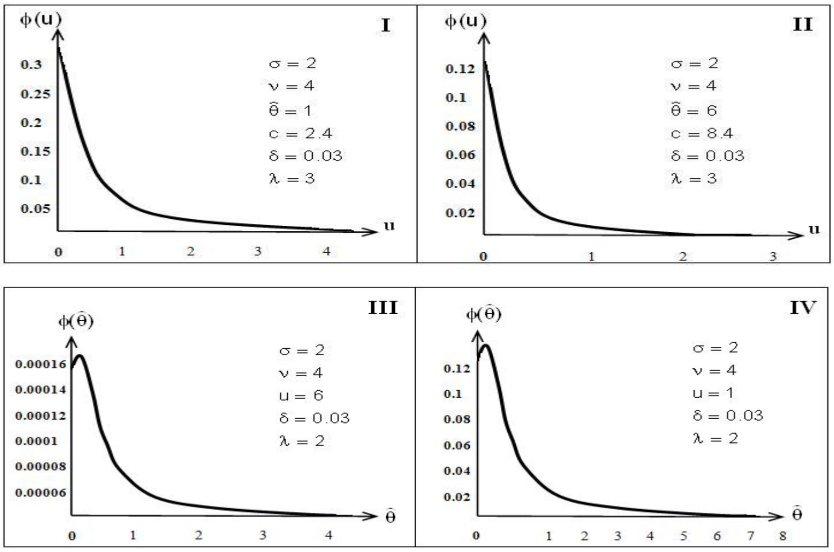
Taigi, diskontuotos baudos funkcijos $\phi(u)$ išraišką (1.33) gaunama iš (1.9) ir (1.42) lygybių.

Teorema įrodyta. □

Toliau pristatyti keli brėžiniai, kurie vaizduoja funkcijos $\phi(u)$ priklausomybę nuo pagrindinių parametrų: pradinio kapitalo u (grafikai: I, II), saugos koeficiento $\widehat{\theta}$ (grafikai: III, IV), intensyvumo λ (grafikai: V, VI), palūkanų galios δ (grafikai: VII, VIII) bei nuo žalų skirstinio parametrų α, σ, ν (grafikai: II, X, XI, XII).

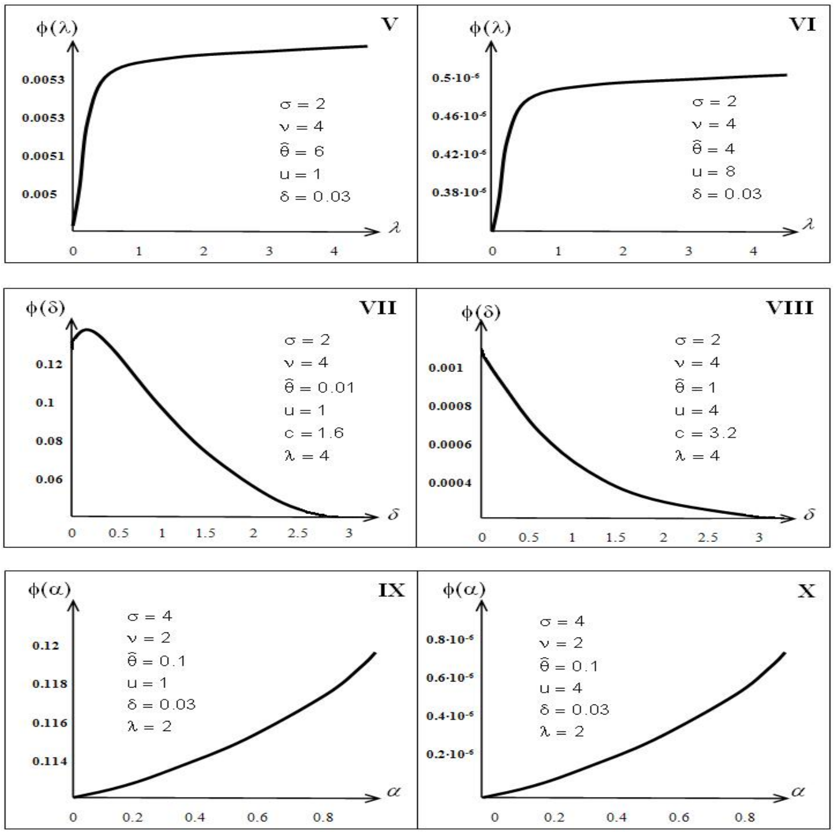
Pastebėkime, kad kintant pradiniam kapitalui u (grafikai: I, II), saugumo koeficientui $\widehat{\theta}$ (grafikai: III, IV), palūkanų galiai δ (grafikai: VII, VIII) bei parametrams ν, σ (grafikai: XI, XII) funkcija $\phi(\cdot)$

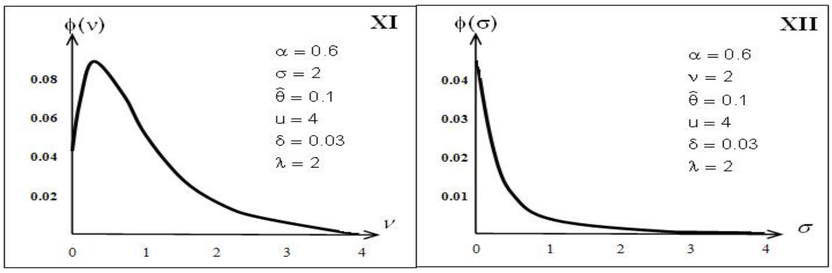
mažėja. Kai u ir θ reikšmės išlieka didelės (grafikai: II, III, VIII) aiškiai matosi, kad būsimo bankroto vertė yra mažesnė, negu kai u ir θ yra mažos (grafikai: I, IV, VII).



Pav. 3. Funkcijos $\phi(u)$ priklausomybė nuo parametrų u ir $\widehat{\theta}$

V ir VI grafikuose aiškiai matosi funkcijos $\phi(\cdot)$ didėjimas, kai intensyvumas λ auga. Be to, lyginant šiuos du grafikus, pastebėkime, kad busimo bankroto vertė yra daug mažesnė, kai pradinis kapitalas u didelis (grafikas VI). Panaši dinamika išlieka IX ir X grafikuose. Šiuo atveju, parametro α didėjimas lemia funkcijos $\phi(\cdot)$ augimą.





Pav.4. Funkcijos $\phi(u)$ priklausomybė nuo parametrų δ, α, σ, ν ir λ.

Išvados

Šiame skyriuje buvo tyrinėjama Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija klasikiniame rizikos modelyje su žalomis, turinčiomis mišrų eksponentinį pasiskirstymą. Nagrinėjamu atveju buvo gauta šios funkcijos išraiška, kurioje pagrindinio nario elgesys artimas eksponentiniam. Galima teigti, kad tokio pavidalo pagrindinis narys yra dėl žalų pasiskirstymo. Be to, diskontuotos baudos funkcijos eksponentinį elgesį galima pamatyti brėžiniuose, kuriose vaizduojama minėtos funkcijos priklausomybė nuo pradinio kapitalo, palūkanų galios, saugos koeficiento, Puasono proceso intensyvumo ir nuo žalų pasiskirstymo parametrų. Kadangi, nagrinėjama funkcija priklauso nuo įvairių parametrų, tai bet kurio parametro pasikeitimas gali įtakoti funkcijos elgesį. Todėl tinkamai parinkus pradinį kapitalą, saugos koeficientą ir gerą kapitalo investavimo kryptį, draudimo bendrovė gali ateičiai numatyti savo veiklą.

2 Dydžių, susijusių su draudimo bendrovės veikla, analizė baigtiniame laiko intervale

Įvadas. Pagrindiniai dydžiai, susiję su draudimo bendrovės veikla ir kurie yra labiausiai nagrinėjami klasikinėje bankroto teorijoje, yra: bankroto laikas, bankroto tikimybė, draudiko sukauptas kapitalas prieš bankrotą, kapitalo stoka bankroto metu ir diskontuota baudos funkcija. Šie dydžiai yra išamiai nagrinėjami, taikant įvairius modelius. Reikėtų pridurti, kad daugelyse darbų šių dydžių tyrimas vyksta begalinėje laiko juostoje. Tačiau, draudimo įmones dažnai domina daugelio dydžių reikšmės baigtinėje laiko juostoje. Šiame skyriuje mes nagrinėsime bankroto laiko tankio funkciją ir pristatysime kelis svarbius rezultatus, kurie buvo gauti bagtiniame laiko intervale. Literatūroje tokių rezultatų nėra labai daug. Pavyzdžiui, yra gautos tik kelios bankroto laiko tikimybės formulės. Dickson ir Willmot [35] klasikiniame rizikos modelyje rado bankroto laiko tikimybės baigtinio laiko intervale išrašką žaloms, turinčioms mišrų begalinį Erlango pasiskirstymą. Kiti autoriai (žr. [60], [20], [16]) nagrinėja baigtinio laiko bankroto tikimybės egzistavimo problemas. Taip pat buvo tyrinėjama bankroto laiko tankio funkcija Sparre Andersen modelyje žaloms, turinčioms eksponentinį pasiskirstymą (žr. [13], [4]). Dickson rado bankroto laiko tankio funkcijos išraišką bei kapitalo deficitą bankroto metu klasikiniame rizikos modelyje, kai žalos turėjo Erlang(2) ir mišrų eksponentinį pasiskirstymus.

2.1 Bankroto laiko tankio funkcijos tyrimas baigtiniame laiko intervale Sparre Andersen modelyje

Nagrinėkime pradžioje Spare Andersen modelį (žr. 1 skyriaus įvadą), kuriame žalos $Y_1, Y_2, ...$ pasiskirtę eksponentiškai su tankio funkcija

$$h(x) = \alpha e^{-\alpha x},\ x > 0.$$

Nagrinėjamu atveju kapitalo procesas $U(t)$ ir skaičiuojamasis procesas $N(t)$ aprašomi lygybėmis (1.1) ir (1.2). Sakykime, tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, ...$ turi Erlang(n, β) pasiskirstymą, t.y.

$$P(\theta_1 \le t) = 1 - e^{-\beta t} \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(\beta t)^j}{j!},$$

kažkokiam $n \in N$ ir $\beta > 0$. Tegul ši pasiskirstymo funkcija turi tankio funkciją

$$p(t) = \frac{\beta^n t^{n-1} e^{-\beta t}}{(n-1)!}.$$

Nagrinėjamu atveju apsaugos koeficientas yra tokio pavidalo

$$\widehat{\theta} = \frac{c\alpha n}{\beta} - 1.$$

Jeigu T, kaip anksčiau, yra bankroto laikas, tai dydis

$$\psi(u) = P(T < \infty)$$

yra bankroto tikimybė, o

$$\psi(u,t) = P(T \le t)$$

yra baigtinio laiko bankroto tikimybė. Nesunku pastebėti (žr. pavyzdžiui Gerber ir Shiu [23]), kad funkciją $\phi(u) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0)=u)$ galima išreikšti pavydalu:

$$\phi(u) = \int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{\partial}{\partial t}\psi(u,t)dt. \tag{2.1}$$

Yra žinoma, kad Erlango tarplaikiams ir eksponentinėms žalomis funkcija $\phi(u)$ galima rasti iš išraiškos (žr. pavyzdžiui, [23], [16], [13])

$$\phi(u) = \Big(1-\frac{R}{\alpha}\Big)e^{-Ru},$$

kur R yra Lundbergo lygties

$$\left(\frac{\beta}{\beta+\delta+cR}\right)^n\frac{\alpha}{\alpha-R} = 1 \tag{2.2}$$

teigiamas sprendinys. Tuomet iš (2.1) turime, kad

$$\int_0^\infty e^{-\delta t}\frac{\partial}{\partial t}\psi(u,t)dt = \Big(1-\frac{R}{\alpha}\Big)e^{-Ru}. \tag{2.3}$$

Funkcija $\frac{\partial}{\partial t}\psi(u,t)$ ir yra bankroto laiko tankio funkcija, kurią galima rasti naudojant atvirkštinę Laplaso transformaciją δ atžvilgiu. Toliau žymėsime bankroto laiko tankio funkciją $\varpi(u,t)$.

Drekic ir Willmot [16] rado atvirkštinę Laplaso transformaciją (2.3) Erlang(1, β) tarplaikiams. Šiuo atveju vienintelis Lundbergo lygties sprendinys yra randamas iš lygybės (2.2)

$$1-\frac{R}{\alpha} = \frac{\beta+\delta+\alpha c-\sqrt{(\beta+\delta+\alpha c)^2-4\alpha\beta c}}{2\alpha c},$$

kur $0<R<\alpha$. Iš (2.3) galima rasti, kad bankroto laiko tankio funkcija užrašoma formule

$$\varpi(u,t) = \frac{e^{-\alpha u-(\alpha c+\beta)t}}{\alpha u t}\sum_{n=0}^\infty\frac{(n+1)}{n!}\big[u(\alpha\beta/c)^{1/2}\big]^{n+1}I_{n+1}\big((4\alpha\beta c)^{1/2}\big)t,$$

kur

$$I_k(y) = \sum_{i=0}^\infty\frac{(y/2)^{2i+k}}{i!(i+k)!}$$

yra modifikuota k-tos eilės Beselio funkcija.

Dickson ir kiti [13] Sparre Andersen modeliui su Erlang(n, β) tarplaikias ir eksponentinėmis žalomis parodė, kad

$$\begin{aligned}\varpi(u,t) &= \beta e^{-\alpha u-(\beta+\alpha c)t}\\ &\times \left[\frac{(\beta t)^{n-1}}{(n-1)!}{}_0F_n\left(1,1+\frac{1}{n},...,1+\frac{(n-1)}{n};\frac{\alpha(ct+u)(\beta t)^n}{n^n}\right)\right.\\ &- \left.\frac{\alpha cn(\beta t)^{2n}}{(2n!)\beta}{}_0F_n\left(2+\frac{1}{n},2+\frac{2}{n},...,2+\frac{n}{n};\frac{\alpha(ct+u)(\beta t)^n}{n^n}\right)\right],\end{aligned}$$

čia ${}_0F_n$ yra hipergeometrinė funkcija aprašoma lygybe

$${}_0F_n(C_1,C_2,...,C_n;Z) = \sum_{m=0}^\infty\frac{\Gamma(C_1)\Gamma(C_2)...\Gamma(C_n)}{\Gamma(C_1+m)\Gamma(C_2+m)...\Gamma(C_n+m)}\frac{Z^m}{m!}.$$

Sparre Andersen modelis su žalomis turinčiomis eksponentinį pasiskirstymą su parametru $\lambda > 0$ taip pat buvo analizuojamas Borovkov and Dickson [4] darbe. Šiuo atveju buvo laikoma, kad tarplaikiai θ_0 ir θ_1 turi atitinkamai tankio funkcijas $f_0(t)$ ir $f(t)$. Toliau suformuluosime šio straipsnio pagrindinį rezultatą.

Teorema 2.1 *Sparre Andersen modelyje su žalomis turinčiomis eksponentinį pasiskirstymą bankroto laiko tankis $\varpi(u,t)$ yra toks:*

$$\varpi(u,t) = e^{-\lambda(u+ct)}\left(f_0(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n (u+ct)^{n-1}}{n!}\Big[u(f^{*n} * f_0)(t) + c(f^{*n} * f_1)(t)\Big]\right),$$

čia $f_1(t) = tf_0(t)$, o f^{*n} yra funkcijos f sąsūka su pačia savimi. Atskiru atveju, kai $f_0 = f$ gauname

$$\varpi(u,t) = e^{-\lambda(u+ct)}\left(f(t) + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^n (u+ct)^{n-1}}{n!}\Big(u + \frac{ct}{n+1}\Big) f^{*(n+1)}(t)\right).$$

Šis rezultatas yra bendresnis už anksčiau nagrinėtą Dickson ir kitų [13] rezultatą, nes gauta bankroto laiko tankio funkcijos išraška yra bendresnio pavidalo.

2.2 Bankroto laiko tankio funkcijos ir bankroto tikimybės tyrimas baigtiniame laiko intervale klasikiniame rizikos modelyje

Dickson ir Willmot [14] savo darbe nagrinėjo klasikinį rizikos modelį, kuriame $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu λ. Nagrinėjamu atveju, žalos $Y_1, Y_2, ...$ turi pasiskirstymo funkciją $H(x) = P(Y_1 \leq x)$ ir tankio funkcija $h(x)$. Dickson ir Willmot [14] nagrinėjo Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkciją

$$\phi(u) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}),$$

čia T, kaip anksčiau yra bankroto laikas, o $\varpi(u,t)$ yra atsitiktinio dydžio T tankio funkcija. Nagrinėjamu atveju buvo parodyta, kad

$$\phi(u) = \frac{\lambda a}{c}\tilde{h}_1(\rho) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n \left(\frac{\lambda a}{c}\tilde{h}_1(\rho)G_\rho^{n*}(u) - G_\rho^{n*}(u)\right), \tag{2.4}$$

čia

$$G_\rho(x) = \int_0^x h_\rho(z)dz,$$

o G_ρ^{n*} yra funkcijos G_ρ sąsūka su pačia savimi. Be to funkcijos h_ρ bei h_1 apibrėžiamos

$$h_\rho(x) = \int_x^\infty e^{-\rho(y-x)}h(y)dy, \quad h_1(x) = \frac{\overline{H}(x)}{a},$$

o $\tilde{h}_1$ yra funkcijos h_1 Laplaso transformacija. Pagaliau koeficientas $\rho = \rho(\delta)$ yra Lundbergo lygties

$$\lambda\int_0^\infty e^{-\rho s}h(s)ds = \lambda + \delta - cs$$

neneigiamas sprendinys.

Dickson ir Willmot [14] rado atvirkštinę (2.4) lygties Laplaso transformaciją ρ atžvilgiu ir tokiu būdu gavo bankroto laiko T tankio funkcijos išraišką. Nagrinėjamu atveju teisinga tokia teorema.

Teorema 2.2 *Sakykime, klasikiniame rizikos modelyje žalos turi pasiskirstymo funkciją H ir tankio funkciją h. Be to, tegul λ yra homogeninio Puasono proceso intensyvumas. Tuomet yra teisinga bankroto laiko T tankio funkcijos formulė*

$$\varpi(u,t) = ce^{-\lambda t}\xi(u,ct) + \sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}t^{n-1}e^{-\lambda t}\int_0^{ct} yh^{n*}(ct-y)\xi(u,y)dy,$$

kurioje funkcija $\xi(u,t)$ apibrėžiama lygybe

$$\xi(u,t) = \frac{\lambda}{c}\overline{H}(t) + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{\lambda}{c}\right)^n\left(\frac{\lambda}{c}\int_0^t \overline{H}(x)b_n(u,t-x)dx - b_n(u,t)\right),$$

su

$$b_n(u,t) = \sum_{j=0}^{n-1}\binom{n}{j}\frac{(-1)^j}{\Gamma(n)}\int_0^u (u-x)^{n-1}H^{j*}(x)h^{(n-j)*}(t+u-x)dx.$$

Šios bendros formulės buvo taikytos atskiram atvejui, kai žalos turi mišrų Erlango pasiskirstymą, t.y. kai

$$h(x) = e^{-\beta x}\sum_{i=1}^{\infty} q_i\frac{\beta^i x^{i-1}}{(i-1)!}$$

ir

$$H(x) = 1 - e^{-\beta x}\sum_{k=0}^{\infty}\overline{Q}_k\frac{(\beta x)^k}{k!},$$

su

$$Q_k = 1 - \overline{Q}_k = \sum_{i=1}^{k} q_i$$

su $Q_0 = 0$. Nagrinėjamu atveju buvo gauta tokia baigtinio laiko bankroto tikimybės išraiška

$$\begin{aligned}\psi(u,t) &= \sum_{m=0}^{\infty}\frac{\tau_m(u)c^{m+1}}{(\lambda+c\beta)^{m+1}}E(m+1,(\lambda+c\beta)t)\\ &+ \sum_{m=2}^{\infty}\frac{c^m}{m!}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda^n}{n!}\frac{(m+n-1)!}{(\lambda+c\beta)^{m+n}}E(m+n,(\lambda+c\beta)t)\\ &\times \sum_{i=1}^{m-1} q_i^{n*}\beta^i(m-i)\tau_{m-i-1}(u),\end{aligned}$$

čia

$$E(n,x) = 1 - e^{-x}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{x^j}{j}, \quad n = 1,2,3,\dots,$$

$$\tau_m(u) = \frac{\lambda}{c}\overline{Q}_m\beta^m + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n,m}(u), \quad m = 1,2,3,\dots,$$

ir

$$a_{n,m}(u) = \frac{\lambda}{c}\sum_{k=0}^{m-1}\overline{Q}_k\beta^k\gamma_{n,m-k-1}(u) - \gamma_{n,m}(u), \quad m = 1,2,3,\dots. \tag{2.5}$$

Dysdis $\gamma_{n,m}(u)$ iš (2.5) išraiškos aprašomas tokia lygybe

$$\begin{aligned}\gamma_{n,m}(u) &= ne^{-\beta u}\sum_{j=0}^{n-1}\frac{(-1)^j}{j!(n-j)!}\sum_{i=0}^{\infty}q_{i+m+1}^{(n-j)*}\frac{(n+i-1)!}{i!}\\ &\times \sum_{k=0}^{\infty}Q_k^{j*}\beta^{i+m+k+1}\frac{u^{n+i+k}}{(n+i+k)!}.\end{aligned}$$

Pagaliau, koeficientai $\{q_i^{j*}\}_{i=1}^{\infty}$ yra gaunami iš sąryšio

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}q_iz^i\right)^j=\sum_{i=1}^{\infty}q_i^{j*}z^i$$

su sąlyga, kad $q_i^{j*}=0$, kai $i<j$.

Garcia [20] taip pat nagrinėjo baigtinio laiko bankroto tikimybę klasikiniame rizikos modelyje, kuriame $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ yra homogeninis Puasono procesas su parametru λ, o žalos $Y_1, Y_2, ...$ pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su parametru α. Darbe buvo gauta išlikimo tikimybės baigtiniame laiko intervale $\sigma(u,t)=1-\psi(u,t)$ išraiška

$$\begin{aligned}\sigma(u,t) &= 1+\frac{e^{-[(\lambda+c\alpha)t+\alpha u]}}{\alpha}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u+ct)^k(\lambda\alpha t)^{k+1}}{k!(k+1)!}\\ &- \frac{e^{-[(\lambda+c\alpha)t+\alpha u]}}{\alpha}\sum_{j=0}^{\infty}\left[\left(\frac{c}{\lambda}\right)^j+\left(\frac{1}{\alpha}\right)^j\right]\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(u+ct)^k(\lambda\alpha t)^{j+k+1}}{k!(j+k+1)!}.\end{aligned}$$

Aišku, kad iš šios lygybės yra lengvai gaunama bankroto tikimybė $\psi(u,t)$.

2.3 Baigtinio laiko bankroto tikimybė diskrečiame rizikos modelyje

Dabar panagrinėkime diskretaus laiko rizikos modelį. Jame draudiko kapitalas $U(n)$ kiekvienam $n\in N$ užrašomas tokia lygtimi:

$$U(n)=u+cn-\sum_{i=1}^{n}Y_i,\ n=1,2,...,$$

čia u, kaip ir anksčiau, pradinis kapitalas ir $c>0$ premijų intensyvumas, o žalos $Y_1, Y_2, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Aišku, kad šiame modelyje bankrotas gali įvykti tik laiko momentais $n=1,2,\ldots$.

Sakykime, žalos aukščiau apibrėžtame modelyje turi eksponentinį pasiskirstymą su tankio funkcija $h(x)=\alpha e^{-\alpha x}$. Be to laikysime, kad tenkinama gryno pelno sąlyga

$$c=\frac{(1+\widehat{\theta})}{\alpha},\quad \widehat{\theta}>0.$$

Tuomet dydis

$$\phi_n(u)=P\Big[U(1)\geq 0, U(2)\geq 0, ..., U(n)\geq 0|U(0)=u\Big]$$

yra išlikimo tikimybė. Dydis

$$\psi_n(u)=1-\phi_n(u) \tag{2.6}$$

yra diskretaus modelio bankroto tikimybė laikotarpyje $[0, n]$. Nesunku pastebėti, kad $\phi_n(u)$ gali būti išreikšta lygybe

$$\phi_n(u) = P\Big[Y_1 \leq u + c, Y_1 + Y_2 \leq u + 2c, ..., Y_1 + T_2 + ... + Y_n \leq u + nc\Big]$$

Be to,

$$\phi_1(u) = P\Big[Y_1 \leq u + c\Big] = H(u + c), \tag{2.7}$$

kur $H(x) = 1 - e^{-\alpha x}$ yra dydžio Y_1 pasiskirstymo funkcija. Nagrinėjamu atveju, gauname tokį rekursivinį sąryšį

$$\phi_n(u) = \int_0^{u+c} \phi_{n-1}(u + c - x)h(x)dx. \tag{2.8}$$

Iš (2.6), (2.7) ir (2.8) lygybių, gauname:

$$\psi_1(u) = P(Y_1 > u + c) = 1 - H(u + c), \tag{2.9}$$

$$\psi_n(u) = 1 - H(u + c) + \int_0^{u+c} \psi_{n-1}(x)h(u + c - x)dx, \quad n = 2, 3, ... \tag{2.10}$$

Chan ir Zhang [5] pritaikė (2.9) ir (2.10) formules ir gavo tikslią diskretaus modelio bankroto laiko $\psi_n(u)$ rekursinę formulę

$$\begin{aligned} \psi_n(u) &= \psi_{n-1}(u) + \frac{\big(\alpha c_n(u)\big)^{n-1}}{(n-1)!} e^{\alpha c_n(u)} \frac{c_1(u)}{c_n(u)} \\ &= \sum_{k=1}^{n} \frac{\big(\alpha c_k(u)\big)^{k-1}}{(k-1)!} e^{\alpha c_k(u)} \frac{c_1(u)}{c_k(u)}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

čia $c_n(u) = u + nc$.

Autoriai savo darbe taip pat nagrinėjo diskretų modelį, kuriame draudiko kapitalo procesas

$$R(n) = u + n - \sum_{i=1}^{n} Y_i, \ n = 1, 2, \dots .$$

Žalos $Y_1, Y_2, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę diskretūs dydžiai, įgyjantys reikšmes iš $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, ...\}$, $u \in \mathbb{N}$ su tikimybe $p_i = P(Y_1 = k)$, $k = 0, 1, 2, ...$ Nesunku pastebėti, kad nagrinėjamame modelyje premijų intensyvumas $c = 1$, todėl gryno pelno sąlyga $EY_1 < 1$. Tai reiškia, kad įmokų surenkama daugiau, negu vidutiniškai ateina žalų. Tegul

$$\tau(u) = \min\big(n \geq 1 : R(n) < 0\big),$$

yra bankroto laikas. Tuomet bankroto tikimybė užrašoma tokia lygybe

$$\psi(u) = P\big(\tau(u) < \infty | R(0) = u\big).$$

Galima nagrinėti atskirą pateikto modelio atvėjį, kai žalos turi geometrinį pasiskirstymą su tikimybėmis

$$p_k = P(Y_1 = k) = pq^k, \quad k = 0, 1, 2, ...,$$

kur $p+q=1$, $0<p<1$ ir $EY_1 = q/p$. Pritaikę analogišką skaičiavimo techniką, kaip ir eksponentiniu žalų atveju (žr. (2.9) ir (2.10)) gauname, kad

$$\psi_1(u) = P(Y_1 > u+1) = 1 - P(u+1) = q^{u+2}$$

ir

$$\begin{aligned}\psi_n(u) &= 1 - P(u+1) + \sum_{j=0}^{u+1} \psi_{n-1}(u+1-j)p_j \\ &= q^{u+2} + \sum_{j=0}^{u+1} \psi_{n-1}(j)p_{u+1-j}.\end{aligned}$$

Remiantis visomis aukščiau išvardintomis sąlygomis Chan ir Zhang [5] aprašytam diskrečiam modeliui su žalomis, turinčiomis geometrinį pasiskirstymą gavo rekursinę bankroto tikimybės formulę. Jie parodė, kad

$$\psi_{n+1}(u) = \psi_n(u) + h_{n+1}(u), \quad n \geq 2$$

kur

$$h_{n+1}(u) = p^n q^{(d(u)+n)} \frac{d(u)\left[d(u)+(n+1)\right]\left[d(u)+(n+2)\right]\left[d(u)+(2n-1)\right]}{n!},$$

su $d(u) = u+2$. Nesunku pastebėti, kad ši funkcijos $\psi_n(u)$ rekursinė formulė yra (2.11) formulės analogas.

Gautos baigtinio laiko bankroto tikimybės rekursinės formulės turi paprastas išraiškas, jas yra lengva nagrinėti ir taikyti. Be to, šie rezultatai gali būti naudingi nagrinėjant atitinkamas problemas tolydaus laiko modeliuose.

2.4 Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija baigtiniame laiko intervale

Šiame skyrelyje nagrinėsime klasikinį rizikos modelį, kuriame procesas $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu $\lambda > 0$ iš (1.2) lygybės ir kapitalo procesas $U(t)$ yra iš (1.1) lygybės. Tegul, kaip ir anksčiau žalos $Y_1, Y_2, ...$ teigiami nepriklausomi vienadai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija $H(y)$ ir tenkinama gryno pelno sąlyga $c = \lambda EY_1(1+\widehat{\theta})$ su $\widehat{\theta} > 0$. Laikysime, kad nagrinėjamame modelyje laiko momentas T apibrėžtas (1.3) sąryšiu yra bankroto laikas, kurio tankio funkciją žymėsime $f(t)$. Be to yra žinoma, kad bankroto laiko T Laplaso transformacija $\tilde{f}(\delta) = \int_0^\infty e^{-\delta t} f(t)dt$ siejama su Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija, o tiksliau

$$\tilde{f}(\delta) = \phi(u) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0)=u).$$

Šiuo atveju $\tilde{f}(\delta)$ galima išreikšti per sudėtinio geometrinio pasiskirstymo uodegą, t.y. (žr. [59])

$$\tilde{f}(\delta) = \sum_{n=1}^{\infty} (1-\phi)\phi^n \bar{F}^{*n}(u) \tag{2.12}$$

kur

$$\bar{F}(u) = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{H}(u+y)dy}{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{H}(y)dy},$$

$$\phi = \frac{\int_0^\infty e^{-\rho y}\bar{H}(y)dy}{(1+\widehat{\theta})EY_1},$$

o ρ yra vienintelis neneigiamas Lundbergo lygties sprendinys

$$\lambda \int_0^\infty e^{-\rho y} H(y)dy = \lambda + \delta - c\rho.$$

Atskiru atveju, kai žalos turi eksponentinį pasiskirstymą, t.y. kai $\overline{H}(x) = e^{-\mu x}$ turėsime, kad $\overline{H}(x) = \overline{F}(x)$. Šiuo atveju (2.12) užrašoma paprasčiau (žr. [59])

$$\tilde{f}(\delta) = \phi e^{-\mu(1-\phi)u}, \tag{2.13}$$

kur

$$\phi = \frac{\mu}{(\mu+\rho)(1+\widehat{\theta})}$$

$$\rho = \frac{\lambda+\delta-c\mu+\sqrt{(\lambda+\delta-c\mu)^2+4\delta c\mu}}{2c},$$

arba

$$\rho = \frac{\lambda+\delta-c\mu+\sqrt{(\lambda+\delta-c\mu)^2-4\delta c\mu}}{2c}.$$

Drekic ir Willmot [6] klasikiniame rizikos modelyje su eksponentinėmis žalomis su parametru μ, pritaikę atvirkštinę Laplaso transformaciją (2.13) lygybei, gavo bankroto momento T tankio funkcijos išraišką

$$\begin{aligned} f(t) &= \frac{e^{-\mu u}e^{-\lambda(2+\widehat{\theta})t}}{t\sqrt{1+\widehat{\theta}}} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(\mu u^n)}{n!(\sqrt{1+\widehat{\theta}})^n} \\ &\times I_{n+1}(2\lambda t\sqrt{1+\widehat{\theta}}), \end{aligned} \tag{2.14}$$

kur

$$I_p(y) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(y/2)^{2k+p}}{k!(k+p)!} \tag{2.15}$$

yra modifikuota p-tos eilės Beselio funkcija.

Pasinaudoję pateiktais rezultatais, galima resti Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos išraišką baigtiniame laiko intervale bet kuriems δ ir t reikšmėms, t.y.

$$\phi(u,t) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<t\}}), \quad \delta \geq 0, \quad t > 0.$$

Analogiškai galima gauti diskontuotų momentų išraišką baigtiniame laiko intervale

$$\phi_m(u,t) = E(T^m e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<t\}}), \quad m = 1,2,..., \quad t > 0, \quad \delta \geq 0$$

ir Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkciją intervale $[t_1, t_2]$:

$$\gamma(u,t_1,t_2) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{t_1<T<t_2\}}), \quad \delta \geq 0, \quad t_1,\, t_2 > 0.$$

Toliau suformuluosime pagrindinę šio skyrelio teoremą.

Teorema 2.3 *Sakykime, klasikiniame rizikos modelyje žalos $Y_1, Y_2, ...$ turi eksponentinį pasiskirstymą su parametru μ. Be to, tegul λ yra Puasono proceso parametras ir $c = \lambda EY_1(1+\widehat{\theta})$. Sakykime $\nu = \delta + \lambda(2+\widehat{\theta})$ ir $\kappa = \lambda\sqrt{1+\widehat{\theta}}$. Tuomet teisingi sekantys tvirtinimai:*

(a) Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija baigtiniame laiko intervale tenkina tokią lygybę:

$$\begin{aligned}\phi(u,t) &= \phi e^{-(1-\phi)\mu u} - e^{-\nu t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^j}{j!}\Bigg(\phi e^{-(1-\phi)\mu u} - \frac{\lambda}{\nu}e^{-\mu u}\sum_{n=0}^{j-1}\frac{n+1}{n!}\left(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\right)^n \\ &\times \sum_{k=0}^{[\frac{j-n+1}{2}]-1}\frac{(2k+n)!}{k!(k+n+1)!}\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{2k}\Bigg),\end{aligned}$$

kur

$$\phi = \frac{\lambda(\nu - \sqrt{\nu^2 - 4\kappa^2})}{2\kappa^2}. \tag{2.16}$$

(b) Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija intervale $[t_1, t_2]$ yra

$$\begin{aligned}\gamma(u,t_1,t_2) &= \frac{\lambda}{\nu}e^{-\mu u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}\left(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{k!(k+n+1)!}\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{2k} \\ &\times \sum_{j=0}^{n+2k}\left(t_1^j e^{-\nu t_1} - t_2^j e^{-\nu t_2}\right).\end{aligned}$$

(c) Diskontuoti bankroto momentai baigtiniame laiko intervale tenkina sekančią lygybę

$$\begin{aligned}\phi_m(u,t) &= \frac{\nu^{m+1}}{\lambda}e^{\mu u}\phi_m(u)\frac{\lambda}{\nu^{m+1}}e^{-(\mu u+\nu t)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^j}{j!}\Bigg(\phi_m(u) - \sum_{n=0}^{j-1}\frac{n+1}{n!}\left(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\right)^n \\ &\times \sum_{k=0}^{[\frac{j-n+1}{2}]-1}\frac{(2k+n+m)!}{k!(k+n+1)!}\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{2k}\Bigg),\end{aligned}$$

kur

$$\begin{aligned}\phi_m(u) &= \frac{e^{-\frac{\mu\widehat{\theta}u}{1+\widehat{\theta}}}}{1+\widehat{\theta}}\frac{(m-1)!}{\lambda^m}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{\lambda u}{c}\right)^{m-1-i}\frac{(m-i+\frac{\lambda u}{c})}{(m-1-i)!} \\ &\times \sum_{l=0}^{i}\binom{m}{i-l}\binom{m+l-1}{l}\widehat{\theta}^{-m-l}.\end{aligned}$$

Įrodymas. Pradėsime teoremos įrodymą nuo (c) dalies.

(c) Remiantis (2.14) ir (2.15) turime, kad

$$\begin{aligned}\phi_m(u,t) &= E(T^m e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<t\}}) = \int_0^t x^m e^{-\delta x}f(x)dx = \frac{e^{-\mu u}}{\sqrt{1+\widehat{\theta}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(\mu u)^n}{n!(\sqrt{1+\widehat{\theta}})^n} \\ &\times \int_0^t x^{m-1}e^{-x(\delta+\lambda(2+\widehat{\theta}))}I_{n+1}(2\lambda u\sqrt{1+\widehat{\theta}})du,\end{aligned} \tag{2.17}$$

kur

$$I_{n+1}(2\lambda u\sqrt{1+\widehat{\theta}}) = \sum_{k=0}^{\infty}u^{2k+n+1}\frac{(\lambda\sqrt{1+\widehat{\theta}})^{2k+n+1}}{k!(k+n+1)!}. \tag{2.18}$$

Įstatę (2.18) į (2.17) gauname

$$\begin{aligned}\phi_m(u,t) &= \frac{e^{-\mu u}}{\sqrt{1+\widehat{\theta}}}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(\mu u)^n}{n!(\sqrt{1+\widehat{\theta}})^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\sqrt{1+\widehat{\theta}})^{2k+n+1}}{k!(k+n+1)!} \\ &\times \int_0^t e^{-x(\delta+\lambda(2+\widehat{\theta}))}x^{2k+n+m}dx.\end{aligned}$$

Kadangi $\nu=\delta+\lambda(2+\widehat{\theta})$, $\kappa=\lambda\sqrt{1+\widehat{\theta}}$ ir

$$\int_0^t e^{-\nu x}x^{2k+n+m}dx = \frac{(2k+n+m)!}{\nu^{2k+n+m+1}}\Big(1-e^{-\nu t}\sum_{j=0}^{2k+n+m}\frac{(\nu t)^j}{j!}\Big),$$

tai gauname tiklslią $\phi_m(u,t)$ išraišką

$$\begin{aligned}\phi_m(u,t) &= \frac{\lambda}{\nu^{m+1}}e^{-\mu u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}\Big(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\Big)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+n+m)!}{k!(k+n+1)!}\Big(\frac{\kappa}{\nu}\Big)^{2k}\\ &\times \Big(1-e^{-\nu t}\sum_{j=0}^{2k+n+m}\frac{(\nu t)^j}{j!}\Big).\end{aligned}\tag{2.19}$$

Pakeitę sumavimo eiliškumą (2.19) lygybėje turėsime

$$\begin{aligned}\phi_m(u,t) &= \frac{\lambda}{\nu^{m+1}}e^{-\mu u}\alpha(u)\frac{\lambda}{\nu^{m+1}}e^{-(\mu u+\nu t)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^j}{j!}\\ &\times \Big(\alpha(u)-\sum_{n=0}^{j-1}\frac{n+1}{n!}\Big(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\Big)^n\sum_{k=0}^{[\frac{j-n+1}{2}]-1}\frac{(2k+n+m)!}{k!(k+n+1)!}\\ &\times \Big(\frac{\kappa}{\nu}\Big)^{2k}\Big),\end{aligned}\tag{2.20}$$

kur

$$\alpha(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}\Big(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\Big)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+n+m)!}{k!(k+n+1)!}\Big(\frac{\kappa}{\nu}\Big)^{2k}.$$

Pastebėkime, kad

$$\begin{aligned}\phi_m(u) &= \lim_{t\to\infty}\phi_m(u,t)=\frac{\lambda}{\nu^{m+1}}e^{-\mu u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}\Big(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\Big)^n\\ &\times \sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+n+m)!}{k!(k+n+1)!}\Big(\frac{\kappa}{\nu}\Big)^{2k}.\end{aligned}$$

Kadangi (žr. Drekic ir Willmot, [16], (3.11) formulę)

$$\begin{aligned}\phi_m(u) &= \frac{e^{-\frac{\mu\widehat{\theta}u}{1+\widehat{\theta}}}}{1+\widehat{\theta}}\frac{(m-1)!}{\lambda^m}\sum_{i=0}^{m-1}\Big(\frac{\lambda u}{c}\Big)^{m-1-i}\frac{(m-i+\frac{\lambda u}{c})}{(m-1-i)!}\\ &\times \sum_{l=0}^{i}\binom{m}{i-l}\binom{m+l-1}{l}\widehat{\theta}^{-m-l},\end{aligned}$$

tai

$$\alpha(u)=\frac{\nu^{m+1}}{\lambda}e^{\mu u}\phi_m(u).\tag{2.21}$$

Įstatę (2.21) į (2.20) gauname, kad

$$\begin{aligned}\phi_m(u,t) &= \frac{\nu^{m+1}}{\lambda}e^{\mu u}\phi_m(u)\frac{\lambda}{\nu^{m+1}}e^{-(\mu u+\nu t)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^j}{j!}\\ &\times \Big(\phi_m(u)-\sum_{n=0}^{j-1}\frac{n+1}{n!}\Big(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\Big)^n\\ &\times \sum_{k=0}^{[\frac{j-n+1}{2}]-1}\frac{(2k+n+m)!}{k!(k+n+1)!}\Big(\frac{\kappa}{\nu}\Big)^{2k}\Big).\end{aligned}$$

(a) Akivaizdu, kad

$$\phi_0(u,t) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<t\}}) = \phi(u,t).$$

Jeigu lygybėje (2.19) paimsime $m = 0$ gausime Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos išraišką baigtiniame laiko intervale

$$\begin{aligned}\phi(u,t) &= \frac{\lambda}{\nu}e^{-\mu u}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}\left(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{k!(k+n+1)!}\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{2k}\\ &\times \left(1-e^{-\nu t}\sum_{j=0}^{2k+n}\frac{(\nu t)^j}{j!}\right).\end{aligned}$$

Analogiškai, kaip ir (c) dalyje, pakeitę sumavimo eiliškumą šioje lygybėje mes turėsime

$$\begin{aligned}\phi(u,t) &= \frac{\lambda}{\nu}e^{-\mu u}\beta(u)\frac{\lambda}{\nu}e^{-(\mu u+\nu t)}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^j}{j!} \qquad (2.22)\\ &\times \left(\beta(u)\sum_{n=0}^{j-1}\sum_{k=0}^{\left[\frac{j-n+1}{2}\right]-1}\frac{(2k+n)!}{k!(k+n+1)!}\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{2k}\right),\end{aligned}$$

kur

$$\beta(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}\left(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{k!(k+n+1)!}\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{2k}.$$

Kadangi

$$\phi(u) = \lim_{t\to\infty}\phi(u,t) = \frac{\lambda}{\nu}e^{-\mu u}\beta(u)$$

ir (žr. Willmot ir Lin, [59],(4.1.12) lygybė)

$$\phi(u) = \phi e^{-\mu(1-\phi)u},$$

tai

$$\beta(u) = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)}{n!}\left(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\right)^n\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(2k+n)!}{k!(k+n+1)!}\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{2k} = \frac{\phi\nu}{\lambda}e^{\mu\phi u}, \qquad (2.23)$$

su dydžiu ϕ iš (2.16) lygybės.

Įstatę (2.23) į (2.22) gauname galutinę Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos išraišką

$$\begin{aligned}\phi(u,t) &= \phi e^{-(1-\phi)\mu u} - e^{-\nu t}\sum_{j=0}^{\infty}\frac{(\nu t)^j}{j!}\left(\phi e^{-(1-\phi)\mu u} - \frac{\lambda}{\nu}e^{-\mu u}\sum_{n=0}^{j-1}\frac{n+1}{n!}\left(\frac{\mu\lambda u}{\nu}\right)^n\right.\\ &\times \left.\sum_{k=0}^{\left[\frac{j-n+1}{2}\right]-1}\frac{(2k+n)!}{k!(k+n+1)!}\left(\frac{\kappa}{\nu}\right)^{2k}\right).\end{aligned}$$

(b) Remiantis (2.14) ir (2.15) turime, kad

$$\begin{aligned}\gamma(u,t_1,t_2) &= E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{t_1<T_x<t_2\}}) = \int_{t_1}^{t_2}e^{-\delta x}f(x)dx \qquad (2.24)\\ &= \frac{e^{-\mu x}}{\kappa}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n+1)(\mu u)^n}{n!(\kappa)^n}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(\lambda\kappa)^{2k+n+1}}{k!(k+n+1)!}\\ &\times \int_{t_1}^{t_2}e^{-x\nu}x^{2k+n}dx.\end{aligned}$$

Kadangi

$$\int_{t_1}^{t_2} e^{-\nu x^{2k+n}} dx = -\frac{(2k+n)!}{\nu^{2k+n+1}} \sum_{j=0}^{2k+n} \Big(t_2^j e^{-\nu t_2} - t_1^j e^{-\nu t_1} \Big),$$

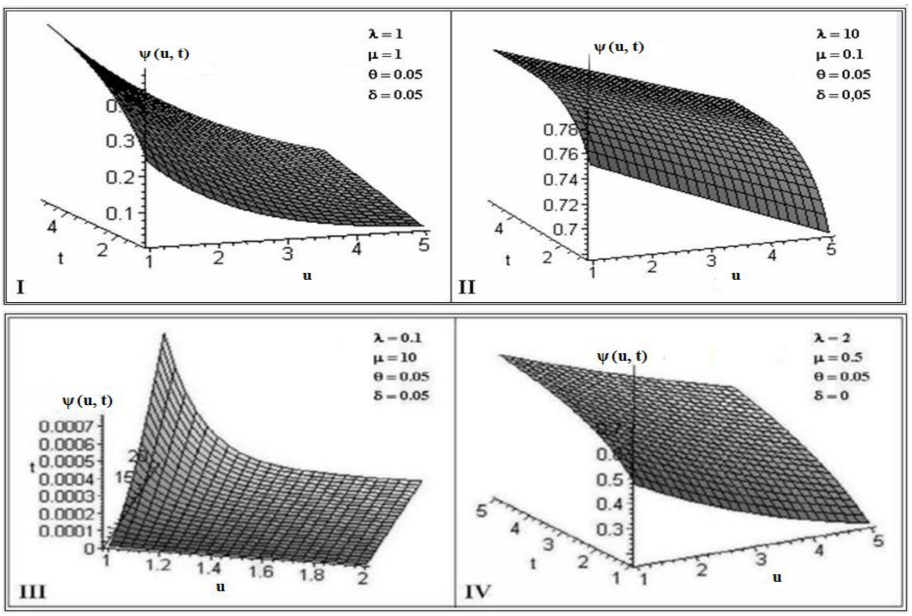
tai iš (2.24) gauname

$$\begin{aligned} \gamma(u, t_1, t_2) &= \lambda e^{-\mu x} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)(\mu x)^n}{n!(\kappa)^n} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(\lambda\kappa)^{2k+n}}{k!(k+n+1)!} \frac{(2k+n)!}{\nu^{2k+n+1}} \\ &\times \sum_{j=0}^{n+2k} \Big(t_1^j e^{-\nu t_1} - t_2^j e^{-\nu t_2} \Big). \end{aligned}$$

Teorema įrodyta. □

Šį skyrelį baigsime keliais brėžiniais, kuriuose pavaizduotos funkcijos, kurių išraiškas gavome teoremoje 2.3.

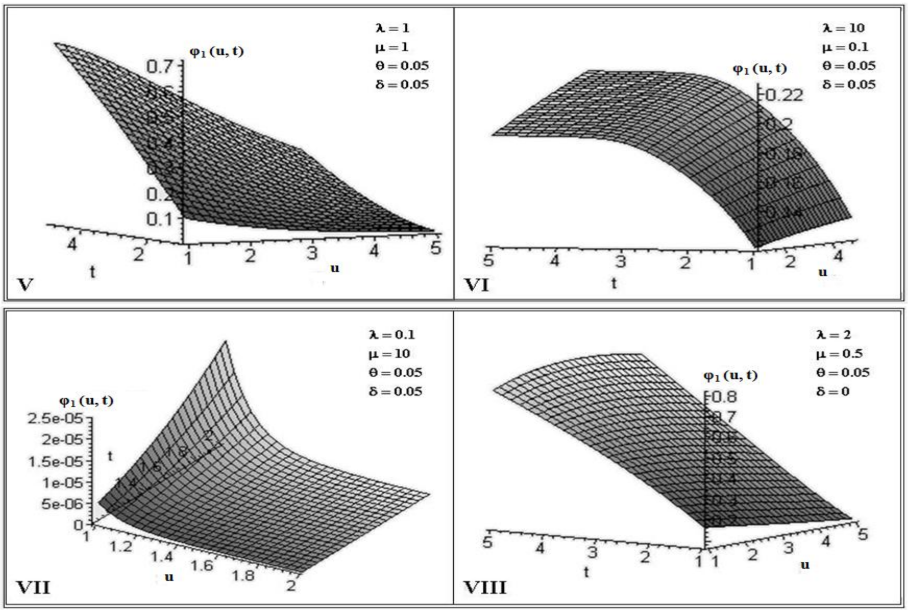
I, II ir III grafikuose galima pamatyti funkcijos $\phi(u,t)$ priklausomybę nuo pagrindinių parametrų. Funkcija mažėja pagal parametrą u ir didėja pagal parametrą t. Tokį jos elgesį nusako būsimo bankroto vertės priklausomybė nuo pradinio kapitalo u dydžio. Aišku, kad kuo didesnis pradinis kapitalas, tuo mažesnė bankroto tikimybė. Išnagrinėjus grafikus išsamiau, matome, kad kuo didesnė yra fiksuota žalų intensyvumo λ reikšmė (grafikas I, III) tuo didesnė yra ir būsimo bakroto vertė (grafikas II). Be to, lyginant šiuos grafikus, akivaizdžiai matosi, kad būsimo bankroto vertė yra daug mažesnė, kai λ yra labai mažas. Atskiru atveju, kai $\delta = 0$ (grafikas IV) mes gauname bankroto tikimybės $\phi(u,t)$ grafiką, kuris mažėja pagal u ir didėja pagal t.



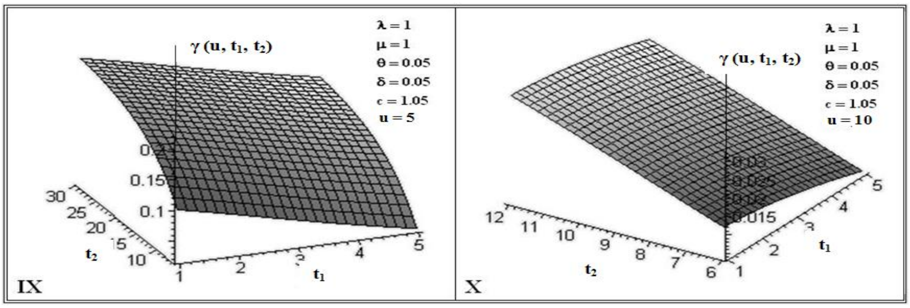
Pav.1. Funkcijos $\phi(u,t)$ priklausomybė nuo parametrų u, t, λ, μ, ir δ.

Toliau nagrinėsime funkciją $\phi_m(u,t)$. Kai $m = 1$ gaunamas baigtinio laiko diskontuoto vidurkio $\phi_1(u,t)$ grafikas (grafikas V - VIII), kurio kitimo dinamika yra analogiška funkcijos $\phi(u,t)$ elgesiui. Be to, kai $\delta = 0$ (grafikas VIII) galima nagrinėti bankroto laiko vidurkio kitimą laike. Iš brėžinio matome, kad pradinio kapitalo u didėjimas lemia funkcijos $\phi_1(u,t)$ mažėjimą pagal visus t.

Paskutiniuose grafikuose pavaizduota diskontuota baudos funkcija intervale $[t_1, t_2]$. Lyginant šiuos du grafikus (grafikas IX ir IX), pastebime, kad kuo didesnis yra laiko intervalas, tuo didesnes reikšmes įgyja bankroto tikimybė. Be to, pakankamai didelės pradinio kapitalo u reikšmės teigiamai veikia funkcijos $\gamma(u, t_1, t_2)$ dinamiką, t.y. funkcija mažėja, kai kapitalas didėja.



Pav.2. Funkcijos $\phi_1(u, t)$ priklausomybė nuo parametrų u, t, λ, μ, andir δ.



Pav.3. Funkcijos $\gamma(u, t_1, t_2)$ priklausomybė nuo parametrų u, t_1 ir t_2.

Išvados

Šiame skyriuje buvo tyrinėjama Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija klasikiniame rizikos modelyje su žalomis, turinčiomis eksponentinį pasiskirstymą. Panaudojus žinomą bankroto laiko tankio funkcijos formulę, buvo gauti tokie dydžiai: Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija baigtiniame laiko intervale, diskontuoti bankroto laiko momentai baigtiniame laiko intervale ir Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija intervale $[t_1, t_2]$. Visų minėtų funkcijų išraiškų išskirti pagrindiniai nariai yra eksponentinio pavydalo. Taigi, visos šios funkcijos kinta eksponentiškai. Šiame skyriuje visos aukščiau išvardintos funkcijos buvo išnagrinėtos su įvairiomis parametrų reikšmemis ir pavaizduotos grafiškai. Grafikuose aiškiai matosi, kad aukštas žalų intensyvumas tik padidina šių funkcijų reikšmes. Taip pat brėžiniuose galima pamatyti, kad pakankamai didelės pradinio kapitalo reikšmės teigiamai veikia visų funkcijų elgesį laikui bėgant, t.y. funkcijų reikšmės mažėja, kai kapitalas auga. Todėl atsižvegliant į žalų intensyvumą ir kitus parametrus, įtakojančius draudimo bendrovės veiklą, draudikas gali įvertinti bendrovės darbo saugumo lygį.

3 Atstatymo procesas, jo savybės ir pritaikymas rizikos teorijoje

Įvadas. Jau anksčiau buvo minėta, kad Puasono procesas yra svarbus rizikos teorijoje, nes jis pasižymi tokiomis matematinėmis savybėmis, dėl kurių jį yra lengva nagrinėti ir taikyti. Šis procesas jau senai taikomas rizikos teorijoje ir daugelyje kitų mokslo sričių. 1903 metais Fillip Lumdberg pasiūlė šiuo procesu aprašinėti įvykstančių žalų skaičiu. Vėliau šį procesą pradėjo nagrinėti ir taikyti kiti autoriai. Tačiau, tam tikrais atvejais Puasono proceso taikymas gali būti pakankamai komplikuotas. Pavyzdžiui, kai tarp žalų yra dideli laiko tarpai. Tokiais atvejais reikėtų nagrinėti tarplaikius, turinčius tam tikrą pasiskirstymą, kurio pagalba bus lengva modeliuoti didelius laiko intervalus. Dažniausiai, kai Puasono proceso negalima panaudoti taikomas atstatymo procesas. Rizikos teorijoje šis procesas naudojamas ne tik žalų skaičiui aprašyti, bet ir nagrinėjamas atskirai, t.y. tyrinėjamos šio proceso pagrindinės savybės, asimptotikos problemos bei sąsaja su Puasono procesu.

3.1 Atstatymo procesas ir jo savybės

Šiame skyrelyje nagrinėsime neneigiamą sveikaskaitį procesą $N(t)$, $t \geq 0$ bei atsitiktinių sumų procesą

$$S(t) = \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \geq 0.$$

Sakykime, $\lambda(t) = EN(t) \to \infty$, kai $t \to \infty$. Atsitiktiniai dydžiai $Y_1, Y_2, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę su bendra pasiskirstymo funkcija $H(u) = P(Y_1 \leq u)$ ir baigtiniu vidurkiu $EY_1 = \mu$. Be to, laikysime, kad $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ ir dydžiai $Y_1, Y_2, ...$ yra nepriklausomi. Taip pat žymėsime

$$\mu(t) = ES(t) = \mu\lambda(t).$$

Klüppelberg ir Mikosch [29] nagrinėjo proceso $S(t)$ didelių nuokrypių tikimybes, kai funkcija H turi sunkią uodegą. Tokiu atveju Y_1 neturi baigtinio eksponentinio momento ir standartiniai didelių nuokrypių teorijos rezultatai negalioja. Toliau apibrėšime kelias reikalingas prielaidas ir pateiksime pagrindinį skyrelio rezultatą. Pradžioje aptarsime kelias skirstinių su sunkiomis uodegomis klases. Sakysime, kad pasiskirstymo funkcija H priklauso klasei $ERV(\alpha, \beta)$ kažkokiems $0 < \alpha \leq \beta < \infty$, jeigu bet kuriam fiksuotam $y > 1$

$$y^{-\beta} \leq \lim_{x \to \infty} \inf \frac{\overline{H}(xy)}{\overline{H}(x)} \leq \lim_{x \to \infty} \sup \frac{\overline{H}(xy)}{\overline{H}(x)} \leq y^{-\alpha}, \quad y > 1. \tag{3.1}$$

Jeigu paskutinėje lygybėje $\alpha = \beta$, tai sakoma, kad pasiskirstymo funkcija $\overline{H}$ yra reguliariai kintanti arba priklauso klasei $\mathcal{R}(\alpha)$. Nesunku parodyti, kad H yra reguliariai kintanti su kažkokiu α, jeigu

$$\overline{H}(x) = x^{-\alpha} L(x), \quad x > 0,$$

kažkokiai lėtai kintančiai funkcijai L.

Klüppelberg ir Mikosch [29] darbe sveikaskaičiam procesui kėlė dvi žemiau aprašytas prielaidas.

SAVYBĖ A.

$$\frac{N(t)}{\lambda(t)} \xrightarrow{P} 1, \quad t \to \infty,$$

kitaip tariant egzistuoja teigiama funkcija $\varepsilon(t)$ tokia, kad $\varepsilon(t) \to 0$ ir

$$P\big(\big|N(t) - \lambda(t)\big| > \varepsilon(t)\lambda(t)\big) = o(1).$$

SAVYBĖ B. Egzistuoja tokie teigiami ε ir δ, kad

$$\sum_{k > (1+\delta)\lambda(t)} P(N(t) > k)(1+\varepsilon)^k \to 0,$$

Nesunku pastebėti, kad B prielaida yra ekvivalenti tokiai $N(t)$ savybei:

$$\sum_{k > (1+\delta)\lambda(t)} P(N(t) = k)(1+\varepsilon)^k = E\Big((1+\varepsilon)^{N(t)} \mathbf{I}_{\{N(t)/\lambda(t) > 1+\delta\}}\Big) \to 0, \quad t \to \infty.$$

Klüppelberg ir Mikosch [29] parodė, kad A prielaidą tenkina Puasono procesas $N(t)$ su $\lambda(t) \to \infty$ ir atstatymo skaičiuojamasis procesas

$$N(t) = \sup\{n \geq 1 : \theta_1 + ... + \theta_n \leq t\} \tag{3.2}$$

kur $\theta_1, \theta_2, ...$ yra neneigiami nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai, tenkinantys tam tikrą mažorentinę sąlygą. Pagrindinis nagrinėjamo darbo rezultatas buvo tokia teorema.

Teorema 3.1 *Tegul $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ yra sveikaskaitis neneigiamas procesas. Be to, tarkime, kad $\{N(t)\}_{t \geq 0}$ tenkina prielaidas A ir B su $\lambda(t) \to \infty$, o pasiskirstymo funkcija $H \in ERV(-\alpha, -\beta)$ kažkokiems $1 < \alpha \leq \beta < \infty$. Tuomet*

$$P\Big(S(t) - \mu(t) > x\Big) \sim \lambda(t)\overline{H}(x) \tag{3.3}$$

tolygiai su $x \geq \gamma\lambda(t)$ kiekvienam fiksuotam $\gamma > 0$.

[53] darbe Tang ir kiti taip pat nagrinėjo proceso $S(t)$ nusakyto (3.1) lygybe, didelius nuokrypius. Jie A prielaidą pakeitė silpnesne prielaidą (žr. taip pat darbus [38], [46]) ir įrodė tokią teoremą.

Teorema 3.2 *Sakykime funkcija $H \in ERV(-\alpha, -\beta)$ su $1 < \alpha \leq \beta < \infty$. Be to, tegul fiksuotam teigiamam δ ir kažkokiam mažam $\varepsilon > 0$*

$$E\Big(\big[(N(t))\big]^{\beta+\varepsilon} \mathbf{I}_{N(t) > (1+\delta)\lambda(t)}\Big) = O(\lambda(t)) \tag{3.4}$$

tuomet tenkinama (3.3) asimptotinė lygybė.

Tame pačiame darbe autoriai parodė, kad atstatymo skaičiuojamasis procesas $N(t)$ bet kokioms teigiamoms realioms konstantoms δ ir m tenkina lygybę

$$\sum_{k > (1+\delta)\lambda(t)} k^m P(N(t) \geq k) = o(1), \quad t \to \infty$$

jeigu atstatymo procesą generuojantis tarplaikis θ turi baigtinį vidurkį $E\theta = 1/\lambda$. Gautas rezultatas parodo, kad bet koks atstatymo procesas tenkina (3.4) prielaidą.

3.2 Pagrindinis rezultatas

Toliau šiame skyrelyje nagrinėsime procesą $N(t)$, apibrėžtą (3.2) lygybę. Nagrinėsime ar tokiam procesui galioja žemiau suformuluota savybė.

SAVYBĖ B^*. Kiekvienam realiajam $a > \lambda$ su $\lambda = 1/E\theta < \infty$ egzistuoja $b > 1$,

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k>at} P(N(t) \geq k)b^k = 0. \tag{3.5}$$

Nesunku pastebėti, kad bet kuriems teigiamiems δ ir ε

$$\begin{aligned}
\sum_{k>(1+\delta)\lambda t} P(N(t)=k)(1+\epsilon)^k &\leq \sum_{k>(1+\delta)\lambda t} P(N(t) \geq k)(1+\epsilon)^k, \\
\sum_{k>(1+\delta)\lambda t} P(N(t)=k)(1+\epsilon)^k &\geq \sum_{k>(1+\delta)\lambda t} \big(P(N(t)\geq k) - P(N(t) \geq k+1)\big)(1+\epsilon)^k \\
&\geq \frac{\epsilon}{1+\epsilon} \sum_{k>(1+\delta)\lambda t} P(N(t)\geq k)(1+\epsilon)^k.
\end{aligned}$$

Todėl B^* savybė yra ekvivalenti tokiai savybei B^{**}: bet kuriam teigiamam δ egzistuoja teigiamas ε toks, kad

$$\lim_{t\to\infty} \sum_{k>(1+\delta)\lambda t} P(N(t)=k)(1+\varepsilon)^k = 0.$$

Žemiau įrodysime teoremą, kurioje parodyta, kad bet koks atstatymo procesas $N(t)$ su $E\theta = 1/\lambda < \infty$ tenkina B^* savybę. Be to, išnagrinėsime atvejį, kai $EN = \infty$.

Teorema 3.3 *Sakykime $N(t)$ yra atstatymo procesas apibrėžtas (3.2) lygybe, kurioje $\theta_1, \theta_2, ...$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atstitiktinių dydžių seka.*
(a) Jei $E\theta = 1/\lambda < \infty$, tai $N(t)$ turi savybę B^*;
(b) Jei $E\theta = \infty$, tai kiekvienam teigiamam skaičiui $a > 0$ egzistuoja $b > 1$ toks, kad (3.5) lygybė patenkinta.

ĮRODYMAS.
(**a**) Tegul pradžioje $E\theta = 1/\lambda < \infty$. Aišku, kad bet kuriems realiems $a > \lambda$, $b > 1$ ir kiekvienam teigiamam t

$$\begin{aligned}
\varphi_{a,b}(t) &:= \sum_{k>at} P(N(t)\geq k)\ b^k \\
&\leq \sum_{k>at} P(\theta_1 + \cdots + \theta_k \leq t)\ b^k.
\end{aligned}$$

Bet kuriam neneigiamam atsitiktiniam dydžiui ξ ir bet kuriems teigiamiems y, t tenkinama nelygybė $P(\xi \leq t) \leq E^{yt}E^{-y\xi}$. Iš čia turime

$$\varphi_{a,b}(t) \leq E^{yt} \sum_{k>at} (m(y))^k\ b^k \tag{3.6}$$

kur $m(y) = Ee^{-y\theta}$. Akivazdu, kad $m(y) < 1$ bet kuriam $y > 0$, nes θ nėra išsigimęs taške 0. Kai $b \in \big[1, \frac{1}{10}\big(1 + \frac{9}{m(y)}\big)\big]$, tai $bm(y) < 1$. Iš (3.6) turime, kad tokiems b yra teisinga tokia nelygybė

$$\begin{aligned} \varphi_{a,b}(t) &\leq E^{yt}\, \frac{(b\, m(y))^{at}}{1 - b\, m(y)} \\ &= \frac{1}{1 - b\, m(y)}\ \exp\Big\{yt\Big(1 + \frac{a \log b}{y} + \frac{a \log m(y)}{y}\Big)\Big\} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Pasinaudoję nelygybę $|e^{-v} - 1| \leq v,\ v \geq 0$ ir Lebesque dominuojančio konvergavimo teorema, gauname

$$\begin{aligned} \lim_{y \to 0+} \frac{\log m(y)}{y} &= \lim_{y \to 0+} \frac{\log\,(1 + Ee^{-y\theta} - 1)}{y} = \lim_{y \to 0+} \frac{Ee^{-y\theta} - 1}{y} \\ &= \lim_{y \to 0+} \int_0^\infty \frac{e^{-yu} - 1}{y}\ dP(\theta \leq u) \\ &= \int_0^\infty \lim_{y \to 0+} \frac{e^{-yu} - 1}{y}\ \mathrm{d}P(\theta \leq u) \\ &= -E\theta = -\frac{1}{\lambda}. \end{aligned} \tag{3.8}$$

Taigi, egzistuoja toks teigiamas y^*, kuriam

$$a\frac{\log m(y^*)}{y^*} < -\frac{1}{2} - \frac{a}{2\lambda}.$$

Iš (3.7) turime, kad tokiems y^* ir teigiamam t ir $b \in (1, \frac{1}{10}(1 + \frac{9}{m(y^*)})]$ teisinga nelygybė

$$\varphi_{a,b}(t) \leq \frac{1}{1 - b\, m(y^*)}\exp\Big\{y^* t\Big(-\frac{1}{2}\frac{a - \lambda}{\lambda} + \frac{a \log b}{y^*}\Big)\Big\}$$

Aišku, kad intervale $(1, \frac{1}{10}(1 + \frac{9}{m(y^*)})]$ egzistuoja toks $\widehat{b} = \widehat{b}(a, y^*)$, kuriam

$$\frac{a \log \widehat{b}}{y^*} < \frac{1}{4}\frac{a - \lambda}{\lambda}.$$

Šiuo atveju visiems $t > 0$ ir surastam y^*

$$\varphi_{a,\widehat{b}}(t) \leq \frac{10}{1 - m(y^*)}\exp\Big\{-\frac{y^* t}{4}\ \frac{a - \lambda}{\lambda}\Big\}.$$

Paskutinis įvertis įrodo pirmą teoremos tvirtinimą.

(**b**) Tegul $E\theta = \infty$. Iš (3.7) įverčio turime, kad visiems teigiamiems t, a ir $b \in \big[1, \frac{1}{10}\big(1 + \frac{9}{m(y)}\big)\big]$

$$\varphi_{a,b}(t) \leq \frac{10}{1 - m(y)}\ \exp\Big\{yt\Big(1 + \frac{a \log b}{y} + \frac{a \log m(y)}{y}\Big)\Big\}, \tag{3.9}$$

kur, kaip ir anksčiau $m(y) \equiv Ee^{-y\theta} < 1,\ y > 0$.

Atsitiktinis dydis $\min\{\theta, r\}$ turi baigtinį vidurkį su kiekvienu teigiamu r. Remiantis (3.8) galima įvertinti

$$\overline{\lim_{y \to 0+}}\ \frac{\log m(y)}{y} \leq \overline{\lim_{y \to 0+}}\ \frac{\log Ee^{-y \min\{\theta, r\}}}{y} = -E\min\{\theta, r\}.$$

Taigi,

$$\lim_{y \to 0+} \frac{\log m(y)}{y} = -\infty,$$

todėl egzistuoja teigiamas $y^* = y^*(a)$ toks, kad su $0 < y \le y^*$ tenkinama nelygybė $a \log m(y) \le -3y$. Iš įverčio (3.9) išplaukia, kad visiems $a > 0$, $1 < b \le (1/10)(1 + 9/m(y^*))$, $t > 0$ ir kažkokiam teigiamam $y^* = y^*(a)$ yra teisingas įvertis

$$\varphi_{a,b}(t) \le \frac{10}{1 - m(y^*)} \exp\Big\{ y^* t \Big(\frac{a \log b}{y^*} - 2 \Big) \Big\}$$

Tinkamai parinkus $b = \widehat{b} = \widehat{b}(a, y^*)$, iš gauto įverčio išplaukia antras teoremos tvirtinimas.

Teorema įrodyta. □

3.3 Baigtinio laiko bankroto tikimybė rizikos atstatymo modelyje

Šiame skyrelyje parodysime, kaip pritaikoma 3.3 teorema baigtinio laiko bankroto tikimybės atstatymo procese asimptotikos nagrinėjime. Laikysime, kad rizikos atstatymo modelio žalos ir tarplaikiai tenkina tokias prielaidas:

PRIELAIDA $\mathcal{H}_1$. Žalos $Y_1, Y_2, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija H ir baigtiniu vidurkiu $\beta = EY_1$.

PRIELAIDA $\mathcal{H}_2$. Tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, ...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiami atsitiktiniai dydžiai su baigtiniu vidurkiu $E\theta_1 = 1/\lambda$. Be to, $\theta_1, \theta_2, ...$ ir $Y_1, Y_2, ...$ yra nepriklausomi.

Sakykime procesas $U(t)$, aprašantis kapitalą laiko momentu t užrašomas lygybe

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \quad t \ge 0.$$

Čia u yra pradinis kapitalas laiko momentu $t = 0$, $c > 0$ premijų intensyvumas ir $\widehat{\theta} = c/\lambda - \beta$ saugumo koeficientas. Be to, tegul $N(t)$ yra atstatymo procesas, t.y.

$$N(t) = \sup\{n \ge 1 : \theta_1 + ... + \theta_n \le t\}.$$

Sakykime τ yra kažkoks laiko momentas. Tuomet

$$\psi(u, \tau) \;=\; P\Big(\inf_{0 \le s \le \tau} U(s) < 0 | U(0) = u \Big) = P\Big(\max_{0 \le k \le N(\tau)} \sum_{i=1}^{k} (Y_i - c\theta_i) > u \Big).$$

yra bankroto tikimybė iki momento τ.

Yra parašyta nemažai darbų (žr. pavyzdžiui [33], [51], [34]), kuriuose remiantis Korshunovo [31] didelių nuokrypių rezultatais buvo nagrinėjama bankroto tikimybės $\psi(u, \tau)$ asimptotika, kai funkcija H priklauso kuriai nors pasiskirstymo funkcijų su sunkiomis uodegomis klasei. Toliau aprašysime dar kelias paiskirstymo funkcijų su sunkiomis uodegomis klases.

Sakykime, kad pasiskirstymo funkcija $F = 1 - \overline{F}$ priklauso klasei $\mathcal{C}$ jeigu

$$\lim_{y \to 1-} \limsup_{u \to \infty} \frac{\overline{F}(yu)}{\overline{F}(u)} = 1.$$

Sakykime, kad pasiskirstymo funkcija F priklauso subeksponentinių skirstynių klasei $\mathcal{S}$, jeigu kiekvienam $n \ge 2$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F * F}(x)}{\overline{F}(x)} = 2,$$

kur $F * F$ žymi funkcijos F sąsūka pačia su savimi, o $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ su visais $x \in \mathbb{R}$. Dar viena sunkių uodegų skirstynių klasė vadinama stypriai subeksponentinių skirstynių klase. Ši klasė paprastai žymima simboliu $\mathcal{S}_*$. Sakoma, kad $F \in \mathcal{S}_*$, jeigu $\int_0^\infty \overline{F}(y)dy < \infty$ ir

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F_u^{*2}}(x)}{\overline{F_u}(x)} = 2 \tag{3.10}$$

tolygiai visiems $u \in [1, \infty)$, kur

$$\overline{F_u}(x) = \begin{cases} \min\left\{1, \int_x^{x+u} \overline{F}(y)dy\right\} & \text{jeigu} \quad x \geq 0, \\ 1 & \text{jeigu} \quad x < 0. \end{cases}$$

Yra žinoma, kad $\mathcal{C} \subset \mathcal{S}_* \subset \mathcal{S}$ (žr. pavyzdžiui [31],[52]).

Tang [51] nagrinėjo baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotiką žaloms iš klasės $\mathcal{C}$. Pagrindinis jo darbo rezultatas yra tokia teorema.

Teorema 3.4 *Tegu rizikos atstatymo modelis tenkina $\mathcal{H}_1$ ir $\mathcal{H}_2$ prielaidas, $c/\lambda - \beta > 0$, pasiskirstymo funkcija $H \in \mathcal{C}$ ir $E\theta_1^p < \infty$ kažkokiam $p > J_B^+ + 1$, kur J_H^+ pasiskirstymo funkcijos H viršutinis Matuszewska indeksas, t.y.*

$$J_B^+ = -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \left(\liminf_{u\to\infty} \frac{\overline{H}(xy)}{\overline{H}(x)} \right).$$

Tada

$$\psi(u, \tau) \sim \frac{1}{\mu} \int\limits_u^{u+\mu\lambda\tau} \overline{H}(y)dy \tag{3.11}$$

tolygiai visiems $\tau \in [f(x), \infty]$ bet kokiai neaprėžtai didėjančiai funkcijai f.

Analogiškas rezultatas stipriai subeksponentinių pasiskirstymo funkciju klasei įrodytas Leipaus ir Šiaulio [34] darbe.

Teorema 3.5 *Tegu atsatymo rizikos modelis tenkina $\mathcal{H}_1$ ir $\mathcal{H}_2$ prielaidas. Jeigu pasiskirstymo funkcija $H \in \mathcal{S}_*$, tarplaikiai $\theta_1, \theta_2, ...$ tenkina B prielaidą ir $c/\lambda - \beta > 0$, tai (3.11) asimptotinė formulė yra teisinga su tomis pačiomis sąlygomis kaip ir 3.4 teoremoje.*

Nesunku pastebėti, 3.3 teoremos dėka, galima atsisakyti B prielaidos 3.5 teoremoje. Taigi, yra teisinga žemiau suformuluota teorema.

Teorema 3.6 *Tegul rizikos atstatymo modelis tenkina $\mathcal{H}_1$ ir $\mathcal{H}_2$ prielaidas. Jeigu pasiskirstymo funkcija $H \in \mathcal{S}_*$ ir $c/\lambda - \beta > 0$, tai (3.11) asimptotinė formulė yra teisinga su tomis pačiomis sąlygomis kaip ir 3.4 teoremoje.*

Jiang [27] darbe klasikiniam modeliui buvo gautas analogiškas rezultatas, kaip ir 3.6 teoremoje. Šiuo atveju buvo laikoma, kad $N(t)$ iš (3.2) yra homogeninis Puasono procesas su parametru λ, t.y. $\theta_1, \theta_2, ...$ turi eksponentinį pasiskirstymą su $E\theta_1 = 1/\lambda$. Nagrinėjamu atveju, autorius parodė, kad jeigu pasiskirstymo funkcija $H(x) \in \mathcal{S}_*$, tuomet yra teisinga (3.11) asimptotinė formulė su tomis pačiomis sąlygomis kaip ir 3.6 teoremoje. Nesunku pastebėti, kad Tang (žr.[51]) rezultatas tenkinamas tik su žalomis, turinčiomis Pareto bei jo kombinacijas skirstyniais. Leipus ir Šiaulys (žr. [34]) praplėtė ši rezultatą iki platesnės skirstinių klasės. Jiang (žr.[27]) rezultatas klasikiniam rizikos modeliui taip pat galioja visoms funkcijoms iš klasės S_*.

Išvados

Šiame skyriuje buvo tyrinėjamas atstatymo procesas ir rizikos atstatymo modelis. Buvo nagrinėjama kokiems teigiamiems a ir b atstatymo procesui $N(t)$ galioja lygybė:

$$\lim_{t\to\infty}\sum_{k>at} P(N(t)\geq k)b^k = 0.$$

Buvo įrodyta teorema, kurioje buvo parodyta, kad jeigu $E\theta = 1/\lambda$, tai visiems $a > \lambda$ galima rasti $b > 1$, kuriems užrašytoji savybė yra teisinga. Be to, esant begaliniam tarplaikio vidurkiui irgi galimas konstantų a ir b su aukščiau užrašyta savybe parinkimas. Teoremoje gautas rezultatas buvo pritaikytas baigtinio laiko bankroto tikimybės asimptotinei formulei išvesti.

4 Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotikos tyrimas

Įvadas. Nuo to momento, kai Gerber ir Shiu (žr. [23]) pasiūlė nagrinėti diskontuotą baudos funkciją, buvo gautą nemažai rezultatų apie šios funkcijos savybes tiek sudetiniame Puasono tiek ir rizikos atstatymo modeliuose. Nors ši funkcija buvo plačiai tyrinėjama įvairių autorių, dėje šios funkcijos asimptotikos nagrinėjimui skirta nedaug dėmėsio. Galima paminėti tik kelis darbus. Šiaulys ir Asanavičiūtė [50] gavo Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotinę formulę subeksponentinėms žaloms klasikiniame rizikos modelyje. Cheng ir Tang [7] tyrinėjo šią funkciją atstatymo rizikos modelyje su Erlang(2) tarplaikiais ir žalomis pasiskirsčiusiomis pagal apibendrintas subeksponentinius dėsnius. Aprašytu atveju jie gavo sukaupto kapitalo prieš bankrotą ir kapitalo stokos bankroto metu momentų asimptotiką. Tang ir Wei [54] rado diskontuotos baudos funkcijos asimptotinę formulę atstatymo rizikos modeliui su absoliučiai tolydžiomis žalomis, pasiskirsčiusiomis pagal apibendrintus subeksponentinius dėsnius ir tenkinančiais dar eilę papildomų sąlygų.

Diskontuotos baudos funkcijos asimptotokos tyrimas yra aktualus, nes dar yra neišnagrinėta daug problemų. Šiame skyriuje pateiksime kelis naujus įdomius rezultatus, susijusius su šios funkcijos asimptotika bei gausime nagrinėjamos funkcijos asimptotinę formulę Erlang(2) modelyje su subeksponentinėmis žalomis.

4.1 Diskontuotos baudos funkcijos atstatymo lygtis Erlang(2) modelyje

Sakykime draudiko sukaupto kapitalo procesas $\{U(t),\, t \geq 0\}$ užrašomas tokia lygybe

$$U(t) = u + ct - \sum_{i=1}^{N(t)} Y_i, \tag{4.1}$$

čia u yra pradinis kapitalas, c premijų intensyvumas, o procesas $\{N(t)\}_{t\geq 0}$ aprašo žalų skaičių iki momento t. Sakykime $N(t)$ yra skaičiuojamasis atstatymo procesas, t.y.

$$N(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \mathbf{I}_{\{\theta_1+\theta_2+\ldots+\theta_i \leq t\}}, \tag{4.2}$$

kur $\theta_1, \theta_2, \ldots$ yra nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių dydžių seka. Atsitiktinis dydis θ_1 yra laiko tarpas iki pirmos žalos pasirodymo, o θ_i, $i \geq 2$ yra laiko tarpai tarp dvieju iš eilės einančių žalų. Be to, tarkime, kad θ_1 turi Erlang(2) tankio funkcija su parametru $\lambda > 0$, t.y.

$$k(t) = \lambda^2 t e^{-\lambda t}, \quad t \geq 0.$$

Žalos $Y_1, Y_2, \ldots$, nepriklausančios nuo proceso $N(t)$, yra neneigiami, nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija $H(y) = P(Y_1 \leq y)$ ir baigtiniu vidurkiu $EY_1 = a$. Laikysime, kad be to tenkinama gryno pelno sąlyga, t.y.

$$c = \frac{EY_1}{E\theta_1}(1+\widehat{\theta}) = \frac{\lambda a}{2}(1+\widehat{\theta}) \tag{4.3}$$

su teigiamu saugos koeficientu $\widehat{\theta}$.

Nagrinėsime Gerber-Siu diskontuotą baudos funkciją

$$\phi_\omega(u) = E(e^{-\delta T}\omega(U(T-), |U(t)|)\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u),$$

čia $T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0|U(0) = u\}$, kaip ir anksčiau yra bankroto laikas, o $\omega(x, y)$, $0 \le x,\ y < \infty$ yra neneigiama dviejų argumentų funkcija.

Sun [47] (žr. taip pat Cheng and Tang [7]) tyrinėjo diskontuotą baudos funkciją Erlang(2) rizikos modelyje ir parodė, kad esant sąlygai

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \omega(x, y)h(x + y)dxdy < \infty \tag{4.4}$$

funkcija $\phi_\omega(u)$ tenkina tokią defektyvią atstatymo lygtį

$$\phi_\omega(u) = \frac{1}{1+\beta}\int_0^u \phi_\omega(u-y)dG(y) + \frac{1}{1+\beta}B(u). \tag{4.5}$$

Paskutinėje lygtyje

$$B(u) = \frac{\lambda^2}{c^2}(1+\beta)\int_u^\infty e^{-\rho_2(s-u)}\int_s^\infty e^{-\rho_1(x_1-s)}\int_{x_1}^\infty \omega(x_1, x_2 - x_1)dH(x_2)dx_1ds,$$

$$\beta = \frac{2\lambda\delta + \delta^2}{c^2\rho_1\rho_2 - 2\lambda\delta - \delta^2}, \tag{4.6}$$

o $\rho_1 = \rho_1(\delta)$, $\rho_2 = \rho_2(\delta)$ $(0 \le \rho_1 < (\lambda+\delta)/c < \rho_2)$ yra du neneigiami Lundberg lygties

$$\lambda^2\int_0^\infty e^{-sx}dH(x) = (cs - \lambda - \delta)^2 \tag{4.7}$$

sprendiniai su sąlyga $\rho_1(0) = 0$ (žr. pavyzdžiui [12]).

Be to, (4.5) atstatymo lygtyje funkcija

$$G(y) = \frac{1}{D}\int_0^y g(x)dx$$

yra pasiskirstymo funkcija, glaudžiai susijusi su žalu pasiskirstymu ir kuri vadinasi integruota žalų pasiskirstymo funkcija, nes

$$g(y) = \frac{\lambda^2}{c^2}\int_y^\infty e^{-\rho_2(s-y)}\int_s^\infty e^{-\rho_1(x-s)}dH(x)ds$$

ir

$$D = \int_0^\infty g(y)dy = \frac{c^2\rho_1\rho_2 - 2\lambda\delta - \delta^2}{c^2\rho_1\rho_2} = \frac{1}{1+\beta}.$$

Toliau nagrinėsime atvejį, kai funkcija $\omega(x, y) \equiv 1$. Ši prielaida reiškia, kad bankroto dydis laiko momentu T yra prilygintas vienetui. Vadinasi, tirinėsime tokio pavidalo diskontuotą baudos funkciją

$$\phi(u) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u). \tag{4.8}$$

Pradžioje įrodysime teoremą, kuri parodo, kad funkcija $\phi(u)$ tenkina defektyvią atstatymo lygtį be (4.4) prielaidos.

Teorema 4.1 *Sakykime, Erlang(2) rizikos modelyje patenkinta gryno pelno sąlyga (4.3). Jei $\delta > 0$ tuomet diskontuota baudos funkcija $\phi(u)$ tenkina atstatymo lygtį*

$$\phi(u) = \frac{1}{1+\beta} \int\limits_{[0,u]} \phi(u-y)dG(y) + \frac{1}{1+\beta}\overline{G}(u). \tag{4.9}$$

Joje pasiskirstymo funkcija G užrašoma lygybe

$$\overline{G}(u) = \frac{\lambda^2}{c^2}(1+\beta)\int\limits_u^\infty e^{-\rho_2(y-u)}\int\limits_y^\infty e^{-\rho_1(x-y)}\overline{H}(x)dxdy, \quad u \geq 0, \tag{4.10}$$

kurioje $\rho_1, \rho_2\, (\rho_1 < \rho_2)$ yra du teigiami (4.7) lygties sprendiniai, o β teigiama konstanta apibrėžta (4.6) lygybe.

Įrodymas. Tegul δ yra fiksuotas teigiamas parametras. Kapitalo procesas $U(t)$ apibrėžtas (4.1) lygybe su atstatymo procesu iš (4.2) lygybės. Akivaizdu, kad žalos įvyksta tik momentais $T_m = \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_m$. Tokiems laiko momentams $N(T_m) = m$ ir

$$U(T_m) = u + cT_m - \sum_{n=1}^{N(T_m)} Y_n = u - S_m,$$

kur

$$S_0 = 0, \quad S_m = \sum_{n=1}^{m}(Y_n - c\theta_n), \quad m = 1, 2, \ldots .$$

Turime, kad visiems neneigiamiems u ir visiems $m = 1, 2, 3, \ldots$

$$P(T = T_m) = P(S_m > u, S_{m-1} \leq u, S_{m-2} \leq u, \ldots, S_1 \leq u).$$

Todėl neneigiamiems u diskontuotą baudos funkcija galima užrašyti tokiu pavidalu

$$\begin{aligned}\phi(u) &= E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}) = E\Big(e^{-\delta T}\sum_{m=1}^{\infty}\mathbf{I}_{\{T=T_m\}}\Big) \\ &= E\sum_{m=1}^{\infty}\Big(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T=T_m\}}\Big) = \sum_{m=1}^{\infty}E\Big(e^{-\delta T_m}\mathbf{I}_{\{S_1\leq u,\, S_2\leq u, \ldots, S_{m-1}\leq u,\, S_m>u\}}\Big).\end{aligned}$$

Išskaidžius šią sumą gauname

$$\begin{aligned}\phi(u) &= Ee^{-\delta T_1}\mathbf{I}_{\{S_1>u\}} + \sum_{m=2}^{\infty} Ee^{-\delta\theta_1}e^{-\delta(T_m-\theta_1)} \\ &\times \mathbf{I}_{\{S_1\leq u,\, S_2-S_1\leq u-S_1, \ldots, S_{m-1}-S_1\leq u-S_1,\, S_m-S_1>u-S_1\}}\end{aligned}$$

Todėl

$$
\begin{aligned}
\phi(u) &= Ee^{-\delta T_1}\mathbf{I}_{\{S_1>u\}} + \sum_{m=2}^{\infty}\int_R\int_R Ee^{-\delta t}e^{-\delta(T_m-\theta_1)} \\
&\times\ \mathbf{I}_{\{y-ct\le u,\, S_2-S_1\le u-y+ct,\dots,S_{m-1}-S_1\le u-y+ct,\, S_m-S_1>u-y+ct\}}dH(y)\lambda^2te^{-\lambda t}dt \\
&= Ee^{-\delta T_1}\mathbf{I}_{\{S_1>u\}} + \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\int\limits_{[0,u+ct]}\sum_{m=2}^{\infty}Ee^{-\delta(T_m-\theta_1)} \\
&\times\ \mathbf{I}_{\{S_2-S_1\le u-y+ct,\dots,S_{m-1}-S_1\le u-y+ct,\, S_m-S_1>u-y+ct\}}dH(y)\lambda^2te^{-\lambda t}dt \\
&= Ee^{-\delta T_1}\mathbf{I}_{\{S_1>u\}} + \int_0^{\infty} e^{-\delta t}\int\limits_{[0,u+ct]}\sum_{l=2}^{\infty}Ee^{-\delta T_l} \\
&\times\ \mathbf{I}_{\{S_1\le u-y+ct,\, S_2\le u-y+ct,\dots,S_{l-1}\le u-y+ct,\, S_l>u-y+ct\}}dH(y)\lambda^2te^{-\lambda t}dt \\
&= \lambda^2\int_0^{\infty}te^{-(\delta+\lambda)t}\Big(\int\limits_{[0,u+ct]}\phi(u+ct-y)dH(y)+\int\limits_{(u+ct,\infty)}dH(y)\Big)dt
\end{aligned}
$$

Į gautą lygybę, įstačius naują kintamąjį $z = u + ct$, turime

$$
\phi(u) = \frac{\lambda^2}{c}\int_u^{\infty}\frac{z-u}{c}e^{-(\delta+\lambda)\frac{z-u}{c}}\Big(\int\limits_{[0,z]}\phi(z-y)dH(y)+\int\limits_{(z,\infty)}dH(y)\Big)dz \tag{4.11}
$$

su visais neneigiamais u. Funkcija

$$
\int_{[0,z]}\phi(z-y)dH(y)+\int\limits_{(z,\infty)}dH(y) = 1-\int\limits_{[0,z]}\big(1-\phi(z-y)\big)dH(y)
$$

yra mažėjanti aprėžta vienetu. Todėl funkcijų sąndauga

$$
\frac{z-u}{c}e^{-(\delta+\lambda)\frac{z-u}{c}}\Big(\int\limits_{[0,z]}\phi(z-y)dH(y)+\int\limits_{(z,\infty)}dH(y)\Big)
$$

yra tolydi su visais teigiamais z, gal būt iškyrus kurį nors baigtinį skaitų poaibį iš $\mathbb{R}$. Be to, ši funkcijų sandauga yra integruojama intervale $[0,\infty)$. Taigi, iš (4.11) seka, kad $\phi(u)$ yra absoliučiai tolydi mažėjanti funkcija ir beveik su visais neneigiamais u

$$
\phi'(u) = \frac{\lambda^2}{c}\int_u^{\infty}\left[\frac{z-u}{c}e^{-(\delta+\lambda)\frac{z-u}{c}}\left(\int\limits_{[0,z]}\phi(z-y)dH(y)+\int\limits_{(z,\infty)}dH(y)\right)\right]_u' dz.
$$

Supaprastinus šią lygybę ir pritaikius (4.11) gauname, kad beveik visiems neneigiamiems u

$$
\begin{aligned}
\phi'(u) &= \frac{\delta+\lambda}{c}\phi(u) \\
&-\ \frac{\lambda^2}{c^2}\int\limits_u^{\infty}e^{-(\delta+\lambda)\frac{z-u}{c}}\left(\int\limits_{[0,z]}\phi(z-y)dH(y)+\int\limits_{(z,\infty)}dH(y)\right)dz.
\end{aligned}
$$

Pagal aukščiau išdėstytus samprotavimus iš paskutinės lygybės gauname, kad $\phi'(u)$ yra absoliučiai tolydi ir su beveik visais neneigiamais u antra $\phi(u)$ išvestinė tenkina lygybę

$$
\begin{aligned}
\phi''(u) &= \frac{2(\lambda+\delta)}{c}\phi'(u)-\frac{(\lambda+\delta)^2}{c^2}\phi(u) \\
&+\ \frac{\lambda^2}{c^2}\int\limits_{[0,u]}\phi(u-y)dH(y)+\frac{\lambda^2}{c^2}\overline{H}(u).
\end{aligned} \tag{4.12}
$$

Rasime (4.12) lygybės abiejų pusių Laplaso transformaciją. Yra žinoma, kad tam tikros funkcijos Laplaso transfromacija egzistuoja jeigu ši funkcija yra eksponentinės eilės. Kadangi $0 \le \phi(u) \le 1$ su visais $u \ge 0$, tai

$$|\phi'(u)| \le \frac{\delta+\lambda}{c}|\phi(u)| + \frac{2\lambda^2}{c^2}\int_u^\infty e^{-(\delta+\lambda)\frac{z-u}{c}}dz \le \frac{\delta+\lambda}{c} + \frac{2\lambda^2}{c(\delta+\lambda)} := c_1$$

ir

$$\begin{aligned} |\phi''(u)| &\le \frac{2(\lambda+\delta)}{c}|\phi'(u)| + \frac{(\lambda+\delta)^2}{c^2}|\phi(u)| \\ &+ \frac{\lambda^2}{c^2}\int\limits_{[0,u]}\phi(u-y)dH(y) + \frac{\lambda^2}{c^2}\overline{H}(u) \\ &\le \frac{2(\lambda+\delta)}{c}c_1 + \frac{(\lambda+\delta)^2}{c^2} + \frac{2\lambda^2}{c^2} \end{aligned}$$

su beveik visais $u \ge 0$. Taigi, funkcijų $\phi''(u)$, $\phi'(u)$ ir $\phi(u)$ Laplaso transformacija egzistuoja, nes šios funkcijos yra aprėžtos. Paskaičiavę (4.12) lygybės abiejų pusių Laplaso transfromaciją, visiems kompleksiniams s su $\Re s > 0$ gauname

$$\begin{aligned} s^2\widehat{\phi}(s) &- s\widehat{\phi}(0) - \widehat{\phi}'(0) = \frac{2(\lambda+\delta)}{c}(s\widehat{\phi}(s) - \phi(0)) \\ &- \frac{(\lambda+\delta)^2}{c^2}\widehat{\phi}(s) + \frac{\lambda^2}{c^2}\widehat{\phi}(s)\tilde{H}(s) + \frac{\lambda^2}{c^2}\widehat{\overline{H}}(s) \end{aligned} \tag{4.13}$$

čia

$$\widehat{\phi}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su}\phi(u)du, \quad \widetilde{H}(s) = \int\limits_{[0,\infty)} e^{-su}dH(u), \quad \widehat{\overline{H}}(s) = \int\limits_0^\infty e^{-su}\overline{H}(u)du,$$

nes pagal Fubinio teoremą

$$\begin{aligned} \int_0^\infty e^{-su}\left(\int\limits_{[0,u]}\phi(u-y)dH(y)\right)du &= \int\limits_{[0,\infty)}\left(\int\limits_y^\infty e^{-su}\phi(u-y)\,du\right)dH(y) \\ = \int\limits_{[0,\infty)}\left(\int\limits_0^\infty e^{-s(x+y)}\phi(x)dx\right)dH(y) &= \widehat{\phi}(s)\widetilde{H}(s). \end{aligned}$$

Iš (4.13) lygybės gauname funkcijos $\phi(s)$ Laplaso transformacijos išraišką

$$\widehat{\phi}(s) = \frac{c^2s\phi(0) - 2c(\lambda+\delta)\phi(0) + c^2\phi'(0) + \lambda^2\widehat{\overline{H}}(s)}{(sc-\lambda-\delta)^2 - \lambda^2\widetilde{H}(s)}. \tag{4.14}$$

Šiai išraiškai pritaikysime analogiškus pertvarkymus, kaip Sun darbe (žr. Sun [47], 2.2 teorema). Tegul T_ρ yra operatorius, apibrėžtas Dickson and Hipp straipsnyje [12]. Būtent, integruojamai funkcijai f ir realiam ρ

$$T_\rho f(x) = \int\limits_x^\infty e^{-\rho(z-x)}f(z)\,dz \quad x \ge 0.$$

Nesunku patikrinti, kad

$$\widehat{T_\rho f}(s) = \frac{\widehat{f}(s) - \widehat{f}(\rho)}{\rho - s} \tag{4.15}$$

su visais $\rho > 0$, $\Re s > 0$, $\rho \neq s$. Neneigiamos realios lygties (4.7) šaknys ρ_1 and ρ_2 yra išraiškos (4.14) vardiklio nuliai. Todėl jie turi būti skaitiklio nuliais.

Vadinasi,

$$c^2\rho_1\phi(0) - 2c(\lambda+\delta)\phi(0) + c^2\phi'(0) + \lambda^2\widehat{\overline{H}}(\rho_1) = 0.$$

Iš (4.15) ir (4.14) lygybės gauname

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(s) &= \frac{c^2 s\phi(0) + \lambda^2\widehat{\widetilde{H}}(s) - c^2\rho_1\phi(0) - \lambda^2\widehat{\overline{H}}(\rho_1)}{(sc-\lambda-\delta)^2 - \lambda^2\widetilde{H}(s)} \\
&= \frac{(s-\rho_1)\left(c^2\,\phi(0) - \lambda^2\frac{\widehat{\overline{H}}(s)-\widehat{\overline{H}}(\rho_1)}{\rho_1-s}\right)}{(sc-\lambda-\delta)^2 - \lambda^2\widetilde{H}(s)} \\
&= \frac{(s-\rho_1)\left(c^2\,\phi(0) - \lambda^2\,\widehat{T_{\rho_1}\overline{H}}(s)\right)}{(sc-\lambda-\delta)^2 - \lambda^2\widetilde{H}(s)} \qquad (4.16)
\end{aligned}$$

visiems kompleksiniams s su teigiama realia dalimi. Kadangi, ρ_2 ($\rho_2 > \rho_1$) yra kita paskutinės išraiškos vardiklio šaknis, tai ji turi būti ir skaitiklio šaknimi. Vadinasi,

$$c^2\phi(0) = \lambda^2\,\widehat{T_{\rho_1}\overline{H}}(\rho_2),$$

Dar kartą pritaikę (4.15) savybę iš (4.16) gauname, kad visiems s

$$\begin{aligned}
\widehat{\phi}(s) = &\frac{\lambda^2\,(s-\rho_1)(s-\rho_2)\frac{\widehat{T_{\rho_1}\overline{H}}(\rho_2)-\widehat{T_{\rho_1}\overline{H}}(s)}{s-\rho_2}}{L(s)} \\
&= \frac{\lambda^2(s-\rho_1)(s-\rho_2)\,\widehat{T_{\rho_2}T_{\rho_1}\overline{H}}(s)}{L(s)}, \qquad (4.17)
\end{aligned}$$

kur $L(s)$ yra pažymėtas trupmenos (4.16) vardiklis. Panagrinėkime šį vardiklį detaliau. Aišku, kad

$$\begin{aligned}
L(s) &= (sc-\lambda-\delta)^2 - \lambda^2\widetilde{H}(s) - (\rho_1 c-\lambda-\delta)^2 + \lambda^2\widetilde{H}(\rho_1) \\
&= (s-\rho_1)\left(c^2(s+\rho_1) - 2(\lambda+\delta)c + \lambda^2\frac{\widetilde{H}(\rho_1)-\widetilde{H}(s)}{s-\rho_1}\right). \qquad (4.18)
\end{aligned}$$

Bet kuriam realiam teigiamam s, apibrėžkime naują operatorių τ_ρ tokią lygybę

$$\tau_\rho F(x) = \int\limits_{[x,\infty)} \mathrm{e}^{-\rho(z-x)}\mathrm{d}\,F(z), \quad x \geq 0.$$

kurioje F yra neneigiamo atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Analogiškai, kaip anksčiau (žr. (4.15) sąryšį) gaumame, kad funkcijos $\tau_\rho F$ Laplaso transformacija turi savybę:

$$\widehat{\tau_\rho F}(s) = \frac{\widetilde{F}(s) - \widetilde{F}(\rho)}{\rho - s}, \qquad (4.19)$$

čia $\widetilde{F}(s)$ yra funkcijos F Laplaso-Stieltjeso transformacija. Iš paskutiniojo sąryšio ir (4.18) lygybės išplaukia, kad

$$L(s) = (s-\rho_1)\left(c^2(s+\rho_1) - 2(\lambda+\delta)c + \lambda^2\,\widehat{\tau_{\rho_1}H}(s)\right)$$

Kadangi ρ_2 yra lygties $L(s) = 0$ šaknis, tai

$$c^2(\rho_2+\rho_1) - 2(\lambda+\delta)c + \lambda^2\widehat{\tau_{\rho_1}H}(\rho_2) = 0.$$

Vadinasi, pasinaudojus (4.15) savybę, turime

$$\begin{aligned} L(s) &= (s-\rho_1)\left(c^2(s-\rho_2)+\lambda^2\widehat{\tau_{\rho_1}H}(s)-\lambda^2\widehat{\tau_{\rho_1}H}(\rho_2)\right) \\ &= (s-\rho_1)(s-\rho_2)\left(c^2-\lambda^2\widehat{T_{\rho_2}\tau_{\rho_1}H}(s)\right). \end{aligned}$$

Šią išraišką įstatę į (4.17) lygybės vardiklį, gauname

$$\widehat{\phi}(s)=\frac{\lambda^2\,\widehat{T_{\rho_2}T_{\rho_1}\overline{H}}(s)}{c^2-\lambda^2\widehat{T_{\rho_2}\tau_{\rho_1}H}(s)}. \tag{4.20}$$

visiems kompleksiniams s su teigiama realia dalimi.

Neneigiamam u apibrėžkime dar funkcijas:

$$\begin{aligned} \eta(u) &= T_{\rho_2}T_{\rho_1}\overline{H}(u)=\int_u^\infty \mathrm{e}^{-\rho_2(x-u)}\left(\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\rho_1(y-x)}\overline{H}(y)\mathrm{d}y\right)\mathrm{d}x, \\ \gamma(u) &= T_{\rho_2}\tau_{\rho_1}H(u)=\int_u^\infty \mathrm{e}^{-\rho_2(x-u)}\left(\int_{[x,\infty)} \mathrm{e}^{-\rho_1(y-x)}\mathrm{d}H(y)\right)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Iš (4.20) seka, kad

$$\widehat{\phi}(s)=\frac{\lambda^2}{c^2}\left(\widehat{\phi}(s)\widehat{\gamma}(s)+\widehat{\eta}(s)\right)$$

įprastiems s. Iš Laplaso transformacijos savybių išplaukia tokia funkcijos $\phi(u)$ atstatymo lygtis

$$\phi(u)=\frac{\lambda^2}{c^2}\int_0^u \phi(u-y)\gamma(y)\mathrm{d}y+\frac{\lambda^2}{c^2}\eta(u).$$

Norint gauti atstatymo lygtį (4.9) pavydalo pakanka pažymėti

$$\overline{G}(u)=\frac{\lambda^2}{c^2}(1+\beta)\eta(u),$$

nes (žr. pavyzdžiui [55] arba [37])

$$\begin{aligned} (1+\beta)\int_u^\infty \frac{\lambda^2}{c^2}\gamma(x)\mathrm{d}x &= \frac{\lambda^2(1+\beta)}{c^2}\int_u^\infty\int_x^\infty \mathrm{e}^{-\rho_2(y-x)}\int_{[y,\infty)}\mathrm{e}^{-\rho_1(z-y)}\mathrm{d}H(z)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^2(1+\beta)}{c^2}\int_u^\infty\int_{(x,\infty)}\mathrm{e}^{\rho_2 x-\rho_1 z}\int_x^z \mathrm{e}^{-(\rho_2-\rho_1)y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}H(z)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^2(1+\beta)}{c^2(\rho_2-\rho_1)}\int_u^\infty\int_{(x,\infty)}\left(\mathrm{e}^{\rho_1(z-x)}-\mathrm{e}^{\rho_2(z-x)}\right)\mathrm{d}H(z)\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^2(1+\beta)}{c^2(\rho_2-\rho_1)}\int_u^\infty\left(\mathrm{e}^{\rho_1(x-u)}-\mathrm{e}^{\rho_2(x-u)}\right)\overline{H}(x)\mathrm{d}x, \end{aligned}$$

ir

$$\begin{aligned} \overline{G}(u) &= \frac{\lambda^2(1+\beta)}{c^2}\int_u^\infty \mathrm{e}^{\rho_2(x-u)}\int_y^\infty \mathrm{e}^{\rho_1(x-u)}\overline{H}(x)\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \frac{\lambda^2(1+\beta)}{c^2}\int_u^\infty \overline{H}(x)\,\mathrm{e}^{-\rho_1 x+\rho_2 u}\int_u^x \mathrm{e}^{-(\rho_2-\rho_1)y}\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x \\ &= \frac{\lambda^2(1+\beta)}{c^2(\rho_2-\rho_1)}\int_u^\infty\left(\mathrm{e}^{\rho_1(x-u)}-\mathrm{e}^{\rho_2(x-u)}\right)\overline{H}(x)\mathrm{d}x. \end{aligned}$$

Pabaigai pastebėkime, kad iš (4.15) ir (4.19) savybių išplaukia (4.6) sąryšis, t.y.

$$\begin{aligned}
\frac{\lambda^2}{c^2}\int\limits_0^\infty \gamma(x)\mathrm{d}x &= \frac{\lambda^2}{c^2}\widehat{T_{\rho_2}\tau_{\rho_1}}H(0) = \frac{\lambda^2}{c^2}\frac{\widehat{\tau_{\rho_1}H}(0)-\widehat{\tau_{\rho_1}H}(\rho_2)}{\rho_2} \\
&= \frac{\frac{\lambda^2-\lambda^2\widetilde{H}(\rho_1)}{\rho_1}+\frac{\lambda^2\widetilde{H}(\rho_2)-\lambda^2\widetilde{H}(\rho_1)}{\rho_2-\rho_1}}{c^2\,\rho_2} \\
&= \frac{\frac{\lambda^2-(c\rho_1-\lambda-\delta)^2}{\rho_1}+\frac{(c\rho_2-\lambda-\delta)^2-(c\rho_1-\lambda-\delta)^2}{\rho_2-\rho_1}}{c^2\rho_2} = \frac{c^2\rho_1\rho_2-2\lambda\delta-\delta^2}{c^2\rho_1\rho_2}.
\end{aligned}$$

Teorema įrodyta. □

4.2 Diskontuotos baudos funkcijos asimptotikos tyrimas klasikiniame rizikos modelyje

Nagrinėkime klasikinį rizikos modelį, kuriame kapitalo procesas $U(t)$ yra aprašytas (4.1) lygybėje. Klasikinio modelio atveju $N(t)$ yra homogeninis Puasono procesas su intensyvumu μ, o $\theta_1, \theta_2, ...$ yra eksponentiškai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su parametru μ, t.y. šių dydžių pasiskirstymo funkcija turi pavydalą:

$$P(\theta_1 \le y) = \begin{cases} 0 & , jei\ y < 0; \\ 1 - e^{-\mu y} & , jei\ y \ge 0. \end{cases}$$

Sakykime žalos $Y_1, Y_2, ...$ turi baigtinį vidurkį $EY_1 = a$, o jų pasiskirstymo funkcija $H(y) = P(Y \le y)$. Be to, tegul $\widehat{\theta} = c/\mu a - 1 > 0$ yra saugos koeficientas.

Šiaulys ir Asanavičiūtė [50] klasikiniame rizikos modelyje tyrinėjo diskontuotą baudos funkciją $\phi(u)$, kai $\omega(x,y) \equiv 1$, t.y.

$$\phi(u) = E(e^{-\delta T}\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u), \quad \delta \ge 0.$$

Nagrinėjamu atveju, buvo gauta šios funkcijos asimptotinė formulė su žalomis, turinčiomis subeksponentinį pasiskirstymą. Autoriai parodė, kad pasirinkus $H \in \mathcal{S}$ ir $\delta > 0$

$$\phi(u) \sim \frac{\mu}{\delta}\overline{H}(u), \tag{4.21}$$

kai $u \to \infty$. Čia μ, kaip jau buvo minėta, yra eksponentinio pasiskirstymo parametras.

4.3 Diskontuotos baudos funkcijos $\phi_\omega(u)$ asimptotika rizikos atstatymo modelyje

Sakykime, turime rizikos atstatymo modelį, kuriame kapitalo procesas $U(t)$ aprašytas (4.1) lygybe, o $N(t)$ yra atstatymo skaičiuojamasis procesas, kurį generuoja dydžiai $\theta_1, \theta_2, ...$ Laikysime, kad $\theta = \theta_1$ turi absoliučiai tolydžią pasiskirstymo funkciją G, tankio funkciją g ir baigtinį vidurkį $1/\lambda$. Nagrinėjamu atveju, nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai $Y, Y_1, Y_2, ...$ turi bendrą absoliučiai tolydžią pasiskirstymo funkciją H, tankio funkciją h ir baigtinį vidurkį a. Tegul, be to, tenkinama gryno pelno sąlyga $\rho = c/\lambda - \mu$.

Tang ir Wei [54] rizikos atstatymo modelyje nagrinėjo diskontuotos baudos funkcijos

$$\phi_\omega(u) = E(e^{-\delta T}\omega(U(T-), |U(T)|)\mathbf{I}_{\{T<\infty\}}|U(0) = u)$$

asimptotiką. Jie gavo šios funkcijos asimptotines formules žaloms, priklausančioms apibendrintai subeksponentinių skirstynių klasei. Tegul

$$T = \inf\{t > 0 : U(t) < 0 | U(0) = u\},$$

kaip ir anksčiau, bankroto laikas. Laikysime, kad atsitiktiniai dydžiai $U(T-)$, $|U(T)|$ ir T turi jungtinę tankio funkciją $J(x, y, t|0)$. Nesunku pastebėti, kad ši tankio funkcija yra defektyvi, kai patenkinta gryno pelno sąlyga, nes

$$\int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty J(x, y, t|0) dx dy dt = \psi(0) < 1,$$

čia $\psi(u) = P(T < \infty)$ yra bankroto tikimybė. Aišku, kad funkcija

$$J(x, t|0) = \int_0^\infty J(x, y, t|0) dy \tag{4.22}$$

yra jungtinė dydžių $U(T-)$ ir T tankio funkcija, o

$$J(y|0) = \int_0^\infty \int_0^\infty J(x, y, t|0) dx dt$$

yra $|U(T)|$ tankio funkcija.

Apibrėšime apibendrintą subeksponentinių skirstynių klasę bei keletą kitų susijusių savokų. Sakoma, kad išmatuojama funkcija $f : [0, \infty) \to [0, \infty)$ su kažkokiu $\gamma \geq 0$ priklauso klasei $\mathcal{L}_d(\gamma)$, jeigu su visais dideliais x funkcija $f(x) > 0$ ir su visais realiais y yra teisinga riba

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x - y)}{f(x)} = e^{\gamma y}$$

Sakoma, kad f priklauso klasei $\mathcal{S}_d(\gamma)$, jeigu ji priklauso klasei $\mathcal{L}_d(\gamma)$, o riba

$$\lim_{x \to \infty} \frac{f^{2*}(x)}{f(x)} = 2d$$

egzistuoja ir yra baigtinė (žr. pavyzdžiui [8], [9], [28]). Yra žinoma, kad iš sąlygos $f \in \mathcal{L}_d(\gamma)$ kažkokiam $\gamma \geq 0$ išplaukia lygybė

$$\gamma = -\lim_{x \to \infty} \frac{1}{x} \ln f(x) = 2d. \tag{4.23}$$

Tegul F yra absoliučiai tolydi pasiskirstymo funkcija intervale $[0, \infty)$ su tankio funkcija f. Jeigu kažkokiam $\gamma \geq 0$ tankis f priklauso klasei $\mathcal{L}_d(\gamma)$, tai su visais realiais y :

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(x - y)}{\overline{F}(x)} = e^{\gamma y}.$$

Jeigu tankis f priklauso klasei $\mathcal{S}_d(\gamma)$, tai

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F^{2*}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2\widehat{f}(\gamma).$$

Šioje lygybėje

$$\widehat{f}(\gamma) = \int_0^\infty e^{\gamma x} f(x) dx.$$

Kai $F \in \mathcal{S}_d(\gamma)$ su $\gamma \geq 0$, sakoma, kad pasiskirstymo funkcija F turi eksponentiškai gęstančią uodegą. Jei $F \in \mathcal{L}_d(\gamma)$, sakoma, kad F turi γ-ilgą uodegą.

Apibrėšime dydžius, kurie bus reikalingi aprašyti pagrindiniam Tang ir Wei [54] straipsnio rezultatui. Pažymėkime atsitiktinius dydžius

$$N_+ = \inf\{n = 1, 2, ... : c\tau_n - S_n \geq 0\}, \quad N_- = \inf\{n = 1, 2, ... : c\tau_n - S_n < 0\}.$$

ir atsitiktinius laiko momentus

$$T_+ = \tau_{N_+}, \quad T_- = \tau_{N_-}.$$

Aišku, kad $T(0) = T_-$. Sakykime H_+ ir H_- yra atsitiktinių dydžių

$$L_+ = c\tau_{N_+} - S_{N_+}, \quad L_- = \tau_{N_-} - S_{N_-}.$$

pasiskirstymo funkcijos. Jeigu gryno pelno sąlyga yra patenkinta, tai dydis N_+ yra beveik visur baigtinis, o N_- įgyja begalinę reikšme su teigiama tikimybe. Kai $N_- = \infty$, dydis T_- nėra apibrėžtas.

Pažymėkime

$$\varpi(x) = \int_0^\infty \omega(x, y)h(x + y)dy, \quad x \geq 0 \tag{4.24}$$

$$\overline{W}(u) = \int_u^\infty \varpi(x)dx, \quad u \geq 0,$$

ir

$$J_\delta(x|0) = \int_0^\infty e^{-\delta t} J(x, t|0)dx,$$

čia $J(x, t|0)$ yra iš (4.22).

Sakykime riba

$$\alpha = -\lim_{x\to\infty} \frac{1}{x} \ln \varpi(x),$$

egzistuoja ir yra baigtinė. Suformuluosime pagrindinį Tang ir Wei [54] straipsnio rezultatą.

Teorema 4.2 *Tarkime, atstatymo rizikos modelyje žalų tankio funkcija h yra aprėžta. Sakykime, kai $\delta \vee \alpha > 0$ funkcija ϖ iš (4.24) lygybės yra lokaliai integruojama, o kitu atveju tegul funkcija ϖ globaliai integruojama. Be to, tegul $Ee^{\gamma L_- - \delta T_-} < 1$.*

(1) Kai $\delta \geq 0$, $0 \leq \alpha < \gamma$, $\delta \vee \alpha > 0$, o funkcijos $h \in \mathcal{S}_d(\gamma)$ ir $\varpi \in \mathcal{L}_d(\alpha)$. Tuomet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi_\omega(u)}{\varpi(u)} = \frac{Ee^{-(\delta+c\alpha)\theta}}{1 - Ee^{\alpha Y-(\delta+c\alpha)\theta}}.$$

(2) Kai $\delta \geq 0$, $0 \leq \gamma < \alpha$, $\delta \vee \gamma > 0$, $h \in \mathcal{S}_d(\gamma)$ ir $\varpi \in \mathcal{L}_d(\alpha)$, tai

$$\begin{aligned}\lim_{x\to\infty} \frac{\phi_\omega(u)}{h(u)} &= \frac{Ee^{-(\delta+c\gamma)\theta}}{1 - Ee^{\gamma Y-(\delta+c\gamma)\theta}} \frac{1}{1 - Ee^{\gamma L_- - \delta T_-}} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\gamma z} \varpi(x + z) \frac{J_\delta(x|0)}{\overline{H}(x)} dxdz.\end{aligned}$$

(3) Tegul $\delta \geq 0$, $0 \leq \gamma = \alpha$, $\delta \vee \gamma > 0$, bei tenkinama viena iš sąlygų arba "$h \in \mathcal{S}_d(\gamma)$, $\varpi \in \mathcal{L}_d(\gamma)$ ir $\varpi = O(h)$" arba "$h \in \mathcal{S}_d(\gamma)$, $\varpi \in \mathcal{S}_d(\gamma)$ ir $h = O(\varpi)$." Tuomet

$$\begin{aligned}\phi_\omega(u) &\sim \frac{Ee^{-(\delta+c\gamma)\theta}}{1 - Ee^{\alpha Y-(\delta+c\gamma)\theta}} \Bigg(\varpi(u) + \frac{h(u)}{1 - Ee^{\gamma L_- - \delta T_-}} \\ &\times \int_0^\infty \int_0^\infty e^{\gamma z} \varpi(x + z) \frac{J_\delta(x|0)}{\overline{H}(x)} dxdz\Bigg).\end{aligned} \tag{4.25}$$

Atskiru atveju, kai $h \in \mathcal{S}_d(\gamma)$, $\varpi \in \mathcal{S}_d(\gamma)$ ir $h = o(\varpi)$, tai paskutinis sąryšis virsta tokiu:

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi_\omega(u)}{\varpi(u)} = \frac{Ee^{-(\delta+c\gamma)\theta}}{1 - Ee^{\alpha Y-(\delta+c\gamma)\theta}}. \tag{4.26}$$

(4) Jeigu $\delta = \alpha = 0$, $\gamma > 0$, o funkcija $h \in \mathcal{S}_d(\gamma)$ bei ϖ yra nedidėjanti funkcija, kuriai dideliems $u > 0$ $\overline{W}(u) < \infty$ ir $\overline{W} \in \mathcal{L}_d(0)$. Tuomet

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi_\omega(u)}{\overline{W}(u)} = \frac{1}{\rho}. \tag{4.27}$$

(5) Sakykime $\delta = \gamma = 0$, $\alpha > 0$, $\overline{H} \in \mathcal{S}_d(0)$ ir $\varpi \in \mathcal{L}_d(\alpha)$. Tegul be to, funkcija h yra nedidėjanti. Tada

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\phi_\omega(u)}{\overline{H}(u)} = \frac{1}{\rho(1-\psi(0))} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(x+z, y) J(x, y+z|0)\,dxdydz.$$

(6) Tegul $\delta = \gamma = \alpha = 0$ bei tenkinama viena iš sąlygų arba "$\overline{H} \in \mathcal{S}_d(0)$, $\overline{W} \in \mathcal{L}_d(0)$ ir $\overline{W} = O(\overline{H})$" arba "$\overline{H} \in \mathcal{S}_d(0)$, $\overline{W} \in \mathcal{L}_d(0)$ ir $\overline{F} = O(\overline{W})$". Be to, tegul funkcijos h ir ϖ yra nedidėjančios. Tuomet

$$\phi_\omega(u) \sim \frac{1}{\rho}\overline{W}(u) + \frac{\overline{H}(u)}{\rho(1-\psi(0))} \int_0^\infty \int_0^\infty \int_0^\infty \omega(x+z, y) J(x, y+z|0)\,dxdydz.$$

Atskiru atveju, kai $\overline{H} \in \mathcal{S}_d(0)$, $\overline{W} \in \mathcal{L}_d(0)$ ir $\overline{H} = O(\overline{W})$ šis sąryšis virsta (4.27) sąryšiu.

Pastebėkime, kad šios teoremos (4.25) asimptotinė formulė klasikinio rizikos modelio atveju, kai tarplaikiai turi eksponentinį pasiskirstymą su parametru λ užrašoma tokia forma

$$\begin{aligned}\phi_\omega(u) \quad &\sim \quad \frac{\lambda\varpi(u)}{\delta + c\gamma + \lambda - \lambda\tilde{h}(\gamma)} \\ &+ \quad \frac{\lambda^2(\gamma+\theta)h(u)}{\left(\delta + c\gamma + \lambda - \lambda\tilde{h}(\gamma)\right)} \int_0^\infty \int_0^\infty e^{-\theta x+\gamma z} \varpi(x+z)\,dxdz,\end{aligned}$$

kur $\theta = \theta(\delta) \geq 0$ yra Lundbergo lygties

$$\lambda\tilde{h}(-\theta) = \delta + \lambda - c\theta$$

sprendinys. Čia $\tilde{h}(-\theta) = \int_0^\infty e^{-\theta x} h(x)dx$ yra funkcijos h Laplaso transformacija. Atskiru atveju, kai $\delta > 0$, $\gamma = 0$ ir funkcija $\omega(x, y) \equiv 1$ turime, kad $h(u) = o(\overline{F}(u))$. Vadinasi, pritaikę Lema 4.4(1) iš Tang ir Wei [54] nesunkiai gauname (4.21) formulę.

4.4 Funkcijos $\phi(u)$ asimptotika Erlang(2) modelyje

Nagrinėsime funkcijos $\phi(u)$ iš (4.8) lygybės asimptotiką Erlang(2) modelyje su žalomis, turinčiomis subeksponentinį pasiskirstymą. Priminsime, kad diskontuotos baudos funkcijos asimptotika su subeksponentinėmis žalomis buvo tyrinėjama jau anksčiau minėtame Šiaulio ir Asanavičiūtės [50] darbe. Autoriai nagrinėjo klasikinį rizikos modelį su eksponentiniais tarplaikiais ir gavo minėtos funkcijos asimptotinę formulę. Toliau bus išnagrinėtas kitas atvejis ir gauta diskontuotos baudos funkcijos asimptotinė formulė su tarplaikiais, turinčiais Erlang(2) pasiskirstymą. Prieš tai, suformuluosime lemas, kurios bus naudingos teoremos įrodyme. Pirmoji lema aprašo (4.5) atstatymo lygties sprendinio pavydalą. Lemos įrodymą galima rasti [44] darbe (žr. 2.1 teorema).

Lema 1.1 *Tegul funkcija ψ tenkina defektyvią atstatymo lygtį*

$$\psi(v) = \frac{1}{1+b} \int\limits_{(0,v]} \psi(v-x)\mathrm{d}V(x) + \frac{1}{1+b}W(v),\ v \geq 0$$

kur $b > 0$, o $V(x) = 1 - \overline{V}(x)$ yra pasiskirstymo funkcija, kuriai $V(0) = 0$, o $W(v)$ yra tolydi su $v \geq 0$.

Tuomet atstatymo lygties sprendinys tenkina tokią lygtį

$$\psi(v) = \frac{1}{b} \int\limits_{[0,v]} W(v-x)\mathrm{d}K(x) = \frac{1}{b} \int\limits_{(0,v]} W(v-x)\mathrm{d}K(x) + \frac{1}{1+b}W(v).$$

Čia $K(x) = 1 - \overline{K}(x)$ yra sudėtinė geometrinė pasiskirstymo funkcija:

$$\overline{K}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b}{1+b} \left(\frac{1}{1+b}\right)^n \overline{V^{*n}}(x),\ x \geq 0,$$

o *ir $\overline{V^{*n}}$ yra funkcijos V sąsūkos pačios su savimi uodega.*

Šios lemos įrodymą, galima rasti [19] (žr. 3.19 išvadą).

Lema 1.2 *Tegul F yra pasiskirstymo funkcija iš klasės S, o $G_1, G_2, ..., G_n$ yra pasiskirstymo funkcijos tenkinančios sąlygas*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{G}_i(x)}{\overline{F}(x)} = c_i,\ i = 1, 2,\ ...\, n,$$

su kažkokiais neneigiamais koeficientais $c_1, c_2, \dots, c_n$. Tuomet

$$\frac{\overline{G_1 * G_2 * ... * G_n}(x)}{\overline{F}(x)} \underset{x\to\infty}{\to} c_1 + ... + c_n.$$

Jeigu be to, $c_1 + c_2 + ... + c_n > 0$, tai $G_1 * G_2 * ... * G_n \in \mathcal{S}$.

Žemiau suformuluota teorema yra pagrindinis šio skyrelio rezultatas.

Teorema 4.3 *Sakykime, Erlang(2) modelyje yra tenkinama gryno pelno sąlyga, be to $H \in \mathcal{S}$. Kai $\delta > 0$*

$$\frac{\phi(u)}{\overline{H}(u)} \sim \frac{\lambda^2}{\delta^2 + 2\lambda\delta},\ u \to \infty.$$

Jeigu, be to

$$\frac{1}{a} \int\limits_0^u \overline{H}(y)dy \in \mathcal{S}$$

tai, kai $\delta = 0$,

$$\phi(u) \sim \frac{1}{\widehat{\theta} a} \int\limits_u^{\infty} \overline{H}(y)dy.$$

Įrodymas. Antra teoremos dalis yra gerai žinomas rezultatas (žr., pavyzdžiui, [18]). Taigi, nagrinėsime atvejį, kai $\delta > 0$. Remiantis 4.1 teorema gauname, kad funkcija $\phi(u)$ tenkina (4.9) lygtį, kur $\overline{G}(u)$ yra funkcijos G uodega, apibrėžta (4.10) lygybe. Vadinasi, iš Lemos 1.1 išplaukia, kad neneigiamam u funkcija $\phi(u)$ tenkina lygybę

$$\phi(u) = \frac{1}{\beta} \int\limits_{[0,u]} \overline{G}(u-x)\, \mathrm{d}L(x) \tag{4.28}$$

kurioje

$$\overline{L}(x) = 1 - L(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\beta}{(1+\beta)^{n+1}}\, \overline{G^{*n}}(x), \qquad x \geq 0.$$

Mūsų tikslas gauti funkcijos $\phi(u)$ asimptotinę formulę. Todėl iš pradžių nagrinėsime funkciją $\overline{G}(u)$. Tegul neneigiamam y

$$r(y) = \int\limits_{y}^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho_1 (x-y)}\, \overline{H}(x)\mathrm{d}x.$$

Tuomet, remiantis (4.10), gauname

$$\overline{G}(u) = \frac{\lambda^2}{c^2}(1+\beta) \int\limits_{u}^{\infty} \mathrm{e}^{-\rho_2 (y-u)}\, r(y)\mathrm{d}y.$$

Turime, kad

$$r(y) = \frac{1}{\rho_1} \left(\overline{H}(y) + \int\limits_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\rho_1 z}\mathrm{d}\overline{H}(z+y) \right), \tag{4.29}$$

o kiekvienam teigiamam M

$$\begin{aligned} & \left| \frac{1}{\overline{H}(y)} \int\limits_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\rho_1 z}\mathrm{d}\overline{H}(z+y) \right| \\ = \;& \frac{1}{\overline{H}(y)} \int\limits_{[0,M]} \mathrm{e}^{-\rho_1 z}\mathrm{d}\left(-\overline{H}(z+y)\right) + \frac{1}{\overline{H}(y)} \int\limits_{(M,\infty)} \mathrm{e}^{-\rho_1 z}\mathrm{d}\left(-\overline{H}(z+y)\right) \\ \leq \;& 1 - \frac{\overline{H}(y+M)}{\overline{H}(y)} + e^{-\rho_1 M}. \end{aligned}$$

Pasinaudojus žinomomis subeksponentinų pasiskirstymo funkcijų savybėmis (žr., pavyzdžiui, Lemą 1.3.5 [18]) gauname, kad kiekvienam fiksuotam M

$$\lim_{y\to\infty} \left(1 - \frac{\overline{H}(y+M)}{\overline{H}(y)}\right) = 0.$$

Pagal visus aukščiau gautus įverčius turime, kad

$$\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\overline{H}(y)} \int\limits_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\rho_1 y}\mathrm{d}\overline{H}(z+y) = 0. \tag{4.30}$$

Iš čia ir iš (4.29) išraiškos išplaukia, kad neaprėžtai didėjančiam y

$$r(y) = \frac{1}{\rho_1}\overline{H}(y)(1+o(1)).$$

Vadinasi, neaprėžtai didėjančiam u

$$\begin{aligned}
\overline{G}(u) &= \frac{\lambda^2}{c^2\rho_1}(1+\beta)(1+o(1))\int\limits_u^\infty \mathrm{e}^{-\rho_2(y-u)}\overline{H}(y)\mathrm{d}y \\
&= \frac{\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}(1+\beta)(1+o(1))\left(\overline{H}(u)+\int\limits_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\rho_2 v}\mathrm{d}\overline{H}(u+v)\right) \\
&= \frac{\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}(1+\beta)\,\overline{H}(u)(1+o(1)), \qquad (4.31)
\end{aligned}$$

nes analogiškai, kaip ir (4.30) lygybėje turime, kad

$$\lim_{u\to\infty}\frac{1}{\overline{H}(u)}\int\limits_{[0,\infty)} \mathrm{e}^{-\rho_2 v}\mathrm{d}\overline{H}(v+u)=0.$$

Liko panagrinėti pirmos išraiškos lygtyje (4.28) asimptotiką. Pasiskirstymo funkcija H priklauso klasei $\mathcal{S}$, taigi remiantis Lema 1.2 kiekvienam fiksuotam n

$$\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{G}^{*n}(u)}{\overline{H}(u)}=\frac{\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}(1+\beta)\,n\,.$$

Pastebime, kad funkcija G taip pat priklauso klasei $\mathcal{S}$. Dar kartą pasinaudojus subeksponentinių pasiskirstymo funkcijų pagrindinėmis savybėmis (žr., pavyzdžiui Lemą 1.3.5 iš [18]), gauname, kad egzistuoja baigtinė konstanta K_β, tokia, kad visiems $n\geq 2$

$$\sup_{u\geq 0}\frac{\overline{G^{*n}}(u)}{\overline{G}(u)}\leq K_\beta\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^n.$$

Vadinasi, visiems neneigiamiems u

$$\frac{\overline{G^{*n}}(u)}{(1+\beta)^n\overline{H}(u)} = \frac{\overline{G^{*n}}(u)}{(1+\beta)^n\overline{G}(u)}\,\frac{\overline{G}(u)}{\overline{H}(u)}\leq\frac{K_\beta\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}(1+\beta)\frac{\left(1+\frac{\beta}{2}\right)^n}{(1+\beta)^n}.$$

Pagal dominuojančio konvergavimo teoremą

$$\begin{aligned}
\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{L}(u)}{\overline{H}(u)} &= \frac{\beta}{(1+\beta)}\sum_{n=1}^\infty\frac{1}{(1+\beta)^n}\lim_{u\to\infty}\frac{\overline{G}^{*n}(u)}{\overline{H}(u)} \\
&= \frac{\beta\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}\sum_{n=1}^\infty\frac{n}{(1+\beta)^n}=\frac{\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}\frac{(1+\beta)}{\beta}.
\end{aligned}$$

Vadinasi, visiems neaprėžtai didėjantiems u

$$\overline{L}(u)\sim\frac{\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}\frac{(1+\beta)}{\beta}\overline{H}(u).$$

Jeigu u yra neneigiamas, tai

$$\overline{G*L}(u)=\int\limits_{[0,u]}\overline{G}(u-y)\mathrm{d}L(y)+\overline{L}(u).$$

Dar kartą pasinaudoję Lema 1.2, gauname, kad

$$\int\limits_{[0,u]}\overline{G}(u-y)\mathrm{d}L(y)\sim\frac{\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}(1+\beta)\overline{H}(u).$$

Vadinasi iš (4.28) išplukia, kad neaprėžtai didėjantiems u

$$\phi(u)\sim\frac{\lambda^2}{c^2\rho_1\rho_2}\left(\frac{1}{\beta}+1\right)\overline{H}(u).$$

arba

$$\frac{\phi(u)}{\overline{\overline{H}}(u)} \sim \frac{\lambda^2}{\delta^2 + 2\lambda\delta}. \tag{4.32}$$

Teorema įrodyta. □

Išvados

Šiame skyriuje buvo nagrinėjama Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos asimptotika Erlang(2) modelyje su subeksponentinėmis žalomis. Šios funkcijos asimptotinė formulė buvo gauta iš diskontuotos baudos funkcijos atstatymo lygties. Nagrinėjant atskirą baudos funkcijos atvejį, darbe buvo išvesta atstatymo lygtis atsisakant tankio egzistavimo prielaidos. Toks žingsnis yra esminis, nes žalų tankio egzistavimas susiaurina subeksponentinių skirstinių klasę. Gauta asimptotinė formulė turi paprastą ir aiškią išraišką, o tai leidžia lengvai surasti diskontuotos baudos funkcijos reikšmes didelėms kapitalo reikšmėms.

Literatūros sąrašas

[1] E.S. Andersen. On the Collective theory of risk in the case of contagion between the claims. *Transactions of the XVth International Congress of Actuaries*, II, 219-229, 1957 .

[2] A. Baltrūnas, R. Leipus, J. Šiaulys, Precise large deviation results for the total claim amount under subexponential claim sizes. *Statistics and Probability Letters*, 78, 1206-1214, 2008.

[3] P. Boogaert, V. Crijins, Upper bounds on ruin probabilities in case of negative loadings and positive interest rates, *Insurance: Mathematics and Economics*, 6, 221-232, 1987.

[4] K.A. Borovkov, D.C.M. Dickson, On the ruin time distribution for a Sparre Andersen process with exponential claim sizes. *Insurance: Mathematics and Economics*, 42, 1104-1108, 2008.

[5] W.S. Chan and L. Zhang, Direct derivation of finite time ruin probabilities in the discrete risk model with exponential and geometric claims, *North American Actuarial Journal*, 10(4), 269-279.

[6] S. Cheng, H.U. Gerber, E.S.W. Shiu, Discounted probabilities and ruin theory in the compound binomial model, *Insurance: Mathematics and Economics*, 26, 239-250, 2000.

[7] Y. Cheng, Q. Tang, Moments of the surplus before ruin and the deficit at ruin in the Erlang(2) risk process, *North American Actuarial Journal*, 7(1), 11-12, 2003.

[8] J.Chover, P. Ney, S. Wainger, Functions of probability measures, *Journal of Mathematical Analysis*, 26, 255-302, 1973.

[9] J.Chover, P. Ney, S. Wainger Degeneracy properties of subcritical branching processes, *Annals of Probability*, 1, 663-673, 1973.

[10] H. Cramer, On the Mathematical Theory of Risk, *Skandia Jubilee Volume*, Stockholm, 1930.

[11] D.C.M. Dickson, Some comments on the compound binomial model, *ASTIN Bulletin*, 24, 33-45, 1994.

[12] D.C.M. Dickson, C. Hipp, On the time of ruin for Erlang(2) risk processes, *Insurance: Mathematics and Economics*, 29, 333-344, 2001.

[13] D.C.M. Dickson, B.D. Hughes, Z. Lianzeng, The density of the time to ruin for a Sparre Andersen process with Erlang arrivals and exponential claims. *Scandinavian Actuarial Journal*, 5, 358-376, 2005.

[14] D.C.M. Dickson, G.E. Willmot, The density of the time to ruin in the classical Poisson risk model. *ASTIN Bulletin* 35, 45-60, 2005.

[15] F. Delbaen, J. Haezendonck, Classical risk theory in an economic environment, *Insurance: Mathematics and Economics*, 6, 85-116, 1990.

[16] S.D. Drekic, G.E. Willmot, On the density and moments of the time to ruin with exponential claims, *Astin Bulletin*, 33(1), 11-21, 2003.

[17] F. Dufresne, H. Gerber, Risk theory for the compound Poisson process that is perturbed by diffusion, *Insurance: Mathematics and Economics*, 12, 9-22, 1991.

[18] P. Embrechts, N. Veraverbeke, Estimates for the probability of ruin with special emphasis on the possibility of large claims, *Insurance: Mathematics and Economics*, 1(1), 55-72, 1982.

[19] S. Foss, D. Korshunov, S. Zachary, An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions, *Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach*, preprint OWP, 13, 2009.

[20] J.M.A. Garcia, Explicit solutions for survival probabilities in a finite time horizon, *ASTIN Bulletin*, 35(1), 113-130, 2002.

[21] J. Garrido, M. Morales, On the expected discounted penalty function for the Levy risk proceses, Technical Report. Concordia University. Department of Mathematics and Statistics, Montreal, Quebec, 2005.

[22] H.U. Gerber, Mathematical fun with compound binomial process, *ASTIN Bulletin*, 18(2), 161-168, 1988.

[23] H. Gerber, E.S.W. Shiu. On the time value of ruin. *North American Actuarial Journal*, 2(1), 48-78, 1998.

[24] H.U. Gerber, E.S.W. Shiu, The time value of ruin in a Sparre Andersen model, *North American Actuarial Journal*, 9, 49-84, 2005.

[25] J.M. Harrison, Ruin problems with compounding assets, *Stochastic Processes and their Applications*, 5, 67-79, 1977.

[26] M. Huzak, M. Perman, H. Sikic, Z. Vondracek, Ruin probabilities and decompositions for general perturbed risk processes, *Annals of Applied Probability*, 14, 1378-1397, 2004.

[27] T. Jiang, Large-deviation probabilities for maxima of sums of subexponential random variables with application to finite-time ruin probabilities. *Science in China Series A: Mathematics*, 51, 1257-1265, 2008.

[28] C. Klüppelberg, Estimation of ruin probabilities by means of hazard rates. *Insurance: Mathematics and Economics*, 8(4), 279-285, 1989

[29] C. Klüppelberg, T.Mikosch, Large deviations of heavy-tailed random sums with applications in insurance and finance, *Juournal of Applied Probability*, 34, 293-308, 1997.

[30] C. Klüppelberg, A.E. Kyprianou, R.A. Maller, Ruin probabilities and overshoots for general Levy insurance risk proceses, *Annals of Applied Probability*, 14, 1766-1801, 2004.

[31] D. Korshunov, Large-deviation probabilities for maxima of sums of independent random variables with negative mean and subexponential distribution, *Theory of Probability and its Applications*, 46, 355-366, 2002.

[32] D. Landriault, G. Willmot, On the Gerber-Shiu discounted penalty function in the Sparre Andersen model with an arbitrary interclaim time distribution, 42(2), 600-608, 2008.

[33] R. Leipus, J. Šiaulys, Asymptotic behaviour of the finite-time ruin probability under subexponential claim sizes, *Insurance: Mathematics and Economics*, 40, 498-508, 2007.

[34] R. Leipus, J. Šiaulys, Asymptotic behaviour of the finite-time ruin probability in renewal risk model. *Applied Stochastic Models in Business and Industry*, 25(3), 309-321 2008.

[35] S. Li, J. Garrido, On ruin for the Erlang(n) risk process, *Insurance: Mathematics and Economics*, 34, 391-408, 2004.

[36] S. Li, J. Garrido, On the time value of ruin in the discrete time risk model, Working paper 02-18, Business Economics, University Carlos III of Madrid, 1-28, 2002.

[37] X.S. Lin, G.E. Willmot, Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory, *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 63-84, 1999.

[38] Y. Liu, Y. Hu, Large deviations for heavy-tailed random sums of independent random variables with dominatedly varying tails, *Science In China (Series A)*, 46, 383-395, 2003.

[39] F. Lundberg, Uber die theorie der rickversicherung, Ber VI Intern Kong Versich Wisens, 1, 877-948, 1909.

[40] R. Michel, Representation of a time-discrete probability of eventual ruin, *Insurance: Mathematics and Economics*, 8, 149-152, 1989.

[41] T. Mikosch, Non-Life Insurance Mathematics, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York 2004.

[42] K. Pavlova, G.E. Willmot, The discrete stationary renewal risk model and the Gerber-Shiu discounted penalty function, *Insurance: Mathematics and Economics*, 35, 267-277, 2004.

[43] C.O. Segerdahl, A survey of results in collective risk theory, *Probability and Statistics*. John Wiley and Sons, Stockholm, 276-299, 1954.

[44] X. Sheldon Lin, G. E. Willmot, Analysis of a defective renewal equation arising in ruin theory, *Insurance: Mathematics and Economics*, 25, 63-84, 1999.

[45] E.S.W. Shiu, The probability of eventual ruin in the compound binomial model, *ASTIN Bulletin*, 19(2), 179-190, 1989.

[46] C. Su, Q. Tang, T. Jiang, A contribution to large deviations for heavy-tailed random sums, *Science In China (Series A)*, 44, 438-444, 2001.

[47] L.J. Sun, On the discounted penalty at ruin at the Erlang(2) risk process, *Statistics and probability letters*, 72, 205-207, 2005.

[48] B. Sundt, J. Teugels, Ruin estimates under interest force, *Insurance: Mathematics and Economics*, 16, 7-22, 1995.

[49] B. Sundt, J. Teugels, The adjustment coeffcient in ruin estimates under interest force, *Insurance: Mathematics and Economics*, 19, 85-94, 1997.

[50] J. Šiaulys, R. Asanavičiūtė, On the Gerber-Shiu discounted penalty function for subexponential claims, *Lithuanian Mathematical Journal*, 46, 487-493, 2006.

[51] Q. Tang, Asymptotics for the finite time ruin probability in the renewal model with consistent variation, *Stochastic Models*, 20, 281-297, 2004.

[52] Q. Tang, R. Kaas, Note on the tail behaviour of random walk maxima with heavy tails and negative drift, *North American Journal*, 7(3), 2004.

[53] Q. Tang, C. Su, T. Jiang, J. Zhang, Large deviations for heavy-tailed random sums in compound renewal model, *Statistics and Probabilyti letters*, 52, 91-100, 2001.

[54] Q. Tang, L. Wei, Asymptotic aspects of the Gerber-Shiu function in the renewal risk model using Wiener-Hopf factorization and convolution equivalence, *Insurance: Mathematics and Economics*, 46, 2010.

[55] C.C.L. Tsai, L.J. Sun, On the discounted distribution functions for Erlang(2) process, *Insurance: Mathematics and Economics*, 35, 5-19, 2004.

[56] G.E. Willmot, On the discounted penalty function in the renewal risk model with general interclaim times, *Insurance: Mathematics and Economics*, 41, 17-31, 2007.

[57] G.E. Willmot, Ruin probabilities in the compound binomial model, *Insurance: Mathematics and Economics*, 12, 133-142, 1993.

[58] G.E. Willmot, D.C.M. Dickson, The Gerber-Shiu discounted penalty function in the stationary renewal risk model, *Insurance: Mathematics and Economics*, 32, 403-411, 2004.

[59] G.E. Willmot, X.S. Lin, Lundberg approximations for compound distributions with insurance applications, Lecture Notes in Statistics 156, *Springer-Verlag*, 2000.

[60] G.E. Willmot, J.K. Woo, On the class of Erlang mixtures with risk theoretic applications. *North American Actuarial Journal*, 11, 2, 99-115, 2007.

[61] H.L. Yang, L. Zhang, Spectrally negative Levy processes with applications in risk theory, *Advances in Applied Probability*, 33, 281-291, 2001.