VILNIAUS UNIVERSITETAS

Danutė Regina Genienė

LERCHO DZETA FUNKCIJŲ SU ALGEBRINIU IRACIONALIUOJU PARAMETRU RIBINĖS TEOREMOS

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2009

Disertacija rengta 2003–2009 metais Šiaulių universitete.

Disertacija ginama eksternu.

Mokslinis konsultantas:

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Disertacija ginama Vilniaus universito Matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:

Prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Nariai:

Prof. habil. dr. Artūras Dubickas (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Prof. habil. dr. Bronius Grigelionis (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Doc. dr. Marijus Radavičius (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Prof. habil. dr. Remigijus Leipus (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Oponentai:

Prof. dr. Ramūnas Garunkštis (Vilniaus Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių Universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2009 m. gruodžio 29 d., 14 val. Vilniaus universiteto Nuotolinių studijų centre.
Adresas: Šaltinių 1A, 03225 Vilnius, Lietuva.

Disertacijos santrauka išiuntinėta 2009 m. lapkričio .... d.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Danutė Regina Genienė

LIMIT THEOREMS FOR LERCH ZETA-FUNCTIONS WITH ALGEBRAIC IRRATIONAL PARAMETER

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, mathematics (01 P)

Vilnius, 2009

The thesis was carried out in 2003–2009 at Šiauliai University.

The dissertation was prepared externally.

Scientific consultant:

Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics – 01P)

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman:

Prof. Dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Members:

Prof. Dr. Habil. Artūras Dubickas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Prof. Dr. Habil. Bronius Grigelionis (Institute of Mathematics and Informatics, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Doz. Dr. Marijus Radavičius (Institute of Mathematics and Informatics, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Prof. Dr. Habil. Remigijus Leipus (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Opponents:

Prof. Dr. Ramūnas Garunkštis (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Doz. Dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on December 29, 2009, in Vilnius Unversity remote Education Study Center at 2 pm.
Address: Šaltinių 1A, 03225 Vilnius, Lithuania.

The summary of dissertation was distributed on November ...., 2009.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

DISERTACINIO DARBO APRAŠYMAS

Mokslinė problema ir tyrimo objektas. Tyrimo objektas yra Lercho dzeta funkcija su algebriniu iracionaliuoju parametru, o mokslinė problema - šios funkcijos ribinės teoremos silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme įvairiose erdvėse.

Tikslas ir uždaviniai. Darbo tikslas - pateikti Lercho dzeta funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ su $\lambda \in (0, 1)$ ir algebriniu iracionaliuoju parametru α asimptotinio elgesio tikimybinę charakterizaciją ribinių teoremų silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme pavidalu. Darbo uždaviniai yra šie:

1. Įrodyti ribinę teoremą kompleksinėje plokštumoje funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α.

2. Įrodyti jungtinę ribinę teoremą kompleksinėje plokštumoje Lercho dzeta funkcijų rinkiniui su algebriniais iracionaliaisiais parametrais.

3. Įrodyti ribinę teoremą analizinių funkcijų erdvėje funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α.

Aktualumas. Lercho dzeta funkcija nėra tiek svarbi analizinėje skaičių teorijoje kaip, pavyzdžiui, Rymano dzeta funkcija ar Dirichlė L funkcijos. Tačiau, iš kitos pusės, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ yra klasikinė dzeta funkcija, kuri, išskyrus kai kuriuos specialius atvejus, neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius, todėl yra įdomu palyginti jos savybes su dzeta funkcijų, turinčių Oilerio sandaugą, savybėmis. Be to, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ priklauso nuo dviejų parametrų λ ir α ir yra įtakojama jų aritmetinės prigimties. Taigi, Lercho dzeta funkcija yra labai įdomus klasikinis matematikos objektas.

Tikimybinių metodų taikymo idėja dzeta funkcijų teorijoje priklauso H. Borui (Bohr). Jis numatė, kad sudėtingą dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymą galima aprašyti tikimybiniais dėsniais. H. Boras, B. Jesenas (Jessen) ir A. Vintneris (Wintner) pirmieji įrodė tikimybinio pobūdžio ribines teoremas dzeta funkcijoms. Paskutinieji penkiolika metų yra naujas H. Boro idėjų plėtojimo etapas. D. Džoineris (Joyner) [10], B. Bagčis (Bagchi) [2], K. Macumotas (Matsumoto) [19], [20], J. Štoidingas (Steuding) [23], A. Laurinčikas [13] ir jo mokiniai R. Garunkštis [14], R. Kačinskaitė, R. Šleževičienė, I. Belovas, J.Ignatavičiūtė, J. Genys, V. Garbaliauskienė, R. Macaitienė sukūrė šiuolaikinę dzeta funkcijų tikimybinę teoriją, turinčią svarbių pritaikymų universalumo teorijoje. Todėl šios krypties tyrimai turi svarią įtaką matematikos vystymuisi, jos taikymams.

Tikimybines ribines teoremas Lercho dzeta funkcijai su transcendenčiuoju ir racionaliuoju parametru α įrodė A. Laurinčikas, R. Garunkštis, K. Macumotas, J. Štoidingas ir kiti [5], [15], [16]. Tačiau pats sudėtingiausias algebrinio iracionaliojo parametro α atvejis iki šiol nebuvo nagrinėtas. Disertacijoje užpildoma ši spraga Lercho dzeta funkcijos teorijoje.

Tyrimų metodika. Ribinių teoremų įrodymai remiasi Lercho dzeta funkcijos analizine teorija bei silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorija. Kontūrinio integravimo metodas, Prochorovo teoremos ir ergodinės teorijos elementai taip pat yra taikomi. Be to, Kaselso (Cassels) rezultatas apie sistemos $\{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}, \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$ su algebriniu iracionaliuoju α dalinį nepriklausomumą aklieka svarbų vaidmenį įrodymuose. Tai yra naujas momentas dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo teorijoje.

Naujumas ir praktinė vertė. Visi disertacijos rezultatai yra nauji. Ribinės teoremos Lercho dzeta funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$, $\lambda \in (0,1)$, su algebriniu iracionaliuoju parametru α yra įrodomos pirmą kartą.
Disertacijos rezultatai yra teoriniai. Jie užpildo buvusią spragą Lercho dzeta funkcijos teorijoje ir gali būti taikomi tolesniuose šios funkcijos tyrimuose.

Darbo struktūra. Disertacija yra parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, trys skyriai, išvados, mokslinių publikacijų disertacijos tema sąrašas ir žymenys. Bendra darbo apimtis - 71 puslapis.

Problemos apžvalga ir pagrindiniai rezultatai. Lercho dzeta funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, su parametrais $\lambda \in \mathbb{R}$ ir $\alpha \in \mathbb{R}, 0 < \alpha < 1$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama eilute

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

o kitiems s - analiziškai pratęsiant. Kai $\lambda \in \mathbb{Z}$, funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$ tampa Hurvico dzeta funkcija

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}, \quad \sigma > 1,$$

kuri yra meromorfinė funkcija, turi paprastąjį polių taške $s = 1$ ir $\mathrm{Res}_{\mathrm{s}=1}\zeta(\mathrm{s}, \alpha) = 1$. Jei $\lambda \notin \mathbb{Z}$, tuomet $L(\lambda, \alpha, s)$ yra sveikoji funkcija. Šiuo atveju, neapribodami bendrumo, galime laikyti, kad $0 < \lambda < 1$.

Lercho dzeta funkcija nepriklausomai buvo apibrėžta [17] ir [18] darbuose. Funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$, $0 < \lambda < 1$, su visais s tenkina funkcinę lygtį

$$L(\lambda, \alpha, 1-s) = \frac{\Gamma(s)}{(2\pi)^s} \Bigg(\exp\left\{ \frac{\pi i s}{2} - 2\pi i \alpha \lambda \right\} L(-\alpha, \lambda, s) +$$

$$+ \exp\left\{ -\frac{\pi i s}{2} + 2\pi i \alpha(1-\lambda) \right\} L(\alpha, 1-\lambda, s) \Bigg)$$

Yra žinomi keli šios lygties įrodymai. Pirmąjį iš jų pateikė M. Lerchas [17]. Straipsnio [1] įrodymas remiasi viena transformacijos formule ir skirtumine diferencialine lygtimi, kurią tenkina funkcija $L(\lambda, \alpha, s)$. Straipsnyje [22] yra taikoma Puasono sumavimo formulė, tuo tarpu [21] straipsnis naudoja Furjė eilučių metodą. B. C. Berndtas (Berndt) pasiūlė [3] paprastus įrodymus, paremtus kontūriniu integravimu bei Oilerio - Maklioreno sumavimo formulės taikymu.

Funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ teorija yra pateikta [14] monografijoje. Jos 5 skyrius yra skirtas Lercho dzeta funkcijos statistinėms savybėms. Čia yra gautos ribinės teoremos silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme įvairiose erdvėse funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$.

Kurį laiką po Lercho ir kitų autorių darbų apie funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ funkcinę lygtį ši funkcija buvo pamiršta. Tiktai 1987 m. D. Klušas (Klusch) gavo [11] funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ modulio kvadrato vidurkio asimptotinę formulę

$$\int_0^T |L(\lambda, \alpha, \sigma + it)|^2 dt \sim \begin{cases} T \log T, & \text{jei} \quad \sigma = \frac{1}{2}, \\ T\zeta(2\sigma, \alpha), & \text{jei} \quad \frac{1}{2} < \sigma < 1, \end{cases}$$

kai $T \to \infty$. Po dvejų metų jis pateikė [12] integralo

$$\int_0^\infty |L(\lambda, \alpha, \sigma + it)|^2 e^{-\delta t} dt$$

asimptotinį skleidinį pagal δ. Šie rezultatai stimuliavo tikimybinius tyrimus Lercho dzeta funkcijos teorijoje.

Minėti D. Klušo rezultatai buvo patikslinti [8] darbe naudojant funkcijos $L(\lambda, \alpha, s)$ artutinę funkcinę lygtį.

Tarkime, kad meas$\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas, $T > 0$ ir

$$\nu_T^t(\dots) = \frac{1}{T} \text{meas}\{t \in [0, T] : \dots\};$$

čia vietoje daugtaškio yra rašoma sąlyga, kurią tenkina t. Visoje disertacijoje yra laikoma, jog $0 < \lambda < 1$.

Pirmiausiai primename ribines teoremas kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$. Simboliu $\mathcal{B}(S)$ žymime erdvės S Borelio aibių klasę. Apibrėžiame

$$P_T(A) = \nu_T^t(L(\lambda, \alpha, \sigma + it) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Straipsnyje [5], taip pat žr. [14], buvo gautas toks tvirtinimas.

A teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas. Tada su bet kuriuo α, $0 < \alpha \leq 1$, erdveje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P_σ, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas P_T.*

A teoremoje gaunamas tik mato P_T ribinio mato egzistavimas. Tačiau taikymuose yra reikalinga ribinio mato išreikštinė forma. Tokia mato P_σ išraiška transcendenčiojo arba racionaliojo parametro α atveju išplaukia iš ribinių teoremų analizinių funkcijų erdvėje.
Tarkime, jog $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje ir

$$\Omega_1 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m;$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0$. Pagal Tichonovo teoremą, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω_1 yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1))$ egzistuoja tikimybinis Haro (Haar) matas m_{1H}. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1), m_{1H})$. Tegul $\omega_1(m)$ yra elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$. Tegul $\sigma > \frac{1}{2}$ ir $\omega_1 \in \Omega_1$. Apibrėžiame

$$L_1(\lambda, \alpha, \sigma, \omega_1) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \lambda m} \omega_1(m)}{(m+\alpha)^\sigma}.$$

Tuomet $L_1(\lambda, \alpha, \sigma, \omega_1)$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega_1, \mathcal{B}(\Omega_1), m_{1H})$. Iš [14] monografijos 5.2.2 teoremos išplaukia toks rezultatas. Primename, kad α yra transcendentusis, jei nėra polinomų $P(x)$ su racionaliaisiais koeficientais, kad $P(\alpha) = 0$.
B teorema. *Tarkime, kad parametras α yra transcendentusis. Tuomet tikimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio dydžio $L_1(\lambda, \alpha, \sigma, \omega_1)$ skirstinį.*

Primename, kad atsitiktinio dydžio $L_1(\lambda, \alpha, \sigma, \omega_1)$ skirstinys yra toks tikimybinis matas P_{L_1}, kad

$$P_{L_1}(A) = m_{1H}(\omega_1 \in \Omega_1 : L_1(\lambda, \alpha, \sigma, \omega_1) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Dabar tegul

$$\Omega_2 = \prod_{p \in \mathbb{P}} \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p, o $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė. Analogiškai toro Ω_1 atvejui gauname tikimybinę erdvę $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2), m_{2H})$, kurioje m_{2H} yra tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega_2, \mathcal{B}(\Omega_2))$. Tarkime, jog $\omega_2(p)$ yra elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p, $p \in \mathbb{P}$. Pratęsiame $\omega_2(p)$ į aibę $\mathbb{N}$ formule

$$\omega_2(m) = \prod_{p^k \| m} \omega_2^k(p),$$

kurioje $p^k \| m$ reiškia, kad $p^k | m$, bet $p^{k+1} \nmid m$. Ši konstrukcija leidžia nagrinėti funkciją $L(\lambda, \alpha, s)$ su racionaliuoju α. Tegul $\alpha = \frac{a}{q}$, $a, q \in \mathbb{N}$, $1 \le a \le q$ ir $(a, q) = 1$. Kai $\sigma > \frac{1}{2}$ ir $\omega_2 \in \Omega_2$, apibrėžiame kompleksinį atsitiktinį dydį $L_2(\lambda, \alpha, s, \omega_2)$ formule

$$L_2(\lambda, \alpha, s, \omega_2) = \omega_2(q) q^s \mathrm{e}^{-2\pi i \lambda \frac{a}{q}} \cdot \sum_{\substack{m=1 \\ m \equiv a (\mathrm{mod} q)}}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \lambda \frac{m}{q}} \omega_2(m)}{m^s},$$

ir tegul P_{L_2} yra atsitiktinio dydžio $L_2(\lambda, \alpha, s, \omega_2)$ skirstinys, t. y.

$$P_{L_2}(A) = m_{2H}(\omega_2 \in \Omega_2 : L_2(\lambda, \alpha, s, \omega_2) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Tuomet iš [14] monografijos 5.4.1 teoremos turime tokį tvirtinimą.
C teorema. *Tegul* $\alpha = \frac{a}{q}$, $a, q \in \mathbb{N}$, $1 \le a \le q$ *ir* $(a, q) = 1$. *Tuomet tikimybinis matas* P_T, *kai* $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* P_{L_2}.
J. Ignatavičiūtė gavo [9] teoremų A, B ir C diskrečiuosius variantus. B ir C teoremos rodo, jog lieka išnagrinėti algebrinio iracionaliojo parametro α atvejį. Šiai problemai yra skiriamas pirmasis disertacijos skyrius. Taigi, tegul α yra algebrinis iracionalusis skaičius, $0 < \alpha < 1$, ir

$$L(\alpha) = \{\log(m + \alpha) : m \in \mathbb{N}_0\}.$$

J. W. S. Kaselsas įrodė [4], jog bent 51 procentas aibės $L(\alpha)$ elementų yra tiesiškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Tegul $I(\alpha)$ yra kuris nors maksimalus tiesiškai nepriklausomas virš $\mathbb{Q}$ aibės $L(\alpha)$ poaibis. Jeigu $I(\alpha) = L(\alpha)$, tai turime situaciją, analogišką B teoremos atvejui, nes aibė $L(\alpha)$ su transcendenčiuoju α yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$. Todėl laikome, jog $I(\alpha) \neq L(\alpha)$. Tegul $D(\alpha) = L(\alpha) \setminus I(\alpha)$. Tuomet aibė $\{d_m\} \bigcup I(\alpha)$ su kiekvienu $d_m \in D(\alpha)$ yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$. Todėl egzistuoja baigtinis elementų skaičius $i_{m_1}(m), ..., i_{m_{n(m)}}(m) \in I(\alpha)$ ir skaičiai $k_0(m), ..., k_n(m) \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$, kad

$$d_m = -\frac{k_1(m)}{k_0(m)} i_{m_1}(m) - ... - \frac{k_n(m)}{k_0(m)} i_{m_{n(m)}}(m).$$

Kadangi aibės $L(\alpha)$ elementai yra $\log(m + \alpha)$, tai iš čia randame, kad

$$m + \alpha = (m_1(m) + \alpha)^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}} \dots (m_n(m) + \alpha)^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}}. \tag{1}$$

Apibrėžiame du aibės $\mathbb{N}_0$ poaibius

$$\mathcal{M}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m + \alpha) \in I(\alpha)\},$$

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}_0 : \log(m + \alpha) \in D(\alpha)\},$$

ir tegul

$$\Omega = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \gamma_m;$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Tuomet Ω taip pat yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H, ir turime tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Kai galioja (1) formulė, pratęsiame funkciją $\omega(m)$ į visą aibę $\mathbb{N}_0$ formule

$$\omega(m) = \omega^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}}(m_1(m)) \dots \omega^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}}(m_n(m)), \quad m \in \mathcal{N}(\alpha). \tag{2}$$

Čia yra imamos pagrindinės šaknų reikšmės. Taigi, turime, kad $\{\omega(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra kompleksinių atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, seka.

Tarkime, kad $\mathcal{A}$ yra algebrinių iracionaliųjų skaičių α, $0 < \alpha < 1$, kuriems skaičiai (2) formulėje yra sveikieji. Jei $\alpha \in \mathcal{A}$, tai nesunku matyti, kad $\{\omega(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra poromis ortogonalių atsitiktinių dydžių tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ seka. Todėl, panaudojus Radamacherio teoremą apie poromis ortogonalių atsitiktinių dydžių eilutes, standartiniu būdu gaunama, jog pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$,

$$L(\lambda, \alpha, \sigma, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \lambda m} \omega(m)}{(m + \alpha)^{\sigma}}$$

yra kompleksinis atsitiktinis dydis, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul P_L yra atsitiktinio dydžio $L(\lambda, \alpha, \sigma, \omega)$ skirstinys.
Pirmojo skyriaus pagrindinis rezultatas yra ši teorema.
1.1 teorema. *Tarkime, kad $\lambda \in (0,1)$, $\alpha \in \mathcal{A}$ ir $\sigma > \frac{1}{2}$. Tuomet tikimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į P_L.*

Pastebime, kad 1.1 teoremos analogas Hurvico dzeta funkcijai buvo gautas [15] darbe. Tačiau disertacijoje yra pateikiamas paprastesnis ir trumpesnis 1.1 teoremos įrodymas.

Antrasis disertacijos skyrius yra skirtas jungtinei ribinei teoremai kompleksinėje plokštumoje Lercho dzeta funkcijoms su algebriniais iracionaliaisiais parametrais.

Pirmoji jungtinė ribinė teorema kompleksinėje plokštumoje Lercho dzeta funkcijoms buvo gauta [15] straipsnyje.
D teorema. *Tarkime, kad $r > 1$ ir $\min\limits_{1 \le j \le r} \sigma_j > \frac{1}{2}$. Tuomet su visais realiaisiais parametrais $\lambda_1, ..., \lambda_r$ ir $\alpha_1, ..., \alpha_r$, $0 < \alpha_j \le 1$, $j = 1, ..., r$, erdvėje $(\mathbb{C}^r, \mathcal{B}(\mathbb{C}^r))$ egzistuoja toks tikimybinis matas P, į kurį, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja tikimybinis matas*

$$\nu_T^t\big((L(\lambda_1, \alpha_1, \sigma_1 + it), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, \sigma_r + it)) \in A\big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

D teoremoje ribinio mato P pavidalas nėra nurodomas. Jungtinė ribinė teorema su išreikštiniu ribinio mato pavidalu analizinių funkcijų erdvėje Lercho dzeta funkcijoms buvo gauta [15] darbe. Tegul $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\right\}$, o $H(D)$ yra analizinių srityje D

funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. Iš šios teoremos erdvėje $H^r(D)$ išplaukia ribinė teorema erdvėje $\mathbb{C}^r$.
Apibrėžiame

$$\Omega_1^{(r)} = \prod_{j=1}^{r} \Omega_{1j}$$

su $\Omega_{1j} = \Omega_1$, $j = 1, ..., r$. Tuomet $\Omega_1^{(r)}$ vėl yra kompaktinė topologinė Abelio grupė, ir turime tikimybinę erdvę $(\Omega_1^{(r)}, \mathcal{B}(\Omega_1^{(r)}), m_{1H}^{(r)})$ su tikimybiniu Haro matu $m_{1H}^{(r)}$. Tegul $\underline{\omega}_1 = (\omega_{11}, ..., \omega_{1r})$ yra toro $\Omega_1^{(r)}$ elementas, čia $\omega_{1j} \in \Omega_{1j}$, $j = 1, ..., r$. Trumpumo dėlei, žymime $\underline{\lambda} = (\lambda_1, ..., \lambda_r)$, $\underline{\alpha} = (\alpha_1, ..., \alpha_r)$ ir $\underline{\sigma} = (\sigma_1, ..., \sigma_r)$. Erdvėje $(\Omega_1^{(r)}, \mathcal{B}(\Omega_1^{(r)}), m_{1H}^{(r)})$ apibrėžiame $\mathbb{C}^r$- reikšmį atsitiktinį elementą

$$\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma}, \underline{\omega}_1) = \big(L(\lambda_1, \alpha_1, \sigma_1, \omega_{11}), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, \sigma_r, \omega_{1r})\big);$$

čia, kai $\sigma_j > \frac{1}{2}$,

$$L(\lambda_j, \alpha_j, \sigma_j, \omega_{1j}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \lambda_j m} \omega_{1j}(m)}{(m + \alpha_j)^{\sigma_j}}, \quad j = 1, ..., r.$$

Tegul $P_{\underline{L}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma}, \underline{\omega}_1)$ skirstinys t. y.,

$$P_{\underline{L}}(A) = m_{1H}^{(r)} \Big(\underline{\omega}_1 \in \Omega_1^{(r)} : \underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma}, \underline{\omega}_1) \in A \Big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r).$$

Primename, kad skaičiai $\alpha_1, ..., \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, jeigu nėra polinomo $P \not\equiv 0$ su racionaliaisiais koeficientais, kad $P(\alpha_1, ..., \alpha_r) = 0$.
E teorema. *Tarkime, kad* $\lambda_j \in (0, 1)$, $j = 1, ..., r$, *skaičiai* $\alpha_1, ..., \alpha_r$ *yra algebriškai nepriklausomi virš* $\mathbb{Q}$ *ir* $\min\limits_{1 \le j \le r} \sigma_j > \frac{1}{2}$. *Tuomet tikimybinis matas*

$$P_{T, \underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma}}(A) = \nu_T^t \big((L(\lambda_1, \alpha_1, \sigma_1 + it), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, \sigma_r + it)) \in A \big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}^r),$$

kai $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į matą* $P_{\underline{L}}$.

Jeigu skaičiai $\alpha_1, ..., \alpha_r$ yra algebriškai nepriklausomi virš $\mathbb{Q}$, kiekvienas skaičius α_j, $j = 1, ..., r$, yra transcendentusis. Disertacijoje yra gauta jungtinė ribinė teorema su algebriniais iracionaliaisiais parametrais $\alpha_1, ..., \alpha_r$.

Tarkime, kad $\alpha_1, ..., \alpha_r$ yra skirtingi algebriniai iracionalieji skaičiai, $0 < \alpha_j \le 1$, $j = 1, ..., r$. Apibrėžiame

$$\Omega^r = \prod_{j=1}^{r} \Omega_j$$

su

$$\Omega_j = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha_j)} \gamma_m;$$

čia $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathcal{M}(\alpha_j)$, $j = 1, ..., r$. Kadangi kiekvienas toras Ω_j yra kompaktinė topologinė Abelio grupė, todėl tokia grupė yra ir Ω^r. Taigi, gauname tikimybinę erdvę $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m^r_H)$, čia m^r_H yra tikimybinis Haro matas erdvėje $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r))$. Tegul $\underline{\omega} = (\omega_1, ..., \omega_r) \in \Omega^r$ su $\omega_j \in \Omega_j$, $j = 1, ..., r$, o $\underline{\lambda}$, $\underline{\alpha}$ ir $\underline{\sigma}$ reiškia tą patį, kaip ir anksčiau. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega^r, \mathcal{B}(\Omega^r), m^r_H)$ apibrėžiame $\mathbb{C}^r$-reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma}, \underline{\omega})$, $\min\limits_{1 \le j \le r} \sigma_j > \frac{1}{2}$, formule

$$\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma}, \underline{\omega}) = \big(L(\lambda_1, \alpha_1, \sigma_1, \omega_1), ..., L(\lambda_r, \alpha_r, \sigma_r, \omega_r)\big);$$

čia

$$L(\lambda_j, \alpha_j, \sigma_j, \omega_j) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda_j m} \omega_j(m)}{(m + \alpha_j)^{\sigma_j}},$$

o $\omega_j(m)$ yra elemento $\omega_j \in \Omega_j$ projekcija į γ_m, jei $m \in \mathcal{M}(\alpha_j)$ ir (2) tipo sąryšis, jei $m \in \mathcal{N}(\alpha_j)$, $j = 1, ..., r$. Tegul $Q_{\underline{L}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{L}(\underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma}, \underline{\omega})$ skirstinys.

Pagrindinis antrojo skyriaus rezultatas yra tokia teorema.
2.1 teorema. *Tarkime, kad $\lambda_j \in (0, 1)$, $j = 1, \ldots, r$, $\alpha_1, ..., \alpha_r$ yra tokie skirtingi algebriniai iracionalieji skaičiai iš klasės $\mathcal{A}$, kad aibė*

$$\bigcup_{j=1}^{r} I(\alpha_j)$$

yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$, o $\min\limits_{1 \le j \le r} \sigma_j > \frac{1}{2}$. Tuomet tikimybinis matas $P_{T, \underline{\lambda}, \underline{\alpha}, \underline{\sigma}}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $Q_{\underline{L}}$.

Trečiajame disertacijos skyriuje yra įrodomas 1.1 teoremos analogas analizinių funkcijų erdvėje.

Tegul $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ lygybe

$$L(\lambda, \alpha, s, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \lambda m} \omega(m)}{(m + \alpha)^s}.$$

Apibrėžiame

$$P_{T,H}(A) = \nu_T^{\tau}(L(\lambda, \alpha, s + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Pagrindinis trečiojo disertacijos skyriaus rezultatas yra tokia teorema.
3.1 teorema. *Tarkime, kad $\lambda \in (0, 1)$ ir $\alpha \in \mathcal{A}$. Tada tikimybinis matas $P_{T,H}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į atsitiktinio elemento $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ skirstinį.*

Absoliutaus konvergavimo srityje galima atsisakyti reikalavimo $\alpha \in \mathcal{A}$. Tegul $D_1 = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1\}$, o $H(D_1)$- reikšmis atsitiktinis elementas $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ yra

$H(D)$- reikšmio elemento $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ siaurinys erdvėje $H(D_1)$.
3.2 teorema. *Tarkime, kad* $\lambda \in (0,1)$, *o* α *yra algebrinis iracionalusis skaičius. Tuomet tikimybinis matas*

$$\nu_T^\tau(L(\lambda, \alpha, s + i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(D_1)),$$

kai $T \to \infty$, *silpnai konverguoja į* $H(D_1)$*-reikšmio atsitiktinio elemento* $L(\lambda, \alpha, s, \omega)$ *skirstinį.*

Diskrečiosios ribinės teoremos funkcinėse erdvėse funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ buvo gautos [9] disertacijoje. Lercho dzeta funkcijos universalumas ir funkcinis nepriklausomumas buvo nagrinėtas eilėje darbų, žr., pavyzdžiui, [7], [14]. Nulių išsidėstymo problema buvo sprendžiama [6] straipsnyje ir kituose R. Garunkščio darbuose.
Išvados. Disertacijoje yra nustatytos tokios statistinės Lercho dzeta funkcijos savybės:

1. Lercho dzeta funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su parametrais $\lambda \in (0,1)$ ir algebriniu iracionaliuoju parametru α iš klasės $\mathcal{A}$ galioja ribinė teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje.

2. Lercho dzeta funkcijų rinkiniui su algebriniais iracionaliaisiais parametrais iš klasės $\mathcal{A}$ galioja jungtinė ribinė teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje.

3. Lercho dzeta funkcijai $L(\lambda, \alpha, s)$ su parametrais $\lambda \in (0,1)$ ir algebriniu iracionaliuoju parametru α iš klasės $\mathcal{A}$ galioja ribinė teorema silpnojo tikimybinių matų konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje.

Aprobacija. Disertacijos rezultatai buvo pristatyti Lietuvos matematikų draugijos konferencijose (2007, 2008, 2009), o taip pat Vilniaus universiteto skaičių teorijos seminare bei Šiaulių universiteto Matematikos ir informatikos fakulteto seminare.

Dėkoju moksliniam konsultantui prof. habil. dr. A. Laurinčikui už paramą rengiant disertaciją. Esu dėkinga Vilniaus Universiteto Tikimybių teorijos ir skaičių teorijos katedros ir Šiaulių Universiteto Matematikos ir informatikos bei Edukologijos fakultetų nariams už dalykinę ir moralinę paramą. Dėkoju Šiaulių universitetui už finansinę paramą.

Publikacijų disertacijos tema sąrašas.

1. D. Genienė, The Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter, *Liet. matem. rink. LMD darbai*, **50**, 9–13, 2009.

2. V. Garbaliauskienė, D. Genienė, A. Laurinčikas, Value-distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. I, *Lith. Math. J.*, **47** (2), 163–176, 2007.

3. D. Genienė, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Value-distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. II, *Lith. Math. J.*, **47**(4), 394–405, 2007.

4. D. Genienė, A. Laurinčikas, R. Macaitienė, Value-distribution of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter. III, *Lith. Math. J.*, **48** (3), 282–293, 2008.

Cituota literatūra

1. T. M. Apostol, On the Lerch zeta-function, *Pacific J. Math.*, **1** (1951), 161–167 .

2. B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series, PhD Thesis*, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

3. B. C. Berndt, Two new proofs of Lerch's functional equation, *Proc. Amer. Math. Soc.*, **32** (2) (1972), 403–408.

4. J. W. S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, *J. London Math. Soc.*, **36** (1961), 177–184 .

5. R. Garunkštis and A. Laurinčikas, On the Lerch zeta-function, *Lith. Math. J.*, **36**(4) (1996), 337–348.

6. R. Garunkštis, A. Laurinčikas, On zeros of the Lerch zeta function, in: *Number Theory and its Applications*, Kanemitsu and K. Győry (Eds), Kluwer, 1999, pp. 129–143.

7. R. Garunkštis, A. Laurinčikas, The Lerch zeta-function, *Integral Transforms and Special Functions* **10** (3–4) (1997), 211–220.

8. R. Garunkštis, A. Laurinčikas, J. Steuding, On the mean square of Lerch zeta-functions, *Arch. Math.* **80** (1) (2003), 47–60.

9. J. Ignatavičiūtė, *Value-distribution of the Lerch zeta-function. Discrete version. Doctoral Thesis*, Vilnius University, Vilnius, 2003.

10. D. Joyner, *Distribution Theorems of $\mathcal{L}$-functions*, Longman Scientific, Harlow, 1986.

11. D. Klusch, Asymptotic equalities for the Lipschitz-Lerch zeta-function, *Arch. Math.*, **49** (1) (1987), 38–43.

12. D. Klusch, A hybrid version of a theorem of Atkinson, *Rev. Roumaine Math. Pures Appl.*, **34** (8) (1989), 721–728.

13. A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht, London, Boston, 1996.

14. A. Laurinčikas and R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, London, Boston, 2002.

15. A. Laurinčikas and K. Matsumoto, Joint value-distribution theorems on Lerch zeta-functions, *Lith. Math. J.*, **38**(3) (1998), 238–249 = *Liet. mat. rink.*, **38**(3) (1998), 312–326.

16. A. Laurinčikas and J. Steuding, A limit theorem for the Hurwitz zeta-function with an algebraic irrational parameter, *Archiv Math.*, **85** (2005), 419–432.

17. M. Lerch, Note sur la fonction $K(w,x,s)=\sum_{n\geq 0}\exp\{2\pi inx\}\cdot(n+w)^{-s}$, *Acta Math.*, **11** (1887), 19–24.

18. R. Lipschitz, Untersuchung einer aus vier Elementen gebildeten Reihe, *J. Reine Angew. Math.*, **105** (1889), 127–156,.

19. K. Matsumoto, Value-distribution of zeta-functions, *Lecture Notes Math.*, **1434** (1990), 178–187.

20. K. Matsumoto, Probabilistic value-distribution theory of zeta-functions, *Sugahu Expositions*, **17** (2004), 51–71.

21. M. Mikolás, New proof and extension of the funktional equality of Lerch's zeta-function, *J. Ann. Univ. Sci. Budapest. Séct. Math.*, **14** (1971), 111–116.

22. F. Oberhettinger, Note on the Lerch zeta-function, *Pacific J. Math.*, **6** (1956), 117–120.

23. J. Steuding, *Value-Distribution of $\mathcal{L}$-Functions*, Lecture Notes Math., **1877**, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

Summary.

The Lerch zeta-function $L(\lambda, \alpha, s)$, $s = \sigma + it$, with parameters $\lambda \in \mathbb{R}$ and α, $0 < \alpha \leq 1$, is defined, for $\sigma > 1$, by

$$L(\lambda, \alpha, s) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\mathrm{e}^{2\pi i \lambda m}}{(m+\alpha)^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. If $\lambda \in \mathbb{Z}$, then the function $L(\lambda, \alpha, s)$ reduces to the Hurwitz zeta-function, while, for $\lambda \notin \mathbb{Z}$, $L(\lambda, \alpha, s)$ is an entire function. In this case, one can suppose that $0 < \lambda < 1$. In this thesis, limit theorems in the sense of weak convergence of probability measure for the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter α and $\lambda \in (0, 1)$ are proved.

In Chapter 1, the weak convergence of the probability measure

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : L(\lambda, \alpha, \sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

for $\sigma > \frac{1}{2}$ is considered. Here meas$\{A\}$ is the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$, and $\mathcal{B}(S)$ denotes the class of Borel sets of the space S. For some class of parameters α, it is proved that the above measure converges weakly to the distribution of one explicitly given complex-valued random variable as $T \to \infty$.

Chapter 2 is devoted to a joint generalization of the main theorem of Chapter 1. There a joint limit theorem on the complex plane for a collection of Lerch zeta-functions with algebraic irrational parameters is obtained.

In Chapter 3, a limit theorem in the space of analytic functions for $L(\lambda, \alpha, s)$ with algebraic irrational α is proved. More precisely, if $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > \frac{1}{2}\}$ and $H(D)$ denotes the space of analytic on D functions equipped with the topology of uniform convergence on compacta, then it is proved that the probability measure

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0, T] : L(\lambda, \alpha, s + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

converges weakly to the distribution of one explicitly given $H(D)$-valued random element as $T \to \infty$.

All results of the thesis are theoretical. They characterize the asymptotic behaviour of the Lerch zeta-function with algebraic irrational parameter.

Trumpos žinios apie autorę

Gimimo data ir vieta

1948 m. gruodžio 18 d., Pakruojis.

Išsilavinimas ir kvalifikacija

1966 m. Žagarės vidurinė mokykla.

1971 m. Vilniaus universiteto Matematikos ir mechanikos fakultetas, matematiko kvalifikacija.

Darbo patirtis

1971–2009 m. Šiaulių universitetas, lektorė.

Short information about the author

Birth date and place

December 18, 1948, Pakruojis.

Išsilavinimas ir kvalifikacija

1966 Žagarė secondary school.

1971 Vilnius University, Faculty of Mathematics and Mechanics, master of mathematics.

Working experience

1971–2009 m. Šiauliai University, lecturer.