VILNIAUS UNIVERSITETAS

Viktor Skorniakov

ASIMPTOTIŠKAI HOMOGENINĖS MARKOVO GRANDINĖS

Daktaro disertacija
Fiziniai mokslai, matematika (01P)

Vilnius, 2010

Disertacija rengta 2006 – 2010 metais Vilniaus universitete

Mokslinis vadovas:
doc. dr. Vytautas Kazakevičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01P)

Turinys

Įvadas **2**

1 Asimptotiškai homogeninės grandinės **4**
1.1 Asimptotiškai homogeninės funkcijos 4
1.2 Asimptotiškai homogeninių grandinių pavyzdžiai 7
1.2.1 Tiesiniai modeliai ir modeliai, suvedami į tiesinius 7
1.2.2 Vienmačiai modeliai 9
1.2.3 HARCH modeliai 10
1.2.4 Tiesiniai modeliai su ARCH paklaidomis 11

2 Stacionarumo sąlygos **12**
2.1 Pagrindinė teorema 12
2.2 Taikymų pavyzdžiai 13
2.2.1 Tiesiniai modeliai 13
2.2.2 Vienmačiai modeliai 15
2.2.3 HARCH modeliai 22
2.3 Pagrindinės teoremos įrodymas 25

3 Stacionaraus skirstinio uodegos indeksas **31**
3.1 Pagrindiniai rezultatai 31
3.1.1 Grandinės pustiesėje 31
3.1.2 Grandinės tiesėje 32
3.2 Taikymų pavyzdžiai 35
3.2.1 Grandinės pustiesėje 35
3.2.2 Grandinės tiesėje 38
3.3 Pagrindinių rezultatų įrodymai 42

Priedai:

A Matematiniai faktai **53**
A.1 Neskaidžios Markovo grandinės 53
A.1.1 Pagrindinės sąvokos 53
A.1.2 Teoremos 54
A.2 Ribinės tikimybių teorijos teoremos 56
A.2.1 Viena teorema apie tolygų konvergavimą 57
A.2.2 Atstatymo teorija 57
A.2.3 Glodinimas 58
A.3 Matricų teorija 59

B Laiko eilučių teorijos modelių trumpiniai **60**

Įvadas

Atsitiktinių procesų teorijos taikymuose svarbią vietą užima modeliai, aprašantys priklausomas atsitiktinių elementų sekas. Jiems skiriamas didelis dėmesys tiek taikomojoje, tiek teorinio pobūdžio literatūroje. Didelę klasę tokių modelių sudaro Markovo grandinės, apibrėžiamos nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių atsitiktinių elementų seka $(\varepsilon_n, n \geqslant 1)$ ir duotos funkcijos F iteracijomis:

$$X_n = F(X_{n-1}, \varepsilon_n), \quad n \geqslant 1; \tag{0.1}$$

čia X_0 yra duotas atsitiktinis elementas, nepriklausantis nuo (ε_n).

Šiame darbe nagrinėjami aprašyto tipo modeliai, laikant, kad

- ✓ grandinės $(X_n, n \geqslant 0)$ būsenų aibė C yra uždaras baigtiniamatės normuotosios erdvės E kūgis (t.y. C uždara ir $tx \in C$ su visais $x \in C$ ir $t > 0$);
- ✓ seka (ε_n) sudaryta iš nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių ε kopijų; ε yra separabilios metrinės erdvės W atsitiktinis elementas;
- ✓ Borelio funkcija $F : C \times W \to C$ yra asimptotiškai homogeninė pirmojo argumento atžvilgiu, t.y. su visais $w \in W$ funkciją $F(\cdot, w)$ atitinka ribinė homogeninė funkcija $G(\cdot, w)$, apibrėžiama lygybe

$$G(x, w) = \lim_{t\to\infty} \frac{F(tx, w)}{t}, \quad x \in C.$$

Toliau tokias grandines vadinsime *asimptotiškai homogeninėmis.* Darbe išspręsti du uždaviniai:

- ✓ išsiaiškinta, kada egzistuoja stacionarus grandinės skirstinys;
- ✓ $C = [0; \infty)$ ir $C = \mathbb{R}$ atvejais išsiaiškinta, kada stacionarus skirstinys turi „sunkias uodegas“.

Aptarsime darbo motyvus. 1992 m. P. Bougerol ir N. Picard [2] nagrinėjo tiesinį modelį

$$X_n = A_n X_{n-1} + B_n; \tag{0.2}$$

čia A_n yra realioji atsitiktinė $k \times k$ matrica, o B_n — realus atsitiktinis $k \times 1$ vektorius. Jie įrodė, kad su tikimybe 1 egzistuoja riba

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{\ln\|A_n \cdots A_1\|}{n},$$

ir pavadino ją *Liapunovo eksponente.* Jie taip pat įrodė, kad jei $\gamma < 0$, tai (0.2) grandinė turi stacionarų skirstinį, o jei $\gamma > 0$, tokio skirstinio nėra. Tiesinis modelis yra atskiras asimptotiškai homogeninės grandinės atvejis; todėl natūralu kelti klausimą, ar egzistuoja analogiškas stacionarumo kriterijus, kai funkcija F nebūtinai tiesinė pirmojo argumento atžvilgiu. Disertacijoje toks kriterijus gautas bet kokioms asimptotiškai homogeninėms grandinėms.

Jei grandinė turi stacionarų skirstinį, kyla klausimas, kokios to skirstinio savybės. Pavyzdžiui, kokia tikimybės $\mathrm{P}(\|X\| > t)$ asimptotika, kai $t \to \infty$ (čia X žymi atsitiktinį elementą, turintį stacionarų skirstinį). Ypač įdomūs atvejai, kai stacionarus skirstinys yra su „sunkia uodega", t.y. kai aukščiau parašyta tikimybė yra eilės $t^{-\alpha}$ su tam tikru $\alpha > 0$. Tiesiniame modelyje šią problemą nagrinėjo H. Kesten [10] bei Pergamentchtchikov ir Klüppelberg [11]. Netiesinį vienmatį atvejį ($C = [0; \infty)$ arba $C = \mathbb{R}$) nagrinėjo Ch. M. Goldie [6]. Disertacijoje apibendrinami Ch. M. Goldie rezultatai.

Pirmame disertacijos skyriuje griežtai apibrėžtos asimptotiškai homogeninės funkcijos ir įrodytos pagrindinės jų savybės. Po to pateikiama serija asimptotiškai homogeninių grandinių pavyzdžių. Antrame skyriuje gaunamos pakankamos sąlygos, garantuojančios asimptotiškai homogeninės grandinės stacionaraus skirstinio egzistavimą. Nagrinėjant pirmo skyriaus modelius, patikrinama, kiek tos sąlygos artimos būtinoms. Trečiame skyriuje daroma prielaida, kad grandinė turi stacionarų skirstinį ir tiriamas to skirstinio „uodegos" svoris. A priede surinkti faktai iš bendrosios neskaidžių Markovo grandinių teorijos, atstatymo teorijos bei neneigiamų matricų teorijos, kuriais remiamės pagrindiniame disertacijos tekste. B priede surašyti darbe vartojami trumpiniai. Antrame ir trečiame skyriuose sąvokos ir trumpiniai vartojami be atskiro paaiškinimo.

Disertacijos rezultatai publikuoti dviejuose straipsniuose ([8] ir [9]) ir pristatyti Lietuvos matematikų draugijos XLIX konferencijoje Kaune (2008 m.) bei tarptautinėje tikimybių teorijos ir matematinės statistikos konferencijoje Vilniuje (2010 m.).

1 Asimptotiškai homogeninės grandinės

1.1 Asimptotiškai homogeninės funkcijos

Tegu E yra baigtiniamatė normuota erdvė su norma $\|\cdot\|$. Raide $\bar{E}$ žymėsime jos vientaškę kompaktifikaciją $E \cup \{\infty\}$. Gerai žinoma, kad $\bar{E}$ metrizuojama ir jei $(x_n) \subset E$, tai $x_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$ tada ir tik tada, kai $\|x_n\| \xrightarrow[n\to\infty]{} \infty$.

Jei $C \subset E$, M yra metrinė erdvė su metrika d, $b \in M$ ir $f : C \to M$, tai $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} b$ tada ir tik tada, kai

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists r > 0 \ \forall x \in C \ (\|x\| > r \Rightarrow d(f(x), b) < \varepsilon),$$

arba sekų terminais

$$\forall (x_n) \subset C \ (\|x_n\| \to \infty \Rightarrow f(x_n) \to b).$$

Apibrėžimas. Tegu $C \subset E$. Sakome, kad C yra *kūgis*, jei $tx \in C$ su visais $x \in C$ ir visais $t > 0$. $\Diamond$

1.1 teiginys. *Jei f apibrėžta uždarame kūgyje, tai $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} b$ tada ir tik tada, kai*

$$x_n \to x \neq 0, \ t_n \to \infty \Rightarrow f(t_n x_n) \to b. \tag{1.1}$$

Įrodymas. Įrodysime būtinumą. Tarkime, $f(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} b$, $x_n \to x \neq 0$ ir $t_n \to \infty$. Fiksuokime $\varepsilon > 0$ ir raskime tokį $r > 0$, kad $d(f(x), b) < \varepsilon$, kai $\|x\| > r$. Taip pat parinkime tokį n_0, kad $\|t_n x_n\| > r$, kai $n \geqslant n_0$. Tada $d(f(t_n x_n), b) < \varepsilon$, kai $n \geqslant n_0$. Taigi $f(t_n x_n) \to b$.

Pakankamumą įrodysime prieštaros metodu. Tarkime, $f(t_n x_n) \to b$, kai $x_n \to x \neq 0$ ir $t_n \to \infty$, bet $f(x) \not\to b$, kai $x \to \infty$. Tada atsiras tokia seka $(y_n) \subset C$, artėjanti į ∞, kad $f(y_n) \not\to b$. Pastarasis sąryšis reiškia, kad egzistuoja $\delta > 0$ ir tokia indeksų seka $m_n \to \infty$, kad

$$d(f(y_{m_n}), b) \geqslant \delta$$

su visais n. Pažymėkime $t_n = \|y_{m_n}\|$ ir $x_n = t_n^{-1} y_{m_n}$. Tada $\|x_n\| = 1$ su visais n. Kadangi aibė $C \cap \{x \mid \|x\| = 1\}$ kompaktiška, iš (x_n) sekos galime išrinkti konverguojantį posekį (x_{n_k}). Tada $t_{n_k} \to \infty$, $x_{n_k} \to x \neq 0$, bet $f(t_{n_k} x_{n_k}) \not\to b$. Gavome prieštarą. $\square$

Apibrėžimas. Tegu $C \subset E$ yra uždaras kūgis ir F — dar viena normuota erdvė. Sakome, kad funkcija $f : C \to F$ yra *asimptotiškai homogeninė*, jei egzistuoja tokia funkcija $g : C \to F$, kad

- ✓ $x_n \to x \neq 0, \ t_n \to \infty \Rightarrow t_n^{-1} f(t_n x_n) \to g(x)$;
- ✓ $g(0) = 0$. $\Diamond$

Akivaizdu, kad tėra tik viena funkcija, tenkinanti abi sąlygas. Ją vadinsime *ribine funkcija, atitinkančia* f.

Toliau laikysime, kad f yra asimptotiškai homogeninė funkcija, o g — ją atitinkanti ribinė funkcija. Įrodysime pagrindines šių funkcijų savybes.

1.2 teiginys. *g yra homogeninė funkcija, t.y. $g(tx) = tg(x)$ su visais $x \in C$ ir $t > 0$.*

Įrodymas. Jei $x = 0$, lygybė akivaizdi. Jei $x \neq 0$, tai paėmę bet kokias sekas $x_n \to x$ ir $t_n \to \infty$, su bet kokiu $t > 0$ gausime

$$g(tx) = \lim_{n\to\infty} \frac{f(tt_nx_n)}{t_n} = \lim_{n\to\infty} t\frac{f(tt_nx_n)}{tt_n} = tg(x). \ \square$$

Taigi ribinė funkcija g visiškai apibrėžta, jei žinomos jos reikšmės aibėje $S = \{x \in C \mid \|x\| = 1\}$. Iš tikrųjų, jei $x \neq 0$, tai $g(x) = \|x\|g\left(\frac{x}{\|x\|}\right)$.

1.3 teiginys. *g yra tolydžioji funkcija.*

Įrodymas. Fiksuokime $x \neq 0$ ir $\varepsilon > 0$. Tegu $x_n \to x$. Parinkime seką $t_n \to \infty$ taip, kad su visais n būtų teisinga nelygybė

$$\|t_n^{-1}f(t_nx_n) - g(x_n)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Kadangi $t_n^{-1}f(t_nx_n) \to g(x)$, taip pat galime rasti tokį n_0, kad su visais $n \geqslant n_0$

$$\|t_n^{-1}f(t_nx_n) - g(x)\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Tada su visais $n \geqslant n_0$

$$\|g(x_n) - g(x)\| \leqslant \|t_n^{-1}f(t_nx_n) - g(x_n)\| + \|t_n^{-1}f(t_nx_n) - g(x)\| < \varepsilon.$$

Taigi g tolydi taške x.

Jei $(x_n) \subset C \setminus \{0\}$ artėja į 0, tai iš homogeniškumo ir jau įrodytos dalies

$$g(x_n) = \|x_n\|g\left(\frac{x_n}{\|x_n\|}\right) = \|x_n\|O(1) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Taigi g tolydi ir taške 0. $\square$

1.4 teiginys. *Jei $g(x) \neq 0$ su visais $x \neq 0$, tai*

$$\frac{f(x)}{\|f(x)\|} - \frac{g(x)}{\|g(x)\|} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, \tag{1.2}$$

$$\ln\|f(x)\| - \ln\|g(x)\| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, \tag{1.3}$$

$$\|f(x)\| \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty. \tag{1.4}$$

Įrodymas. Tarkime, $x_n \to x \neq 0$ ir $t_n \to \infty$. Iš g tolydumo ir homogeniškumo išplaukia

$$\frac{f(t_n x_n)}{\|f(t_n x_n)\|} - \frac{g(t_n x_n)}{\|g(t_n x_n)\|} = \frac{t_n^{-1} f(t_n x_n)}{\|t_n^{-1} f(t_n x_n)\|} - \frac{g(x_n)}{\|g(x_n)\|} \to \frac{g(x)}{\|g(x)\|} - \frac{g(x)}{\|g(x)\|} = 0$$

ir

$$\begin{aligned} &\ln\|f(t_n x_n)\| - \ln\|g(t_n x_n)\| \\ &\qquad = \ln\|t_n^{-1} f(t_n x_n)\| - \ln\|g(x_n)\| \to \ln\|g(x)\| - \ln\|g(x)\| = 0. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Pritaikę 1.1 teiginį gauname (1.2)–(1.3).

Kadangi $\ln\|g(t_n x_n)\| = \ln t_n + \ln\|g(x_n)\|$, iš jau įrodytos dalies ir g tolydumo išplaukia

$$\|f(t_n x_n)\| = t_n \|g(x)\| \mathrm{e}^{o(1)} \to \infty.$$

Dar kartą pasirėmę 1.1 teiginiu gauname (1.4). □

Teiginio prielaida $g(x) \neq 0$ esminė. Pavyzdžiui, jei $C = [0; \infty)$ ir $f(x) = 1$ su visais $x \in C$, tai f asimptotiškai homogeninė, bet (1.4) sąryšis neteisingas. Šiame pavyzdyje $g(x) = 0$ su visais x.

1.5 teiginys. *Tarkime, f_1, f_2 yra asimptotiškai homogeninės funkcijos iš C į C. Jei $g_1(x) \neq 0$ su visais $x \neq 0$, tai $f_2 \circ f_1$ taip pat asimptotiškai homogeninė, o $g_2 \circ g_1$ yra jos ribinė homogeninė funkcija.*

Įrodymas. Tegu $x_n \to x \neq 0$, $t_n \to \infty$. Pažymėkime $y_n = t_n^{-1} f_1(t_n x_n)$. Kadangi $y_n \to g_1(x) \neq 0$,

$$\frac{f_2(f_1(t_n x_n))}{t_n} = \frac{f_2(t_n y_n)}{t_n} \to g_2(g_1(x)). \ \square$$

Ir šio teigino sąlyga $g_1(x) \neq 0$ esminė. Tegu, pavyzdžiui, $C = [0; \infty)$ ir

$$f_1(x) = f_2(x) = \begin{cases} 1/x, & \text{kai } x \neq 0, \\ 0, & \text{kai } x = 0. \end{cases}$$

Tada $g_1(x) = g_2(x) = 0$ su visais x. Tačiau $f_2\big(f_1(x)\big) = x$ su visais x ir nors kompozicija asimptotiškai homogeninė, bet ją atitinkanti ribinė homogeninė funkcija yra $g(x) = x$, o ne $g_2 \circ g_1 = 0$.

Tiesa, jei f_2 aprėžta kiekvienoje aprėžtoje aibėje, sąlyga $g_1(x) \neq 0$ nebūtina. Tegu x_n, x, t_n ir y_n yra tokie pat, kaip 1.5 teiginio įrodyme; reikia įsitikinti, kad $t_n^{-1} f_2(t_n y_n) \to g_2(g_1(x))$ ir tuo atveju, kai $g_1(x) = 0$, t.y. kad $t_n^{-1} f_2(t_n y_n) \to 0$, jei $y_n \to 0$. Tai akivaizdu, jei $(t_n y_n)$ seka aprėžta, nes tada $t_n^{-1} f_2(t_n y_n) = t_n^{-1} O(1) \to 0$. Jeigu gi ta seka neaprėžta, tai nemažindami bendrumo galime laikyti $t_n \|y_n\| \to \infty$ ir $z_n = y_n / \|y_n\| \to z \neq 0$. Tada

$$\frac{f_2(t_n y_n)}{t_n} = \frac{f_2(t_n \|y_n\| z_n)}{t_n \|y_n\|} \|y_n\| \to g_2(z) \cdot 0 = 0.$$

1.2 Asimptotiškai homogeninių grandinių pavyzdžiai

Nagrinėsime Markovo grandines, apibrėžiamas (0.1) lygtimis, kuriose C yra uždaras kūgis baigtiniamatėje normuotoje erdvėje E, W — separabili metrinė erdvė, $F : C \times W \to C$ — Borelio funkcija ir $(\varepsilon_n, n \geqslant 1)$ — nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių W elementų seka, nepriklausanti nuo X_0. Grandines laikysime *asimptotiškai homogeninėmis*, t.y. su kiekvienu w funkcija $F(\cdot, w)$ bus asimptotiškai homogeninė. G raide žymėsime tokią funkciją iš $C \times W$ į C, kad $G(\cdot, w)$ yra ribinė homogeninė funkcija, atitinkanti $F(\cdot, w)$. Kadangi

$$G(x, w) = \lim_{n\to\infty} \frac{F(nx, w)}{n},$$

G yra Borelio funkcija.

Toliau aprašysime seriją literatūroje nagrinėtų modelių, parodydami, kokia plati nagrinėjamų Markovo grandinių klasė.

1.2.1 Tiesiniai modeliai ir modeliai, suvedami į tiesinius

Tiesiniu vadinsime modelį, aprašomą lygtimis

$$X_n = U_n + V_n X_{n-1}; \tag{1.6}$$

čia X_n ir U_n yra $k \times 1$ vektoriai, V_n — $k \times k$ matricos, visi (U_n, V_n) yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir nepriklauso nuo X_0. Aišku, kad tai yra atskiras (0.1) atvejis, atitinkantis $C \subset \mathbb{R}^k$, $W \subset \mathbb{R}^k \times M_k$ (čia M_k — visų $k \times k$ matricų aibė) ir funkciją F, apibrėžiamą lygybe

$$F(x, (u, v)) = u + vx \quad \text{su } x \in C \text{ ir } (u, v) \in W.$$

Jei $x_n \to x \neq 0$ ir $t_n \to \infty$, tai

$$t_n^{-1} F(t_n x_n, (u, v)) = t_n^{-1} u + v x_n \to vx;$$

todėl nagrinėjama grandinė asimptotiškai homogeninė ir

$$G(x, (u, v)) = vx.$$

Kūgis C dažniausiai yra arba visa erdvė $\mathbb{R}^k$, arba jos dalis $\mathbb{R}^{+k}$, sudaryta iš neneigiamų vektorių (pastaruoju atveju U_n ir V_n turi būti neneigiamos atsitiktinės matricos).

Tiesiniai modeliai labai plačiai paplitę. Atskiras tokio modelio atvejis yra atsitiktinis klaidžiojimas $\mathbb{R}^k$ erdvėje, apibrėžiamas lygybe

$$X_n = X_{n-1} + \varepsilon_n,$$

arba AR(1) modelis:

$$X_n = a_0 + a_1 X_{n-1} + \varepsilon_n.$$

Į tiesinį modelį suvedamas ir šiek tiek bendresnis AR(k) modelis, aprašomas lygybe

$$x_n = a_0 + a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} + \varepsilon_n.$$

Tereikia pažymėti

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ x_{n-1} \\ \vdots \\ x_{n-k+1} \end{pmatrix}, U_n = \begin{pmatrix} a_0 + \varepsilon_n \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, V_n = \begin{pmatrix} a_1 & \cdots & a_{k-1} & a_k \\ 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

Finansines laiko eilutes dabar populiaru aprašyti GARCH modeliais. Bendras GARCH(p, q) modelis užrašomas lygčių sistema

$$x_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{1.7}$$

$$\sigma_n^2 = a_0 + a_1 x_{n-1}^2 + \cdots + a_p x_{n-p}^2 + b_1 \sigma_{n-1}^2 + \cdots + b_q \sigma_{n-q}^2; \tag{1.8}$$

čia $p \geqslant 1$ ir $q \geqslant 0$ — fiksuoti sveikieji skaičiai, $a_0, b_q > 0$, o likę modelio koeficientai neneigiami. Tokį modelį taip pat galima suvesti į tiesinį. Pažymėkime $\tilde{p} = \max(p, 2)$, $\tilde{q} = \max(q, 2)$,

$$X_n = \begin{pmatrix} \sigma_n^2 \\ \vdots \\ \sigma_{n-\tilde{q}+1}^2 \\ x_{n-1}^2 \\ \vdots \\ x_{n-\tilde{p}+1}^2 \end{pmatrix} \quad \text{ir} \quad U_n = \begin{pmatrix} a_0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^{\tilde{p}+\tilde{q}-1}.$$

Jei $q = 0$ arba $q = 1$, laikysime $b_1 = b_2 = 0$; jei $p = 1$, laikysime $a_2 = 0$. Tada pažymėję

$$V_n = \begin{pmatrix} b_1 + a_1\varepsilon_{n-1}^2 & b_2 & \cdots & b_{\tilde{q}-1} & b_{\tilde{q}} & a_2 & \cdots & a_{\tilde{p}-1} & a_{\tilde{p}} \\ 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \varepsilon_{n-1}^2 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

gausime, kad X_n tenkina (1.6) lygtį. Matome, kad šiuo atveju matricos U_n, V_n yra neneigiamos. Jei $q = 0$, tai (1.7) modelis vadinamas ARCH(p).

1.2.2 Vienmačiai modeliai

Paprasčiausi netiesiniai modeliai yra tie, kuriuose būsenų aibė C sutampa su pustiese $[0;\infty)$. Jie sutinkami įvairiuose praktiniuose taikymuose. Pateiksime keletą pavyzdžių.

Imkime masinio aptarnavimo sistemą $G/G/1$, kurioje paraiškos ateina momentais $U_1+\cdots+U_n$, o aptarnavimo laikai yra V_n (sekos (U_n) ir (V_n) sudarytos iš nepriklausomų vienodai pasiskirsčiusių neneigiamų atsitiktinių dydžių). Jei X_n yra n-osios paraiškos laukimo eilėje laikas, tai (žr. [5], VI skyriaus 9 paragrafą)

$$X_n = (X_{n-1} + \varepsilon_n)^+; \tag{1.9}$$

čia $\varepsilon_n = V_{n-1} - U_n$. Jei raide X_n žymėtume bendrą sugaištą n-osios paraiškos laiką, gautume modelį

$$X_n = V_n + (X_{n-1} - U_n)^+. \tag{1.10}$$

Aišku, kad (1.9)–(1.10) yra atskiri bendro modelio atvejai, atitinkantys $C = [0;\infty)$: pirmu atveju $W \subset \mathbb{R}$ ir $F(x,w) = (x+w)^+$, antruoju — $W = (0;\infty)^2$ ir $F(x,(u,v)) = v + (x-u)^+$. Abi grandinės asimptotiškai homogeninės. Pavyzdžiui, pirmu atveju iš $t_n \to \infty$, $x_n \to x \neq 0$ išplaukia

$$t_n^{-1}F(t_n x_n, w) = t_n^{-1}(t_n x_n + w)^+ = (x_n + t_n^{-1}w)^+ \to x;$$

taigi $G(x,w) = x$.

Iš (1.10) išplaukia

$$\mathrm{e}^{X_n} = \mathrm{e}^{V_n}\mathrm{e}^{\max(X_{n-1}-U_n,0)} = \mathrm{e}^{V_n}\max(\mathrm{e}^{X_{n-1}-U_n},1) = \mathrm{e}^{V_n-U_n}\max(\mathrm{e}^{X_{n-1}},\mathrm{e}^{U_n}).$$

Todėl (1.10) faktiškai ekvivalentus modeliui

$$X_n = V_n \max(X_{n-1}, U_n).$$

Jis taip pat yra atskiras bendro modelio atvejis, atitinkantis $C = [0;\infty)$, $W \subset (0;\infty)^2$ ir

$$F(x,(u,v)) = v\max(x,u).$$

Be to, grandinė asimptotiškai homogeninė ir $G(x,(u,v)) = vx$.

Letac [13] nagrinėjo bendresnį modelį

$$X_n = R_n + V_n \max(X_{n-1}, U_n),$$

kuris, nesunku pastebėti, irgi yra asimptotiškai homogeninis. Atskiras jo atvejis yra modelis

$$X_n = \max(X_{n-1} - 1, 1)\varepsilon_n, \tag{1.11}$$

kurį detaliau ištirsime kituose skyriuose.

Dar vienas modelis, atitinkantis $C = [0;\infty)$ ir $W \subset (0;\infty)^3$, užrašomas lygtimis

$$X_n = R_n X_{n-1} + U_n\sqrt{X_{n-1}} + V_n. \tag{1.12}$$

Jis nagrinėtas darbe [6] (8 skyriuje). Šiuo atveju $G(x,(r,u,v)) = rx$.

Sudėtingesni netiesiniai modeliai gaunami imant $C = \mathbb{R}$. Klüppelberg ir Borkovec [12] nagrinėjo modelį

$$X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n \sqrt{b + cX_{n-1}^2}; \tag{1.13}$$

čia $a \neq 0$ ir $b, c > 0$ — fiksuoti modelio parametrai. Matome, kad tai atskiras bendro modelio atvejis su

$$F(x,w) = ax + w\sqrt{b + cx^2} \quad \text{ir} \quad G(x,w) = ax + w\sqrt{c}|x|.$$

(1.13) modelį galima apibendrinti dviem kryptimis: kitame skyrelyje apibrėšime daugiamatį jo analogą; kita vertus, jis yra atskiras netiesinio AR modelio atvejis. Pastarasis užrašomas lygtimis

$$X_n = f_1(X_{n-1}) + f_2(X_{n-1})\varepsilon_n. \tag{1.14}$$

Jei ir f_1, ir f_2 yra asimptotiškai homogeninės funkcijos, tai (1.14) grandinė taip pat asimptotiškai homogeninė. Ją atitinkanti G funkcija lygi $g_1(x) + g_2(x)w$; čia g_i yra ribinė homogeninė funkcija, atitinkanti f_i.

Jau minėtame darbe [6] nagrinėti dar du asimptotiškai homogeniniai modeliai. Pirmas užrašomas lygtimi

$$X_n = [U_n + V_n X_{n-1}] \tag{1.15}$$

(čia $[x]$ žymi skaičiaus x sveikąją dalį), antrasis — lygtimi

$$X_n = V_n X_{n-1} \mathbf{1}_{\{|V_n X_{n-1}| \geqslant |U_n|\}} + U_n \mathbf{1}_{\{|V_n X_{n-1}| < |U_n|\}}. \tag{1.16}$$

Abiem atvejais $G(x,(u,v)) = vx$.

1.2.3 HARCH modeliai

1997 m. Müller ir kt. [15] finansinėms laiko eilutėms aprašyti pasiūlė HARCH(k) modelį, apibrėžiamą lygčių sistema

$$x_n = \sigma_n \varepsilon_n, \tag{1.17}$$

$$\sigma_n^2 = c_0 + \sum_{j=1}^{k} c_j \left(\sum_{i=1}^{j} x_{n-i} \right)^2; \tag{1.18}$$

čia $c_0, \ldots, c_k$ — fiksuoti neneigiami modelio parametrai (c_0 ir c_k — griežtai teigiami). Pažymėję

$$X_n = \begin{pmatrix} x_n \\ \vdots \\ x_{n-k+1} \end{pmatrix}, \tag{1.19}$$

(1.17)–(1.18) lygčių sistemą užrašome (0.1) pavidalu su funkcija $F\colon \mathbb{R}^k \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^k$, apibrėžiama lygybe

$$F(x,w) = \begin{pmatrix} \sqrt{c_0 + \sum_{j=1}^k c_j \left(\sum_{i=1}^j x_j\right)^2} w \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

Aišku, kad grandinė (X_n) asimptotiškai homogeninė ir

$$G(x,w) = \begin{pmatrix} \sqrt{\sum_{j=1}^k c_j \left(\sum_{i=1}^j x_j\right)^2} w \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}. \tag{1.20}$$

1.2.4 Tiesiniai modeliai su ARCH paklaidomis

1984 m. A. A. Weiss [18] pasiūlė tiesinio modelio modifikaciją — AR modelį su ARCH paklaidomis. Modelis užrašomas lygčių sistema

$$\begin{aligned} x_n &= a_1 x_{n-1} + \cdots + a_k x_{n-k} + \sigma_n \varepsilon_n, \\ \sigma_n^2 &= b + c_1 x_{n-1}^2 + \cdots + c_k x_{n-k}^2. \end{aligned}$$

Modelio parametrai $a_2, \ldots, a_k$ yra bet kokie realieji skaičiai, $a_1 \neq 0$, $c_1, \ldots, c_{k-1}$ neneigiami, o b ir c_k — griežtai teigiami. Jei X_n apibrėšime ta pačia (1.19) lygybe kaip ir HARCH atveju, tai (X_n) bus asimptotiškai homogeninė Markovo grandinė su

$$F(x,w) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sqrt{b + \sum_{i=1}^k c_i x_i^2} w \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}$$

ir

$$G(x,w) = \begin{pmatrix} \sum_{i=1}^k a_i x_i + \sqrt{\sum_{i=1}^k c_i x_i^2} w \\ x_1 \\ \vdots \\ x_{k-1} \end{pmatrix}, \quad x = \begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_k \end{pmatrix}.$$

2 Stacionarumo sąlygos

2.1 Pagrindinė teorema

Nagrinėsime asimptotiškai homogeninę Markovo grandinę (X_n), aprašytą ankstesniame skyriuje, ir aiškinsimės, kada ji turi stacionarų skirstinį. Naudosime tuos pačius žymenis, kaip anksčiau. Be to, apibrėšime

$$S = \{x \in C \mid \|x\| = 1\}, \quad R(x,w) = \|G(x,w)\|, \quad H(x,w) = \frac{G(x,w)}{R(x,w)},$$

o ε raide žymėsime atsitiktinį W elementą, turintį tokį pat skirstinį kaip sekos (ε_n) elementai.

Tegu $b : W \to [0;\infty)$ yra tam tikra Borelio funkcija, tenkinanti sąlygą

$$\mathrm{E}\, b(\varepsilon) < \infty.$$

Toliau laikysime, kad su visais $w \in W$ teisingi tokie sąryšiai:

(NZ) $G(x,w) \neq 0$ su visais $x \neq 0$;

(M1) $M(x,w) = |\ln^+\|F(x,w)\| - \ln^+\|G(x,w)\|| \leqslant b(w)$ su visais x;

(M2) $\sup_{\|x\|=1} |\ln R(x,w)| \leqslant b(w)$.

Iš NZ išplaukia, kad $H(x,w)$ korektiškai apibrėžta su visais $x \in S$.

Kartu su grandine (X_n) nagrinėsime dvi pagalbines sekas (Y_n) ir (Z_n), apibrėžiamas lygybėmis

$$Y_n = G(Y_{n-1}, \varepsilon_n), \quad n \geqslant 1; \quad Z_n = \frac{Y_n}{\|Y_n\|}, \quad n \geqslant 0. \tag{2.1}$$

Jei Y_0 nepriklauso nuo (ε_n), (Y_n) yra Markovo grandinė. Laikysime, kad $Y_0 \neq 0$ b.v.; tada iš NZ prielaidos $Y_n \neq 0$ b.v. su visais n. Taigi galime laikyti, kad (Y_n) grandinės būsenų aibė yra $C_0 = C \setminus \{0\}$. Tada seka (Z_n) apibrėžta korektiškai. Be to, iš homogeniškumo išplaukia

$$Z_n = \frac{Y_n}{\|Y_n\|} = \frac{G(Y_{n-1}\|Y_{n-1}\|^{-1}, \varepsilon_n)}{R(Y_{n-1}\|Y_{n-1}\|^{-1}, \varepsilon_n)} = H(Z_{n-1}, \varepsilon_n).$$

Taigi (Z_n) taip pat yra Markovo grandinė su būsenų aibe S. Atkreipsime dėmesį, kad iš M2 sąlygos išplaukia

$$\mathrm{E}|\ln R(Z,\varepsilon)| < \infty$$

su bet kokiu atsitiktiniu aibės S elementu Z.

2.1 teorema. *Tarkime, kad (X_n) ir (Y_n) yra neskaidžios T-grandinės, (X_n) aperiodinė ir tenkinamos NZ, M1–M2 sąlygos. Tada (Z_n) yra teigiama Hariso grandinė. Tegu Z yra nuo ε nepriklausantis S elementas, kurio skirstinys sutampa su stacionariu grandinės (Z_n) skirstiniu, ir $\gamma = \mathrm{E}\ln R(Z,\varepsilon)$. Jei $\gamma < 0$, tai (X_n) yra teigiama Hariso grandinė; jei $\gamma > 0$, ji disipatyvi arba nulinė.*

Išvada. Su bet kokiu $x \in S$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \ln R(Z_{i-1}(x), \varepsilon_i) \text{ b.v.}; \tag{2.2}$$

čia $Z_0(x) = x$, $Z_n(x) = H(Z_{n-1}(x), \varepsilon_n)$.

2.2 Taikymų pavyzdžiai

Panagrinėsime kai kuriuos modelius iš aprašytųjų 1.2 skyrelyje. Laikysime, kad atsitiktinio elemento ε skirstinys turi absoliučiai tolydžią komponentę, kurios tankis teigiamas visoje aibėje W. Beveik visada iš to išplauks, kad (X_n) aperiodinė ir kad tiek (X_n), tiek (Y_n) grandinė neskaidi Lebego mato siaurinio atitinkamoje aibėje (C arba C_0) atžvilgiu. Jei F funkcija tolydi x atžvilgiu (iš 1.3 teiginio išplaukia, kad G visada tolydi x atžvilgiu), tai abi sekos bus Felerio grandinės. Tada jos bus neskaidžios T-grandinės (A.3 teorema) ir norint taikyti 2.1 teoremą pakaks patikrinti NZ ir M1–M2 sąlygas.

Literatūroje, kurioje nagrinėjami 1.2 skyrelyje aprašyti modeliai, daugeliu atvejų stacionaraus skirstinio egzistavimas įrodomas su silpnesnėmis neskaidumo prielaidomis. Todėl neskaidumo sąlygas pakomentuosime tik tais atvejais, kai originaliuose šaltiniuose jos bus panašios į aukščiau suformuluotąsias. Įrodinėjant stacionaraus skirstinio egzistavimą, kartu su neskaidumo sąlygomis paprastai formuluojamos ir momentinės prielaidos. Šiuo požiūriu 2.1 teorema beveik visada yra optimali. Todėl momentines sąlygas aptarsime kiekvienam nagrinėjamam modeliui.

2.2.1 Tiesiniai modeliai

Panagrinėkime bendrąjį tiesinį modelį, apibrėžiamą (1.6) lygtimis. Tegu D_k žymi apgręžiamų realiųjų $k \times k$ matricų aibę.

2.1 teiginys. *Tarkime, kad $W = \mathbb{R}^k \times D_k$. Jei*

$$\mathrm{E} \ln^+ \|U\| < \infty \quad \textit{ir} \quad \mathrm{E} \sup_{\|x\|=1} |\ln\|Vx\|| < \infty,$$

tai 2.1 teorema pritaikoma (1.6) *grandinei. Be to, su tikimybe 1*

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln\|V_n \cdots V_1\|. \tag{2.3}$$

Įrodymas. Įrodymą suskaidysime į dvi dalis. Iš pradžių įsitikinsime, kad 2.1 teorema pritaikoma, po to įrodysime (2.3) formulę.

1 dalis. Tikrinsime NZ ir M1–M2 sąlygas su funkcija

$$b(u, v) = \ln(1 + \|u\|) + \sup_{\|x\|=1} |\ln\|vx\||.$$

Iš momentinių teoremos prielaidų išplaukia, kad $\mathrm{E}\, b(U, V) < \infty$.

NZ. Tegu $G(x, (u, v)) = vx = 0$. Kadangi v apgręžiama, $x = 0$.

M1. Fiksuokime x ir $w = (u, v)$. Galimi keturi atvejai:

✓ $\|F(x,w)\| \geqslant 1$, $\|G(x,w)\| < 1$;

✓ $\|F(x,w)\| \geqslant 1$, $\|G(x,w)\| \geqslant 1$;

✓ $\|F(x,w)\| < 1$, $\|G(x,w)\| \geqslant 1$;

✓ $\|F(x,w)\| < 1$, $\|G(x,w)\| < 1$.

Pirmu atveju

$$\begin{aligned} M(x,w) = \ln\|F(x,w)\| &\leqslant \ln(\|u\| + \|vx\|) \\ &= \ln(\|u\| + \|G(x,w)\|) \leqslant \ln(1 + \|u\|). \end{aligned}$$

Antras atvejis išsiskaido į du: jei $\|F(x,w)\| \geqslant \|G(x,w)\|$, tai

$$M(x,w) = \ln\frac{\|F(x,w)\|}{\|G(x,w)\|} \leqslant \ln\frac{\|u\| + \|vx\|}{\|vx\|} \leqslant \ln(1 + \|u\|);$$

jei $\|F(x,w)\| < \|G(x,w)\|$, tai

$$M(x,w) = \ln\frac{\|G(x,w)\|}{\|F(x,w)\|} \leqslant \ln\frac{\|u\| + \|u + vx\|}{\|u + vx\|} \leqslant \ln(1 + \|u\|).$$

Trečiuoju atveju

$$\begin{aligned} M(x,w) = \ln\|vx\| &\leqslant \ln(\|u + vx\| + \|u\|) \\ &= \ln(\|F(x,w)\| + \|u\|) \leqslant \ln(1 + \|u\|). \end{aligned}$$

Ketvirtas atvejis trivialus.
M2 sąlyga akivaizdžiai patenkinta.
2 dalis. Pažymėkime

$$I = \{x \in \mathbb{R}^k \mid x_i \in \{-1, 1\}, i = 1, \dots, k\}.$$

Be standartinės $\mathbb{R}^k$ normos $\|x\| = \sqrt{x_1^2 + \cdots + x_k^2}$ naudosimės maksimumo norma $\|x\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant k}|x_i|$. Kiekvieno I elemento maksimumo norma bus lygi 1. Jei v yra $k \times k$ matrica, tai jos normą apibrėšime formule

$$\|v\| = \sup_{\|x\|_\infty = 1}\|vx\|_\infty = \max_{1\leqslant i\leqslant k}\big(|v_{i1}| + \cdots + |v_{ik}|\big) = \max_{x\in I}\|vx\|_\infty. \tag{2.4}$$

Tegu

$$\xi_n(x) = \frac{1}{n}\ln\|V_n \cdots V_1 x\|_\infty, \quad \text{ir} \quad \eta_n = \frac{1}{n}\ln\|V_n \cdots V_1\|.$$

Kadangi baigtiniamatėse erdvėse visos normos ekvivalenčios, egzistuoja tokios teigiamos konstantos c_1, c_2, kad

$$c_1\|x\| \leqslant \|x\|_\infty \leqslant c_2\|x\|.$$

Iš čia išplaukia

$$\frac{1}{n}\ln c_1 + \frac{1}{n}\ln\|V_n\cdots V_1x\| \leqslant \xi_n(x) \leqslant \frac{1}{n}\ln c_2 + \frac{1}{n}\ln\|V_n\cdots V_1x\|.$$

Tačiau

$$\frac{1}{n}\ln\|V_n\cdots V_1x\| = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln R\left(Z_{i-1}\left(\frac{x}{\|x\|}\right),(U_i,V_i)\right) + \frac{1}{n}\ln\|x\|,$$

todėl pagal 2.1 teoremos išvadą $(\xi_n(x))$ artėja į γ b.v.

Iš (2.4) gauname $\eta_n = \max_{x\in I}\xi_n(x)$. Kadangi aibės I elementų skaičius baigtinis, $\eta_n \to \gamma$ b.v. Gautas sąryšis nepriklauso nuo matricos normos parinkimo. Norint tuo įsitikinti, pakanka dar kartą pasinaudoti normų ekvivalentumu baigtiniamatėse erdvėse. □

Stipriausias rezultatas, nurodantis tiesinio modelio stacionarumo sąlygas, gautas jau minėtame darbe [2]. Momentinės sąlygos vektoriui U yra tokios pat. Matricai V jos silpnesnės — reikalaujama tik $\mathrm{E}\ln^+\|V\| < \infty$. Vis dėlto (2.3) formulė leidžia teigti, kad, esant teisingoms teiginio sąlygoms, gauname tą pačią stacionarių (nestacionarių) modelių aibę, kuri gaunama naudojantis [2] rezultatais. Todėl 2.1 teoremoje minimas dydis γ pagrįstai gali būti vadinamas asimptotiškai homogeninės grandinės *Liapunovo eksponente.*

2.2.2 Vienmačiai modeliai

Praėkime nuo paprasčiausio — (1.9) modelio. Prielaidos ε atžvilgiu leidžia taikyti 2.1 teoremą, bet ji neduoda lauktos stacionarumo sąlygos: kadangi šiuo atveju $Z = 1$,

$$\gamma = \mathrm{E}\ln R(Z,\varepsilon) = \mathrm{E}\ln G(Z,\varepsilon) = \mathrm{E}\ln Z = 0.$$

Tačiau pradinis modelis nesunkiai transformuojamas į jam ekvivalentų, kuriam mūsų teorema jau duoda padorų rezultatą. Pažymėkime $\tilde{X}_n = \mathrm{e}^{X_n}$. Tada iš (1.9) išplaukia

$$\tilde{X}_n = \max(\tilde{\varepsilon}_n\tilde{X}_{n-1}, 1) \tag{2.5}$$

su $\tilde{\varepsilon}_n = \mathrm{e}^{\varepsilon_n}$.

2.2 teiginys. *Jei* $(\tilde{X}_n)$ *apibrėžiama* (2.5) *lygtimi ir* $\mathrm{E}|\ln\tilde{\varepsilon}| = \mathrm{E}|\varepsilon| < \infty$, *tai 2.1 teorema pritaikoma grandinei* $(\tilde{X}_n)$.

Įrodymas. Patikrinsime NZ ir M1–M2 sąlygas. Kadangi $\tilde{G}(x,\tilde{w}) = x\tilde{w}$ ir $\tilde{w}$ gali būti tik teigiamas, $\tilde{G}(x,\tilde{w}) \neq 0$ su $x \neq 0$. M1 sąlyga taip pat tenkinama. Iš tikro, jei $\tilde{G}(x,\tilde{w}) < 1$, tai $\tilde{F}(x,\tilde{w}) = 1$; jei $\tilde{G}(x,\tilde{w}) \geqslant 1$, tai $\tilde{F}(x,\tilde{w}) = \tilde{G}(x,\tilde{w})$. Abiem atvejais $M(x,\tilde{w}) = 0$. M2 sąlyga akivaizdžiai tenkinama su funkcija $b(w) = |\ln\tilde{w}|$; nelygybė $\mathrm{E}\,b(\varepsilon) < \infty$ išplaukia iš teoremos prielaidos. □

Jei $\tilde{X}$ yra atsitiktinis dydis,kurio skirstinys sutampa su stacionariu $(\tilde{X}_n)$ skirstiniu, tai $X = \ln\tilde{X}_n$ skirstinys yra stacionarus (1.9) modelio skirstinys, ir atvirkščiai. Todėl įrodytas teiginys duoda ir pradinio modelio stacionarumo sąlygas. Kadangi Liapunovo eksponentė (2.5) modelyje yra $\tilde{\gamma} = \mathrm{E}\ln\tilde{\varepsilon} = \mathrm{E}\,\varepsilon$, galime daryti išvadą, kad (X_n) turi stacionarų skirstinį, kai $\mathrm{E}\,\varepsilon < 0$, ir neturi jo, kai $\mathrm{E}\,\varepsilon > 0$. Gavome klasikinį rezultatą, kuris, tiesa, teisingas ir tuo atveju, kai nereikalaujame tankio egzistavimo.

Pritaikę savo teoremą kitiems modeliams, aprašytiems 1.2.2 skyrelyje, jau gauname ir naujų rezultatų. Pradėsime nuo modelių ant pustiesės.

2.3 teiginys. *Tegu* (X_n) *apibrėžiama* (1.12) *lygtimi ir* $W = (0;\infty)^3$. *Jei*

$$\mathrm{E}|\ln R| < \infty \quad \textit{ir} \quad \mathrm{E}\ln\left(1 + \frac{U}{\sqrt{R}} + V\right) < \infty,$$

tai 2.1 teorema pritaikoma grandinei (X_n).

Įrodymas. Patikrinsime NZ ir M1–M2 sąlygas imdami

$$b(r,u,v) = \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{r}} + v\right) + |\ln r|.$$

NZ. Kadangi $G(x,(r,u,v)) = rx$ ir $r > 0$, NZ sąlyga tenkinama.

M1. Fiksuojame x ir $w = (r,u,v)$. Kadangi $F \geqslant G$, galimi tik trys atvejai:

- ✓ $G(x,w) \geqslant 1$;
- ✓ $F(x,w) \geqslant 1 > G(x,w)$;
- ✓ $F(x,w) < 1$.

Pirmu atveju $x \geqslant \frac{1}{r}$, todėl

$$M(x,w) = \ln\frac{rx + u\sqrt{x} + v}{rx} = \ln\left(1 + \frac{u}{r\sqrt{x}} + \frac{v}{rx}\right) \leqslant \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{r}} + v\right).$$

Antruoju atveju $x < \frac{1}{r}$, todėl

$$M(x,w) = \ln(rx + u\sqrt{x} + v) \leqslant \ln\left(1 + \frac{u}{\sqrt{r}} + v\right).$$

Trečias atvejis trivialus.

M2. Ši sąlyga akivaizdžiai tenkinama. □

Išnagrinėto modelio Liapunovo eksponentė lygi $\mathrm{E}\ln R$. Taigi stacionarus skirstinys egzistuoja, kai $\mathrm{E}\ln R < 0$.

Darbe [6], kuriame nagrinėtas šis modelis, gautos tokios stacionarumo sąlygos:

$$\mathrm{E}\ln R < 0, \quad \mathrm{E}\ln^+ U < \infty \quad \text{ir} \quad \mathrm{E}\ln\left(R + \frac{U}{2\sqrt{V'}}\right) < 0;$$

čia V' yra V kopija, nepriklausanti nuo R ir U. Matome, kad trečia sąlyga eliminuoja dalį stacionarių grandinių. Iš tikrųjų, tegu R, U, V yra nepriklausomi absoliučiai tolydūs teigiami atsitiktiniai dydžiai, $\mathrm{E}\ln R < 0$, o U ir V vienodai pasiskirstę su tankiu

$$f(x) = \begin{cases} \frac{a+1}{2}x^a, & \text{kai } x \in (0;1); \\ \frac{b}{2}x^{-b-1}, & \text{kai } x \geqslant 1; \end{cases}$$

čia $a, b > 0$ — fiksuoti parametrai. Tada $\mathrm{E}\ln U = \frac{1}{2b} - \frac{1}{2(1+a)}$. Taigi, jei a didelis, o b mažas, $\mathrm{E}\ln U > 2\ln 2$, o tada

$$\begin{aligned} \mathrm{E}\ln\left(R + \frac{U}{2\sqrt{V}}\right) > \mathrm{E}\ln\left(\frac{U}{2\sqrt{V}}\right) &= \mathrm{E}\ln U - \ln 2 - \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\ln V \\ &= \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\ln U - \ln 2 > 0. \end{aligned}$$

Dabar panagrinėkime netiesinį AR modelį, tik laikydami $C = [0;\infty)$ ir $W = (0;\infty)$. Atskiras jo atvejis yra (1.11) modelis.

2.4 teiginys. *Tegu (X_n) apibrėžiama (1.14) lygtimi, su $i = 1, 2$ funkcija f_i aprėžta kiekviename intervale $[0;\Delta]$ ir g_i yra ribinė homogeninė funkcija, atitinkanti f_i. Jei $g_2(1) > 0$ ir $\mathrm{E}|\ln\varepsilon| < \infty$, tai 2.1 teorema pritaikoma grandinei (X_n).*

Įrodymas. Parodysime, kad tenkinamos NZ ir M1–M2 sąlygos su funkcija $b(w) = |\ln w| + \mathit{const}$. Prieš pradėdami pastebėsime, kad jei $a \geqslant 0, w, b > 0$, tai

$$|\ln(a + bw)| \leqslant \mathit{const} + |\ln w|. \tag{2.6}$$

Nagrinėjamu atveju $G(x,w) = (g_1(1) + g_2(1)w)x$. Kadangi $g_2(1), w > 0$, iš $G(x,w) = 0$ išplaukia $x = 0$ ir NZ tenkinama. M2 sąlyga išplaukia iš (2.6). Lieka patikrinti M1.

Jei ne tik $g_2(1)$, bet ir $g_1(1)$ teigiamas, egzistuoja toks Δ, kad

$$2^{-1}g_i(x) \leqslant f_i(x) \leqslant 2g_i(x) \tag{2.7}$$

su $i = 1, 2$ ir visais $x > \Delta$. Jei $g_1(1) = 0$, raide Δ pažymime tokį skaičių, kad su $x > \Delta$

$$f_1(x) \leqslant x \quad \text{ir} \quad 2^{-1}g_2(x) \leqslant f_2(x) \leqslant 2g_2(x). \tag{2.8}$$

Jei $x \leqslant \Delta$, tai

$$M(x,w) \leqslant \max\bigl(\ln^+ F(x,w), \ln^+ G(x,w)\bigr) \leqslant |\ln(a + bw)|$$

su tam tikromis konstantomis a, b, nes tiek f_i, tiek g_i funkcijos aprėžtos $[0;\Delta]$ intervale. Taigi pakanka įsitikinti, kad $M(x,w) \leqslant \mathit{const} + |\ln w|$, kai $x > \Delta$. Nagrinėjame visus galimus atvejus.

Atvejis $F(x,w) \geqslant 1$, $G(x,w) \geqslant 1$. Jei $g_1(1) > 0$, tai iš (2.7)

$$M(x,w) \leqslant \ln\frac{2g_1(x) + 2g_2(x)w}{g_1(x) + g_2(x)w} = \ln 2;$$

jei $g_1(1) = 0$, tai iš (2.8) ir (2.6)

$$M(x,w) \leqslant \ln \frac{x + 2g_2(x)w}{g_2(x)w} = \ln\Bigl(2 + \frac{1}{g_2(1)w}\Bigr) \leqslant const + |\ln w|.$$

Atvejis $F(x,w) \geqslant 1$, $G(x,w) < 1$. Šiuo atveju

$$x < \frac{1}{g_2(1)w}.$$

Todėl

$$M(x,w) \leqslant \ln\bigl(2G(x,w)\bigr) \leqslant \ln 2,$$

kai $g_1(1) > 0$, ir

$$M(x,w) \leqslant \ln\left(x + 2g_2(x)w\right) \leqslant \ln\left(2 + \frac{1}{g_2(1)w}\right) \leqslant const + |\ln w|,$$

kai $g_1(1) = 0$.

Atvejis $F(x,w) < 1$, $G(x,w) \geqslant 1$. Šiuo atveju

$$x \leqslant \frac{2}{g_2(1)w};$$

todėl

$$M(x,w) \leqslant \ln \frac{2(g_1(1) + g_2(1)w)}{g_2(1)w} = \ln\left(2 + \frac{2g_1(1)}{g_2(1)w}\right) \leqslant const + |\ln w|.$$

Atvejis $F(x,w) < 1$, $G(x,w) < 1$ trivialus. $\square$

Iš įrodyto teiginio išplaukia, kad jei $\mathrm{E}|\ln\varepsilon| < \infty$ ir $W = (0;\infty)$, tai (1.11) modeliui pritaikoma 2.1 teorema. Liapunovo eksponentė tame modelyje lygi $\mathrm{E}\ln\varepsilon$. Taigi, modelis turi stacionarų skirstinį, kai $\mathrm{E}\ln\varepsilon < 0$, ir neturi jo, kai $\mathrm{E}\ln\varepsilon > 0$.

Toliau panagrinėsime modelius, kuriuose $C = \mathbb{R}$. Pradėsime nuo (1.15) modelio.

2.5 teiginys. *Jei $W = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $\mathrm{E}|\ln V^2| < \infty$ ir $\mathrm{E}\ln^+|U| < \infty$, tai 2.1 teorema pritaikoma* (1.15) *lygtimi apibrėžiamai grandinei.*

Įrodymas. Kaip ir anksčiau, iš tankio prielaidos išplaukia, kad tiek (X_n), tiek (Y_n) neskaidi. Tik šįkart grandinės (X_n) neskaidumo matas yra ne Lebego matas, o tikimybinis matas, sukoncentruotas 0 taške (jį žymėsime simboliu δ_0). Be to, šįkart F funkcija nėra tolydi x atžvilgiu; todėl iš pradžių įsitikinsime, kad (X_n) yra T-grandinė.

Tegu p yra vektoriaus $\varepsilon = (U,V)$ skirstinio tolydžiosios komponentės tankis. Tada

$$\mathrm{P}\{F(x,\varepsilon) \in A\} = \mathrm{P}\{[U + Vx] \in A\} \geqslant \begin{cases} 0, & \text{kai } 0 \notin A; \\ h(x), & \text{kai } 0 \in A; \end{cases}$$

čia
$$h(x) = \iint\limits_{u+vx\in(0;1)} p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \quad \text{su } x \in \mathbb{R}.$$
Kitaip tariant, grandinės (X_n) perėjimo tikimybių branduolį minoruoja branduolys T, apibrėžiamas lygybėmis
$$T(x,A) = h(x)\delta_0(A), \quad x \in \mathbb{R},\ A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}).$$
Aišku, kad $T(x,\mathbb{R}) > 0$ su visais x. Lieka įsitikinti, kad h yra pusiau tolydi iš apačios. Tai išplaukia iš Fatu lemos, nes jei $x_n \to x$, tai
$$\begin{aligned}\liminf h(x_n) &\geqslant \iint \liminf \mathbf{1}_{(0;1)}(u+vx_n)p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v \\ &\geqslant \iint \mathbf{1}_{(0;1)}(u+vx)p(u,v)\mathrm{d}u\mathrm{d}v = h(x).\end{aligned}$$
Lieka patikrinti NZ ir M1–M2 sąlygas. Įrodysime, kad jos tenkinamos su funkcija
$$b(u,v) = \ln(2+|u|) + |\ln|v||.$$
Jei $x \neq 0$, tai $G(x,(u,v)) = vx \neq 0$, nes $v \neq 0$. Taigi NZ sąlyga patenkinta. Akivaizdu, kad M2 sąlyga taip pat patenkinta, ir belieka patikrinti M1.

Tegu $\{x\}$ žymi skaičiaus x trupmeninę dalį. Fiksuojame x ir $w = (u,v)$ ir vėl nagrinėjame visus galimus atvejus.

Atvejis $|F(x,w)| \geqslant 1$, $|G(x,w)| \geqslant 1$. Jei $|F(x,w)| \geqslant |G(x,w)|$, tai
$$M(x,w) = \ln\frac{|u+vx-\{u+vx\}|}{|vx|} \leqslant \ln\frac{|u+vx|+1}{|vx|} \leqslant \ln(2+|u|).$$
Jei $|G(x,w)| > |F(x,w)|$, tai
$$\begin{aligned}M(x,w) &= \ln\frac{|vx|}{|u+vx-\{u+vx\}|} \\ &\leqslant \ln\frac{|u+vx-\{u+vx\}|+|u|+1}{|u+vx-\{u+vx\}|} \leqslant \ln(2+|u|).\end{aligned}$$
Atvejis $|F(x,w)| \geqslant 1$, $|G(x,w)| < 1$. Šiuo atveju
$$M(x,w) = \ln|u+vx-\{u+vx\}| \leqslant \ln(|u|+|vx|+1) \leqslant \ln(2+|u|).$$
Atvejis $|G(x,w)| \geqslant 1$, $|F(x,w)| < 1$. Dabar taip pat
$$M(x,w) = \ln|vx| \leqslant \ln(|u+vx-\{u+vx\}|+|u|+1) \leqslant \ln(2+|u|). \ \square$$
Išnagrinėto modelio Liapunovo eksponentė yra $\mathrm{E}\ln|v|$. Taigi stacionarus skirstinys egzistuoja, kai $\mathrm{E}\ln|v| < 0$, ir neegzistuoja, kai $\mathrm{E}\ln|v| > 0$.

Darbe [6], kur sutinkamas išnagrinėtas modelis, momentinės stacionaraus skirstinio egzistavimo sąlygos yra tokios pat. Tiesa, nereikalaujama, kad $\mathrm{E}\ln|v|$ būtų baigtinis, t.y. situacija $\mathrm{E}\ln|v| = -\infty$ galima.

Dabar panagrinėsime (1.16) modelį. Jį atitinkanti funkcija F taip pat nėra tolydi x atžvilgiu.

2.6 teiginys. *Tegu* (X_n) *apibrėžiama* (1.16) *lygtimi. Jei* $W = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$, $\mathrm{E}\ln^+|U| < \infty$ *ir* $\mathrm{E}|\ln V^2| < \infty$, *tai 2.1 teorema pritaikoma grandinei* (X_n).

Įrodymas. Iš funkcijos F pavidalo matyti, kad (X_n) neskaidi Lebego mato atžvilgiu. Įrodysime, kad ji yra T-grandinė.

Tegu p yra atsitiktinio vektoriaus $\varepsilon = (U, V)$ skirstinio tolydžios komponentės tankis. Su $x \in \mathbb{R}$ ir $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ pažymėkime

$$T(x, A) = \iint\limits_{u \in A, |u| > |vx|} p(u, v) \mathrm{d}u \mathrm{d}v.$$

Tada

$$\mathrm{P}\{F(x, (U, V)) \in A\} \geqslant \mathrm{P}\{U \in A, |U| > |Vx|\} \geqslant T(x, A).$$

Aišku, kad $T(x, \cdot)$ yra substochastinis matas ir $T(x, \mathbb{R}) > 0$ su visais x. Be to, panašiai kaip ankstesnio teiginio įrodyme iš Fatu lemos išplaukia, kad kiekviena $T(\cdot, A)$ yra pusiau tolydi iš apačios funkcija. Taigi T yra tolydžioji komponentė.

Patikrinsime NZ ir M1–M2 sąlygas su funkcija

$$b(u, v) = \ln(1 + 2|u|) + |\ln|v||.$$

Jei $x \neq 0$, tai $G(x, (u, v)) = vx \neq 0$, nes $v \neq 0$. Akivaizdu, kad M2 sąlyga taip pat patenkinta. Tikrindami M1 fiksuojame x ir $w = (u, v)$ ir vėl perrenkame esminius atvejus.

Atvejis $|F(x, w)| \geqslant 1$, $|G(x, w)| \geqslant 1$. Jei $|F(x, w)| \geqslant |G(x, w)|$, tai

$$M(x, w) = \ln \frac{|u\mathbf{1}_{\{|u| > |vx|\}} + vx\mathbf{1}_{\{|u| \leqslant |vx|\}}|}{|vx|} \leqslant \ln(1 + |u|).$$

Jei $|F(x, w)| \leqslant |G(x, w)|$, tai

$$\begin{aligned} M(x, w) &= \ln \frac{|vx\mathbf{1}_{\{|u| > |vx|\}} + vx\mathbf{1}_{\{|u| \leqslant |vx|\}}|}{|u\mathbf{1}_{\{|u| > |vx|\}} + vx\mathbf{1}_{\{|u| \leqslant |vx|\}}|} \\ &\leqslant \ln \frac{|u\mathbf{1}_{\{|u| > |vx|\}} + vx\mathbf{1}_{\{|u| \leqslant |vx|\}}| + 2|u|}{|u\mathbf{1}_{\{|u| > |vx|\}} + vx\mathbf{1}_{\{|u| \leqslant |vx|\}}|} \leqslant \ln(1 + 2|u|). \end{aligned}$$

Atvejis $|F(x, w)| \geqslant 1$, $|G(x, w)| < 1$. Dabar

$$M(x, w) = \ln|u\mathbf{1}_{\{|u| > |vx|\}} + vx\mathbf{1}_{\{|u| \leqslant |vx|\}}| \leqslant \ln(|u| + |vx|) \leqslant \ln(1 + |u|).$$

Atvejis $|F(x, w)| < 1$, $|G(x, w)| \geqslant 1$. Čia

$$\begin{aligned} M(x, w) &= \ln|vx\mathbf{1}_{\{|u| > |vx|\}} + vx\mathbf{1}_{\{|u| \leqslant |vx|\}}| \\ &\leqslant \ln(|u\mathbf{1}_{\{|u| > |vx|\}} + vx\mathbf{1}_{\{|u| \leqslant |vx|\}}| + 2|u|) \leqslant \ln(1 + 2|u|). \ \square \end{aligned}$$

Išnagrinėto modelio Liapunovo eksponentė lygi $\mathrm{E}\ln|v|$. Kaip ir ankstesniame modelyje, momentinės sąlygos, garantuojančios stacionaraus skirstinio egzistavimą, sutampa su tomis, kurios pateikiamos originaliame šaltinyje [6].

1.2.2 skyrelyje esame apibrėžę dar vieną modelį, kurio būsenų aibė sutampa su tiese:

$$X_n = aX_{n-1} + \varepsilon_n \sqrt{b + cX_{n-1}^2}.$$

Jį išnagrinėsime trečiajame skyriuje, iliustruodami uodegos indekso tyrimo metu gautus rezultatus. Čia tik paminėsime, kad darbe [12], kur sutinkamas pastarasis modelis, visos stacionaraus skirstinio egzistavimo sąlygos yra stipresnės nei tos, kurias duoda 2.1 teorema: reikalaujama, kad ε būtų absoliučiai tolydus atsitiktinis dydis su simetriniu tankiu ir baigtine dispersija. Taikydami mūsų teoremą, gauname tokį teiginį.

2.7 teiginys. *Tegu* (X_n) *apibrėžiama* (1.13) *lygtimi. Jei* $W = \mathbb{R}\backslash\{0, -\frac{a}{\sqrt{c}}, \frac{a}{\sqrt{c}}\}$,

$$\mathrm{E}|\ln(a + \varepsilon\sqrt{c})^2| < \infty, \ \mathrm{E}|\ln(a - \varepsilon\sqrt{c})^2| < \infty \quad ir \quad \mathrm{E}|\ln \varepsilon^2| < \infty,$$

tai 2.1 teorema pritaikoma grandinei (X_n).

Įrodymas. Patikrinsime sąlygas NZ, M1–M2 su funkcija

$$b(w) = \frac{1}{2}\left(|\ln w^2| + |\ln(a + w\sqrt{c})^2| + |\ln(a - w\sqrt{c})^2|\right) + const.$$

NZ. Priminsime, kad

$$G(x, w) = ax + w|x|\sqrt{c} = x(a + \mathrm{sign}(x)w\sqrt{c}), \tag{2.9}$$

kur

$$\mathrm{sign}(x) = \begin{cases} -1, \text{ kai } x < 0; \\ 0, \text{ kai } x = 0; \\ 1, \text{ kai } x > 0. \end{cases}$$

Iš teoremos prielaidų $w \neq \pm\frac{a}{\sqrt{c}}$. Todėl $G(x, w) = 0$ tada ir tik tada, kai $x = 0$.

M1. Pažymėkime

$$g(x, w) = F^2(x, w) - G^2(x, w) = bw^2 + 2wax(\sqrt{b + cx^2} - \sqrt{cx^2}).$$

Jei $x = 0$, tai $F^2(x, w) = w^2 b$ ir

$$2M(x, w) \leqslant |\ln F^2(x, w)| \leqslant |\ln b| + |\ln w^2|.$$

Jei $x \neq 0$ ir $wax > 0$, tai $F^2(x, w) > G^2(x, w)$ ir galimi trys atvejai:

✓ $F^2(x, w) \leqslant 1$;

✓ $F^2(x, w) > 1 \geqslant G^2(x, w)$

✓ $G^2(x, w) \geqslant 1$.

Pirmuoju atveju $M(x,w)=0$. Antruoju atveju atsižvelgę į (2.9) ir tai, kad $\operatorname{sign}(a)=\operatorname{sign}(x)\operatorname{sign}(w)$, gauname nelygybę

$$|x|<\frac{1}{|a|+|w|\sqrt{c}}.$$

Iš čia išplaukia įvertis

$$\begin{aligned}
2M(x,w)&=\ln F^2(x,w)=\ln(G^2(x,w)+g(x,w))\\
&\leqslant \ln(1+g(x,w))\leqslant \ln\left(1+bw^2+\frac{2|a|b}{\sqrt{c}(\sqrt{b+cx^2}+\sqrt{cx^2})}\right)\\
&\leqslant \ln\left(1+bw^2+2|a|\sqrt{\frac{b}{c}}\right).
\end{aligned}$$

Trečiuoju atveju

$$\begin{aligned}
2M(x,w)&=\ln\frac{F^2(x,w)}{G^2(x,w)}=\ln\left(1+\frac{g(x,w)}{G^2(x,w)}\right)\leqslant\ln(1+g(x,w))\\
&=\ln\left(1+bw^2+\frac{2waxb}{\sqrt{b+cx^2}+\sqrt{cx^2}}\right)\leqslant\ln\left(1+bw^2+\frac{|wa|b}{\sqrt{c}}\right).
\end{aligned}$$

Dabar tarkime, kad $x\neq 0$ ir $wax<0$. Jei $F^2(x,w)\geqslant G^2(x,w)$, tai

$$2M(x,w)=\ln\left(\frac{F^2(x,w)}{\max(1,G^2(x,w))}\right)\leqslant\ln(1+g(x,w))\leqslant\ln(1+bw^2),$$

kai $F^2(x,w)\geqslant 1$.

Jei $F^2(x,w)<G^2(x,w)$, tai pastebėję, kad $g(x,w)<0$, gauname

$$\begin{aligned}
2M(x,w)&=\ln\left(\frac{G^2(x,w)}{\max(1,F^2(x,w))}\right)\leqslant\ln(1-g(x,w))\\
&\leqslant\ln(1+2|awx|(\sqrt{b+cx^2}-\sqrt{cx^2}))=\ln\left(1+\frac{2|awx|b}{\sqrt{b+cx^2}+\sqrt{cx^2}}\right)\\
&\leqslant\ln\left(1+\frac{|aw|b}{\sqrt{c}}\right),
\end{aligned}$$

kai $G^2(x,w)>1$. Taigi M1 tenkinama.

M2. Atsižvelgę į (2.9) matome, kad M2 iškart išplaukia iš teoremos prielaidų.

□

2.2.3 HARCH modeliai

1.2 skyriuje davėme du daugiamačių asimptotiškai homogeninių grandinių pavyzdžius. Šiame skyrelyje, iliustruodami pagrindinės teoremos taikymą, išnagrinėsime HARCH procesą. Būtinos ir pakankamos stacionaraus skirstinio egzistavimo sąlygos žinomos tik tuo atveju, kai tariama, kad stacionaraus sprendinio kvadratas integruojamas (žr. [4]); neskaidumo prielaidos yra tokios pat kaip ir tos, kurias keliame mes. Parodysime, kad momentinė prielaida gali būti ženkliai susilpninta.

2.8 teiginys. *Tegu* (X_n) *apibrėžiama* (1.17)–(1.19) *lygtimis. Jei* $W = \mathbb{R} \setminus \{0\}$ *ir* $\mathrm{E}|\ln \varepsilon^2| < \infty$*, tai* (2.1) *teorema pritaikoma grandinei* (X_n)*.*

Įrodymas. Tikrinsime NZ ir M1–M2 sąlygas, imdami

$$b(w) = \frac{1}{2}|\ln w^2| + const.$$

NZ. Iš (1.20) matyti, kad jei $G(x,w) = 0$, tai $x_1 = \cdots = x_{k-1} = 0$. Be to, iš $c_k > 0$ taip pat išplaukia $x_1 + \cdots + x_k = 0$. Reiškia, $x = 0$.

M1. Kadangi $\|F(x,w)\|^2 = c_0 w^2 + \|G(x,w)\|^2 > \|G(x,w)\|^2$, galimi trys atvejai:

✓ $\|G(x,w)\| \geqslant 1$;

✓ $\|G(x,w)\| < 1 \leqslant \|F(x,w)\|$;

✓ $\|F(x,w)\| < 1$.

Pirmu atveju

$$M(x,w) = \frac{1}{2}\ln\left(1 + \frac{c_0 w^2}{\|G(x,w)\|^2}\right) \leqslant \frac{1}{2}\ln\left(1 + c_0 w^2\right),$$

antruoju

$$M(x,w) = \frac{1}{2}\ln(c_0 w^2 + \|G(x,w)\|^2) \leqslant \frac{1}{2}\ln(1 + c_0 w^2)$$

ir trečiuoju $M(x,w) = 0$. Belieka pastebėti, kad

$$\frac{1}{2}\ln(1 + c_0 w^2) \leqslant \frac{1}{2}\ln(1 + c_0) + \frac{1}{2}\ln\max(1, w^2) \leqslant \frac{1}{2}\ln(1 + c_0) + \frac{1}{2}|\ln w^2|.$$

M2. Vertinsime $|\ln\|G(x,w)\||$. Pažymėkime

$$g(x) = \sum_{j=1}^{k} c_j \left(\sum_{i=1}^{j} x_i\right)^2 + \sum_{j=1}^{k-1} x_j^2,$$

$$g_* = \min_{\|x\|=1} g(x), \quad g^* = \max_{\|x\|=1} g(x).$$

Kadangi

$$\min(1, w^2) g(x) \leqslant \|G(x,w)\|^2 \leqslant \max(1, w^2) g(x),$$

logaritmavę abi puses gauname

$$-\frac{1}{2}|\ln w^2| + \frac{1}{2}\ln g(x) \leqslant \ln\|G(x,w)\| \leqslant \frac{1}{2}|\ln w^2| + \frac{1}{2}\ln g(x).$$

Reiškia,

$$\sup_{\|x\|=1} |\ln\|G(x,w)\|| \leqslant \frac{1}{2}\ln\max(g_*, g^*) + \frac{1}{2}|\ln w^2|. \square$$

Norint ištirti HARCH(k) stacionarumą, kai ε tenkina įrodyto teiginio sąlygas, reikia apskaičiuoti Liapunovo eksponentę γ. Pažymėkime

$$\gamma_* = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\inf_{\|x\|=1} \ln\|G(x,\varepsilon)\|^2, \quad \gamma^* = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\sup_{\|x\|=1} \ln\|G(x,\varepsilon)\|^2$$

ir

$$\gamma_m(x) = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}\ln R(Z_{i-1}(x), \varepsilon_i).$$

Tada su visais $x \in S$ ir m teisingos nelygybės $\gamma_* \leqslant \gamma_m(x) \leqslant \gamma^*$. Suskaičiavę ribas, kai $m \to \infty$, ir pasirėmę 2.1 teoremos išvada, gauname

$$\gamma_* \leqslant \gamma \leqslant \gamma^*. \tag{2.10}$$

Taigi iš $\gamma^* < 0$ išplaukia $\gamma < 0$, o iš $\gamma_* > 0$ gautume $\gamma > 0$. Kitaip tariant, sąryšis $\gamma_* < 0$ yra pakankama, o sąryšis $\gamma_* < 0$ — būtina stacionaraus sprendinio egzistavimo sąlyga.

Jei $k = 1$, tai $\gamma_* = \gamma^* = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\ln(c_1\varepsilon^2)$ ir todėl

$$\gamma = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\ln(c_1\varepsilon^2).$$

Taigi atveju $k = 1$ turime išreikštinį γ pavidalą. Jei $k > 1$, tai panaudoti (2.10) nelygybes kebliau. Iš tikrųjų, šiuo atveju

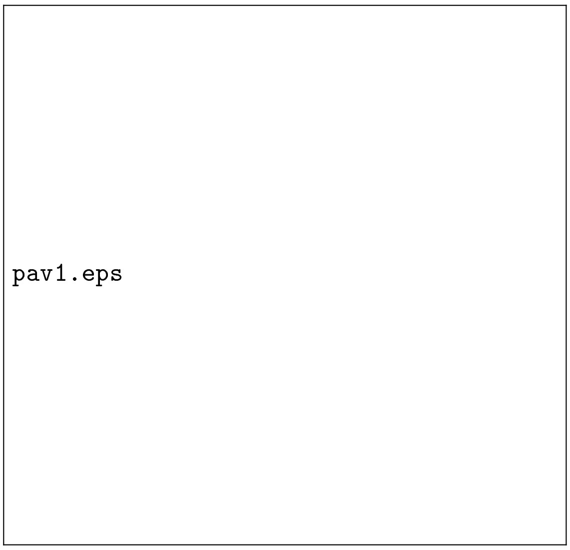
$$\|G(x,w)\|^2 = \sum_{j=1}^{k} c_j \left(\sum_{i=1}^{j} x_i\right)^2 w^2 + \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 \geqslant \sum_{i=1}^{k-1} x_i^2$$

ir todėl $\gamma^* \geqslant \frac{1}{2}\sup_{\|x\|=1} \ln\sum_{i=1}^{k-1} x_i^2 = 0$. Taip pat sunku ką nors pasakyti apie γ_*. Tačiau atveju $k > 1$ galime remtis 2.1 teoremos išvada ir vertinti γ Monte-Karlo metodu.

Vizualiai 2.8 teiginio iliustracijai atlikome simuliacijas imdami $k = 2$ ir $\varepsilon \sim N(0,1)$. Jų rezultatai atsispindi 1 pav., kuriame nupiešti dviejų funkcijų grafikai. Abu grafikai suskaido parametrų (c_1, c_2) kitimo sritį į dvi dalis: parametrams po grafiku stacionarus skirstinys egzistuoja, virš grafiko — neegzistuoja. Tiesė $c_1 + 2c_2 = 1$ apibrėžia stacionaraus kvadratu integruojamo skirstinio egzistavimo sritį: [4] darbe parodyta, kad būtina ir pakankama tokio skirstinio egzistavimo sąlyga yra

$$c_1 + 2c_2 < \frac{1}{\mathrm{E}\,\varepsilon^2}.$$

Laužtė gauta vertinant γ Monte-Karlo metodu įvairioms parametrų (c_1, c_2) reikšmėms, kaip buvo aprašyta aukščiau.



1 pav. Stacionaraus HARCH(2) proceso ir stationaraus kvadratu integruojamo HARCH(2) proceso egzistavimo sritys

2.3 Pagrindinės teoremos įrodymas

Fiksuokime $x \in C_0$, $x_0 \in S$ ir apibrėžkime keturias sekas:

$$X_0(x) = x, \quad X_n(x) = F(X_{n-1}(x), \varepsilon_n), \quad n \geqslant 1;$$
$$Y_0(x) = x, \quad Y_n(x) = G(Y_{n-1}(x), \varepsilon_n), \quad n \geqslant 1;$$
$$\tilde{Z}_n(x) = \mathbf{1}_{\{X_n(x) \neq 0\}} \frac{X_n(x)}{\|X_n(x)\|} + \mathbf{1}_{\{X_n(x)=0\}} x_0,$$
$$Z_n(x) = \frac{Y_n(x)}{\|Y_n(x)\|}.$$

Iš M2 sąlygos išplaukia $\mathrm{E}|\ln R(Z_n(x), \varepsilon)| \leqslant \mathrm{E}\, b(\varepsilon) < \infty$, todėl su $x \neq 0$ galime apibrėžti funkcijas

$$\gamma_m(x) = \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E} \ln R(Z_{i-1}(x), \varepsilon_i).$$

Pagrindinės teoremos įrodymas remsis tokia lema.

2.1 lema. *Jei tenkinamos NZ ir M1–M2 sąlygos, tai bet kokiam fiksuotam m*

$$\mathrm{E} \ln^+ \|X_m(x)\| - \ln^+ \|x\| - m\gamma_m(x) \xrightarrow[x \to \infty]{} 0. \tag{2.11}$$

Įrodymas. Pažymėkime

$$F_0(x) = G_0(x) = x, \quad f_w = F(\cdot, w), \quad g_w = G(\cdot, w)$$

ir su $n \geqslant 1$

$$F_n(x, w_1, \ldots, w_n) = F(F_{n-1}(x, w_1, \ldots, w_{n-1}), w_n) = f_{w_n} \circ \cdots \circ f_{w_1}(x),$$
$$G_n(x, w_1, \ldots, w_n) = G(G_{n-1}(x, w_1, \ldots, w_{n-1}), w_n) = g_{w_n} \circ \cdots \circ g_{w_1}(x).$$

Tada $X_n(x) = F_n(x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$ ir $Y_n(x) = G_n(x, \varepsilon_1, \ldots, \varepsilon_n)$. Iš NZ prielaidos turime, kad $G_n(x, w_1, \ldots, w_n) \neq 0$ su visais $x \neq 0$ ir visais $w_1, \ldots, w_n \in W$, todėl pasirėmę asimptotiškai homogeninių funkcijų savybėmis gauname, kad

- ✓ $F_n(\cdot, w_1, \ldots, w_n)$ yra asimptotiškai homogeninės, o $G_n(\cdot, w_1, \ldots, w_n)$ — atitinkamos ribinės homogeninės funkcijos;
- ✓ $\|X_n(x)\| \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ ir $\|Y_n(x)\| \xrightarrow[x\to\infty]{} \infty$ b.v.

Norint gauti (2.11), pakanka parodyti, kad visiems $j \geqslant 1$

$$\mathrm{E}|\ln^+\|X_j(x)\| - \ln^+\|X_{j-1}(x)\| - \ln R(Z_{j-1}(x), \varepsilon_j)| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Įrodymą suskaidysime į tris dalis.

1 dalis. Iš (1.3) su visais $w \in W$

$$\ln\|F(x, w)\| - \ln\|G(x, w)\| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Iš (1.4) gauname, kad pakankamai dideliems $\|x\|$

$$\ln\|F(x, w)\| = \ln^+\|F(x, w)\| \quad \text{ir} \quad \ln\|G(x, w)\| = \ln^+\|G(x, w)\|.$$

Todėl su visais $w \in W$

$$\ln^+\|F(x, w)\| - \ln^+\|G(x, w)\| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Pasirėmę M1 prielaida ir Lebego teorema apie aprėžtą konvergavimą gauname

$$\mathrm{E}|\ln^+\|F(x, \varepsilon)\| - \ln^+\|G(x, \varepsilon)\|| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \tag{2.12}$$

Jei $\|x\| \geqslant 1$, tai

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\Big|\ln^+\|G(x, \varepsilon)\| - \ln^+\|x\| - \ln\Big\|G\left(\frac{x}{\|x\|}, \varepsilon\right)\Big\|\Big| \\
&\quad = \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\|G(x,\varepsilon)\| \leqslant 1\}}\Big|\ln\|x\| + \ln\Big\|G\left(\frac{x}{\|x\|}, \varepsilon\right)\Big\|\Big| \\
&\qquad \leqslant \ln\|x\|\,\mathrm{P}\{\|G(x, \varepsilon)\| \leqslant 1\} + \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\|G(x,\varepsilon)\| \leqslant 1\}} b(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Antras dėmuo artėja į 0, kai $x \to \infty$, nes $\mathrm{E}\, b(\varepsilon) < \infty$, o $\|G(x, \varepsilon)\| \to \infty$ b.v. Pirmasis taip pat artėja į 0, nes

$$\begin{aligned}
\mathrm{P}\{\|G(x, \varepsilon)\| \leqslant 1\} &= \mathrm{P}\left\{\ln\Big\|G\left(\frac{x}{\|x\|}, \varepsilon\right)\Big\| \leqslant -\ln\|x\|\right\} \\
&\leqslant \frac{1}{\ln\|x\|}\,\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\|G(x,\varepsilon)\| \leqslant 1\}}\Big|\ln\Big\|G\left(\frac{x}{\|x\|}, \varepsilon\right)\Big\|\Big| \\
&\qquad \leqslant \frac{1}{\ln\|x\|}\,\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{\|G(x,\varepsilon)\| \leqslant 1\}} b(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Todėl

$$\mathrm{E}\Big|\ln^+\|G(x,\varepsilon)\| - \ln^+\|x\| - \ln\|G\Big(\frac{x}{\|x\|},\varepsilon\Big)\|\Big| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

Atsižvelgę į (2.12) gauname, kad

$$\mathrm{E}\Big|\ln^+\|F(x,\varepsilon)\| - \ln^+\|x\| - \ln\|G\Big(\frac{x}{\|x\|},\varepsilon\Big)\|\Big| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

2 dalis. Fiksuokime $\delta > 0$ ir parinkime tokį $\Delta > 0$, kad

$$\sup_{\|x\|\geqslant\Delta} \mathrm{E}\Big|\ln^+\|F(x,\varepsilon)\| - \ln^+\|x\| - \ln\|G\Big(\frac{x}{\|x\|},\varepsilon\Big)\|\Big| < \delta. \tag{2.13}$$

Tegu E_j žymi sąlyginį vidurkį $\sigma(\varepsilon_1,\dots,\varepsilon_j)$ atžvilgiu. Iš (2.13) išplaukia, kad aibėje $\|X_{j-1}(x)\| \geqslant \Delta$

$$\mathrm{E}_{j-1}\big|\ln^+\|X_j(x)\| - \ln^+\|X_{j-1}(x)\| - \ln R(\tilde{Z}_{j-1}(x),\varepsilon_j)\big| < \delta.$$

Kita vertus, M1–M2 prielaidos garantuoja, kad

$$\mathrm{E}_{j-1}\big|\ln^+\|X_j(x)\| - \ln^+\|X_{j-1}(x)\| - \ln R(\tilde{Z}_{j-1}(x),\varepsilon_j)\big| \leqslant \ln^+\Delta + 3\,\mathrm{E}\,b(\varepsilon_j)$$

aibėje $\|X_{j-1}(x)\| \leqslant \Delta$. Todėl

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big|\ln^+\|X_j(x)\| - \ln^+\|X_{j-1}(x)\| - \ln R(\tilde{Z}_{j-1}(x),\varepsilon_j)\big| \\ \leqslant \delta + (\ln^+\Delta + 3\,\mathrm{E}\,b(\varepsilon_j))\,\mathrm{P}\{\|X_{j-1}(x)\| \leqslant \Delta\} \xrightarrow[x\to\infty]{} \delta.\end{aligned}$$

Kadangi δ buvo pasirinktas laisvai,

$$\mathrm{E}\big|\ln^+\|X_j(x)\| - \ln^+\|X_{j-1}(x)\| - \ln R(\tilde{Z}_{j-1}(x),\varepsilon_j)\big| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0.$$

3 dalis. Belieka parodyti, kad

$$\mathrm{E}\big|\ln R(Z_{j-1}(x),\varepsilon_j) - \ln R(\tilde{Z}_{j-1}(x),\varepsilon_j)\big| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \tag{2.14}$$

Iš (1.2)

$$\tilde{Z}_{j-1}(x) - Z_{j-1}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \text{ b.v.}$$

Funkcijos $\ln R(\cdot,w)$, $w \in W$, tolygiai tolydžios kompakte S, todėl

$$\ln R(Z_{j-1}(x),\varepsilon_j) - \ln R(\tilde{Z}_{j-1}(x),\varepsilon_j) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0 \text{ b.v.}$$

Pasirėmę M2 ir Lebego teorema apie aprėžtą konvergavimą gauname (2.14). $\square$

2.1 teoremos įrodymas. Įrodymą suskaidysime į tris dalis. Prieš pradėdami, pastebėsime, kad grandinės (Y_n) perėjimo tikimybė P apibrėžiama funkcija G ir atsitiktiniu elementu ε. Iš tikrųjų,

$$P(x,A) = \mathrm{P}\{Y_1 \in A\} = \mathrm{P}\{G(x,\varepsilon) \in A\}.$$

Taigi su bet kokiu $x \neq 0$ grandinės $(Y_n(x))$ perėjimo tikimybė bus tokia pati kaip ir (Y_n), o iš čia išplaukia, kad $(Y_n(x))$ irgi bus φ-neskaidžios T-grandinės. Be to, sekos $(Y_n(x))$ skirstinys sutaps su branduolio P indukuota tikimybe algebroje $\mathcal{B}^\infty$:

$$\mathrm{P}_x\{(y_1, y_2, \dots) \in A\} = \mathrm{P}\{(Y_1(x), Y_2(x), \dots) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}^\infty.$$

Tokios pat pastabos galioja ir grandinėms $(X_n), (X_n(x))$.

1 dalis. Iš pradžių parodysime, kad $\gamma_m(x) \to \gamma \in \mathbb{R}$ tolygiai x atžvilgiu. Tegu φ ir T žymi grandinės (Y_n), atitinkamai, neskaidumo matą ir tolydžią komponentę. Prisiminkime, kad grandinės (Y_n) būsenų aibė yra $C_0 = C \setminus \{0\}$, o simboliu S sutarėme žymėti vienetinę sferą $\{x \in C \mid \|x\| = 1\}$. Apibrėžkime funkciją $f : C_0 \to S$ formule $f(x) = x\|x\|^{-1}$. Įsiveskime dar dvi funkcijas:

$$\varphi_0(A) = \varphi(f^{-1}(A)), \quad T_0(x, A) = T(x, f^{-1}(A)), \quad x \in C_0,\ A \in \mathcal{B}(S).$$

Parodysime, kad φ_0 ir T_0 yra grandinės $(Z_n(x))$, atitinkamai, neskaidumo matas ir tolydi komponentė. Matas φ apibrėžtas C_0 poaibių σ-algebroje $\mathcal{B}(C_0)$. Iš čia išplaukia, kad $\varphi_0(S) = \varphi(C_0) > 0$. Taigi φ_0 yra netrivialus matas. Jei $\varphi_0(A) > 0$, tai $\varphi(f^{-1}(A)) > 0$ ir todėl atsiras $n \geqslant 1$ su kuriuo

$$\mathrm{P}\{Z_n(x) \in A\} = \mathrm{P}\{Y_n(x) \in f^{-1}(A)\} > 0.$$

Reiškia, $(Z_n(x))$ yra φ_0-neskaidi.

Tegu $a(n)$ yra tikimybinis skirstinys aibėje $\{0\} \cup \mathbb{N}$, tenkinantis sąlygą

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)\, \mathrm{P}\{Y_n(x) \in B\} \geqslant T(x, B), \quad x \in C_0,\ B \in \mathcal{B}(C_0).$$

Su bet kokia $A \in \mathcal{B}(S)$ ir $x \in S$

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)\, \mathrm{P}\{Z_n(x) \in A\} = \sum_{n=0}^{\infty} a(n)\, \mathrm{P}\{Y_n(x) \in f^{-1}(A)\} \geqslant \\ T(x, f^{-1}(A)) = T_0(x, A).$$

Be to, $T_0(\cdot, A)$ yra pusiau tolydi iš apačios ir su visais $x \in S$

$$T_0(x, S) = T(x, f^{-1}(S)) = T(x, C_0) > 0.$$

Taigi $(Z_n(x))$ yra T-grandinė. Kadangi ji aprėžta pagal tikimybę, pasirėmę A.1 ir A.2 teoremomis gauname, kad $(Z_n(x))$ yra teigiama Hariso grandinė. Iš čia išplaukia, kad ji turi vienintelį invariantinį tikimybinį matą π (A.4 teorema). Tada iš A.13 teoremos išplaukia, kad su bet kokia tolydžia funkcija $h : S \to \mathbb{R}$ tolygiai x atžvilgiu

$$\frac{1}{m} \sum_{i=1}^{m} \mathrm{E}\, h(Z_{i-1}(x)) \xrightarrow[m \to \infty]{} \int h \mathrm{d}\pi.$$

Kadangi $G(\cdot, w)$ tolydi, iš M2 prielaidos ir Lebego teoremos apie aprėžtą konvergavimą gauname, kad funkcija $h(x) = \mathrm{E} \ln R(x, \varepsilon)$ tolydi aibėje S. Reiškia, $\gamma_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} \gamma$ tolygiai x atžvilgiu aibėje S. Iš homogeniškumo išplaukia, kad $Z_n(tx) = Z_n(x)$ su bet kokiais $x \in S$ ir $t > 0$. Iš čia $\gamma_m(x) = \gamma_m(tx)$ su $x \in S$, $t > 0$. Todėl $\gamma_m(x) \xrightarrow[m\to\infty]{} \gamma$ tolygiai x atžvilgiu aibėje C_0.

2 dalis. Tarkime, kad $\gamma < 0$. Parinkime m taip, kad $m\gamma_m(x) < q < 0$ su visais $x \neq 0$. Pasirėmę 2.1 teorema, galime rasti tokį $\Delta > 0$, kad

$$\bigl|\mathrm{E} \ln^+ \|X_m(x)\| - \ln^+ \|x\| - m\gamma_m(x)\bigr| < \frac{|q|}{2}, \tag{2.15}$$

kai $\|x\| > \Delta$. Tada

$$\mathrm{E} \ln^+ \|X_m(x)\| - \ln^+ \|x\| < m\gamma_m(x) + \frac{|q|}{2} < \frac{q}{2}, \tag{2.16}$$

kai $\|x\| > \Delta$. Kita vertus,

$$\sup_{x \leqslant \Delta} \mathrm{E}\bigl|\ln^+ \|X_m(x)\| - \ln^+ \|x\|\bigr| < \infty. \tag{2.17}$$

Iš tikrųjų, pasirėmę M1–M2 ir nelygybe $\ln^+(uv) \leqslant \ln^+ u + \ln^+ v$ gauname

$$\begin{aligned}
\mathrm{E} \ln^+ \|X_m(x)\| &\leqslant \mathrm{E} \ln^+ \|G(X_{m-1}(x), \varepsilon_m)\| + \mathrm{E}\, b(\varepsilon) \\
&\leqslant \mathrm{E} \ln^+ \|X_{m-1}(x)\| + \mathrm{E} \ln^+ \|G(\tilde{Z}_{m-1}(x), \varepsilon_m)\| + \mathrm{E}\, b(\varepsilon) \\
&\leqslant \mathrm{E} \ln^+ \|X_{m-1}(x)\| + 2\,\mathrm{E}\, b(\varepsilon) \leqslant \cdots \leqslant \ln^+ \|x\| + 2m\,\mathrm{E}\, b(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Reiškia,

$$\sup_{x \leqslant \Delta} \bigl|\mathrm{E} \ln^+ \|X_{k+1}(x)\| - \ln^+ \|x\|\bigr| \leqslant 2 \ln^+ \Delta + 2(k+1)\,\mathrm{E}\, b(\varepsilon) < \infty.$$

Kadangi (X_n) yra aperiodinė ir neskaidi, $(X_{mn}, n \geqslant 0)$ taip pat yra neskaidi (A.5 teorema). Kadangi (X_n) yra T-grandinė, kompaktiškos aibės yra a-mažos (A.3 teorema). Iš aperiodiškumo taip pat išplaukia, kad kiekviena esminė aibė yra m-maža (detaliau žr. [14]: grandinės periodo konstrukcija psl. 116, teiginio 5.5.7 įrodymas, lema D.7.4). Todėl kiekviena kompaktiška aibė bus maža ir grandinei (X_{mn}). Dar kartą pritaikę A.3 teoremą, gauname, kad (X_{mn}) yra T-grandinė. Tada (2.16)–(2.17) nelygybės reiškia, kad (X_{mn}) tenkina dreifo kriterijų A.6. Todėl ji yra teigiama Hariso grandinė ir aprėžta pagal tikimybę (A.1 ir A.2 teoremos).

Nagrinėkime seką $(X_{mn+1}, n \geqslant 0)$. Iš M1–M2

$$\begin{aligned}
\ln^+ \|X_{mn+1}\| &= \ln^+ \|F(X_{mn}, \varepsilon_{mn+1})\| \\
&\leqslant \ln^+ \|G(\tilde{Z}_{mn}, \varepsilon_{mn+1})\| + \ln^+ \|X_{mn}\| + b(\varepsilon_{mn+1}).
\end{aligned}$$

Kadangi

$$\mathrm{E} \ln^+ \|G(\tilde{Z}_{mn}, \varepsilon_{mn+1})\| \leqslant \mathrm{E}\, b(\varepsilon),$$

seka $(\ln^+\|G(\tilde{Z}_{mn},\varepsilon_{mn+1})\|, n \geqslant 0)$ aprėžta pagal tikimybę. Visi $b(\varepsilon_{mn+1})$ vienodai pasiskirstę, todėl ir ši seka aprėžta pagal tikimybę. Be to, aukščiau įrodėme, kad (X_{mn}) aprėžta pagal tikimybę. Iš gauto įverčio tada išplaukia, kad (X_{mn+1}) taip pat aprėžta pagal tikimybę. Analogiškai įrodoma, kad (X_{mn+j}) yra aprėžta pagal tikimybę su bet kokiu fiksuotu j. Todėl (X_n) yra aprėžta pagal tikimybę. Dar kartą pritaikę A.1 ir A.2 teoremas gauname, kad (X_n) yra teigiama Hariso grandinė.

3 dalis. Tarkime, kad $\gamma > 0$. Parinkime $m \in \mathbb{N}$, $q > 0$ ir $\Delta > 0$ taip, kad $q < m\gamma_m(x)$ su visais x ir galiotų (2.15). Tada

$$\mathrm{E}\ln^+\|X_m(x)\| - \ln^+\|x\| > \frac{q}{2},$$

kai $\|x\| \geqslant \Delta$. Taip pat pastebėsime, kad

$$\begin{aligned}
&\mathrm{E}\big|\ln^+\|X_m(x)\| - \ln^+\|x\|\big| \\
&\qquad \leqslant \mathrm{E}\big|\ln^+\|X_m(x)\| - \ln^+\|X_{m-1}(x)\| - \ln R(Z_{m-1}(x),\varepsilon_m)\big| \\
&\qquad\qquad + \mathrm{E}\big|\ln^+\|X_{m-1}(x)\| - \ln^+\|x\|\big| + \mathrm{E}\,b(\varepsilon_m) \leqslant \dots \\
&\qquad \leqslant \sum_{j=1}^{m} \mathrm{E}\big|\ln^+\|X_j(x)\| - \ln^+\|X_{j-1}(x)\| - \ln R(Z_{j-1}(x),\varepsilon_j)\big| + m\,\mathrm{E}\,b(\varepsilon).
\end{aligned}$$

Įrodinėdami 2.1 lemą gavome, kad

$$\sum_{j=1}^{m} \mathrm{E}\big|\ln^+\|X_j(x)\| - \ln^+\|X_{j-1}(x)\| - \ln R(Z_{j-1}(x),\varepsilon_j)\big| \xrightarrow[x\to\infty]{} 0,$$

todėl

$$\sup_{x\geqslant\Delta} \mathrm{E}\big|\ln^+\|X_m(x)\| - \ln^+\|x\|\big| < \infty.$$

Kita vertus, jei $\|x\| \leqslant \Delta$, tai teisinga (2.17), todėl

$$\sup_{x\in C} \mathrm{E}\big|\ln^+\|X_m(x)\| - \ln^+\|x\|\big| < \infty.$$

Kaip ir 2 dalyje, galima parodyti, kad $(X_{mn}, n \geqslant 0)$ yra T-grandinė. Tada išvestos nelygybės reiškia, kad (X_{mn}) tenkina dreifo kriterijų A.7 ir todėl yra disipatyvi arba nulinė. Tada tokia pat yra ir grandinė (X_n) (A.8 teorema). $\square$

Išvados įrodymas. Įrodinėdami 2.1 teoremą kartu įrodėme, kad bet kokiam $x \neq 0$ grandinė $(Z_n(x))$ yra teigiama Hariso. Tada $((Z_{n-1}(x),\varepsilon_n), n \geqslant 1)$ taip pat bus teigiama Hariso grandinė. Jei Z žymi atsitiktinį elementą, turintį stacionarų $(Z_n(x))$ skirstinį, o ε nepriklauso nuo Z, tai (Z,ε) skirstinys sutaps su stacionariu $((Z_{n-1}(x),\varepsilon_n))$ skirstiniu. Iš M2 $\mathrm{E}|\ln R(Z,\varepsilon)| < \infty$, todėl grandinei $(Z_{n-1}(x),\varepsilon_n)$ galime pritaikyti didžiųjų skaičių dėsnį (A.9 teorema), iš kurio išplaukia, kad

$$\frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \ln R(Z_{i-1}(x),\varepsilon_i) \xrightarrow[m\to\infty]{} \mathrm{E}\ln R(Z,\varepsilon) = \gamma \text{ b.v.}$$

$\square$

3 Stacionaraus skirstinio uodegos indeksas

Šiame skyriuje nagrinėsime asimptotiškai homogeninę grandinę (X_n), turinčią stacionarų skirstinį. Laikysime, kad būsenų aibė vienmatė ($C = [0; \infty)$ arba $C = \mathbb{R}$) ir mus domins tikimybių $\mathrm{P}\{\pm X > t\}$ asimptotika, kai $t \to \infty$; čia X žymi atsitiktinį dydį, kurio skirstinys sutampa su stacionariu grandinės skirstiniu. Naudosime tuos pačius žymenis, kaip ir ankstesniuose skyriuose.

3.1 Pagrindiniai rezultatai

3.1.1 Grandinės pustiesėje

Jei $C = [0; \infty)$, tai

$$S = \{1\}, \quad R(1,\varepsilon) = G(1,\varepsilon), \quad H(1,\varepsilon) = 1.$$

Taigi $Z_n = 1$ su visais n, o tada Liapunovo eksponentė $\gamma = \mathrm{E} \ln G(1,\varepsilon)$, jei tik tas vidurkis baigtinis.

Nagrinėjamu atveju pagrindinis rezultatas, aprašantis grandinės (X_n) uodegos svorį, buvo gautas darbe [6].

3.1 teorema. ([6], 2.4 išvada) *Tarkime, kad Liapunovo eksponentė $\gamma < 0$, atsitiktinio dydžio $\ln G(1,\varepsilon)$ skirstinys yra nearitmetinis ir egzistuoja toks $\alpha > 0$, kad*

$$\mathrm{E}\, G^{\alpha}(1,\varepsilon) = 1, \quad \mathrm{E}\, G^{\alpha}(1,\varepsilon) |\ln G(1,\varepsilon)| < \infty \tag{3.1}$$

ir

$$\mathrm{E} |F^{\alpha}(X,\varepsilon) - G^{\alpha}(X,\varepsilon)| < \infty. \tag{3.2}$$

Tada

$$t^{-\alpha}\, \mathrm{P}\{X > t\} \xrightarrow[t\to\infty]{} \kappa$$

su $\kappa = (m\alpha)^{-1}\, \mathrm{E}[F^{\alpha}(X,\varepsilon) - G^{\alpha}(X,\varepsilon)]$ ir $m = \mathrm{E}\, G^{\alpha}(1,\varepsilon) \ln G(1,\varepsilon)$.

Tam, kad egzistuotų α, tenkinantis (3.1), pakanka, kad egzistuotų $\beta > 0$ su $\mathrm{E}\, G^{\beta}(1,\varepsilon) \in (1; \infty)$ (žr. 3.1 lemos įrodymą). Tačiau (3.2) sąlygos tikrinimas paprastai yra gana sudėtingas uždavinys, nes dažniausiai sunku arba neįmanoma išreikšti X per sekos (ε_n) narius. Mūsų pasiūlytas kriterijus palengvina šį uždavinį, nes remiasi tik žinoma funkcijos F išraiška.

3.1 teiginys. *Tarkime, (X_n) yra neskaidi T-grandinė, Liapunovo eksponentė neigiama ir α tenkina* (3.1) *sąlygas. Jei egzistuoja tokie $0 < \theta < \theta_1 < \alpha$, kad su visais $\Delta > 0$*

(F1) $\sup_{0 \leqslant x \leqslant \Delta} \mathrm{E}\, F^{\alpha}(x,\varepsilon) < \infty$,

(F2) $\sup_{x > \Delta} x^{-\theta_1}\, \mathrm{E}\, F^{\theta_1}(x,\varepsilon) < \infty$,

(F3) $\sup_{x > \Delta} x^{-\theta}\, \mathrm{E} \big| F^{\alpha}(x,\varepsilon) - G^{\alpha}(x,\varepsilon) \big| < \infty$, *tai grandinė yra teigiama rekurentinė ir galioja* (3.2) *sąlyga.*

Jei $\alpha \leqslant 1$, tai F3 sąlygą galima pakeisti bet kuria iš sąlygų

(F3a) $\sup_{x>\Delta} x^{-\theta}\,\mathrm{E}\big|F(x,\varepsilon)-G(x,\varepsilon)\big|^{\alpha}<\infty$;

(F3b) $\sup_{x>\Delta} x^{-\theta}\,\mathrm{E}\,G^{\alpha-1}(x,\varepsilon)\big|F(x,\varepsilon)-G(x,\varepsilon)\big|<\infty$.

Tai išplaukia iš nelygybių

$$|a^{\alpha}-b^{\alpha}|\leqslant|a-b|^{\alpha},\quad |a^{\alpha}-b^{\alpha}|\leqslant b^{\alpha-1}|a-b|, \tag{3.3}$$

kurios teisingos su visais $a,b\geqslant 0$. Jei $\alpha>1$, tai iš nelygybės

$$|a^{\alpha}-b^{\alpha}|\leqslant \alpha 2^{\alpha-1}\big(b^{\alpha-1}|a-b|+|a-b|^{\alpha}\big) \tag{3.4}$$

išplaukia, kad F3 galime pakeisti abiem sąlygomis F3a ir F3b kartu.

3.1.2 Grandinės tiesėje

Dabar suformuluosime *pagrindinę* skyriaus teoremą. Laikysime, kad grandinės būsenų aibė $C=\mathbb{R}$ ir kad tenkinama NZ sąlyga: $G(x,w)\neq 0$ su visais $x\neq 0$. Tada

$$S=\{-1,1\},\quad R(x,w)=|G(x,w)|\quad \text{ir}\quad H(x,w)=\operatorname{sign}G(z,w);$$

čia

$$\operatorname{sign}(x)=\begin{cases}-1, & \text{kai } x<0;\\ 0, & \text{kai } x=0;\\ 1, & \text{kai } x>0.\end{cases}$$

Laikysime, kad grandinės (Z_n) perėjimo tikimybių matrica yra teigiama, t.y. visi jos elementai yra teigiami. Z raide žymėsime atsitiktinį S elementą, turintį stacionarų (Z_n) skirstinį. Tada Liapunovo eksponentė $\gamma=\mathrm{E}\ln R(Z,\varepsilon)$, jei tik tas vidurkis baigtinis.

Imkime neneigiamą α. Jei $\mathrm{E}\,R^{\alpha}(\pm1,\varepsilon)<\infty$, tai apibrėžkime

$$Q_{\alpha}(z,z')=\mathrm{E}\,R^{\alpha}(z,\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z,\varepsilon)=z'\}},\quad (z,z')\in S\times S.$$

Funkciją Q_{α} galima traktuoti kaip 2×2 matricą. Kai $\alpha=0$,

$$Q_0=\begin{pmatrix}\mathrm{P}\{H(-1,\varepsilon)=-1\} & \mathrm{P}\{H(-1,\varepsilon)=1\}\\ \mathrm{P}\{H(1,\varepsilon)=-1\} & \mathrm{P}\{H(1,\varepsilon)=1\}\end{pmatrix}$$

sutampa su grandinės (Z_n) perėjimo tikimybių matrica. Kadangi $Q_0(z,z')=0$ tada ir tik tada, kai $Q_{\alpha}(z,z')=0$, visos matricos Q_{α} taip pat yra teigiamos.

Tegu ρ_{α} žymi matricos Q_{α} spektrinį spindulį. Tada ρ_{α} yra tos matricos tikrinė reikšmė ir egzistuoja tokie teigiami skaičiai $r_{\alpha}(\pm1)$, $\pi_{\alpha}\{\pm1\}$, kad

$$r_{\alpha}=\begin{pmatrix}r_{\alpha}(-1)\\ r_{\alpha}(1)\end{pmatrix}\quad \text{ir}\quad \pi_{\alpha}=\big(\pi_{\alpha}\{-1\}\quad \pi_{\alpha}\{1\}\big)$$

yra, atitinkamai, dešinysis ir kairysis matricos Q_α tikrinis vektorius, atitinkantis tikrinę reikšmę ρ_α (A.19 teorema). Nemažindami bendrumo galime laikyti, kad $\pi_\alpha\{-1\} + \pi_\alpha\{1\} = 1$ ir $\pi_\alpha r_\alpha = 1$. Toliau į r_α žiūrėsime kaip į funkciją, o į π_α — kaip į tikimybinį matą aibėje S.

3.2 teorema. *Tarkime, kad*

(i) neegzistuoja $d \in \mathbb{R}$, su kuriuo $\ln R(1,\varepsilon)$ ir $\ln R(-1,\varepsilon)$ skirstiniai būtų sukoncentruoti gardelėje $d\mathbb{Z}$;

(ii) Liapunovo eksponentė yra neigiama;

(iii) egzistuoja toks $\alpha > 0$, kad matrica Q_α korektiškai apibrėžta, $\rho_\alpha = 1$ ir su visais $z \in S$

$$\mathrm{E}\, R^\alpha(z,\varepsilon)|\ln R(z,\varepsilon)| < \infty. \tag{3.5}$$

Jei, be to,

(X1) $\mathrm{E}|X|^\theta < \infty$ *su tam tikru* $0 < \theta < \alpha$,

(X2a) $\mathrm{E}\big||F(X,\varepsilon)|^\alpha - |G(X,\varepsilon)|^\alpha\big| < \infty$,

(X2b) $\mathrm{E}\big[|F(X,\varepsilon)|^\alpha + |G(X,\varepsilon)|^\alpha\big]\mathbf{1}_{\{F(X,\varepsilon)G(X,\varepsilon)<0\}} < \infty$,

tai su visais $z \in S$

$$t^\alpha\, \mathrm{P}\{\operatorname{sign} X = z,\ |X| > t\} \xrightarrow[t\to\infty]{} \kappa(z)$$

su tam tikrais $\kappa(z) \in [0;\infty)$.

3.1 PASTABA. Teoremoje minimos ribinės konstantos gali būti užrašytos pavidalu

$$\kappa(z) = \frac{\pi_\alpha\{z\}}{m\alpha} \sum_{z'\in S} r_\alpha(z')\, \mathrm{E}\Big(\big[z'F(X,\varepsilon)\big]^{+\alpha} - \big[z'G(X,\varepsilon)\big]^{+\alpha}\Big),$$

kur $x^{+\alpha}$ reiškia $(x^+)^\alpha$ ir

$$m = \sum_{z\in S} \pi_\alpha\{z\}\, \mathrm{E}\, R^\alpha(z,\varepsilon) r_\alpha(H(z,\varepsilon)) \ln R(z,\varepsilon).$$

Jei $G(-1,\varepsilon) \stackrel{d}{=} -G(1,\varepsilon)$, tai $Q_\alpha = \begin{pmatrix} a & b \\ b & a \end{pmatrix}$ su

$$a = \mathrm{E}\, R^\alpha(1,\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(1,\varepsilon)=1\}} \quad \text{ir} \quad b = \mathrm{E}\, R^\alpha(1,\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(1,\varepsilon)=-1\}}.$$

Nesunku įsitikinti, kad tada

$$\rho_\alpha = a + b, \quad \pi_\alpha = \begin{pmatrix} \frac12 & \frac12 \end{pmatrix}, \quad r_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Todėl

$$\kappa(1) = \kappa(-1) = \frac{1}{2\alpha m}\, \mathrm{E}\big(|F(X,\varepsilon)|^\alpha - |G(X,\varepsilon)|^\alpha\big) \tag{3.6}$$

su $m = \mathrm{E}\, R^\alpha(1,\varepsilon) \ln R(1,\varepsilon)$.

Jei $G(-1,\varepsilon) \stackrel{d}{=} G(1,\varepsilon)$ tai

$$Q_\alpha = \begin{pmatrix} b & a \\ b & a \end{pmatrix}, \quad \rho_\alpha = a+b, \quad \pi_\alpha = \begin{pmatrix} \frac{a}{a+b} & \frac{b}{a+b} \end{pmatrix}, \quad r_\alpha = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$$

su tais pačiais a ir b. Taigi (3.6) teisinga ir šiuo atveju. $\Diamond$

3.2 PASTABA. Lygybė $G(-1,\varepsilon) \stackrel{d}{=} -G(1,\varepsilon)$ svarbi dar vienu aspektu. Jei ji teisinga, tai iš homogeniškumo bei X ir ε nepriklausomumo

$$\begin{aligned} \mathrm{P}\{X<0,\ G(X,\varepsilon)\in B\} &= \mathrm{P}\{X<0,\ |X|G(-1,\varepsilon)\in B\} \\ &= \mathrm{P}\{X<0,\ XG(1,\varepsilon)\in B\} \end{aligned}$$

ir

$$\mathrm{P}\{X>0,\ G(X,\varepsilon)\in B\} = \mathrm{P}\{X>0,\ XG(1,\varepsilon)\in B\}$$

su bet kokia Borelio aibe B. Kitaip sakant, su visomis B

$$\mathrm{P}\{G(X,\varepsilon)\in B\} = \mathrm{P}\{XG(1,\varepsilon)\in B\},$$

o tai reiškia, kad $G(X,\varepsilon) \stackrel{d}{=} XG(1,\varepsilon)$. Todėl šiuo atveju 3.2 teorema sutampa su pagrindiniu [6] rezultatu (2.4 išvada), kuris, tiesa, įrodomas be X1 prielaidos. Jei $G(-1,\varepsilon)$ ir $-G(1,\varepsilon)$ skirstiniai nesutampa, tai mūsų teorema neišplaukia iš [6] rezultato. Iš tikrųjų, visais darbe [6] nagrinėtais atvejais $\kappa(-1) = \kappa(1)$, o ši lygybė, kaip matome iš anksčiau pateiktos κ išraiškos, nebūtinai teisinga bendruoju atveju. $\Diamond$

Tam,kad egzistuotų α su $\rho_\alpha = 1$, pakanka, kad egzistuotų $\beta > 0$ su $\rho_\beta > 1$. Pastarosios nelygybės patikrinimui galima pasinaudoti žinomais spektrinio spindulio įverčiais iš apačios. Pavyzdžiui, taikydami A.20–A.21 teoremas, gauname

$$\rho_\theta \geqslant \max_{z\in S} Q_\theta(z,z) \quad \text{ir} \quad \rho_\theta \geqslant \min_{z\in S} \sum_{z'\in S} Q_\theta(z,z').$$

Taigi pakanka rasti β, kuriam $\mathrm{E}\, R^\beta(z,\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z,\varepsilon)=z\}} \in (1;\infty)$ su fiksuotu $z\in S$ arba $\mathrm{E}\, R^\beta(z,\varepsilon)\in(1;\infty)$ su visais $z\in S$.

Kitas mūsų teiginys palengvina X1–X2 sąlygų tikrinimą.

3.2 teiginys. *Tarkime, kad (X_n) yra neskaidi T-grandinė, Liapunovo eksponentė neigiama ir $\rho_\alpha = 1$. Jei egzistuoja tokie $0<\theta<\theta_1<\alpha$, kad su visais $\Delta>0$ ir visais $z\in S$*

(F1) $\sup_{0\leqslant t\leqslant\Delta} \mathrm{E}\big|F(tz,\varepsilon)\big|^\alpha < \infty$,

(F2) $\sup_{t>\Delta} t^{-\theta_1}\, \mathrm{E}\big|F(tz,\varepsilon)\big|^{\theta_1} < \infty$,

(F3a) $\sup_{t>\Delta} t^{-\theta}\, \mathrm{E}\big||F(tz,\varepsilon)|^\alpha - |G(tz,\varepsilon)|^\alpha\big| < \infty$,

(F3b) $\sup_{t>\Delta} t^{-\theta}\, \mathrm{E}\big[|F(tz,\varepsilon)|^\alpha + |G(tz,\varepsilon)|^\alpha\big]\mathbf{1}_{\{F(tz,\varepsilon)G(tz,\varepsilon)<0\}} < \infty$,

tai grandinė (X_n) yra teigiama rekurentinė ir galioja X1–X2 nelygybės.

3.2 Taikymų pavyzdžiai

Išnagrinėsime kelis modelius, aprašytus ankstesniuose skyreliuose, kartu aptardami esminius taikymų aspektus. Laikysime, kad visais nagrinėjamais atvejais atsitiktinis elementas ε turi absoliučiai tolydžią komponentę su tankiu, teigiamu visoje aibėje W. Dėl to visuose nagrinėjamuose modeliuose (X_n) yra neskaidi (Lebego mato atžvilgiu aibėje C) aperiodinė T-grandinė (žr. A.3 teoremą), atsitiktinių dydžių $\ln R(\pm 1, \varepsilon)$ skirstiniai nėra aritmetiniai ir (Z_n) grandinės perėjimo tikimybių matrica teigiama. Taip pat laikysime, kad $\mathrm{E}|\ln R(\pm 1, \varepsilon)| < \infty$ ir, reiškia, Liapunovo eksponentė egzistuoja (žr. 2.1 teoremos įrodymą). Papildomas prielaidas formuluosime nagrinėdami atskirus modelius.

3.2.1 Grandinės pustiesėje

Pradėsime nuo modelio, apibrėžiamo (1.12) lygtimi.

3.3 teiginys. *Tegu* (X_n) *apibrėžiama* (1.12) *lygtimi,* $W = (0; \infty)^3$ *ir* $\alpha > 0$ *toks, kad*

$$\mathrm{E}\, R^\alpha = 1, \quad \mathrm{E}\, R^\alpha |\ln R| < \infty.$$

Jei Liapunovo eksponentė $\mathrm{E} \ln R$ *neigiama ir* $\mathrm{E}\, U^\alpha < \infty$, $\mathrm{E}\, V^\alpha < \infty$, *tai 3.1 teorema pritaikoma grandinei* (X_n).

Įrodymas. Patikrinsime 3.1 teiginio sąlygas. Iš čia išplauks, kad tenkinama (3.2) sąlyga. Likusios 3.1 teoremos sąlygos akivaizdžiai patenkintos.

Fiksuokime $\max(\frac{\alpha}{2}, \alpha - \frac{1}{2}) < \theta < \theta_1 < \alpha$ ir $\Delta > 0$. Atsitiktiniai dydžiai, turintys baigtinį r-os eilės momentą, sudaro tiesinę erdvę, todėl

$$\sup_{0 \leqslant x \leqslant \Delta} \mathrm{E}\, F^\alpha(x, \varepsilon) \leqslant \mathrm{E}(\Delta R + \sqrt{\Delta} U + V)^\alpha < \infty$$

ir

$$\sup_{x > \Delta} x^{-\theta_1} \mathrm{E}\, F^{\theta_1}(x, \varepsilon) \leqslant \mathrm{E} \left(R + \frac{U}{\sqrt{\Delta}} + \frac{V}{\Delta} \right)^{\theta_1} < \infty.$$

Taigi F1–F2 sąlygos tenkinamos. Norėdami patikrinti F3, patikrinsime F3a ir F3b. F3b teisingumu įsitikinsime tik tuo atveju, kai $\alpha > 1$, nes, kaip minėta 3.1.1 skyrelyje, abi sąlygos reikalingos tik tada, kai $\alpha > 1$.

Kadangi $F(x, (r, u, v)) - G(x, (r, u, v)) = \sqrt{x} u + v$,

$$\sup_{x > \Delta} x^{-\theta} \mathrm{E}|F(x, \varepsilon) - G(x, \varepsilon)|^\alpha \leqslant \Delta^{-(\theta - \frac{\alpha}{2})} \mathrm{E} \left(U + \frac{V}{\sqrt{\Delta}} \right)^\alpha < \infty$$

ir F3a sąlyga patenkinta. Jei $\alpha > 1$, tai iš Hiolderio nelygybės

$$\begin{aligned} \sup_{x > \Delta} x^{-\theta} \mathrm{E}\, G^{\alpha - 1}(x, \varepsilon) |F(x, \varepsilon) - G(x, \varepsilon)| &\leqslant \Delta^{\alpha - \frac{1}{2} - \theta} \mathrm{E}\, R^{\alpha - 1} \left(U + \frac{V}{\sqrt{\Delta}} \right) \\ &\leqslant \Delta^{\alpha - \frac{1}{2} - \theta} \left(\mathrm{E}\, R^\alpha \right)^{\frac{\alpha - 1}{\alpha}} \left(\mathrm{E} \left(U + \frac{V}{\sqrt{\Delta}} \right)^\alpha \right)^{\frac{1}{\alpha}} < \infty. \ \square \end{aligned}$$

Analizuojant įrodymą galima pastebėti, kad esminį vaidmenį tikrinant F3 suvaidino skirtumo $F(x,w) - G(x,w)$ eilė. Nesunku įrodyti, kad jei

$$|F(x,w) - G(x,w)| \leqslant cx^{\sigma}p(w)$$

su $\sigma < 1$ ir funkcija p, tenkinančia sąlygas $\mathrm{E}\,p^{\alpha}(\varepsilon) < \infty$ ir $\mathrm{E}\,G^{\alpha-1}(1,\varepsilon)p(\varepsilon) < \infty$ (kai $\alpha < 1$, pakanka vienos iš šių sąlygų), tai F3 tenkinama imant $\theta \in (\sigma\alpha;\alpha)$ arba $\theta \in (\alpha - 1 + \sigma;\alpha)$.

Kitas svarbus klausimas — ar ribinė konstanta teigiama. Išnagrinėtu atveju $\kappa > 0$, nes $F(x,(r,u,v)) > G(x,(r,u,v))$ su visais $x \geqslant 0$ ir $(r,u,v) \in W$ (žr. ribinės konstantos išraišką). Bendruoju atveju situacija kur kas sudėtingesnė. Pailiustruosime tai nagrinėdami (1.11) modelį.

3.4 teiginys. *Tegu (X_n) apibrėžiama (1.11) lygtimi. Jei $W = (0;\infty)$, egzistuoja $\alpha > 0$, kuriam*

$$\mathrm{E}\,\varepsilon^{\alpha} = 1, \quad \mathrm{E}\,\varepsilon^{\alpha}|\ln\varepsilon| < \infty,$$

ir Liapunovo eksponentė $\mathrm{E}\ln\varepsilon$ yra neigiama, tai 3.1 teorema pritaikoma grandinei (X_n).

Įrodymas. Pakanka pastebėti, kad

$$|F(x,w) - G(x,w)| = \begin{cases} |1-x|w, & \text{kai } x \in (0;2), \\ w, & \text{kai } x \geqslant 2. \end{cases}$$

Tada iš momentinių prielaidų išplaukia, kad pritaikomas 3.1 teiginys ir todėl (3.2) sąlyga patenkinta. Kitos 3.1 teoremos sąlygos akivaizdžios. □

(1.11) modelis įdomus tuo, kad tam tikrais atvejais, jo ribinė konstanta lygi nuliui. Iš tikrųjų, imkime ε, pasiskirsčiusį tolygiai intervale $(0;2)$. Tada $\mathrm{P}\{\varepsilon \in (0;2)\} = 1$ ir $\mathrm{E}\,\varepsilon = 1$. Nesunku matyti, kad stacionarus (X_n) skirstinys sutampa su ε skirstiniu (t.y. galime imti $X \stackrel{d}{=} \varepsilon$), visos 3.1 teoremos sąlygos patenkintos, bet $\kappa = 0$. Klausimas ar visada konstanta teigiama, kai ε skirstinys nėra sukoncentruotas intervale $(0;2)$, lieka atviras.

Išnagrinėtas pavyzdys rodo, kad kartu su 3.1 teorema reikalingas ir metodas nelygybei $\kappa > 0$ įrodyti. Aprašysime vieną iš tokių metodų.

Tegu (X_n) yra grandinė, kuriai pritaikoma 3.1 teorema. Pažymėkime jos stacionarų skirstinį raide π. Jei $g \in L^1(\pi)$ ir su visais x

$$\mathrm{E}\,[F^{\alpha}(x,\varepsilon) - G^{\alpha}(x,\varepsilon)] > \mathrm{E}\,g(F(x,\varepsilon)) - g(x), \tag{3.7}$$

tai ribinė konstanta teigiama. Iš tikrųjų, suintegravę abi puses π atžvilgiu, gauname

$$\kappa = \mathrm{E}\,[F^{\alpha}(X,\varepsilon) - G^{\alpha}(X,\varepsilon)] > \mathrm{E}\,g(F(X,\varepsilon)) - \mathrm{E}\,g(X).$$

Belieka pastebėti, kad skirtumas dešinėje pusėje lygus 0, nes $F(X,\varepsilon) \stackrel{d}{=} X$.

Kadangi $\mathrm{E}\,G^{\alpha}(x,\varepsilon) = x^{\alpha}$ su visais x, (3.7) gali būti perrašyta taip:

$$\mathrm{E}\,F^{\alpha}(x,\varepsilon) - x^{\alpha} > \mathrm{E}\,g(F(x,\varepsilon)) - g(x). \tag{3.8}$$

Pailiustruosime metodo taikymą, tirdami atskirą (1.11) modelio atvejį.

3.5 teiginys. *Tegu tenkinamos 3.4 teiginio sąlygos. Jei* $\alpha = 1$ *ir* $\mathrm{E}\,\varepsilon \ln \varepsilon > \ln 2$, *tai ribinė konstanta teigiama.*

Įrodymas. Įrodysime (3.8) nelygybę imdami $g(x) = c^{-1}x^\theta$ su specialiai parinktais $\theta \in (0;1)$ ir $c > 0$. Įrodymą suskaidysime į dvi dalis.

1 dalis. Pažymėkime

$$\varphi(\theta) = \mathrm{E}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\theta, \quad \theta \in (0;1].$$

Tai diferencijuojama funkcija ir

$$\varphi'(\theta) = \mathrm{E}\left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^\theta \ln \frac{\varepsilon}{2}.$$

Įstatę $\theta = 1$ gauname

$$\varphi'(1) = \frac{1}{2}\,\mathrm{E}\,\varepsilon \ln \frac{\varepsilon}{2} = \frac{1}{2}(\mathrm{E}\,\varepsilon \ln \varepsilon - \mathrm{E}\,\varepsilon \ln 2) = \frac{1}{2}(\mathrm{E}\,\varepsilon \ln \varepsilon - \ln 2) > 0.$$

Todėl φ didėja 1 aplinkoje ir egzistuoja toks $\theta \in (0;1)$, kad $\varphi(\theta) < \varphi(1) = \frac{1}{2}$. Iš čia

$$\mathrm{E}\,\varepsilon^\theta < \frac{2^\theta}{2}. \tag{3.9}$$

2 dalis. Paimkime bet kokį $\theta \in (0;1)$, su kuriuo teisinga (3.9) nelygybė, pažymėkime $q = \mathrm{E}\,\varepsilon^\theta$ ir paimkime bet kokį $c \in \left(q; \frac{2^\theta}{2}\right)$. Apibrėžkime

$$h(x) = \mathrm{E}\,F^\theta(x,\varepsilon) - x^\theta - c\,\mathrm{E}\,F(x,\varepsilon) + cx.$$

Reikia įrodyti, kad $h(x) < 0$ su visais $x > 0$.

Jei $x \leqslant 2$, tai

$$h(x) = q - x^\theta - c + cx.$$

Kadangi $h''(x) = -\theta(\theta-1)x^{\theta-2} > 0$, h iškila intervale $[0;2]$ ir didžiausią reikšmę įgyja viename iš intervalo galų. Bet $h(0) = q - c$, $h(2) = q - 2^\theta + c$ ir

$$h(0) - h(2) = 2^\theta - 2c > 0.$$

Todėl su visais $x \in [0;2]$

$$h(x) \leqslant h(0) = q - c < 0.$$

Jei $x > 2$, tai

$$h(x) = q(x-1)^\theta - x^\theta + c.$$

Prilyginę išvestinę 0, gauname

$$q\theta(x-1)^{\theta-1} = \theta x^{\theta-1}.$$

Išsprendę šią lygtį, randame ekstremumo tašką $x_0 = \frac{1}{1-q^{\frac{1}{1-\theta}}}$. Dėl q parinkimo $x_0 \in (0;2)$. Iš tikrųjų,

$$\frac{1}{1-q^{\frac{1}{1-\theta}}} < 2 \Longleftrightarrow \frac{1}{2} < 1 - q^{\frac{1}{1-\theta}} \Longleftrightarrow q^{\frac{1}{1-\theta}} < \frac{1}{2} \Longleftrightarrow q < \frac{2^\theta}{2}.$$

Todėl intervale $(2;\infty)$ funkcija h yra monotoniška ir didžiausią reikšmę įgyja viename iš galų. Kadangi $h(\infty) = -\infty$,

$$h(x) \leqslant h(2) < 0,$$

kai $x \geqslant 2$. $\square$

Atkreipsime dėmesį į funkcijos g parinkimą įrodytame teiginyje. Esminį vaidmenį čia suvaidimo tai, kad

$$\mathrm{E}\, F^\theta(x,\varepsilon) - x^\theta \sim \mathrm{E}\, G^\theta(x,\varepsilon) - x^\theta = x^\theta(\mathrm{E}\, G^\theta(1,\varepsilon) - 1),$$

o $\mathrm{E}\, G^\theta(1,\varepsilon) \in (0;1)$, kai $\theta \in (0;\alpha)$. Pastarasis sąryšis teisingas visuose modeliuose (žr. 3.1 lemą); todėl tinkamai parinkus c ir θ galima tikėtis, kad funkcija $g(x) = cx^\theta$ duos reikiamą rezultatą.

3.2.2 Grandinės tiesėje

Iliustruodami rezultatus $C = \mathbb{R}$ atveju, taip pat išnagrinėsime porą modelių. Pradėsime nuo tiesinio modelio

$$X_n = U_n + V_n X_{n-1}. \tag{3.10}$$

3.6 teiginys. *Tegu* (X_n) *apibrėžiama* (3.10) *lygtimi,* $W = \mathbb{R} \times (\mathbb{R} \setminus \{0\})$ *ir egzistuoja toks* $\alpha > 0$, *kad*

$$\mathrm{E}|V|^\alpha \ln^+|V| < \infty, \quad \mathrm{E}|V|^\alpha = 1, \quad \mathrm{E}|U|^\alpha < \infty.$$

Jei Liapunovo eksponentė $\mathrm{E}\ln|V| \in (-\infty;0)$, *tai 3.2 teorema pritaikoma grandinei* (X_n).

Įrodymas. Pakanka patikrinti 3.2 teiginio sąlygas. Fiksuokime $\Delta > 0$ ir $\max(0,\alpha-1) < \theta < \theta_1 < \alpha$. Tada bet kokiam $z \in S$

$$\sup_{0 \leqslant t \leqslant \Delta} \mathrm{E}|U + Vzt|^\alpha \leqslant \mathrm{E}(|U| + \Delta|V|)^\alpha < \infty,$$
$$\sup_{t > \Delta} t^{-\theta_1}\, \mathrm{E}|U + Vzt|^{\theta_1} \leqslant \mathrm{E}\left(|U|\Delta^{-1} + |V|\right)^{\theta_1} < \infty,$$

nes U ir V turi baigtinius α eilės momentus. Lieka patikrinti F3a ir F3b sąlygas. Pradėkime nuo F3a. Kadangi

$$|F(tz,(u,v)) - G(tz,(u,v))| = |u|,$$

pasirėmę (3.3)–(3.4) nelygybėmis gauname

$$||F(tz,(u,v))|^\alpha - |G(tz,(u,v))|^\alpha| \leqslant \begin{cases} |u|^\alpha, & \text{kai } \alpha \leqslant 1, \\ \alpha 2^{\alpha-1}\left(|vt|^{\alpha-1}|u| + |u|^\alpha\right), & \text{kai } \alpha > 1. \end{cases}$$

Todėl

$$\sup_{t>\Delta} t^{-\theta}\,\mathrm{E}||F(tz,(U,V))|^\alpha - |G(tz,(U,V))|^\alpha| \leqslant$$

$$\begin{cases} \Delta^{-\theta}\,\mathrm{E}|U|^\alpha, & \text{kai } \alpha \leqslant 1, \\ \alpha 2^{\alpha-1}\left(\Delta^{\alpha-\theta-1}\,\mathrm{E}|V|^{\alpha-1}|U| + \Delta^{-\theta}\,\mathrm{E}|U|^\alpha\right), & \text{kai } \alpha > 1. \end{cases}$$

Jei $\alpha > 1$, tai iš Hiolderio nelygybės $\mathrm{E}|V|^{\alpha-1}|U| \leqslant (\mathrm{E}|V|^\alpha)^{\frac{\alpha-1}{\alpha}}(\mathrm{E}|U|^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$. Taigi F3a sąlyga patenkinta. Dabar pereikime prie F3b.

Jei $F(tz,(u,v))G(tz,(u,v)) < 0$, tai

$$u + vzt > 0,\ vzt < 0 \quad \text{arba} \quad u + vzt < 0,\ vzt > 0.$$

Pirmu atveju gauname $u > 0$ ir $-vzt = |vzt| < u$, todėl

$$|F(zt,(u,v))|^\alpha + |G(zt,(u,v))|^\alpha < 2|u|^\alpha.$$

Tas pats įvertis teisingas ir antruoju atveju. Taigi supremumas kairėje F3b nelygybės pusėje neviršija $2\,\mathrm{E}|U|^\alpha < \infty$. □

Tiesinis modelis nagrinėtas darbe [6]. Momentinės sąlygos ten sutampa su tomis, kurios nurodytos įrodytame teiginyje. Tiesa, neskaidumo sąlygos yra silpnesnės ir nereikalaujama, kad Liapunovo eksponentė būtų baigtinė.

Kaip ir modelių pustiesėje atveju, svarbu išsiaiškinti, ar ribinės konstantos teigiamos. Darbe [6] įrodyta, kad jos teigiamos tada ir tik tada, kai su visais $c \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{P}\{U = (1-V)c\} < 1. \tag{3.11}$$

Taip pat gauta ir ribinių konstantų išraiška:

$$\kappa(-1) = \kappa(1) = \frac{1}{2\alpha m}\,\mathrm{E}[|U + VX|^\alpha - |VX|^\alpha],$$

čia $m = \mathrm{E}|V|^\alpha \ln|V|$. Pastarasis rezultatas išplaukia ir iš 3.2 pastabos, nes $G(x,(u,v)) = vx$ ir todėl $G(-1,(u,v)) = -v = -G(1,(u,v))$.

Ribinių konstantų tyrimui galima pasiūlyti metodą, analogišką aprašytam tiriant modelius pustiesėje. Jei (X_n) yra asimptotiškai homogeninė grandinė su stacionariu skirstiniu π ir jai pritaikoma 3.2 teorema, tai bent viena iš konstantų $\kappa(\pm 1)$ teigiama, kai su kokia nors funkcija $g \in L^1(\pi)$ ir visais $x \in \mathbb{R}$

$$\sum_{z\in S} r_\alpha(z)\,\mathrm{E}\left([zF(x,\varepsilon)]^{+\alpha} - [zx]^{+\alpha}\right) > \mathrm{E}\,g(F(x,\varepsilon)) - g(x).$$

Testinė funkcija, su kuria galima tikėtis teigiamo rezultato, yra

$$g(x) = b\sum_{z\in S} r_\theta(z)[zx]^{+\theta}$$

su tinkamai parinktais $b \in \mathbb{R}$ ir $\theta \in (0; \alpha)$, nes

$$\begin{aligned}
\mathrm{E}\sum_z r_\theta(z)[zG(x,\varepsilon)]^{+\theta} &= |x|^\theta\, \mathrm{E}\sum_z r_\theta(z)[zG(\operatorname{sign} x,\varepsilon)]^{+\theta} \\
&= \sum_{z,z'} \mathbf{1}_{\{\operatorname{sign} x = z'\}} |x|^\theta r_\theta(z)\, \mathrm{E}[zG(z',\varepsilon)]^{+\theta} = \sum_{z,z'} [z'x]^{+\theta} r_\theta(z) Q_\theta(z',z) \\
&= \rho_\theta \sum_{z'} [z'x]^{+\theta} r_\theta(z'),
\end{aligned}$$

o $\rho_\theta \in (0; 1)$, kai $\theta \in (0; \alpha)$ (žr. 3.2 lemą).

Taikant aprašytą metodą tiesinio modelio atveju, reiktų rasti tokias b ir $\theta \in (0; \alpha)$, kad su visais $x \in \mathbb{R}$

$$\mathrm{E}|U + Vx|^\alpha - |x|^\alpha > b\big[\mathrm{E}|U + Vx|^\theta - |x|^\theta\big].$$

Iš pirmo žvilgsnio nematyti, kaip reiktų parinkti tokias b ir θ, ir tuo labiau — ar tokių konstantų egzistavimas ekvivalentus (3.11) sąlygai. Taigi siūlomas metodas $C = \mathbb{R}$ atveju analiziškai gan sudėtingas. Tačiau jį galima panaudoti konkrečių modelių tyrimui taikant skaitinius metodus.

Išnagrinėsime dar vieną modelį.

3.7 teiginys. *Tegu* (X_n) *apibrėžiama* (1.13) *lygtimi,* $W = \mathbb{R} \setminus \{0, \frac{a}{\sqrt{c}}, -\frac{a}{\sqrt{c}}\}$ *ir egzistuoja tokie* $\beta > 0$ *ir* $\delta > 0$*, kad*

$$\mathrm{E}\, R^\beta(z,\varepsilon) < \infty, \quad \mathrm{E}\, R^{-\delta}(z,\varepsilon) < \infty, \tag{3.12}$$

su visais $z \in S$*. Jei Liapunovo eksponentė neigiama ir tenkinama bent viena iš sąlygų*

(i) $\min_{z\in S} \mathrm{E}\, R^\beta(z,\varepsilon) > 1$*;*

(ii) $\mathrm{E}\, R^\beta(1,\varepsilon)\mathbf{1}_{\{a+\varepsilon\sqrt{c}>0\}} > 1$*;*

(iii) $\mathrm{E}\, R^\beta(-1,\varepsilon)\mathbf{1}_{\{a-\varepsilon\sqrt{c}>0\}} > 1$*,*

tai 3.2 teorema pritaikoma grandinei (X_n)*.*

3.3 PASTABA. Atkreipsime dėmesį, kad iš momentinių teoremos sąlygų išplaukia $\mathrm{E}|\ln R(\pm 1,\varepsilon)| < \infty$, todėl atsižvelgę į kitas teoremos sąlygas matome, kad grandinei pritaikomas 2.7 teiginys. Taigi Liapunovo eksponentė egzistuoja ir yra baigtinė. $\Diamond$

Įrodymas. Kaip ir ankstesniame teiginyje, pakanka patikrinti X1–X2 sąlygas, nes likusios išplaukia tiesiai iš teoremos prielaidų. Remsimės 3.2 teiginiu.

Fiksuokime $\Delta > 0$ ir tokius $\theta < \theta_1 < \alpha$, kad $\theta > \max(\alpha - 2, \alpha - 2\delta(1 - \alpha/\beta))$. Iš (3.12) išplaukia $\mathrm{E}|\varepsilon|^\alpha < \infty$.

Kadangi

$$\sup_{0\leqslant t\leqslant \Delta} \mathrm{E}|F(zt,\varepsilon)|^\alpha \leqslant \mathrm{E}(|a|\Delta + |\varepsilon|\sqrt{b + c\Delta^2})^\alpha < \infty$$

ir

$$\sup_{t>\Delta} t^{-\theta_1}\,\mathrm{E}|F(zt,\varepsilon)|^{\theta_1} \leqslant \mathrm{E}(|a|+|\varepsilon|\sqrt{b\Delta^{-2}+c})^{\theta_1} < \infty,$$

F1–F2 sąlygos tenkinamos.

Norėdami patikrinti F3a, pastebėsime, kad

$$\big|F(zt,w)-G(zt,w)\big| = |w|\big|\sqrt{b+ct^2}-\sqrt{ct^2}\big| = \frac{|w|b}{\sqrt{b+ct^2}+\sqrt{ct^2}} \leqslant \frac{|w|b}{2\sqrt{c}t}.$$

Pasirėmę (3.3)–(3.4) nelygybėmis gauname

$$\sup_{t>\Delta} t^{-\theta}\,\mathrm{E}\big||F(zt,\varepsilon)|^\alpha - |G(zt,\varepsilon)|^\alpha\big| \leqslant \max(1,\alpha 2^{\alpha-1})(c_1+c_2),$$

kur $c_1=0$, kai $\alpha<1$, ir

$$c_1 = \sup_{t>\Delta} t^{-\theta}\,\mathrm{E}|G(zt,\varepsilon)|^{\alpha-1}\big|F(zt,w)-G(zt,w)\big|$$
$$\leqslant \Delta^{\alpha-2-\theta}\frac{b}{2\sqrt{c}}\,\mathrm{E}|az+\varepsilon\sqrt{c}|^{\alpha-1}|\varepsilon| < \infty$$

kai $\alpha>1$, o

$$c_2 = \sup_{t>\Delta} t^{-\theta}\,\mathrm{E}\big||F(zt,\varepsilon)|-|G(zt,\varepsilon)|\big|^\alpha \leqslant \Delta^{-(\theta+\alpha)}\left(\frac{b}{2\sqrt{c}}\right)^\alpha \mathrm{E}|\varepsilon|^\alpha < \infty.$$

Belieka patikrinti F3b. Pastebėsime, kad $F(zt,\varepsilon)G(zt,\varepsilon)<0$ tada ir tik tada, kai

$$azt+\varepsilon\sqrt{b+ct^2} < 0 < azt+\varepsilon t\sqrt{c} \quad \text{arba} \quad azt+\varepsilon t\sqrt{c} < 0 < azt+\varepsilon t\sqrt{b+ct^2},$$

t.y. kai

$$-az < \varepsilon\sqrt{c} < -\frac{az\sqrt{c}t}{\sqrt{b+ct^2}} \quad \text{arba} \quad -\frac{az\sqrt{c}t}{\sqrt{b+ct^2}} < \varepsilon\sqrt{c} < -az.$$

Abiem atvejais

$$|az+\varepsilon\sqrt{c}| \leqslant \Big|az - \frac{az\sqrt{c}}{\sqrt{bt^{-2}+c}}\Big| = \frac{|a|(\sqrt{bt^{-2}+c}-\sqrt{c})}{\sqrt{bt^{-2}+c}} \leqslant dt^{-2}$$

su $d=|a|b/(2c)$. Todėl jei $t>\Delta$,

$$t^{-\theta}\,\mathrm{E}\left[|F(zt,\varepsilon)|^\alpha+|G(zt,\varepsilon)|^\alpha\right]\mathbf{1}_{\{F(zt,\varepsilon)G(zt,\varepsilon)<0\}}$$
$$\leqslant 2t^{\alpha-\theta}\,\mathrm{E}\,U^\alpha \mathbf{1}_{\{R(z,\varepsilon)\leqslant dt^{-2}\}},$$

su $U=\big||a|+|\varepsilon|\sqrt{b\Delta^{-2}+c}\big|$.

Iš Hiolderio nelygybės

$$\mathrm{E}\,U^\alpha\mathbf{1}_{\{R(z,\varepsilon)\leqslant dt^{-2}\}} \leqslant (\mathrm{E}\,U^\beta)^{\alpha/\beta}\,\mathrm{P}^{1-\alpha/\beta}\{R(z,\varepsilon)\leqslant dt^{-2}\}.$$

Iš Čebyševo nelygybės

$$\mathrm{P}\{R(z,\varepsilon) \leqslant dt^{-2}\} \leqslant d^{\delta} t^{-2\delta}\,\mathrm{E}\,R^{-\delta}(z,\varepsilon).$$

Todėl kairioji F3b nelygybės pusė neviršija konstantos, padaugintos iš

$$\sup_{t>\Delta} t^{\alpha-\theta-2\delta(1-\alpha/\beta)}.$$

Pastarasis dydis baigtinis dėl θ parinkimo. □

Išnagrinėtas modelis tirtas darbe [12]. Ten parodyta, kad stacionarus skirstinys egzistuoja ir turi „sunkias“ uodegas, padarius tokias prielaidas:

- ✓ ε turi simetrinį tankį p, teigiamą visoje tiesėje;
- ✓ $\mathrm{E}\,\varepsilon^2 < \infty$;
- ✓ tankis p yra nedidėjantis aibėje $[0;\infty)$;
- ✓ teisingos nelygybės

$$-\infty \leqslant v = \lim_{r\to\infty} \frac{\ln \limsup_{x\to\infty} \mathrm{P}^{-1}\{\varepsilon > x\}\,\mathrm{P}\{\varepsilon > rx\}}{\ln r} =$$
$$\lim_{r\to\infty} \frac{\ln \liminf_{x\to\infty} \mathrm{P}^{-1}\{\varepsilon > x\}\,\mathrm{P}\{\varepsilon > rx\}}{\ln r} \leqslant 0;$$

- ✓ jei $v = -\infty$, tai visiems $\delta > 0$ egzistuoja tokie $q \in (0;1)$ ir x_0, kad

$$p\left(\frac{x \pm at}{\sqrt{ct^2}}\right) \geqslant (1-\delta)p\left(\frac{x \pm at}{\sqrt{b + ct^2}}\right) \tag{3.13}$$

  su visais $x > x_0$ ir $t > x^q$;

  jei $v > -\infty$, tai visiems $\delta > 0$ egzistuoja tokie $x_0 > 0$ ir $T > 0$, kad (3.13) teisingos su visais $x > x_0$ ir $t > T$.

Simetriškumo prielaida autoriams buvo reikalinga tam, kad jie galėtų pasiremti pagrindiniu [6] rezultatu (išvada 2.4): jei ε skirstinys simetrinis, tai

$$G(-1,\varepsilon) = -a + \varepsilon\sqrt{c} \stackrel{d}{=} -a - \varepsilon\sqrt{c} = -G(1,\varepsilon).$$

Mums tos prielaidos neprireikė išvis, kitos irgi buvo ženkliai susilpnintos.

3.3 Pagrindinių rezultatų įrodymai

3.1 teiginio įrodymas remiasi tokia lema.

3.1 lema. *Jei Liapunovo eksponentė neigiama ir*

$$\mathrm{E}\,G^{\alpha}(1,\varepsilon)|\ln G(1,\varepsilon)| < \infty, \tag{3.14}$$

tai $\mathrm{E}\,G^{\alpha}(1,\varepsilon)\ln G(1,\varepsilon) > 0$ *ir* $\mathrm{E}\,G^{\theta}(1,\varepsilon) < 1$ *su visais* $\theta \in (0;\alpha)$.

Įrodymas. Pažymėkime $T = G(1, \varepsilon)$ ir $f(x) = \mathrm{E}\, T^x$ su $x \in [0; \alpha]$. Pasirėmę (3.14) ir Lebego teorema apie aprėžtą konvergavimą, gauname, kad

✓ f yra tolydi aibėje $[0; \alpha]$;

✓ f yra be galo diferencijuojama aibėje $(0; \alpha)$ ir su visais $n \geqslant 1$

$$f^{(n)}(x) = \mathrm{E}\, T^x \ln^n T.$$

Atskiru atveju, $f''(x) = \mathrm{E}\, T^x \ln^2 T \geqslant 0$. Be to, $f''(x) > 0$, nes $\mathrm{P}\{T = 1\} < 1$ (tai išplaukia iš Liapunovo eksponentės neigiamumo). Todėl f' yra griežtai didėjanti aibėje $(0; \alpha)$. Iš Lagranžo vidurinės reikšmės teoremos

$$\alpha f'(\beta) = f(\alpha) - f(0) = 0$$

su $\beta \in (0; \alpha)$. Tada $f'(x) < 0$ su $x \in (0; \beta)$ ir $f'(x) > 0$ su $x \in (\beta; \alpha)$, t.y. f griežtai mažėja aibėje $(0; \beta)$ ir griežtai didėja aibėje $(\beta; \alpha)$. Kadangi $f(0) = f(\alpha) = 1$, $f(\theta) < 1$ su visais $\theta \in (0; \alpha)$.

Iš to, kad f' didėja aibėje $(0; \alpha)$, taip pat išplaukia $f'(\alpha-) > f'(\beta) = 0$. Kita vertus, iš Lebego teoremos apie aprėžtą konvergavimą

$$f'(\alpha-) = \lim_{x \to \alpha-} \mathrm{E}\, T^x \ln T = \mathrm{E}\, T^\alpha \ln T. \quad \square$$

3.1 teiginio įrodymas. Iš F2 sąlygos išplaukia, kad atsitiktinių dydžių šeima $\big(x^{-\theta} F^\theta(x, \varepsilon), x > 1\big)$ yra tolygiai integruojama. Be to, su tikimybe 1

$$x^{-\theta} F^\theta(x, \varepsilon) \to G^\theta(1, \varepsilon),$$

kai $x \to \infty$. Todėl

$$x^{-\theta}\, \mathrm{E}\, F^\theta(x, \varepsilon) \xrightarrow[x \to \infty]{} \mathrm{E}\, G^\theta(1, \varepsilon).$$

Kadangi Liapunovo eksponentė neigiama, iš 3.1 lemos gauname $\mathrm{E}\, G^\theta(1, \varepsilon) < 1$. Todėl atsiras tokie $q < 1$ ir $\Delta > 1$, kad

$$\mathrm{E}\, F^\theta(x, \varepsilon) \leqslant q x^\theta$$

su $x > \Delta$. Kita vertus, iš F1 išplaukia, kad su tam tikru $c < \infty$ ir visais $x \leqslant \Delta$

$$\mathrm{E}\, F^\theta(x, \varepsilon) \leqslant c.$$

Taigi su visais x

$$\mathrm{E}_x\, X_1^\theta - x^\theta \leqslant -(1 - q)(1 \vee x^\theta) + (c + 1 - q)\mathbf{1}_{[0;\Delta]}(x).$$

Kadangi (X_n) yra neskaidi T-grandinė, kompaktiškos aibės yra mažos. Tada iš A.10 teoremos išplaukia, kad grandinė rekurentinė. Pasirėmę A.11 ir A.4 teoremomis, gauname, kad ji yra teigiama rekurentinė. Galiausiai iš A.12 teoremos išplaukia $\mathrm{E}\, X^\theta < \infty$.

Tegu π žymi X skirstinį. Tada

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big|F^\alpha(X,\varepsilon)-G^\alpha(X,\varepsilon)\big| &= \int \mathrm{E}\big|F^\alpha(x,\varepsilon)-G^\alpha(x,\varepsilon)\big|\pi(\mathrm{d}x)\\ &\leqslant \sup_{x\leqslant 1}\mathrm{E}\,F^\alpha(x,\varepsilon)+\sup_{x\leqslant 1}\mathrm{E}\,G^\alpha(x,\varepsilon)+c\int_{x>1}x^\theta\pi(\mathrm{d}x).\end{aligned}$$

Iš F1 išplaukia, kad pirmas dėmuo dešinėje baigtinis. Antrasis lygus 1, nes $\mathrm{E}\,G^\alpha(x,\varepsilon)=x^\alpha\,\mathrm{E}\,G^\alpha(1,\varepsilon)=x^\alpha$. Trečiasis neviršija $c\,\mathrm{E}\,X^\theta<\infty$. Taigi X2 sąlyga patenkinta. □

Prieš pradėdami 3.2 teoremos įrodymą priminsime kai kuriuos žymenis iš ankstesnio skyriaus: jei $z\in S$, tai $Y_0(z)=Z_0(z)=z$ ir su $n\geqslant 1$

$$Y_n(z)=G(Y_{n-1}(z),\varepsilon_n),\quad Z_n(z)=\frac{Y_n(z)}{|Y_n(z)|}=H(Z_{n-1}(z),\varepsilon_n).$$

Be to, apibrėšime

$$T_n(z)=|G(Z_{n-1}(z),\varepsilon_n)|=\frac{|Y_n(z)|}{|Y_{n-1}(z)|};$$

tada su visais $n\geqslant 1$

$$|Y_n(z)|=T_1(z)\cdots T_n(z).$$

Iš pradžių įrodysime lemą, analogišką 3.1 lemai.

3.2 lema. *Jei Q_α yra apibrėžta, tai funkcija $\theta\mapsto\ln\rho_\theta$ yra iškila aibėje $[0;\alpha]$. Jei Liapunovo eksponentė neigiama, $\rho_\alpha=1$ ir su visais $z\in S$*

$$\mathrm{E}\,R^\alpha(z,\varepsilon)|\ln R(z,\varepsilon)|<\infty,$$

tai $\rho_\theta<1$ su visais $\theta\in(0;\alpha)$.

Įrodymas. 1 dalis. Matematinės indukcijos metodu įrodysime, kad

$$Q_\theta^n(z,z')=\mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\theta\mathbf{1}_{\{Z_n(z)=z'\}}.$$

Jei $n=0$, sąryšis akivaizdus, nes $\big|Y_0(z)\big|=|z|=1$ ir $Z_0(z)=z$. Jei $n\geqslant 1$, iš indukcinės prielaidos

$$\begin{aligned}Q_\theta^n(z,z') &= \sum_{z''\in S}Q_\theta^{n-1}(z,z'')Q_\theta(z'',z')\\ &= \sum_{z''\in S}\mathrm{E}\big|Y_{n-1}(z)\big|^\theta\mathbf{1}_{\{Z_{n-1}(z)=z''\}}\,\mathrm{E}\,R^\theta(z'',\varepsilon_n)\mathbf{1}_{\{H(z'',\varepsilon_n)=z'\}}\\ &= \sum_{z''\in S}\mathrm{E}\big|Y_{n-1}(z)\big|^\theta\mathbf{1}_{\{Z_{n-1}(z)=z''\}}R^\theta(z'',\varepsilon_n)\mathbf{1}_{\{H(z'',\varepsilon_n)=z'\}}\\ &= \mathrm{E}\big|Y_{n-1}(z)\big|^\theta R^\theta\big(Z_{n-1}(z),\varepsilon_n\big)\mathbf{1}_{\{H(Z_{n-1}(z),\varepsilon_n)=z'\}}\\ &= \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\theta\mathbf{1}_{\{Z_n(z)=z'\}}.\end{aligned}$$

Pasirėmus Lebego teorema apie aprėžtą konvergavimą nesunku įrodyti, kad funkcija $\theta \mapsto Q_\theta^n(z,z')$ tolydžiai diferencijuojama aibėje $[0;\alpha]$ ir jos išvestinė lygi

$$\mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\theta \ln\big|Y_n(z)\big| \mathbf{1}_{\{Z_n(z)=z'\}}.$$

2 dalis. Matricą Q_θ^n galima traktuoti kaip tiesinį operatorių, veikiantį iš dešinės vektorių stulpelių aibėje. Pačius vektorius galima traktuoti kaip funkcijas aibėje S. Tada

$$(Q_\theta^n f)(z) = \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\theta f\big(Z_n(z)\big)$$

ir jei $\|\cdot\|$ žymi operatoriaus normą, atitinkančią sup normą $\mathbb{R}^S$ erdvėje, tai

$$\|Q_\theta^n\| = \sup_{z\in S} \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\theta.$$

Tada iš gerai žinomos spektrinio spindulio išraiškos (A.22 teorema)

$$\rho_\theta = \lim_{n\to\infty} \|Q_\theta^n\|^{1/n}. \tag{3.15}$$

3 dalis. Iš Hiolderio nelygybės su visais $0 \leqslant \theta_1 < \theta_2 \leqslant \alpha$ ir $t \in (0;1)$

$$\mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^{(1-t)\theta_1+t\theta_2} \leqslant \big[\mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^{\theta_1}\big]^{1-t}\big[\mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^{\theta_2}\big]^t.$$

Todėl

$$\|Q^n_{(1-t)\theta_1+t\theta_2}\| \leqslant \|Q^n_{\theta_1}\|^{1-t}\|Q^n_{\theta_2}\|^t$$

ir iš (3.15)

$$\rho_{(1-t)\theta_1+t\theta_2} \leqslant \rho_{\theta_1}^{1-t}\rho_{\theta_2}^t.$$

Taigi funkcija $\ln\rho_\theta$ yra iškila aibėje $[0;\alpha]$.

4 dalis. Įrodysime antrąjį lemos teiginį. Kadangi su visais $z \in S$

$$n^{-1}\,\mathrm{E}\ln\big|Y_n(z)\big| \xrightarrow[n\to\infty]{} \gamma < 0,$$

atsiras toks p, kad

$$p^{-1}\,\mathrm{E}\ln\big|Y_p(z)\big| < \gamma/2$$

su visais $z \in S$. Kadangi su visais $z \in S$,

$$\frac{\mathrm{E}\big|Y_p(z)\big|^\theta - 1}{\theta} \xrightarrow[\theta\to 0+]{} \mathrm{E}\ln\big|Y_p(z)\big| < p\gamma/2,$$

atsiras toks δ, kad

$$\frac{\mathrm{E}\big|Y_p(z)\big|^\delta - 1}{\delta} < p\gamma/2$$

su visais z. Tada $\|Q_\delta^p\| < 1$ ir iš (3.15)

$$\rho_\delta = \lim_{n\to\infty}\|Q_\delta^{np}\|^{1/(np)} \leqslant \|Q_\delta^p\|^{1/p} < 1.$$

5 dalis. Tegu δ yra toks pat kaip 4 dalyje. Tada $\rho_\delta < 1$ ir $\rho_0 = \rho_\alpha = 1$. Dėl iškilumo

$$\ln \rho_\theta \leqslant \frac{\delta - \theta}{\delta} \ln \rho_0 + \frac{\theta}{\delta} \ln \rho_\delta < 0$$

su visais $\theta \in (0; \delta)$ ir

$$\ln \rho_\theta \leqslant \frac{\alpha - \theta}{\alpha - \delta} \ln \rho_\delta + \frac{\theta - \delta}{\alpha - \delta} \ln \rho_\alpha < 0$$

su visais $\theta \in (\delta; \alpha)$. Taigi $\rho_\theta < 1$ su visais $\theta \in (0; \alpha)$. $\square$

Teoremos 3.2 įrodymas. 1 dalis. Tegu E žymi aibę funkcijų $f\colon S \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tenkinančių sąlygą: su visais $x \in \mathbb{R}$

$$\|f\|_x = \max_{z \in S} \sup_{y \leqslant x} |f(z, y)| < \infty,$$

Jei E aibėje nagrinėsime topologiją, generuotą pusnormių šeimos $(\|\cdot\|_x, x \in \mathbb{R})$, ji bus pilnai metrizuojama lokaliai iškila topologinė erdvė.

Tegu E_0 žymi E poerdvį, sudarytą iš funkcijų $f \in E$, tenkinančių sąlygą

$$\max_{z \in S} \sup_x \mathrm{e}^{-\alpha x} |f(z, x)| < \infty.$$

Su $f \in E_0$ apibrėžkime

$$(Qf)(z, x) = \sum_{z' \in S} \mathrm{E}\, R^\alpha(z', \varepsilon) \mathbf{1}_{\{H(z', \varepsilon) = z\}} f\bigl(z', x - \ln R(z', \varepsilon)\bigr).$$

Nesunku matyti, kad Q yra neneigiamas operatorius iš E_0 į E_0.

Q iteracijos aprašomos formule

$$(Q^n f)(z, x) = \sum_{z' \in S} \mathrm{E} \bigl|Y_n(z')\bigr|^\alpha \mathbf{1}_{\{Z_n(z') = z\}} f\bigl(z', x - \ln\bigl|Y_n(z')\bigr|\bigr). \tag{3.16}$$

Iš tikrųjų, jei $n = 0$, lygybė išplaukia iš Q apibrėžimo, nes $\bigl|Y_0(z')\bigr| = |z'| = 1$ ir $Z_0(z') = z'$. Jei $n \geqslant 1$, tai iš indukcinės prielaidos

$$\begin{aligned}
(Q^n f)(z, x) &= \sum_{z' \in S} \mathrm{E}\, R^\alpha(z', \varepsilon_n) \mathbf{1}_{\{H(z', \varepsilon_n) = z\}} (Q^{n-1} f)\bigl(z', x - \ln R(z', \varepsilon_n)\bigr) \\
&= \sum_{z', z'' \in S} \mathrm{E}\, R^\alpha(z', \varepsilon_n) \mathbf{1}_{\{H(z', \varepsilon_n) = z\}} \bigl|Y_{n-1}(z'')\bigr|^\alpha \mathbf{1}_{\{Z_{n-1}(z'') = z'\}} \\
&\qquad \times f\bigl(z'', x - \ln R(z', \varepsilon_n) - \ln\bigl|Y_{n-1}(z'')\bigr|\bigr) \\
&= \sum_{z'' \in S} \mathrm{E}\, R^\alpha\bigl(Z_{n-1}(z''), \varepsilon_n\bigr) \mathbf{1}_{\{H(Z_{n-1}(z''), \varepsilon_n) = z\}} \bigl|Y_{n-1}(z'')\bigr|^\alpha \\
&\qquad \times f\bigl(z'', x - \ln R\bigl(Z_{n-1}(z''), \varepsilon_n\bigr) - \ln\bigl|Y_{n-1}(z'')\bigr|\bigr) \\
&= \sum_{z'' \in S} \mathrm{E} \bigl|Y_n(z'')\bigr|^\alpha \mathbf{1}_{\{Z_n(z'') = z\}} f\bigl(z'', x - \ln\bigl|Y_n(z'')\bigr|\bigr).
\end{aligned}$$

2 dalis. Apibrėžkime

$$h(z,x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{P}\{\operatorname{sign} X = z,\ |X| > \mathrm{e}^x\},$$
$$g(z,x) = h(z,x) - \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{P}\{H(X,\varepsilon) = z,\ R(X,\varepsilon) > \mathrm{e}^x\}.$$

Aišku, kad $g, h \in E_0$. Be to,

$$\begin{aligned} h(z,x) &= g(z,x) + \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{P}\{H(\operatorname{sign} X,\varepsilon) = z,\ |X|R(\operatorname{sign} X,\varepsilon) > \mathrm{e}^x\} \\ &= g(z,x) + \mathrm{e}^{\alpha x}\sum_{z'\in S}\mathrm{P}\{\operatorname{sign} X = z',\ H(z',\varepsilon) = z,\ |X|R(z',\varepsilon) > \mathrm{e}^x\} \\ &= g(z,x) + \sum_{z'\in S}\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{H(z',\varepsilon)=z\}}R^\alpha(z',\varepsilon)h\big(z', x - \ln R(z',\varepsilon)\big), \end{aligned}$$

t.y. $h = g + Qh$. Iteruodami šią lygybę gauname

$$h = \sum_{k=0}^{n-1} Q^k g + Q^n h.$$

3 dalis. Iš (3.16) ir h apibrėžimo

$$\begin{aligned} (Q^n h)(z,x) &= \sum_{z'\in S}\mathrm{E}\big|Y_n(z')\big|^\alpha \mathbf{1}_{\{Z_n(z')=z\}}h\big(z', x - \ln\big|Y_n(z')\big|\big) \\ &\leqslant \mathrm{e}^{\alpha x}\sum_{z'\in S}\mathrm{P}\{|X|\big|Y_n(z')\big| > \mathrm{e}^x\} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{(\alpha-\theta)x}\sum_{z'\in S}\mathrm{E}|X|^\theta\,\mathrm{E}\big|Y_n(z')\big|^\theta \\ &\leqslant 2\mathrm{e}^{(\alpha-\theta)x}\,\mathrm{E}|X|^\theta \|Q_\theta^n\|. \end{aligned}$$

Kadangi $g = h - Qh$,

$$\big|(Q^n g)(z,x)\big| \leqslant 2\mathrm{e}^{(\alpha-\theta)x}\,\mathrm{E}|X|^\theta(\|Q_\theta^n\| + \|Q_\theta^{n+1}\|).$$

Iš X1 ir 3.2 lemos $\mathrm{E}|X|^\theta < \infty$ ir $\sum_{n\geqslant 0}\|Q_\theta^n\| < \infty$. Todėl

$$h = \sum_{n\geqslant 0} Q^n g,$$

kur eilutė konverguoja erdvėje E.

4 dalis. Su $f \in E$ apibrėžkime glodinimo operatorių $f \mapsto \hat f$ lygybe

$$\hat f(z,x) = \int_{-\infty}^x \mathrm{e}^{-(x-y)} f(z,y)\mathrm{d}y.$$

Akivaizdu, kad šis operatorius yra neneigiamas, tolydus ir atvaizduoja E į E. Taip pat pastebėsime, kad $\widehat{Qf} = Q\hat{f}$. Iš tikrųjų,

$$\begin{aligned}
&\int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(x-y)}(Qf)(z,y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(x-y)} \sum_{z'\in S} \mathrm{E}\, R^{\alpha}(z',\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z',\varepsilon)=z\}} f(z', y - \ln R(z',\varepsilon))\mathrm{d}y \\
&= \sum_{z'\in S} \mathrm{E}\, R^{\alpha}(z',\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z',\varepsilon)=z\}} \int_{-\infty}^{x} \mathrm{e}^{-(x-y)} f(z', y - \ln R(z',\varepsilon))\mathrm{d}y \\
&= \sum_{z'\in S} \mathrm{E}\, R^{\alpha}(z',\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z',\varepsilon)=z\}} \int_{-\infty}^{x-\log R(z',\varepsilon)} \mathrm{e}^{-(x-\ln R(z',\varepsilon)-u)} f(z', u)\mathrm{d}u \\
&= \sum_{z'\in S} \mathrm{E}\, R^{\alpha}(z',\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z',\varepsilon)=z\}} \hat{f}(z', x - \ln R(z',\varepsilon)).
\end{aligned}$$

Todėl

$$\hat{h} = \sum_{n\geqslant 0} Q^n \hat{g},$$

kur eilutė konverguoja erdvėje E.

5 dalis. Kad būtų trumpiau, rašysime π ir r vietoj π_α ir r_α. Tegu $\tilde{P}$ yra stochastinis branduolys erdvėje $S \times (0;\infty)$, apibrėžiamas lygybe

$$(\tilde{P}f)(z,t) = \frac{1}{r(z)}\, \mathrm{E}\, R^{\alpha}(z,\varepsilon) r\big(H(z,\varepsilon)\big) f\big(H(z,\varepsilon), R(z,\varepsilon)\big)$$

(čia f yra bet kokia neneigiama Borelio funkcija). Kaip ir kiekvienas stochastinis branduolys jis generuoja tikimybių šeimą $\tilde{\mathrm{P}}_{(z,t)}$ mačioje erdvėje $(\tilde{\Omega}, \mathcal{B}(\tilde{\Omega}))$, kur $\hat{\Omega} = \big(S \times (0;\infty)\big)^{\infty}$. Tiksliau sakant, $\tilde{\mathrm{P}}_{(z,t)}$ yra Markovo grandinės su pradine būsena (z,t) ir perėjimo tikimybių branduoliu $\tilde{P}$ skirstinys. Faktiškai $\tilde{\mathrm{P}}_{(z,t)}$ nepriklauso nuo t, todėl toliau rašysime tiesiog $\tilde{\mathrm{P}}_z$.

Tegu $\tilde{\mathrm{E}}_z$ žymi vidurkį $\tilde{\mathrm{P}}_z$ atžvilgiu, o $(\tilde{Z}_i, \tilde{T}_i)$ yra kanoninė Markovo grandinė, apibrėžta aibėje $\tilde{\Omega}$ lygybėmis

$$\big(\tilde{Z}_i(\tilde{\omega}), \tilde{T}_i(\tilde{\omega})\big) = (z_i, t_i) \quad \text{su } \tilde{\omega} = (z_1, t_1, z_2, t_2, \dots).$$

Tada bet kokiai Borelio funkcijai $f_n\colon (S \times (0;\infty))^n \to [0;\infty]$

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathrm{E}}_z f_n(\tilde{Z}_1, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{Z}_n, \tilde{T}_n) \\
&\qquad = \frac{1}{r(z)}\, \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^{\alpha} r\big(Z_n(z)\big) f_n\big(Z_1(z), T_1(z), \dots, Z_n(z), T_n(z)\big).
\end{aligned}$$

Iš tikrųjų, iš markoviškumo ir indukcinės prielaidos

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mathrm{E}}_z f_n(\tilde{Z}_1, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{Z}_n, \tilde{T}_n) \\
&= \tilde{\mathrm{E}}_z f_{n-1}(\tilde{Z}_1, \tilde{T}_1, \dots, \tilde{Z}_{n-1}, \tilde{T}_{n-1}) \\
&= \frac{1}{r(z)}\, \mathrm{E}\big|Y_{n-1}(z)\big|^{\alpha} r\big(Z_{n-1}(z)\big) f_{n-1}\big(Z_1(z), T_1(z), \dots, Z_{n-1}(z), T_{n-1}(z)\big)
\end{aligned}$$

su

$$
\begin{aligned}
&f_{n-1}(z_1,t_1,\dots,z_{n-1},t_{n-1})\\
&=\big(\tilde P f_n(z_1,t_1,\dots,z_{n-1},t_{n-1},\cdot,\cdot)\big)(z_{n-1},t_{n-1})\\
&=\frac{1}{r(z_{n-1})}\,\mathrm{E}\,R^\alpha(z_{n-1},\varepsilon_n)r\big(H(z_{n-1},\varepsilon_n)\big)\\
&\qquad\qquad f_n\big(z_1,t_1,\dots,z_{n-1},t_{n-1},H(z_{n-1},\varepsilon_n),R(z_{n-1},\varepsilon_n)\big).
\end{aligned}
$$

Įstatę gauname reikiamą lygybę, nes

$$
H\big(Z_{n-1}(z),\varepsilon_n\big)=Z_n(z),\ R\big(Z_{n-1}(z),\varepsilon_n\big)=T_n(z),\ \big|Y_{n-1}(z)\big|T_n(z)=\big|Y_n(z)\big|.
$$

Tegu kiekvienam $z\in S$ simbolis μ_z žymi matą aibėje $(0;\infty)$, apibrėžiamą lygybe

$$
\mu_z g=\frac{1}{\pi\{z\}}\sum_{z'\in S}\pi\{z'\}\,\mathrm{E}\,R^\alpha(z',\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z',\varepsilon)=z\}}g\big(R(z',\varepsilon)\big)
$$

(čia g yra bet kokia neneigiama Borelio funkcija intervale $(0;\infty)$). Aišku, kad $\mu_z 1=1$, t.y. visi matai μ_z yra tikimybiniai.

Tegu φ yra tikimybė aibėje $S\times(0;\infty)$, apibrėžiama lygybe

$$
\varphi f=\sum_{z\in S}\pi\{z\}r(z)\int f(z,t)\mu_z(\mathrm{d}t)
$$

(čia $f\colon S\times(0;\infty)\to\mathbb{R}$ — bet kokia Borelio funkcija). Tada

$$
\begin{aligned}
\varphi\tilde P f&=\sum_{z\in S}\pi\{z\}r(z)\int(\tilde P f)(z,t)\mu_z(\mathrm{d}t)\\
&=\sum_{z\in S}\pi\{z\}\,\mathrm{E}\,R^\alpha(z,\varepsilon)r\big(H(z,\varepsilon)\big)f\big(H(z,\varepsilon),R(z,\varepsilon)\big)\\
&=\sum_{z,z'\in S}\pi\{z\}\,\mathrm{E}\,R^\alpha(z,\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z,\varepsilon)=z'\}}r(z')f\big(z',R(z,\varepsilon)\big)\\
&=\sum_{z'\in S}r(z')\sum_{z\in S}\pi\{z\}\,\mathrm{E}\,R^\alpha(z,\varepsilon)\mathbf{1}_{\{H(z,\varepsilon)=z'\}}f\big(z',R(z,\varepsilon)\big)\\
&=\sum_{z'\in S}r(z')\pi\{z'\}\int f(z',t)\mu_{z'}(\mathrm{d}t)\\
&=\varphi f,
\end{aligned}
$$

t.y. φ yra invariantinė $\tilde P$ atžvilgiu. Tai savo ruožtu reiškia, kad $(\tilde Z_n,\tilde T_n)$ yra stacionari grandinė atžvilgiu mato

$$
\int\varphi(\mathrm{d}z,\mathrm{d}t)\tilde{\mathrm{P}}_z(\cdot)=\sum_{z\in S}\tilde\pi\{z\}\tilde{\mathrm{P}}_z(\cdot), \tag{3.17}
$$

kur $\tilde{\pi}$ žymi tikimybę, apibrėžiamą lygybe

$$\tilde{\pi}\{z\} = \pi\{z\} r\{z\}.$$

(3.17) tikimybę žymėsime $\tilde{\mathrm{P}}_{\tilde{\pi}}$, o atitinkamą vidurkį — simboliu $\tilde{\mathrm{E}}_{\tilde{\pi}}$.

Atkreipsime dėmesį, kad marginali seka $(\tilde{Z}_n)$ yra Markovo grandinė su perėjimo tikimybių branduoliu $\tilde{Q}$, apibrėžiamu lygybe

$$(\tilde{Q}f)(z) = \frac{1}{r(z)} \mathrm{E}\, R^{\alpha}(z,\varepsilon) r\bigl(H(z,\varepsilon)\bigr) f\bigl(H(z,\varepsilon)\bigr).$$

Nesunku matyti, kad $\tilde{Q}(z,z') > 0$ tada ir tik tada, kai $Q_0(z,z') > 0$, todėl grandinė $(\tilde{Z}_n)$ yra neskaidi. Be to, $\tilde{\pi}$ yra jos stacionarus skirstinys.

Dabar esame pasiruošę taikyti A.16 teoremą, kurioje duodamos sąlygos, kada egzistuoja riba

$$\lim_{x\to\infty} \sum_{n\geqslant 0} \tilde{\mathrm{E}}_z \tilde{g}\bigl(\tilde{Z}_n, x - \ln(\tilde{T}_1 \cdots \tilde{T}_n)\bigr).$$

Norint ją pritaikyti, reikia parodyti, kad (taip pat žr. A.1 teiginį)

(i) sumos $\sum_{i=1}^{N_0} \ln \tilde{T}_i$ skirstinys $\tilde{\mathrm{P}}_{z_0}$ atžvilgiu yra nearitmetinis (čia z_0 yra bet kokia grandinės $(Z_n(z))$ būsena, o $N_0 = \min\{n \geqslant 1 \mid Z_n(z_0) = z_0\}$);

(ii) $\tilde{\mathrm{E}}_{\tilde{\pi}} |\ln \tilde{T}_1| < \infty$, $\tilde{\mathrm{E}}_{\tilde{\pi}} \ln \tilde{T}_1 > 0$;

(iii) su visais $z \in S$ funkcija $\tilde{g}(z,x)$ yra aprėžta, mati, tolydi x atžvilgiu ir egzistuoja toks δ, kuriam

$$\sum_{z\in S} \tilde{\pi}\{z\} \sum_{k\in\mathbb{Z}} \sup_{x\in[k\delta;(k+1)\delta]} \bigl|\tilde{g}(z,x)\bigr| < \infty, \tag{3.18}$$

$$\sum_{z\in S} \tilde{\pi}\{z\} \sup_x \bigl|\tilde{g}(z,x)\bigr| < \infty, \tag{3.19}$$

$$\tilde{g}(z,x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 0. \tag{3.20}$$

Likusiose įrodymo dalyse patikrinsime šias sąlygas.

6 dalis. (i) sąlyga išplaukia iš įrodinėjamos teoremos (i) prielaidos.

Kadangi

$$\tilde{\mathrm{E}}_{\tilde{\pi}} |\ln \tilde{T}_1| = \sum_{z\in S} \pi\{z\}\, \mathrm{E}\, R^{\alpha}(z,\varepsilon) r\bigl(H(z,\varepsilon)\bigr) \bigl|\ln R(z,\varepsilon)\bigr|,$$

pirmoji iš dviejų (ii) sąlygų išplaukia iš (3.5).

Iš ergodinės teoremos, $\tilde{\mathrm{P}}_{\tilde{\pi}}$-b.v.

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln(\tilde{T}_1 \cdots \tilde{T}_n) = \tilde{\mathrm{E}}_{\tilde{\pi}} \ln \tilde{T}_1. \tag{3.21}$$

Todėl antroji iš (ii) sąlygų bus įrodyta, jei parodysime, kad ši riba teigiama. Pakanka parodyti, kad egzistuoja $\delta > 0$, kuriam

$$\sum_{n\geqslant 1} \tilde{\mathrm{P}}_{\tilde{\pi}}\{\tilde{T}_1 \cdots \tilde{T}_n \leqslant \mathrm{e}^{n\delta}\} < \infty.$$

Iš tikrųjų, jei eilutė konverguoja, tai iš Borelio-Kanteli lemos $\tilde{T}_1 \cdots \tilde{T}_n > \mathrm{e}^{n\delta}$ be galo dažnai ir todėl riba (3.21) yra nemažesnė už δ.

Fiksuokime $\theta \in (0; \alpha)$ ir parinkime $\delta < -\log \rho_\theta / (\alpha + \theta)$ (toks parinkimas visada galimas, nes iš 3.2 lemos $\rho_\theta < 1$). Kadangi

$$\begin{aligned}\tilde{\mathrm{P}}_{\tilde{\pi}}\{\tilde{T}_1 \cdots \tilde{T}_n \leqslant \mathrm{e}^{\delta n}\} &= \sum_{z \in S} \pi\{z\}\, \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\alpha r\big(Z_n(z)\big) \mathbf{1}_{\{|Y_n(z)| \leqslant \mathrm{e}^{\delta n}\}} \\ &\leqslant \|r\| \sup_{z \in S} \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\alpha \mathbf{1}_{\{|Y_n(z)| \leqslant \mathrm{e}^{\delta n}\}},\end{aligned}$$

pakanka parodyti, kad

$$\sum_{n \geqslant 1} \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\alpha \mathbf{1}_{\{|Y_n(z)| \leqslant \mathrm{e}^{\delta n}\}} < \infty \tag{3.22}$$

su visais z. Bet

$$\begin{aligned}\mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\alpha \mathbf{1}_{\{|Y_n(z)| \leqslant \mathrm{e}^{\delta n}\}} &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha\delta n} + \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\alpha \mathbf{1}_{\{\mathrm{e}^{-\delta n} < |Y_n(z)| \leqslant \mathrm{e}^{\delta n}\}} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha\delta n} + \mathrm{e}^{\alpha\delta n}\, \mathrm{P}\{\big|Y_n(z)\big| > \mathrm{e}^{-\delta n}\} \\ &\leqslant \mathrm{e}^{-\alpha\delta n} + \mathrm{e}^{\alpha\delta n + \theta\delta n}\, \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\theta,\end{aligned}$$

o iš (3.15)

$$\lim_{n\to\infty} \big[\mathrm{e}^{\alpha\delta n + \theta\delta n}\, \mathrm{E}\big|Y_n(z)\big|^\theta\big]^{1/n} \leqslant \mathrm{e}^{\alpha\delta + \theta\delta} \lim_{n\to\infty} \|Q_\theta^n\|^{1/n} = \mathrm{e}^{\alpha\delta + \theta\delta} \rho_\theta < 1.$$

Taigi (3.22) teisinga ir antroji iš (ii) sąlygų tenkinama.

7 dalis. Pastebėsime, kad

$$\begin{aligned}(Q^n \hat{g})(z, x) &= \sum_{z' \in S} r(z') \tilde{\mathrm{E}}_{z'} r^{-1}(\tilde{Z}_n) \mathbf{1}_{\{\tilde{Z}_n = z\}} \hat{g}\big(z', x - \ln(\tilde{T}_1 \cdots \tilde{T}_n)\big) \\ &= \frac{1}{r(z)} \sum_{z' \in S} r(z') \tilde{\mathrm{E}}_{z'} \mathbf{1}_{\{\tilde{Z}_n = z\}} \hat{g}\big(z', x - \ln(\tilde{T}_1 \cdots \tilde{T}_n)\big).\end{aligned}$$

Taigi A.16 teoremą taikysime funkcijoms

$$\tilde{g}(z, x) = \mathbf{1}_{\{z''\}}(z) \hat{g}(z', x), \quad z', z'' \in S.$$

Aišku, kad $\tilde{g}$ yra mati ir tolydi x atžvilgiu. Jei $g(z, \cdot)$ yra integruojamos, tai iš A.17 teoremos $\hat{g}(z, \cdot)$ yra tiesiogiai integruojamos, o iš to išplaukia (3.18). Kadangi aibė S yra dvitaškė, kiekviena funkcija, tenkinanti (3.18), yra aprėžta ir jai galioja (3.19)–(3.20). Taigi (iii) sąlyga tenkinama, kai kiekviena $g(z, \cdot)$ yra integruojama.

Tam, kad įrodytume integruojamumą, užrašysime funkciją g pavidalu

$$g(z, x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\big[\mathrm{P}\{zF(X, \varepsilon) > \mathrm{e}^x\} - \mathrm{P}\{zG(X, \varepsilon) > \mathrm{e}^x\}\big] = g_1(z, x) - g_2(z, x),$$

kur

$$g_1(z,x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{P}\{zF(X,\varepsilon) > \mathrm{e}^x \geqslant zG(X,\varepsilon)\},$$
$$g_2(z,x) = \mathrm{e}^{\alpha x}\,\mathrm{P}\{zG(X,\varepsilon) > \mathrm{e}^x \geqslant zF(X,\varepsilon)\}.$$

Tada

$$\begin{aligned}\int_{-\infty}^{\infty} g_1(z,x)\mathrm{d}x &= \int_0^{\infty} t^{\alpha-1}\,\mathrm{P}\{zF(X,\varepsilon) > t \geqslant zG(X,\varepsilon)\}\mathrm{d}t \\ &= \mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{zF(X,\varepsilon)>[zG(X,\varepsilon)]^+\}} \int_{[zG(X,\varepsilon)]^+}^{zF(X,\varepsilon)} t^{\alpha-1}\mathrm{d}t \\ &= \alpha^{-1}\,\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{zF(X,\varepsilon)>[zG(X,\varepsilon)]^+\}}\Big(\big[zF(X,\varepsilon)\big]^{\alpha} - \big[zG(X,\varepsilon)\big]^{+\alpha}\Big)\end{aligned}$$

ir analogiškai

$$\int_{-\infty}^{\infty} g_2(z,x)\mathrm{d}x = \alpha^{-1}\,\mathrm{E}\,\mathbf{1}_{\{zG(X,\varepsilon)>[zF(X,\varepsilon)]^+\}}\Big(\big[zG(X,\varepsilon)\big]^{\alpha} - \big[zF(X,\varepsilon)\big]^{+\alpha}\Big).$$

Iš X2 sąlygos išplaukia, kad abu integralai baigtiniai.

Pritaikę A.16 teoremą gauname, kad egzistuoja baigtinės ribos

$$\kappa(z) = \lim_{x\to\infty} \hat{h}(z,x).$$

Tada iš A.18 teoremos $h(z,x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \kappa(z)$. □

Teiginio 3.2 įrodymas. Iš F1–F2 su visais $k \geqslant 1$

$$\mathrm{E}\big|X_k(x)\big|^{\theta_1} = \mathrm{E}\big|F(X_{k-1}(x),\varepsilon_k)\big|^{\theta_1} \leqslant c_1 + c_2\big|X_{k-1}(x)\big|^{\theta_1},$$

kur c_1, c_2 — baigtinės konstantos, priklausančios nuo k. Taikydami indukciją gauname, kad su visais $k \geqslant 1$

$$\sup_{|x|\leqslant\Delta} \mathrm{E}\big|X_k(x)\big|^{\theta_1} < \infty \quad \text{ir} \quad \sup_{|x|>\Delta} |x|^{-\theta_1}\,\mathrm{E}\big|X_k(x)\big|^{\theta_1} < \infty.$$

Toliau galime pakartoti samprotavimus iš 3.1 teiginio įrodymo pradžios ir gauti, kad su visais z

$$t^{-\theta}\,\mathrm{E}\big|X_k(tz,\varepsilon)\big|^{\theta} \xrightarrow[t\to\infty]{} \mathrm{E}\big|Y_k(z,\varepsilon)\big|^{\theta}.$$

Kadangi Liapunovo eksponentė neigiama, iš 3.2 lemos $\rho_\theta < 1$. Kita vertus, iš (3.15) išplaukia $\big[\mathrm{E}\big|Y_k(z,\varepsilon)\big|^{\theta}\big]^{1/k} \leqslant \|Q_\theta^k\|^{1/k} \to \rho_\theta$, kai $k \to \infty$. Todėl atsiras toks k, kad $\mathrm{E}\big|Y_k(z,\varepsilon)\big|^{\theta} < 1$. Toliau vėl galime kartoti 3.1 teiginio įrodymą, keisdami grandinę (X_n) į grandinę (X_{nk}), ir gauti X1.

X2 sąlyga įrodoma taip pat kaip ir atitinkama sąlyga 3.1 teiginyje. □

A Matematiniai faktai

A.1 Neskaidžios Markovo grandinės

Šiame priede pateiksime pagrindines sąvokas iš neskaidžių Markovo grandinių teorijos ir suformuluosime teoremas, kuriomis remiamasi įrodinėjant disertacijos rezultatus. Norintiems išsamiau susipažinti su neskaidžių Markovo grandinių teorija rekomenduojame [14] ir [16] monografijas. Disertacijoje naudojami apibrėžimai ir notacija paimti iš [14].

A.1.1 Pagrindinės sąvokos

Tegu C yra lokaliai kompaktiška separabili metrinė erdvė, $\mathcal{B}$ žymi aibės C poaibių Borelio σ-algebrą (jei iš konteksto nebus aišku, apie kokios aibės Borelio poaibių σ-algebrą kalbama, ją žymėsime $\mathcal{B}(C)$), o (X_n) yra Markovo grandinė su būsenų aibe C ir perėjimo tikimybių branduoliu P. Su $x \in C$ simboliu P_x žymėsime tikimybę algebroje $\mathcal{B}^\infty$, kurią indukuoja branduolys P. Tada

$$\mathrm{P}_x\{(x_1, x_2, \ldots) \in B\} = \mathrm{P}\{(X_1, X_2, \ldots) \in B \mid X_0 = x\}$$

su $B \in \mathcal{B}^\infty$. Pažymėkime

$$L(x, A) = \mathrm{P}_x\{\exists\, n \geqslant 1\ x_n \in A\}, \quad x \in C,\ A \in \mathcal{B}.$$

Jei $L(x, A) > 0$ su visais $x \in C$, aibė A vadinama *esmine*. Taškas $x_0 \in C$ vadinamas *pasiekiamu*, jei bet kokia jo aplinka esminė.

Netrivialus matas φ algebroje $\mathcal{B}$ vadinamas grandinės (X_n) *neskaidumo matu*, jei kiekviena aibė A su $\varphi(A) > 0$ yra esminė. Jei φ yra neskaidumo matas, grandinė vadinama *φ-neskaidžia*. Jei (X_n) yra φ-neskaidi su tam tikru φ, ją vadinsime tiesiog *neskaidžia*.

Jei (X_n) neskaidi, tai egzistuoja toks neskaidumo matas ψ, kad bet koks kitas neskaidumo matas yra absoliučiai tolydus ψ atžvilgiu. Jis vadinamas *maksimaliu neskaidumo matu*. Bet kurie du maksimalūs neskaidumo matai absoliučiai tolydūs vienas kito atžvilgiu. Jei ψ yra maksimalus neskaidumo matas, aibė A esminė tada ir tik tada, kai $\psi(A) > 0$.

Jei (X_n) neskaidi, tai egzistuoja toks aibių rinkinys $A_0, \ldots, A_{d-1}$ (čia $d \geqslant 1$), vadinamas *d-ciklu*, kad

- ✓ aibė $\left(\bigcup_{i=0}^{d-1} A_i\right)^c$ neesminė;
- ✓ $P\left(x, A_{(i+1) \bmod d}\right) = 1$, kai $x \in A_i$, $i = 0, \ldots, d-1$.

Maksimalus d, su kuriuo egzistuoja d-ciklas, vadinamas grandinės *periodu*. Jei periodas lygus 1, grandinė vadinama *aperiodine*.

Neskaidi grandinė vadinama *rekurentine*, jei $L(x, A) = 1$ su bet kokia esmine aibe A ir su ψ-beveik visais x; čia ψ — maksimalus neskaidumo matas. Jei $L(x, A) = 1$ su visomis esminėmis A ir visais $x \in C$, tai (X_n) vadinama *Hariso grandine*. Jei grandinė nėra rekurentinė, ji vadinama *disipatyvia*.

Jei (X_n) rekurentinė, tai egzistuoja netrivialus σ-baigtinis matas μ, invariantinis P atžvilgiu (t.y. toks, kad $\mu P = \mu$); be to, toks matas vienintelis pastovaus daugiklio tikslumu (A.4 teorema). Jei matas μ baigtinis, grandinė vadinama *teigiama*, priešingu atveju — *nuline*.

Tegu $a = (a(n))$ yra skirstinys aibėje $\{0\} \cup \mathbb{N}$, t.y. $a(n) \geqslant 0$ su visais $n \geqslant 0$ ir $\sum_{n\geqslant 0} a(n) = 1$. Esminė aibė $A \in \mathcal{B}$ vadinama *a-maža*, jei egzistuoja toks netrivialus matas ν algebroje $\mathcal{B}$, kad

$$\sum_{n=0}^{\infty} a(n)P^n(x, B) \geqslant \nu(B) \quad \text{su } x \in A \text{ ir } B \in \mathcal{B}.$$

Tuo atveju, kai a sukoncentruotas taške m (t.y. $a(n) = 0$ su visais $n \neq m$), aibė A vadinama *m-maža*. Jei A yra a-maža su tam tikru a, ją vadinsime tiesiog *maža*.

(X_n) vadinama *T-grandine*, jei egzistuoja skirstinys a ir substochastinis branduolys $T : C \times \mathcal{B} \to [0; 1]$, tenkinantys sąlygas

- ✓ $\sum_{n=0}^{\infty} a(n)P^n(x, B) \geqslant T(x, A)$ su visais $x \in C$ ir $A \in \mathcal{B}$;
- ✓ bet kokiai $A \in \mathcal{B}$ funkcija $T(\cdot, A)$ yra pusiau tolydi iš apačios;
- ✓ $T(x, C) > 0$ su visais $x \in C$.

Branduolys T tada vadinamas *tolydžia* (X_n) *komponente*.

(X_n) vadinama *Felerio grandine*, jei bet kokiai tolydžiai aprėžtai funkcijai f funkcija

$$x \mapsto \int f(y)P(x, \mathrm{d}y)$$

vėl yra aprėžta ir tolydi.

A.1.2 Teoremos

Surašysime pagrindines teoremas, kuriomis naudojamės disertacijoje. Kiekvienai teoremai nurodysime jos numerį originaliame šaltinyje. Jei (X_n) grandinė bus neskaidi, raide ψ žymėsime maksimalų neskaidumo matą.

A.1 teorema. ([14], 6.1.4 lema) *Jei (X_n) neskaidi, taškas x_0 pasiekiamas tada ir tik tada, kai x_0 priklauso ψ atramai.*

A.2 teorema. ([14], 18.3.2 teorema) *Tegu (X_n) yra neskaidi T-grandinė, turinti pasiekiamą būseną x_0. (X_n) yra teigiama Hariso tada ir tik tada, kai ji yra aprėžta pagal tikimybę.*

A.3 teorema. ([14], 6.0.1 teorema)

(i) *Jei (X_n) yra T-grandinė ir $L(x, O) > 0$ su bet kokiu $x \in C$ ir bet kokia atvira aibe O, tai (X_n) neskaidi.*

(ii) *Jei bet kokia kompaktiška aibė yra maža, tai* (X_n) *yra T-grandinė. Atvirkščiai, jei* (X_n) *yra neskaidi T-grandinė, tai bet kokia kompaktiška aibė yra maža.*

(iii) *Jei* (X_n) *yra neskaidi Felerio grandinė ir* ψ *atramos vidus netuščias, tai* (X_n) *yra T-grandinė.*

Jei $A \in \mathcal{B}$, tai raide τ_A žymėsime pirmo grįžimo į aibę A momentą:

$$\tau_A = \inf\{n \geqslant 1 \mid X_n \in A\}.$$

A.4 teorema. ([14], 10.0.1 teorema) *Jei* (X_n) *yra rekurentinė grandinė, tai egzistuoja vienintelis (pastovaus daugiklio tikslumu) invariantinis matas* π. *Su bet kokia esmine aibe* A

$$\pi(B) = \int_A \mathrm{E}_x \left[\sum_{n=1}^{\tau_A} \mathbf{1}_{\{X_n \in B\}}\right] \pi(\mathrm{d}x), \quad B \in \mathcal{B}.$$

Matas π *yra baigtinis, jei egzistuoja tokia maža aibė* D, *kad*

$$\sup_{x \in D} \mathrm{E}_x[\tau_D] < \infty.$$

A.5 teorema. ([14], 5.4.5 teiginys) *Jei* (X_n) *yra neskaidi ir aperiodinė, tai* $(X_{mn}, n \geqslant 0)$ *taip pat neskaidi ir aperiodinė su bet kokiu* $m \geqslant 2$.

Tegu $V : C \to [0; \infty)$ yra mati funkcija. Pažymėkime

$$\Delta V(x) = \mathrm{E}_x V(X_1) - V(x). \tag{A.1}$$

Suformuluosime du vadinamuosius *dreifo kriterijus*, naudojamus klasifikuojant rekurentines grandines.

A.6 teorema. ([14], 11.3.4 teorema) *Tarkime, kad* (X_n) *neskaidi ir egzistuoja tokia maža aibė* A *ir tokia baigtinė konstanta* b, *kad*

$$\Delta V(x) \leqslant -1 + b\mathbf{1}_A(x) \quad \text{su } x \in C.$$

Jei V *aprėžta aibėje* A, *tai* (X_n) *yra teigiama Hariso grandinė.*

A.7 teorema. ([14], 11.5.2 teorema) *Tarkime, kad* (X_n) *neskaidi,* A *esminė ir*

$$\Delta V(x) \geqslant 0 \quad \text{su } x \in A^c, \quad \sup_{x \in C} \Delta V(x) < \infty.$$

Jei $\psi\{x \mid V(x) > \sup_{y \in A} V(y)\} > 0$, *tai grandinė nėra teigiama.*

A.8 teorema. ([14], 10.4.5 teorema) *Tegu* (X_n) *yra neskaidi ir aperiodinė.* (X_n) *yra teigiama tada ir tik tada, kai* $(X_{mn}, n \geqslant 0)$ *yra teigiama su bet kokiu fiskuotu* m.

A.9 teorema. **([14], 17.1.7 teorema)** *Jei* (X_n) *turi invariantinį tikimybinį matą* π*, tai tokie teiginiai yra ekvivalentūs:*

✓ (X_n) *yra teigiama Hariso;*

✓ *su bet kokia* π*-integruojama funkcija* f

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} f(X_i) \to \int f(x)\pi(\mathrm{d}x) \text{ b.v.}$$

A.10 teorema. **([14], 8.4.3 teorema)** *Tegu* (X_n) *yra neskaidi. Jei egzistuoja tokia maža aibė* A *ir tokia funkcija* $V : C \to [0;\infty)$*, kad*

✓ $\Delta V(x) \leqslant 0$ *su* $x \in A^c$*,*

✓ *bet kokiam* $r < \infty$ *aibė* $\{x \mid V(x) \leqslant r\}$ *yra maža,*

tai (X_n) *rekurentinė.*

A.11 teorema. **([14], 11.3.15 teorema)** *Jei* (X_n) *neskaidi, tai tokie teiginiai ekvivalentūs:*

✓ *egzistuoja tokia maža aibė* A*, konstanta* $b \in \mathbb{R}$ *ir funkcija* $V : C \to [0;\infty)$*, kad*
$$\Delta V(x) \leqslant -1 + b\mathbf{1}_A(x) \quad \text{su } x \in C;$$

✓ *egzistuoja tokia maža aibė* A*, kad* $\mathrm{E}_x\, \tau_A < \infty$ *su visais* x *ir*

$$\sup_{x\in A} \mathrm{E}_x\, \tau_A < \infty.$$

A.12 teorema. **([14], 14.3.7 teorema)** *Tegu* (X_n) *yra teigiama rekurentinė grandinė su stacionariu skirstiniu* π*, o* V, f *ir* s *— neneigiamos, baigtines reikšmes įgyjančios funkcijos. Jei su visais* x

$$\Delta V(x) \leqslant -f(x) + s(x),$$

tai $\int f(x)\pi(\mathrm{d}x) \leqslant \int s(x)\pi(\mathrm{d}x)$*.*

A.2 Ribinės tikimybių teorijos teoremos

Šiame skyrelyje pateiksime keletą ribinių tikimybių teorijos teoremų, kuriomis remiamasi pagrindiniame disertacijos tekste.

A.2.1 Viena teorema apie tolygų konvergavimą

Tegu E yra kompaktiška Hausdorfo erdvė, (X_n) — Markovo grandinė su stacionariu skirstiniu π ir būsenų aibe E ir $C(E)$ tolydžiųjų funkcijų iš E į $\mathbb{R}$ aibė. tenkinančių papildomą reikalavimą: jei $f \in C(E)$, tai priklauso $C(E)$.

A.13 teorema. ([3], 1 teiginys) *Jei $f \in C(E)$ ir funkcija $x \mapsto \mathrm{E}_x f(X_1)$ taip pat tolydžioji, tai funkcijų seka*

$$f_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \mathrm{E}_x f(X_i), \quad x \in E,$$

tolygiai konverguoja į $\int \mathrm{E}_x f(X_1) \pi(\mathrm{d}x)$.

A.2.2 Atstatymo teorija

Tegu $(E, \mathcal{S})$ yra mati erdvė ir (X_n) — Markovo grandinė su būsenų aibe E ir perėjimo tikimybių branduoliu P. Sakysime, kad (X_n) tenkina *minoravimo sąlygą*, jei egzistuoja tokia $A \in \mathcal{S}$, tikimybinis matas φ ir teigiama konstanta δ, kad

$$P(x, B) \geqslant \delta \varphi(B)$$

su visais $x \in A$ ir $B \subset A$. Toliau sakydami, kad (X_n) tenkina minoravimo sąlygą, laikysime, kad aibė A ir matas φ yra fiksuoti.

A.14 teorema. ([1], REGENERATION LEMMA) *Jei (X_n) tenkina minoravimo sąlygą, tai egzistuoja atsitiktinis dydis N, įgyjantis natūraliąsias reikšmes ir tenkinantis sąlygas:*

- ✓ $\mathrm{P}_x\{N < \infty\} = 1$;
- ✓ $\mathrm{P}_x\{X_n \in B, N = n\} = \varphi(A \cap B)\, \mathrm{P}_x\{N = n\}$ *su bet kokia $B \in \mathcal{S}$, visais $x \in E$ ir $n \geqslant 0$.*

Atsitiktinis dydis N vadinamas *atstatymo momentu*.

A.15 teorema. ([1], išvada 2.1) *Tegu (X_n) tenkina minoravimo sąlygą. Tada egzistuoja tokia atstatymo momentų seka $(N_i, i \geqslant 1)$, kad X_{N_i} skirstinys sutampa su φ skirstiniu, atsitiktiniai dydžiai $N_{i+1} - N_i$, $i \geqslant 1$, yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę ir nepriklauso nuo N_1.*

Toliau laikysime, kad be sekos (X_n) duota dar viena atsitiktinių dydžių seka (L_n) su tokia savybe: sekos nario L_n skirstinys priklauso tik nuo X_n. Pažymėkime

$$V_0 = 0, \quad V_n = L_0 + \cdots + L_{n-1}, \quad n \geqslant 1.$$

Tegu $g : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra mati funkcija.

A.16 teorema. ([1], teorema 4.1) *Tarkime, kad:*

(i) grandinė (X_n) *tenkina minoravimo sąlygą ir turi tikimybinį invariantinį skirstinį* π*;*

(ii) $\int \mathrm{E}_x|L_0|\pi(\mathrm{d}x) < \infty$, $\int \mathrm{E}_x\, L_0\pi(\mathrm{d}x) > 0$ *ir atsitiktinio dydžio* $\sum_{i=0}^{N_1-1} L_i$ *skirstinys yra nearitmetinis (čia* N_1 *yra pirmasis grandinės* (X_n) *atstatymo momentas, minimas teoremoje A.15), t.y. neegzistuoja tokio* $d \in \mathbb{R}$*, kad* $\sum_{i=0}^{N_1-1} L_i$ *būtų sukoncentruotas gardelėje* $d\mathbb{Z}$*;*

(iii) funkcija g *aprėžta,* $g(x,\cdot)$ *tolydi su kiekvienu* $x \in A$ *ir egzistuoja toks* $\delta > 0$*, kad*

$$\int_E \left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{n\delta\leqslant t<(n+1)\delta} |g(x,t)| \right) \pi(\mathrm{d}x) < \infty. \tag{A.2}$$

Tada

✓ $\mathrm{E}_\varphi(\sum_{k=0}^{\infty} g(X_k, t-V_k)) \xrightarrow[t\to\infty]{} \int_E (\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\mathrm{d}t)\pi(\mathrm{d}x) / \int_E (\mathrm{E}_x\, L_0)\pi(\mathrm{d}x)$*;*

✓ *jei, be to,* π*-beveik visur*

$$\mathrm{E}_x \left(\sum_{k=0}^{N_1-1} g(X_k, t-V_k) \right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0, \tag{A.3}$$

į tą pačią ribą artėja ir $\mathrm{E}_x(\sum_{k=0}^{\infty} g(X_k, t-V_k))$ *su visais* x*.*

A.1 teiginys. ([1], 4.1 teiginys) *Tegu* $g : E \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *ir* $\bar{g}(x) = \sup_t g(x,t)$ *yra mačios funkcijos. Jei* $\int_E \bar{g}(x)\mathrm{d}\pi(x) < \infty$ *ir* $g(x,t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$ *su* π *beveik visais* x*, tai*

$$\mathrm{E}_x \left(\sum_{k=0}^{N_1-1} g(X_k, t-V_k) \right) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

π *b.v.*

A.2.3 Glodinimas

Tarkime, kad $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ yra Borelio funkcija. f vadinama *tiesiogiai integruojama* (žr. [5]), jei su visais $\delta > 0$ sumos

$$\delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \sup_{n\delta\leqslant t<(n+1)\delta} f(t) \quad \text{ir} \quad \delta \sum_{n\in\mathbb{Z}} \inf_{n\delta\leqslant t<(n+1)\delta} f(t)$$

konverguoja į tą pačią ribą, kai $\delta \downarrow 0$.

Apibrėžkime glodinimo operatorių $f \mapsto \hat{f}$ lygybe

$$\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{t} \mathrm{e}^{-(t-u)} f(u)\mathrm{d}u. \tag{A.4}$$

A.17 teorema. ([6], 9.2 lema) *Tegu* $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *yra mati ir integruojama. Tada* $\hat{f}$ *yra tiesiogiai integruojama.*

A.18 teorema. ([6], 9.3 lema) *Tegu U yra neneigiamas atsitiktinis dydis. Jei $t^{-1}\int_0^t u^\alpha \,\mathrm{P}\{U > u\}\mathrm{d}u \xrightarrow[t\to\infty]{} c$, tai $u^\alpha \,\mathrm{P}\{U > u\} \xrightarrow[u\to\infty]{} c$.*

A.3 Matricų teorija

Tegu A yra $n \times n$ matrica su elementais a_{ij}, $i, j = 1, \ldots, n$. Jei visi a_{ij} neneigiami, matricą vadinsime *neneigiama* ir rašysime $A \geqslant 0$. Jei visi a_{ij} teigiami, matricą vadinsime *teigiama* ir rašysime $A > 0$. Simboliu $\sigma(A)$ žymėsime visų matricos A tikrinių reikšmių aibę, o simboliu $\rho(A)$ — jos spektrinį spindulį, t.y.

$$\rho(A) = \max_{\lambda\in\sigma(A)} |\lambda|.$$

A.19 teorema. ([7], 8.2.11 teorema) *Jei $A > 0$, tai*

- ✓ *$\rho(A) > 0$;*
- ✓ *$\rho(A)$ yra tikrinė matricos A reikšmė;*
- ✓ *egzistuoja toks teigiamas vektorius x, kad $Ax = \rho(A)x$;*
- ✓ *$\rho(A)$ kartotinumas (kaip tikrinės reikšmės) lygus 1;*
- ✓ *bet kuri kita tikrinė matricos A reikšmė yra mažesnė už $\rho(A)$;*
- ✓ *$[\rho^{-1}(A)A]^m \xrightarrow[m\to\infty]{} L$; čia*

$$L = xy^T, \quad Ax = \rho(A)x, \quad A^T y = \rho(A)y \quad \text{ir} \quad y^T x = 1.$$

A.20 teorema. ([7], 8.1.20 išvada) *Jei $A \geqslant 0$, tai $\rho(A) \geqslant \max_i a_{ii}$.*

A.21 teorema. ([7], 8.1.21 teorema) *Jei $A \geqslant 0$, tai*

$$\min_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant i\leqslant n} \sum_{j=1}^{n} a_{ij}$$

ir

$$\min_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \leqslant \rho(A) \leqslant \max_{1\leqslant j\leqslant n} \sum_{i=1}^{n} a_{ij}$$

A.22 teorema. ([7], 5.6.14 išvada) *Jei $\|\cdot\|$ yra bet kokią matricinė norma (t.y. tokia norma $n \times n$ matricų erdvėje, kad $\|BC\| \leqslant \|B\|\,\|C\|$ su bet kokiomis matricomis B ir C), tai*

$$\rho(A) = \lim_{k\to\infty} \|A^k\|^{\frac{1}{k}}.$$

B Laiko eilučių teorijos modelių trumpiniai

Šiame priede pateiksime laiko eilučių teorijos modelių santrumpas, kurios vartojamos darbe.

AR — autoregressive;

ARCH — autoregressive conditional heteroskedasticity;

ARMA — autoregressive moving average;

GARCH — generalized autoregressive conditional heteroskedasticity;

HARCH — heterogeneous autoregression conditional heteroskedasticity.

Literatūra

[1] K. B. Athreya, D. McDonald, and P. Ney. Limit theorems for semi-Markov processes and renewal theory for Markov chains. *Annals of Probability*, 6:788–797, 1978.

[2] P. Bougerol and N. Picard. Stationarity of GARCH processes and some nonnegative time series. *J. Econometrics*, 52:115–127, 1992.

[3] L. Breiman. The strong law of large numbers for a class of Markov chains. *Ann. Math. Stat.*, 31:801–803, 1960.

[4] P. Embrechts, G. Samorodnitsky. M. M. Dacorogna and U. A. Müller. How heavy are the tails of a stationary HARCH(k) process? A study of the moments, in B. S. Rajput, I. Karatzas and M. S. Taqqu (Eds.), *Stochastic processes and Related Topics: in Memory of Stamatis Cambanis 1943-1995*, Birkhauser Verlag AG, 1998, pp. 69-102.

[5] W. Feller. *An Introduction to Probability theory and Its Applications 2.* Willey, New York, 1971.

[6] Ch. M. Goldie. Implicit renewal theory and tails of solutions of random equations. *Annals of Applied Probability*, 1(1):126–166, 1991.

[7] R. A. Horn and Ch. R. Johnson. *Matrix Analysis.* Cambridge University Press, Cambridge, 1990.

[8] V. Kazakevičius and V. Skorniakov. Asymptotically homogeneous iterated random functions with applications to the HARCH process. *Lithuanian Mathematical Journal*, 49(1):26–39, 2009.

[9] V. Kazakevičius and V. Skorniakov. Tail index of asymptotically homogeneous Markov chain. *Lithuanian Mathematical Journal*, xx(y):zz–tt, 2010.

[10] H. Kesten. Random difference equations and renewal theory for products of random matrices. *Acta Math.*, 131:207–248, 1973.

[11] S. Pergamenchtchikov and C. Klüppelberg. The tail of the stationary distribution of a random coefficient AR(q) model. *The Annals of Applied Probability*, 14(2):971–1005, 2004.

[12] C. Klüppelberg and M. Borkovec. The Tail of the Stationary Distribution of an Autoregressive Process with ARCH(1) Errors. *The Annals of Applied Probability*, 11(4):1220–1241, 2001.

[13] G. Letac. A contraction principle for certain Markov chains and its applications, in J.E. Cohen, H. Kesten, and C. M. Newman (eds.), *Random matrices and their applications. Proc. AMS-IMS-SIAM Joint summer research conf. 1984 Contemp. Math.*, 50:263–273, Amer. Math. Soc., Providence, R.I.

[14] S. P. Meyn and R.L. Tweedie. *Markov Chains and Stochastic Stability.* Springer-Verlag, London, 1996.

[15] U. A. Müller, M. M. Dacorogna, J. E. von Weizsacker, R. D. Dave, R. B. Olsen and O. V. Pictet. *Volatilities of different time resolutions — analyzing the dynamics of market components. J. Emp. Fin.*, 4:213–239, 1997.

[16] E. Nummelin. *General irreducible Markov chains and non-negative operators.* Cambridge University Press, Cambridge, 1984.

[17] D. Steinsaltz. *Locally contractive iterated function systems. Annals of Prob.*, 27(4):1952–1979, 1999.

[18] A. A. Weiss. ARMA models with ARCH errors. *J. Time Ser. Anal.*, 3:129–143, 1984.