Liet. matem. rink., T. 42, spec. nr., 121–126

Асимптотические свойства мартингальных оценок процессов восстановления

Вайдотас КАНИШАУСКАС (ŠU)
e-mail: mat.kat@fm.su.lt

1. Определение

Пусть $X_1, X_2, \ldots,$ – независимые и одинакого распределеные положительные случайные величины на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathcal{F}, P_\theta, \theta \in \Theta)$, и $T_i = X_1 + \ldots + X_i$ $(T_0 = 0)$. Тогда $N(t) = \sum\limits_{i=1}^{\infty} 1(T_i \leqslant t)$, $t \in R_+ = [0, +\infty)$ называется процессом восстановления. Обозначая $\mathcal{F}_t^N = \sigma\,(N(s), \quad s \leqslant t)$ и далее будем считать, что $\mathcal{F} = \bigvee\limits_{t \geqslant 0} \mathcal{F}_t^N$, $\mathbb{F} = (\mathcal{F}_t^N)_{t \geqslant 0}$.

Пусть случайная величина X_1 имеет функцию распределения $F(\theta, x)$ с плотностью $f(\theta, x)$, $\theta \in \Theta$. Тогда $(P_\theta, \mathbb{F})$ – компенсатор процесса $N(t)$ вычисляется по формуле [4]:

$$A(\theta, t) = \int\limits_0^t h(\theta, L_s)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{N(t-)} H(\theta, X_i) + H(\theta, t - T_{N(t-)}), \tag{1}$$

где $L_s = s - T_{N(s-)}$, $\quad h(\theta, s) = \frac{f(\theta,s)}{1-F(\theta,s)}$, $\quad H(\theta, t) = \int_0^t h(\theta, s)\mathrm{d}s$.

Для $\mathbb{F}$- предсказуемого случайного процесса $r(t)$, $\quad t \geqslant 0$ такого, что п.н. $\int_0^t r(x)\mathrm{d}A(\theta, x) < \infty$ для всех $t \in R_+$ мартингальная оценка параметра θ определяется как решение уравнения:

$$\int\limits_0^t r(x)\mathrm{d}\,(N(x) - A(\theta, x)) = 0. \tag{2}$$

2. Вспомогательные леммы

В дальнейшем мы будем пользоваться такими результатами.

Лемма 1. [6] *Пусть* $N \in \mathcal{A}_{loc}^+$ *имеет компенсатор* A *и*

$$P(A(\infty) = \infty) = 1, \quad \mathbb{E}\sup_{t \geqslant 0} \Delta N(t) < \infty.$$

Тогда

$$P\left(\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{A(t)}=1\right)=1, \tag{3}$$

где $\mathbb{E}$ *– математическое ожидание.*

Лемма 2. *Пусть для всех* $\theta\in\Theta$

$$0<a(\theta)=\mathbb{E}_\theta X_1<\infty,\quad b(\theta)=\mathbb{E}_\theta u(X_1)<\infty.$$

Тогда P_θ*– п.н. для всех* $\theta\in\Theta$

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^t u(L_s)\mathrm{d}A(\theta,s)=\lim_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^t u(L_s)\mathrm{d}N(s)=\frac{b(\theta)}{a(\theta)} \tag{4}$$

где $A(\theta,t)$ компенсатор процесса востановления $N(t)$.

Доказательство. По закону больших чисел

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{t}=a(\theta)^{-1},\quad P_\theta-\text{п.н.}$$

Очевидно, что $\sup\limits_{t\geqslant 0}\Delta N(t)=1$.

Значит, применима лемма 1, в силу которой

$$\lim_{t\to\infty}\int_0^t u(L_s)\mathrm{d}N(s)/\int_0^t u(L_s)\mathrm{d}A(\theta,s)=1\quad P_\theta-\text{п.н.}$$

Дальнейшая часть доказательства следует из леммы 4 [4].

Следствие. Пусть $0<a(t)=\mathbb{E}_\theta X_1<\infty,\quad \theta\in\Theta$. Тогда P_θ – п.н.

$$\lim_{t\to\infty}\frac{N(t)}{A(\theta,t)}=1. \tag{5}$$

Если дополнительно $c(\theta)=\mathbb{E}_\theta\int_0^{X_1}u(s)\mathrm{d}s=\int_0^\infty(1-F(\theta,s))u(s)\mathrm{d}s<\infty$, тогда для $\theta\in\Theta$ P_θ – п.н.

$$\lim_{t\to\infty}t^{-1}\int_0^t u(L_s)\mathrm{d}s=\frac{c(\theta)}{a(\theta)}, \tag{6}$$

где $L_s=s-T_{N(s-)}$.

Доказательство. В (4) вставляя $u(s) \equiv 1$, получаем (5). Для (6) имеет место представление

$$\int_0^t u(L_s)\mathrm{d}s = \sum_{i=1}^{N(t-)} \int_0^{X_i} u(x)\mathrm{d}x + \int_0^{t-T_{N(t-)}} u(x)\mathrm{d}x. \qquad (7)$$

Для (7), применяя аналогичные расуждения как в Лемме 4 [4], получаем (6).

Лемма 3 [3]. *Пусть $N(t)$-считающий процесс с непрерывным компенсатором $A(\theta, t)$, r – предсказуемый процесс такой, что*

$$P_\theta - \lim_{t\to\infty} t^{-1} \int_0^t (r(x))^2 \mathrm{d}A(\theta, x) = \sigma^2,$$

где $0 < \sigma^2 < \infty$ а $P_\theta - \lim\limits_{t\to\infty}$ обозначает сходимость по вероятности.

Тогда при $t \to \infty$

$$t^{-\frac{1}{2}} \int_0^t r(x)\mathrm{d}M(\theta, x) \Rightarrow N(0, \sigma^2),$$

где $M(\theta, x) = N(x) - A(\theta, x)$, а "$\Rightarrow$" обозначает слабую сходимость законов.

Следствие. Пусть $0 < a(\theta) = \mathbb{E}_\theta X_1 < \infty$. Тогда при $t \to \infty$

$$\frac{M(\theta, t)}{\sqrt{N(t)}} \Rightarrow N(0, 1); \qquad (8)$$

и если добавим условие $\mathbb{E}_\theta r^2(X_1) < \infty$, то при $t \to \infty$

$$\mathcal{D}_t(\theta) = \left(\int_0^t (r(L_s))^2 \mathrm{d}N(s) \right)^{-\frac{1}{2}} \int_0^t r(L_s)\mathrm{d}M(\theta, s) \Rightarrow N(0, 1). \qquad (9)$$

Доказательство. В силу того, что изучаемые процессы имеют такие свойства:

$$\frac{< M(\theta, t) >_t}{N(t)} = \frac{A(\theta, t)}{N(t)} \to 1 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad P_\theta - \text{п. н.},$$

$$\left(\int_0^t (r(L_s))^2 \mathrm{d}N(s) \right)^{-1} \int_0^t r(L_s)^2 \mathrm{d}A(\theta, s) \to 1 \quad \text{при} \quad t \to \infty, \quad P_\theta - \text{п. н.},$$

то (8) и (9) получаем из леммы 3 применяя случайное нормирование, в силу сходимости соответствующих нормированных величин с вероятностью 1.

3. Асимптотические свойства оценок

Пусть t достаточно велик, чтобы $N(t) > 0$, а $h(\theta, s) = \theta v(s) + u(s)$, $\theta \geqslant 0$ в (1) где положительные функции $v(s)$ и $u(s)$ такие, что $\theta \int_0^\infty v(s)\mathrm{d}s + \int_0^\infty u(s)\mathrm{d}s = \infty$. Тогда параметр $\theta \geqslant 0$ имеет две мартингальные оценки, определяемые формулами:

$$\hat{\theta}_1(t) = \left(N(t) - \int_0^t u(L_s)\mathrm{d}s\right)\left(\int_0^t v(L_s)\mathrm{d}s\right)^{-1},$$

$$\hat{\theta}_2(t) = t^{-1}\int_0^t v\left(L_s\right)^{-1}\mathrm{d}N(s) - t^{-1}\int_0^t u(L_s)v\left(L_s\right)^{-1}\mathrm{d}s.$$

Эти оценки легко выражается через мартингалы:

$$\hat{\theta}_1(t) - \theta = M(\theta, t)\left(\int_0^t v(L_s)\mathrm{d}s\right)^{-1},$$

$$\hat{\theta}_2(t) - \theta = t^{-1}\int_0^t v\left(L_s\right)^{-1}\mathrm{d}M(\theta, s).$$

Теорема. *Пусть* $0 < \mathbb{E}_\theta X_1 = a(\theta) < \infty$, $\theta \in \Theta = [0, \infty)$. *Тогда для* $\theta \in \Theta$

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\theta}_1(t) = \theta \quad \textit{п. н.,} \quad \textit{и при} \quad t \to \infty,$$

$$\sqrt{N(t)} - N(t)^{-\frac{1}{2}}\int_0^t u\left(L_s\right)\mathrm{d}s - \theta N(t)^{-\frac{1}{2}}\int_0^t v(L_s)\mathrm{d}s \Rightarrow N(0,1).$$

Если добавим условие $b_i = \mathbb{E}_\theta v(X_1)^{-i} < \infty \quad i = 1, 2$, *то*

$$\lim_{t\to\infty}\hat{\theta}_2(t) = \theta \quad \textit{п. н.,} \quad \textit{и при} \quad t \to \infty,$$

$$\left(\int_0^t \frac{1}{v(L_s)}\mathrm{d}N(s) - \int_0^t \frac{u(L_s)}{v(L_s)}\mathrm{d}s - \theta t\right)\left(\int_0^t v(L_s)^{-2}\mathrm{d}N(s)\right)^{-\frac{1}{2}} \Rightarrow N(0,1).$$

Доказательство. Результат теоремы следует из леммы 2 и леммы 3 в силу того, что

$$\sqrt{N(t)} - N(t)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t u(L_s)\,\mathrm{d}s - \theta N(t)^{-\frac{1}{2}} \int\limits_0^t v(L_s)\mathrm{d}s = N(t)^{-\frac{1}{2}} M(\theta, t),$$

$$\left(\int\limits_0^t \frac{1}{v(L_s)}\mathrm{d}N(s) - \int\limits_0^t \frac{u(L_s)}{v(L_s)}\mathrm{d}s - \theta t\right)\left(\int\limits_0^t v(L_s)^{-2}\mathrm{d}N(s)\right)^{-\frac{1}{2}}$$

$$= \int\limits_0^t v(L_s)^{-1}\mathrm{d}M(\theta, s)\left(\int\limits_0^t v(L_s)^{-2}\mathrm{d}N(s)\right)^{-\frac{1}{2}}.$$

Следствие. При выполнении условий теоремы с асимптотической вероятностью $1-\alpha$, $\alpha \in (0,1)$ справедливы такие доверительные интервалы для параметра θ:

$$N(t)R(t) - R(t)\int\limits_0^t u(L_s)\,\mathrm{d}s - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{N(t)}R(t) < \theta$$

$$< N(t)R(t) - R(t)\int\limits_0^t u(L_s)\,\mathrm{d}s + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\sqrt{N(t)}R(t),$$

$$t^{-1}\left(\int\limits_0^t v(L_s)^{-1}\mathrm{d}N(s) - \int\limits_0^t \frac{u(L_s)}{v(L_s)}\mathrm{d}s - u_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\int\limits_0^t v(L_s)^{-2}\mathrm{d}N(s)\right)^{\frac{1}{2}}\right) < \theta$$

$$t^{-1}\left(\int\limits_0^t v(L_s)^{-1}\mathrm{d}N(s) - \int\limits_0^t \frac{u(L_s)}{v(L_s)}\mathrm{d}s + u_{1-\frac{\alpha}{2}}\left(\int\limits_0^t v(L_s)^{-2}\mathrm{d}N(s)\right)^{\frac{1}{2}}\right),$$

где $R(t) = \left(\int_0^t v(L_s)\mathrm{d}s\right)^{-1}$, $u_{1-\frac{\alpha}{2}}$– квантиль нормального распределения $N(0,1)$.

Замечание 1. Нетрудно видеть, что для этой модели оценка максимального правдоподобия для изучаемого параметра θ (как ее найти смотрите [4]) не выражается явной формулой. В этом заключается преимущество мартингальных оценок с явной формулой для вычисления.

Замечание 2. Более сложную модель с дмумя параметрами $\theta = (\theta_1, \theta_2)$

$$h(\theta, s) = \theta_1 v(s) + \theta_2 u(s) \quad \theta_1 \geqslant 0, \quad \theta_2 \geqslant 0,$$

и $\int_0^\infty v(s)\mathrm{d}s = \infty$ или $\int_0^\infty u(s)\mathrm{d}s = \infty$ при $u(s),\ v(s) \geqslant 0,\ s \geqslant 0$ в (1) можно изучать аналогично используя многомерную центральную предельную теорему для многомерных мартингалов (см. [5]). В заключении можно заметить, что в предлагаемой модели одну мартингальную оценку $(\hat{\theta}_1(t), \hat{\theta}_2(t))$ можно получить из уравнений

$$\begin{cases} \hat{\theta}_1(t) \int\limits_0^t v(L_s)\mathrm{d}s + \hat{\theta}_2(t) \int\limits_0^t u(L_s)\mathrm{d}s = N(t), \\ \hat{\theta}_1(t)t + \hat{\theta}_2(t) \int\limits_0^t v(L_s)^{-1}u(L_s)\mathrm{d}s = \int\limits_0^t v(L_s)^{-1}\mathrm{d}N(t). \end{cases}$$

Эти оценки после соответствующего нормирования будут сильно состоятельные и асимтотически нормальные.

Литература

[1] O. Aalen, Nonparametric inference for a family of counting processes, *Ann. Statist.*, **6**, 701-726 (1978).

[2] P.K. Andersen, O. Borgan, R.D. Gill, N. Keiding, *Statistical Models Based on Counting Processes*, New York, Springer-Verlag (1993).

[3] A.F. Karr, *Point Processes and their Statistical Inference*, Dekker, New York (1986).

[4] В. Канишаускас, Асимптотическое оценивание параметров мультивариантных точечных процессов , *Liet. Matem. Rink.*, **37**, 467-482 (1997).

[5] Ю.Н. Линьков, Асимптотические методы статистики случайных процессов, Наукова Думка, Киев (1993).

[6] Р.Ш. Липцер, А.Н. Ширяев, Теория мартингалов, Наука, Москва (1986).

Atstatymo procesų martingalinių įverčių asimptotinės savybės

V. Kanišauskas

Darbe nagrinėjami absoliučiai tolydžių atstatymo momentų atstatymo procesai. Parodoma, kaip gaunami nežinomų parametrų martingaliniai įverčiai, ir nustatomos jų asimptotinės savybės – stiprus suderinamumas ir asimptotinis normalumas. Smulkiau išnagrinėtas vienas tipiškas atstatymo proceso modelis.