

Неоднородная краевая задача Римана с неограниченным коэффициентом логарифмического порядка для полуплоскости

Пятрас АЛЕКНА (ŠU)

e-mail: mat.kat@fm.su.lt

Рассматривается краевая задача Римана:

найти функции $\Phi^+(z)$ и $\Phi^-(z)$, аналитические и ограниченные соответственно в верхней D^+ и нижней D^- полуплоскости, предельные значения которых $\Phi^\pm(t)$ удовлетворяют на вещественной оси краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad -\infty < t < +\infty, \quad (1)$$

где относительно коэффициента $G(t)$ и свободного члена $g(t)$ сделаны следующие предположения:

$$\ln G(t) \in \mathcal{D}_\rho \quad (2)$$

для любого конечного отрезка вещественной оси;

$$\ln |G(t)| = \begin{cases} \psi_1(t) \ln^\rho |t|, & \text{если } t \leq -R, \\ \psi_2(t) \ln^\sigma |t|, & \text{если } t \geq R, \end{cases} \quad (3)$$

для любого $R > e^{2\pi}$, где $\min(\rho, \sigma) > 1$,

$$\begin{aligned} \psi_1(t) &\in \mathcal{D}_\gamma(-\infty \leq t \leq -R), \quad \gamma > \rho + 2, \quad \psi_1(-\infty) = \kappa_1 \leq 0, \\ \psi_2(t) &\in \mathcal{D}_\delta(R \leq t \leq +\infty), \quad \delta > \sigma + 2, \quad \psi_2(+\infty) = \kappa_2 \geq 0, \quad \kappa_1^2 + \kappa_2^2 > 0; \end{aligned} \quad (4)$$

$$\arg G(t) = \begin{cases} \varphi_1(t) \ln^\alpha |t|, & \text{если } t \leq -R, \\ \varphi_2(t) \ln^\beta |t|, & \text{если } t \geq R, \end{cases} \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \min(\alpha, \beta) &> 1, \quad \varphi_1(t) \in \mathcal{D}_\mu(-\infty \leq t \leq -R), \quad \mu > \alpha + 2, \quad \varphi_1(-\infty) = \lambda_1 \leq 0, \\ \varphi_2(t) &\in \mathcal{D}_\nu(R \leq t \leq +\infty), \quad \nu > \beta + 2, \quad \varphi_2(+\infty) = \lambda_2 \geq 0, \quad \lambda_1^2 + \lambda_2^2 > 0; \end{aligned} \quad (6)$$

$$g(t) \in \mathcal{D}_q(-\infty \leq t \leq +\infty), \quad q > \max(\rho, \sigma, \alpha, \beta), \quad g(\pm\infty) = 0. \quad (7)$$

Решения задачи (1)–(7) будем искать в классе \mathcal{B} функций, аналитических и ограниченных в D^\pm , непрерывно продолжимых на вещественную ось слева и справа.

Из (3) и (4) следует, что коэффициент $G(t)$ задачи Римана не ограничен, а из (5) и (6) следует, что задача (1)–(7) имеет бесконечный индекс логарифмического порядка.

В работах автора [1]–[5] коэффициент $|G(t)|$ был ограничен на вещественной оси, т.е.,

$$\ln |G(t)| \in \mathcal{D}_p(-\infty \leq t \leq +\infty).$$

В предположениях 2)–6) для канонической функции

$$\exp \left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\ln G(x)}{x(x-z)} dx \right\} = \begin{cases} X^+(z), & z \in D^+, \\ X^-(z), & z \in D^-, \end{cases} \quad (8)$$

справедливо асимптотическое равенство ($z \rightarrow \infty$, $z \notin [-\infty, +\infty]$):

$$X^\pm(z) = \exp \left\{ \kappa_1 \frac{(2\pi i)^\rho}{\rho+1} \mathbb{B}_{\rho+1} \left(\frac{\ln z + \pi i}{2\pi i} \right) + i\lambda_1 \frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1} \mathbb{B}_{\alpha+1} \left(\frac{\ln z + \pi i}{2\pi i} \right) \right\} \\ \times \left\{ -\kappa_2 \frac{(2\pi i)^\sigma}{\sigma+1} \mathbb{B}_{\sigma+1} \left(\frac{\ln z}{2\pi i} \right) - i\lambda_2 \frac{(2\pi i)^\beta}{\beta+1} \mathbb{B}_{\beta+1} \left(\frac{\ln z}{2\pi i} \right) + S(z) \right\}, \quad (9)$$

где $\mathbb{B}_{\rho+1}(w)$, $\mathbb{B}_{\alpha+1}(w)$, $\mathbb{B}_{\sigma+1}(w_1)$, $\mathbb{B}_{\beta+1}(w_1)$ – многочлены Бернулли, а ветви $(\ln z + \pi i)^\rho$, $(\ln z + \pi i)^\alpha$ и $\ln z + \pi i$ непрерывны в области $(R < |z| < \infty) \cap (-\pi < \arg z < \pi)$, $(\ln x + \pi i)^\rho > 0$, $(\ln x + \pi i)^\alpha > 0$, и $\ln x + \pi i > 0$ на нижнем берегу разреза по лучу $\arg z = \pi$ при $x < -R$, а ветви $\ln^\sigma z$, $\ln^\beta z$ и $\ln z$ непрерывны в области $(R < |z| < \infty) \cap (0 < \arg z < 2\pi)$, $\ln^\sigma x > 0$, $\ln^\beta x > 0$, и $\ln x > 0$ на верхнем берегу разреза по лучу $\arg z = 0$ при $x > R$, $S(z)$ – аналитическая и ограниченная функция в окрестности $z = \infty$.

Из линейности краевого условия (1) следует, что достаточно найти одно частное решение $\Phi_0^\pm(z) \in \mathcal{B}$ неоднородной задачи (1)–(7), после чего общее решение этой задачи будет

$$\Phi^\pm(z) = \Phi_0^\pm(z) + \Psi^\pm(z), \quad z \in D^\pm, \quad (10)$$

где $\Psi^\pm(z)$ – общее решение в классе \mathcal{B} соответствующей однородной задачи

$$\Psi^+(t) = G(t)\Psi^-(t). \quad (11)$$

Известно [2], что общее решение однородной задачи (11) в классе \mathcal{B} имеет вид

$$\Psi^\pm(z) = F(z)X^\pm(z), \quad (12)$$

где $F(z)$ – целая функция нулевого порядка роста, для которой на вещественной оси справедлива асимптотическая оценка ($|t| \rightarrow \infty$)

$$|F(t)X^\pm(t)| = O(1). \tag{13}$$

Для построения частного решения $\Phi_0^\pm(z)$ вместо задачи (1)–(7) рассматриваются две вспомогательные неоднородные задачи:

$$\Phi_1^+(t) = G(t)\Phi_1^-(t) + g_1(t), \quad g_1(t) = \begin{cases} 0, & t \geq 0, \\ g(t), & t < 0, \end{cases} \tag{14}$$

и

$$\Phi_2^+(t) = G(t)\Phi_2^-(t) + g_2(t), \quad g_2(t) = \begin{cases} g(t), & t > 0, \\ 0, & t \leq 0. \end{cases} \tag{15}$$

Пропуская промежуточные вычисления, связанные с построением частных решений вспомогательных задач (14) и (15) [2], сформулируем окончательный результат исследования.

Теорема. *Неоднородная краевая задача Римана с неограниченным коэффициентом и с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости (1)–(7) имеет в классе \mathcal{B} бесконечное множество решений, общая формула которых имеет вид*

$$\begin{aligned} \Phi^\pm(z) = & \frac{X^\pm(z) \cdot \prod_{k=1}^4 F_k(z)}{2\pi i} \int_{-\infty}^0 \frac{g(x)dx}{\prod_{k=1}^4 F_k(x)X^+(x)(x-z)} \\ & + \frac{X^\pm(z) \cdot \prod_{k=1}^4 G_k(z)}{2\pi i} \int_0^\infty \frac{g(x)dx}{\prod_{k=1}^4 G_k(x)X^+(x)(x-z)} + X^\pm(z)F(z), \end{aligned}$$

где $X^\pm(z)$ – каноническая функция (8), для которой справедливо асимптотическое равенство (9), а $F_k(z)$ ($k = 1, 2, 3, 4$) – целые функции нулевого порядка, нули которых расположены на положительном луче вещественной оси, определенные равенствами¹:

$$\begin{aligned} F_1(z) &= \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{r_n^{(1)}}\right), \quad r_n^{(1)} = \exp \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{\lambda_2} \right\}^{\frac{1}{\beta}}, \\ F_2(z) &= \prod_{n=1}^\infty \left(1 - \frac{z}{r_n^{(2)}}\right), \quad \operatorname{Re} \left(\ln r_n^{(2)} - \pi i \right)^\alpha = (2n-1)\pi(-\lambda_1)^{-1}, \end{aligned}$$

¹ Если $\lambda_1 = \kappa_1 = 0$, то $F_2(z) \equiv G_1(z) \equiv F_4(z) \equiv G_3(z) \equiv 1$;
если $\lambda_2 = \kappa_2 = 0$, то $F_1(z) \equiv G_2(z) \equiv F_3(z) \equiv G_4(z) \equiv 1$.

$$F_3(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n^{(3)}}\right), \quad r_n^{(3)} = \exp \left\{ \frac{(2n-1)\pi}{\kappa_2} \right\}^{\frac{1}{\sigma}},$$

$$F_4(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{z}{r_n^{(4)}}\right), \quad \operatorname{Re} \left(\ln r_n^{(4)} - \pi i \right)^{\rho} = (2n-1)\pi(-\kappa_1)^{-1},$$

$$n = 1, 2, 3, \dots;$$

$G_k(z)$ – целые функции нулевого порядка, нули которых расположены на отрицательном луче вещественной оси, определенные равенствами:

$$G_1(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_m^{(1)}}\right), \quad r_m^{(1)} = \exp \left\{ \frac{(2m-1)\pi}{-\lambda_1} \right\}^{\frac{1}{\alpha}},$$

$$G_2(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_m^{(2)}}\right), \quad \operatorname{Re} \left(\ln r_m^{(2)} - \pi i \right)^{\beta} = (2m-1)\pi(\lambda_2)^{-1},$$

$$G_3(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_m^{(3)}}\right), \quad r_m^{(3)} = \exp \left\{ \frac{(2m-1)\pi}{-\kappa_1} \right\}^{\frac{1}{\rho}},$$

$$G_4(z) = \prod_{m=1}^{\infty} \left(1 + \frac{z}{r_m^{(4)}}\right), \quad \operatorname{Re} \left(\ln r_m^{(4)} - \pi i \right)^{\sigma} = (2m-1)\pi(\kappa_2)^{-1},$$

$$m = 1, 2, 3, \dots;$$

$a F(z)$ – произвольная целая функция нулевого порядка, для которой на вещественной оси справедливо асимптотическая оценка (13).

Литература

- [1] П. Алекна, Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **13**(3), 5–13 (1973).
- [2] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\gamma > 1$ для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **15**(1), 5–22 (1975).
- [3] П. Алекна, Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородной краевой задачи Римана с минус-бесконечным индексом логарифмического порядка $\min(\alpha, \beta) \geq 1$ для полуплоскости, *Liet. Matem. Rink.*, **18**(3), 5–14 (1978).
- [4] P. Alekna, Inhomogene Riemannsche Randwertaufgabe mit positive unendlichen Index der Logarithmischen Ordnung $\min(\alpha, \beta) > 1$ für einen Winkelraum, *Complex Variables*, **16**, 273–288 (1991).
- [5] П. Алекна, Красовая задача Римана с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка для сложного контура, *Liet. Matem. Rink.*, **35**(2), 133–140, (1995).

Nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys su logaritminės eilės neaprežtu koeficientu pusplokštumei

P. Alekna

Išnagrinėtas nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys su neaprežtu koeficientu. Gauta bendrojo sprendinio išraiška aprėžtu analizinių funkcijų klasėje \mathcal{B} .