

ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
GAMTOS MOKSLŲ FAKULTETAS
FIZIKOS KATEDRA

Daiva Šiaudkulytė
Fizikos magistrantūros
II kurso studentė

**Pluoštų generuojamų rezonatoriuose su
Gauso veidrodžiais sklidimas ir fokusavimas**

Magistro darbas

Mokslinis vadovas:
doc. dr. Valdas Girdauskas

Šiauliai, 2007

Anotacija

Magistriniame darbe "Pluoštų generuojamų rezonatoriuose su Gauso veidrodžiais sklidimas ir fokusavimas" skaitiškai ištirtos nepastovių rezonatorių su išvadiniu supergausinio pralaidumo profilio veidrodžiu formuojamų pluoštų sklidimo ir difrakcijos ypatybės. Plačiau išnagrinėta apertūra apriboto Gauso pluošto difrakcija ir Gauso pluošto praėjusio pro super-Gauso pralaidumo veidrodį difrakcija artimoje ir tolimoje zonoje.

Darbo apimtis – 65 puslapiai. Darbą sudaro įvadas (jame atskleidžiami darbo tikslai ir uždaviniai), trys skyriai teorijos (optiniai rezonatoriai, Gauso pluoštai, skaliarinė difrakcijos teorija), vienas skyrius praktikos (rezonatorių su supergausiniaisiais veidrodžiais formuojamų pluoštų difrakcijos modeliavimas), išvados, literatūros sąrašas, priedai. Darbe pateikiama viena lentelė ir 39 paveikslėliai.

Gauti rezultatai parodė, kad apertūros įtaka Gauso pluoštui yra nedidelė, jei jos spindulys yra daugiau kaip du kartus didesnis už pluošto spindulį, o fokusuojant Gauso pluoštą lęšiu stebimas židinio poslinkis.

Abstract

In master thesis "Propagation properties of beam generated by Gaussian mirror resonator" the peculiarities of diffraction and spread of unstable resonators beams formed by terminal super-Gaussian throughput profile mirror are investigated quantitatively. Aperture, limited of diffraction of Gaussian beam and diffraction of Gaussian beam entered through super-Gaussian throughput mirror in close and far-field are more widely investigated.

The volume of the work is 65 pages. The work consists of introduction (in it the aims and objectives of the work are revealed), three sections of theory (optic resonators, Gaussian beams, scalar diffraction theory), one section of practices (modulation of diffraction beams, formed by resonators with super-Gaussian mirrors), conclusions, references, appendixes. One table and 39 pictures are adduced in the work.

The obtained results showed that the influence of aperture on Gaussian beam is not large, if its radius is larger more than two times than beam radius, and while focusing Gaussian beam by lens the displacement of focus is observed.

Turinys

Ivadas.....	4
1. Optiniai rezonatoriai.....	7
1.1. Lazerio spinduliuotės spektro formavimas.....	9
1.2. Lazerio spinduliuotės erdvinės sandaros formavimas.....	10
1.3. Pastovieji rezonatoriai.....	13
1.4. Nepastovieji rezonatoriai.....	18
2. Gauso pluoštai.....	22
2.1. Ritiniai Gauso pluoštai.....	22
2.2. Gauso pluoštų transformacijos.....	27
3. Skaliarinė difrakcijos teorija.....	31
3.1. Bangų lygtis.....	31
3.2. Helmholco lygtis.....	32
3.3. Helmholco ir Kirchhofo integralai.....	33
3.4. Difrakcija už plokščio ekrano.....	35
3.5. Kirchhofo kraštinės sąlygos.....	37
3.6. Frenelio-Kirchhofo difrakcijos formulės.....	38
3.7. Frenelio ir Fraunhoferio artiniai.....	38
3.8. Frenelio artinys.....	40
3.9. Fraunhoferio artinys.....	41
4. Rezonatorių su supergausniais veidrodžiais formuojamų pluoštų difrakcijos modeliavimas... 43	43
4.1. Apertūra apriboto Gauso pluošto difrakcija.....	43
4.2. Gauso pluošto praėjusio pro super-Gauso pralaidumo veidrodį difrakcija artimoje ir tolimoje zonoje.....	54
Išvados.....	63
Literatūra.....	64
Priedai.....	66

Ivadas

Šiuolaikinė optinių rezonatorių teorijos samprata pirmą kartą buvo suformuluota G. Fox ir T. Li 1961 metais darbuose [7, 8]. Jie išnagrinėjo rezonatoriaus, kurio veidrodžio plotis 25 bangos ilgiai ir ilgis 100 bangos ilgių, modų formavimąsi. G. Fox ir T. Li parodė, kad atvirame optiniame rezonatoriuje gali egzistuoti modos, kurių lauko intensyvumas artėja į nulį ties veidrodžių kraštais. Tam, kad modos susiformuotų, reikėjo 100 lėkių per rezonatorių.

G. Fox ir T. Li panaudotas skaitinis metodas, rezonatoriaus modoms skaičiuoti, ekvivalentiškas kompleksinės matricos tikrinių verčių skaičiavimui yra naudojamos iki šiol, nors vėliau buvo sukurti ir kiti rezonatoriaus modų skaičiavimo būdai. G. Fox ir T. Li teorijos privalumas yra tas, kad modų skaičiavimas prasideda nuo skaitinio triukšmo, kuris modeliuoja realų savaiminio spinduliavimo triukšmą lazeryje.

Po G. Fox ir T. Li pirmųjų darbų prasidėjo spartus optinių rezonatorių teorijos vystymasis. Buvo parodyta, kad modų sklidimas rezonatoriuje yra ekvivalentiškas pluoštų sklidimui begaliniame lęšių šviesolaidyje.

Dar vėliau G. Boyd ir J. P. Gordon darbe [9] paskelbė, kad rezonatoriaus su kvadratinės formos sferiniais veidrodžiais, pluoštai yra Ermito-Gauso modos. Jie pirmieji pasiūlė modos skersmenį žymėti w ir sąsmaukos ilgį b , nors dabar dažniau yra naudojamas dydis, vadinamas

Reilėjaus ilgiu $z_R = \frac{b}{2}$ [39-41]. Taip pat B. Boyd ir J. P. Gordon pirmieji nustatė, kaip kinta modos skersmuo $w(z)$ ir jos bangos fronto kreivumo spindulys $R(z)$ rezonatoriaus viduje.

Vėliau G. Boyd kartu su H. Kogelnik [10] pirmieji ištyrė rezonatorių, kurio modos yra Gauso pastovumo ir suformulavo pastovumo kriterijų, bei pasiūlė rezonatorių pastovumo diagramą. Jie taip pat parodė, kad sferinio rezonatoriaus su apskritos formos veidrodžiais modos yra Lagero-Gauso. Paminėtuose G. Boyd, J. P. Gordon ir G. Boyd, H. Kogelnik darbuose [9, 10] išdėstyti rezultatai yra pastovių rezonatorių su Gauso modomis teorijos pagrindas.

Vėliau paprastų sferinių rezonatorių teorija buvo apibendrinta rezonatoriams su pakrypusiais veidrodžiais [11], rezonatoriams, kurių veidrodžių forma kitokia nei apskrita arba stačiakampė taip pat rezonatoriams, kuriuose yra stiprinimas, sukeliantis modų iškraipymus dėl soties [12].

Nepaisant Gauso modų teorijos taikymo, atvirųjų optinių rezonatorių modų savybės yra sudėtingesnės. Šioms modoms dažniausiai negalioja ermitiškumo ir ortogonalumo kriterijai. Šiems sudėtingesniems modų klausimams yra skirta daug darbų [14, 15].

1965 m. buvo paskelbtas pirmasis darbas apie nepastoviuosius rezonatorius [16], kurių savybės labai skyrėsi nuo pastoviųjų Gauso rezonatorių. Vėliau suformulavus ekvivalentinio Frenelio skaičiaus N_{eq} sąvoką darbe [17] nustatyta, kad nepastovieji rezonatoriai gali būti dviejų tipų priklausantys vadinamai teigiamai šakai ir neigiamai šakai. Svarbų indėlį į nepastoviųjų rezonatorių teoriją įnešė rusų mokslininkas Ananėv su bendramoksliais [18 – 20]. Jie suformulavo astigmatiškai pastovių-nepastovių rezonatorių sąvoką ir parodė, kad panaudojus išvadinius rezonatoriaus veidrodžius su kūginiais kraštais, smarkiai sumažėja rezonatoriaus modų tarpusavio sąveiką.

1973 m. Horwitz pasiūlė naują būdą nepastovaus rezonatoriaus modoms skaičiuoti, kuris ženkliai pagerino sudėtingų nepastoviųjų rezonatorių skaičiavimo tikslumą. Daugelis čia paminėtų nepastoviųjų rezonatorių teorijai skirtų darbų yra apibendrinti darbe [6].

Nepastovieji rezonatoriai, ypatingai su kintamo pralaidumo veidrodžiais, leido sukurti didelės galios lazerius, generuojančius aukštos kokybės pluoštus iš didelio aktyvios terpės tūrio. Palyginti neseniai buvo nustatyta, kad kai kurių nepastoviųjų rezonatorių modoms yra būdingos fraktalų savybės [21]. Plečiantis didelės galios lazerių su nepastovimais rezonatoriais taikymams ieškoma naujų būdų, kaip formuoti tokių lazerių geros kokybės pluoštus. Vienas galimų būdų – naudoti išvadinius veidrodžius su gausiniu ar supergausiniu pralaidumo (atspindžio) profiliu, kuris sumažina difrakcijos nuo veidrodžio kraštų sąlygotus pluošto iškraipymus.

Darbo tikslas:

Skaitiškai ištirti nepastoviųjų rezonatorių su išvadiniu supergausinio pralaidumo profilio veidrodžiu formuojamų pluoštų sklidimo ir difrakcijos ypatybes.

Darbo uždaviniai:

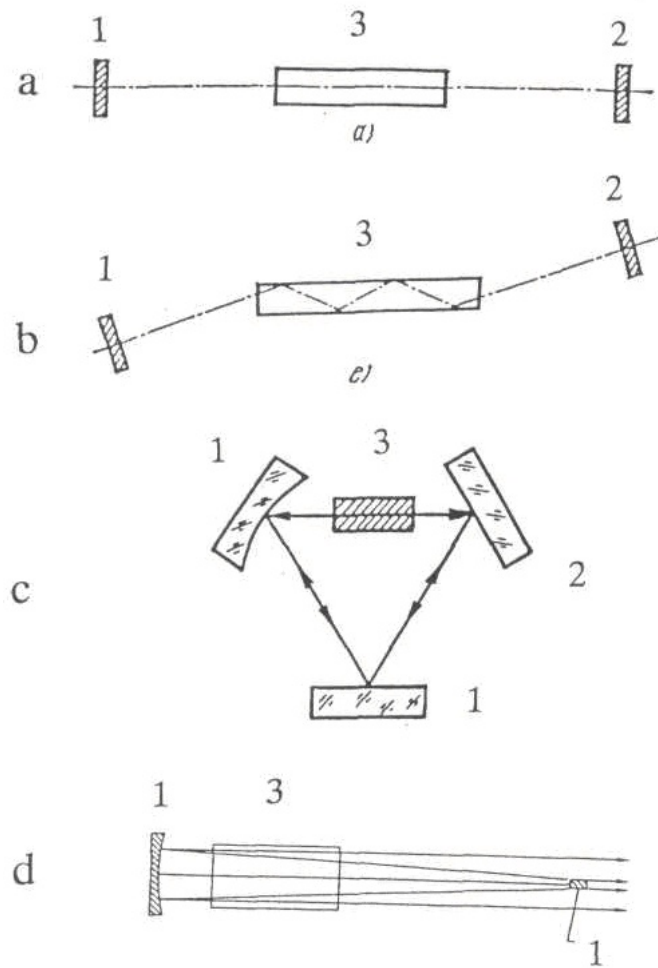
1. susipažinti su rezonatorių, Gauso pluoštų ir skaliarine difrakcijos teorija ir šiems klausimams skirtais moksliniais straipsniais;
2. įsisavinti pluoštų sklidimo ir difrakcijos kompiuterinio modeliavimo ir rezultatų grafinio apdorojimo metodiką;
3. ištirti apertūra ribotų Gauso pluoštų difrakciją;
4. išanalizuoti praėjusio per super-Gauso veidrodį Gauso pluošto sklidimą ir fokusavimą;
5. nustatyti Gauso veidrodžio parametrų įtaką amplitudės skersiniam skirstiniui tolumoje ir artimoje zonoje;

6. nustatyti sąlygas, kada formuojasi pluoštas turintis artimiausią Gauso pluoštui skersinį intensyvumo skirstinį.

1. Optiniai rezonatoriai

Būtina bet kurio lazerio dalis yra rezonatorius. Rezonatorius turi užtikrinti teigiamą grįžtamąjį ryšį, grąžindamas tam tikrą dalį sklindančios tarp veidrodžių spinduliuotės atgal į aktyviają terpę, kuri, būdama nepusiausviroje būsenoje, gali stiprinti einančią per ją spinduliuotę. Kadangi optinis rezonatorius apribotas tik dviem atspindinčiais paviršiais, o iš kitų pusių atviras, jis vadinamas atviruoju optiniu rezonatoriumi. Atspindintys paviršiai - tai įvairios formos (plokšti, sferiniai, paraboliniai) veidrodžiai, visiško vidaus atspindžio prizmės (1 pav.). Aktyvi terpė gali užimti tik dalį rezonatoriaus arba visą rezonatorių (šiuo atveju veidrodžiai garinami ant lazerinio strypo skersgalių). Paprasčiausias rezonatorius yra dviejų veidrodžių su atsuktais vienas į kitą paviršiais sistema. Tokia dviejų plokščių veidrodžių, esančių fiksuotu atstumu vienas nuo kito, sistema vadinama Fabri ir Pero. Todėl dažnai optinis rezonatorius vadinamas Fabri ir Pero rezonatoriumi. Vienas iš generuojamos spinduliuotės išvadinių veidrodžių daromas iš dalies skaidrus. Generacijos slenksčiui sumažinti būtina naudoti veidrodžius su dideliu atspindžio koeficientu ir maža sugertimi. Šiuos reikalavimus tenkina tik veidrodžiai, gaminami iš daugiasluoksnių dielektrinių dangų.

Rezonatorius daugiausia lemia pagrindines generuojamos spinduliuotės charakteristikas: monochromatiškumą, koherentiškumą, kryptingumą ir galią. Pats rezonatoriaus pavadinimas rodo, kad generuojama spinduliuotė, sklindanti į priešingas kryptis bėgančiųjų bangų pavidalu, rezonuoja jame sudarydama stovinčiąsias bangas. Tai jau minėtos fazinės generacijos sąlygos padarinys. Todėl iš stiprinimo kontūro išskiriami tik tam tikri bangos ilgiai, kuriems esant ir vyksta generacija. Esant šiems bangos ilgiams, spinduliuotė labiausiai stiprinama ir spektrinės linijos gaunamos labai siauros. Naudojant specialius atrankos būdus, galima gauti vienadažnę labai siauroje spektrinėje srityje, spinduliuotę. Stiprinimo procesas labai priklauso nuo išvadinės spinduliuotės kryptingumo. Daugiausia kartų per aktyviają terpę pereina spinduliuotė, sklindanti nedideliu su rezonatoriaus ašimi kampu. Ji didžiausią įtaką daro išvadinei galiai. Spinduliuotė, sklindanti didesniu kampu su rezonatoriaus ašimi, kiekvieno atspindžio metu atsilenkia nuo veidrodžio vis stipriau ir išeina per aktyvios terpės šoninius paviršius dar nelabai sustiprinta.



1 pav. Rezonatorių konfigūracijos: a – plokščiojo, b – su zigzaginiu optiniu keliu lazeriniame elemente, c – žiedinio ir d – nepastovaus; 1 – veidrodis su dideliu atspindžio koeficientu; 2 – išvadinis veidrodis; 3 – lazerinis elementas.

Dėl rezonatoriaus poveikio lazeriai spinduliuoja spinduliuotę, sudarytą iš keleto diskrečių dažnių, atskirtų vienas nuo kito vienodais dažnio intervalais. Rezonatorius turi dar didesnę įtaką lazerio spinduliuotei, nes formuoja tam tikras spinduliavimo lauko būsenas, vadinamas rezonatoriaus svyravimo tipais, arba modomis. Spektrinės lazerio charakteristikos – linijos plotis ir koherentiškumo ilgis – yra daugiausia sąlygotos išilginių modų, o pluošto skėstis, pluošto diametras ir energijos pasiskirstymas yra priklausomi nuo skersinių modų. Bendru atveju lazeriai yra daugiamodžiai osciliatoriai, nežiūrint specialių pastangų apriboti generuojamų modų skaičių. To priežastis yra ta, kad labai didelis skaičius išilginių modų telpa į lazerinio šuolio stiprinimo liniją ir didelis skaičius skersinių rezonatoriaus modų gali apimti aktyvios terpės skerspjūvį.

1.1. Lazerio spinduliuotės spektro formavimas

Dėl fazinės generacijos sąlygos rezonatoriuje, stovinčiosios bangos susidaro, kai atstumas tarp veidrodžių lygus sveikam pusbangių skaičiui

$$q\lambda_q = 2L. \quad (1.1)$$

Ši sąlyga gali būti tenkinama ir bangoms, sklindančioms tam tikru kampu α su rezonatoriaus ašimi:

$$q\lambda_q = \frac{2L}{\cos\alpha}. \quad (1.2)$$

Kadangi dydžiai c ir L pastovūs, tai kiekvieną q reikšmę atitinka savasis rezonansinis dažnis, t.y. rezonansas vienu metu yra keletui dažnių, ekvidistanciškai išsidėsčiusių dažnių skalėje. Perrašę (1.1) išraišką dažniams, gauname

$$\nu_q = \frac{qc}{2L}. \quad (1.3)$$

Atstumas tarp rezonansinių dažnių

$$\Delta\nu = \frac{c}{2L}. \quad (1.4)$$

Šis dydis 1 m ilgio rezonatoriui apytikriai lygus 150 MHz. Norint nustatyti, kiek rezonansinių dažnių vienu metu yra rezonatoriuje, reikia žinoti terpės lazerinio šuolio linijos stiprinimo kontūrą. Paprastai šuolio stiprinimo kontūro plotis daug platesnis už atstumą tarp rezonatoriaus gretimų modų, todėl spinduliuotės spektrą sudaro keli rezonansiniai dažniai. Esant 1 m ilgio rezonatoriui, 200 GHz stiprinimo telpa 1333 rezonansiniai dažniai. Išvadinės spinduliuotės kiekvienos linijos spektrinis plotis pirmiausia yra sąlygojamas rezonatoriaus rezonansinio maksimumo pločiu $\Delta\nu_r$. Jis $\Delta\nu_r$ priklauso nuo rezonatoriaus kokybės Q :

$$\Delta\nu_r = \frac{\nu}{Q}. \quad (1.5)$$

Esant mažiems difrakciniams nuostoliams, rezonatoriaus kokybė Q gali būti išreikšta paprasta formule:

$$Q = \frac{2\pi L}{\beta\alpha}; \quad (1.6)$$

čia β - suminių nuostolių koeficientas vienkartinės rezonatoriaus eigos metu; α - generacijos bangos ilgis. Pasinaudojus (1.6) išraiška, plotis $\Delta \nu_r$ gali būti išreikštas

$$\Delta \nu_r = \frac{\beta c}{2\pi L}. \quad (1.7)$$

Esant mažiems difrakciniams nuostoliams, dydis $\beta \sim 1 - \rho$ (ρ – veidrodžių atspindžio koeficientas) gali būti lygus 0,01 ir net dar mažesnis. Šiuo atveju 1 m ilgio interferometro rezonansinio maksimumo plotis $\Delta \nu_r = 0,5$ MHz. Bet dėl rezonansinių reiškinių, pasireiškiančių stiprinimo metu (didžiausias stiprinimas gaunamas rezonansinio maksimumo centre, ir spektrinė spinduliavimo linija išsidėsto šio maksimumo centre), generuojama linija, kurios teorinis plotis

$$\Delta \nu_t = \frac{8\pi h\nu}{P} \Delta \nu_r^2; \quad (1.8)$$

čia P – spinduliuotės galia. Esant $P = 1$ mW, $\Delta \nu_r = 1$ MHz ir $\lambda = 0,6$ μ m teorinis generuojamos linijos plotis yra $\Delta \nu_t = 8 \cdot 10^{-3}$ Hz. Taigi teorinis plotis yra labai mažas ir gali būti pasiektas tik tuo atveju, jei rezonatoriaus ilgis būtų stabilus su tikslumu $\Delta L/L = \Delta \nu_t/\nu = 1,6 \cdot 10^{-17}$ laiko intervale $\Delta t = 1/\Delta \nu_t \sim 10^2$ s. Praktiškai išlaikyti tokį rezonatoriaus ilgio stabilumą neįmanoma, todėl spinduliuotės spektro plotis yra daug platesnis už teorinį $\Delta \nu_t$, ir labiau artimas rezonatoriaus maksimumo pločiui $\Delta \nu_r$.

Žinant rezonatoriaus išvadinio veidrodžio atspindžio koeficientą r_1 (kito veidrodžio koeficientas $r_2 = 1$), rezonatoriaus maksimumo plotis $\Delta \nu_r$ gali būti išreikštas:

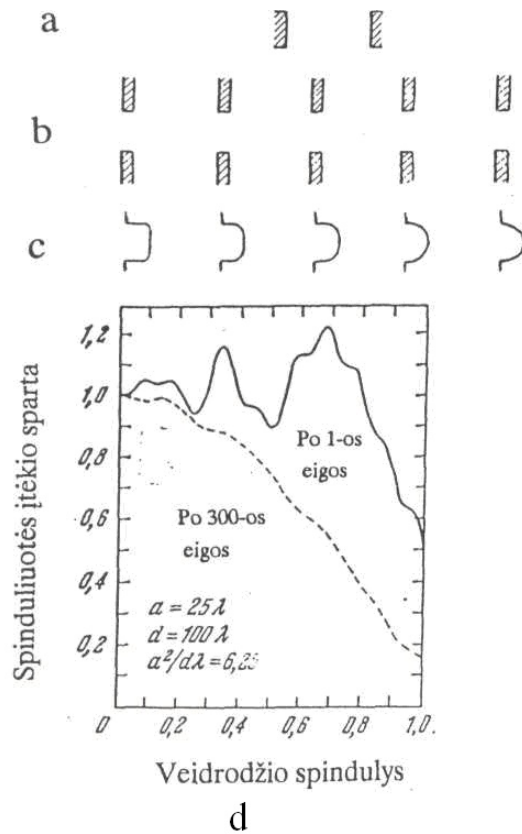
$$\Delta \nu_r = (\lambda^2 [1 - (r_1)^{1/2}]) / [2L\pi (r_1)^{1/2}]. \quad (1.9)$$

Rubino lazerio ($\lambda = 694,3$ nm) su 75 cm ilgio rezonatoriumi, sudarytu iš veidrodžių su $r_1 = 0,5$ ir $r_2 = 1$, tarpas tarp išilginių modų $\Delta \lambda = 0,0003$ nm, o vienos išilginės modos plotis $\Delta \nu_r = 0,00004$ nm.

1. 2. Lazerio spinduliuotės erdvinės sandaros formavimas

Iki šiol buvo manyta, kad rezonatoriuje yra tik virpesiai su ekvidistanciškai išdėstytu spektru $\nu_q = q(c/2Ln)$. Tačiau tai būtų teisinga tik pasyviai rezonatoriui, kuriame galėtų būti plokščios bangos. Aktyvaus rezonatoriaus, t.y. tokio, kurio viduje yra stiprinanti terpė, lauko

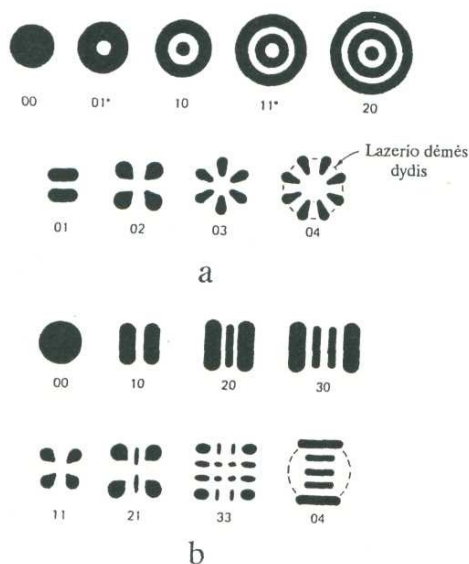
pasiskirstymas yra daug sudėtingesnis. Be išilginių modų, lazerio spinduliuotė yra charakterizuojama ir skersinėmis. Išilginės modos skiriasi viena nuo kitos tik dažniu; skersinės modos skiriasi viena nuo kitos dar ir elektromagnetinio lauko pasiskirstymu plokštumoje, statmenoje jų sklidimo kryptčiai. Elektromagnetinio lauko kitimui optiniuose rezonatoriuose aprašyti yra vartojami simboliai TEM_{mnq} . TEM_{mnq} (*Transverse Electromagnetic Waves*) reiškia skersines elektromagnetines bangas, du pirmi indeksai m ir n apibūdina skersinę struktūrą, o trečiasis – išilginę. Kadangi $q \gg 1$, tai pastarasis praleidžiamas, o naudojami tik m ir n indeksai, kurie paprastai atitinka kelis pirmus sveikuosius skaičius.



2 pav. a – Fabri ir Pero rezonatorius, b – jo modelis perdavimo funkcijai, įskaitančiai difrakcinius nuostolius, apskaičiuoti daugiakartės eigos metu, c – kokybinis lazerio erdvinės sandaros kitimas daugiakartės eigos metu, d – erdvinės sandaros kitimas gautas naudojant skaitinį metodą.

Daugiakartė eiga lazeryje, kurios metu pasireiškia difrakciniai nuostoliai, atsiradę dėl veidrodžių arba kitų rezonatoriaus elementų ribotos apertūros, sukelia didelius bangos amplitudės ir fazės pokyčius. Todėl, viena vertus, plokščios bangos negalima laikyti aktyvaus rezonatoriaus savųjų virpesių tipu, kita vertus, difrakcinių nuostolių negalima skaičiuoti manant, kad rezonatoriuje yra plokščiosios bangos. Pirmą kartą, naudodamiesi Hiuigenso ir Frenelio principu, susidarančio rezonatoriuje lauko konfigūraciją ištyrė G. Fox ir T. Li 1961 metais. Jie

nagrinėjo sąlygas, kurioms esant rezonatoriuje laukas nuostoviai pasiskirsto. Nuostoviu pasiskirstymu laikomas toks, kuris po tam tikro generacijos momento nekinta. Skaičiavimai parodė, kad, paėmus bet koki pradinį lauko pasiskirstymą ir įskaičius difracinius nuostolius, po kelių šimtų atspindžių nuo veidrodžio elektromagnetinio lauko amplitudės ir fazės pasiskirstymas veidrodžio paviršiuje daugiau nebekinta, t.y. laukas po tam tikro laiko atsikartoja nebesikeisdamas (2 pav.). Tokia būseną atitinka savuosius Fabri-Pero etalono svyravimus. Kaip matome iš 2 paveiksle, tolstant nuo rezonatoriaus ašies spinduliuotės įtėkio sparta greitai mažėja. Tai atitinkamai smarkiai sumažina difracinius nuostolius atsispindint nuo veidrodžių bei pereinant lazerinį elementą. Indeksai m ir n charakterizuoja elektromagnetinio lauko mazgų skaičių x ir y kryptimi. Modos, charakterizuojamos tais pačiais m ir n bet skirtingais q , vadinamos tuo pačiu pavadinimu – skersinėmis modomis. Stačiakampiems veidrodžiams pirmas indeksas parodo lauko krypties kitimų skaičių išilgai veidrodžio didesniojo matmens (ašis x), o antroji išilgai mažesniojo matmens. Apvaliems veidrodžiams n atitinka lauko ženklo kitimo skaičių pagal kampą, o m – pagal radiusą. Kelių skersinių modų lauko pasiskirstymas pateiktas 3 paveiksle.



3 pav. Lazerio skersinių modų sandara, kai ribojanti diafragma (arba ribojantis veidrodis) yra cilindrinė (a) ir stačiakampė (b).

Kiekvienam svyravimų tipui būdingas tam tikras slopinimas. Todėl įvairių modų žadinimosi sąlygos yra skirtingos. Pirmiausia turi žadintis modos su mažiausiais nuostoliais. Kadangi nuostoliai, susiję su atspindžiu nuo veidrodžių, visų modų vienodi, todėl suminių nuostolių skirtumas yra susijęs su skirtingais difraciniais nuostoliais. Ta moda, kuriai jie pasidaro mažiausi, žadinasi anksčiau už kitas. Didinant kaupinimo galią, žadinsis ir kitos modos. Mažiausi difraciniai

nuostoliai yra tos modos, kurios lauko pasiskirstymas turi maksimumą centre ir greičiausiai krinta einant į veidrodžio kraštus. Šie svyravimų tipai vadinami pagrindiniais, ir žymimi TEM₀₀.

Visos rezonatorių charakteristikos apibūrinamos tokiomis trimis parametru kombinacijomis:

$$(g_1 g_2), (c_1 / g_1), (c_2 / g_2), \quad (1.10)$$

čia g_1 ir g_2 – apibendrinti rezonatoriaus parametrai, susiję su rezonatoriaus ilgiu L ir veidrodžių kreivumo spinduliais R_1, R_2 šitaip:

$$\begin{aligned} g_1 &= 1 - (L / R_1) \\ g_2 &= 1 - (L / R_2). \end{aligned} \quad (1.11)$$

Dydžiai c_1 ir c_2 – cikliniai Frenelio skaičiai.

$$c_i = 2\pi N_i; \quad (1.12)$$

čia N_i - Frenelio skaičius

$$N_i = (a_i^2 / L\lambda). \quad (1.13)$$

Šioje išraiškoje a_i^2 yra rezonatoriaus apertūrinis, t.y. ribojantis rezonatoriaus lauką (kietojo kūno lazeriuose tai paprastai yra strypo ar diafragmos diametras) matmuo. Frenelio skaičius nusako skaičių Frenelio zonų, matomų ant vieno baigtinio dydžio veidrodžio paviršiaus, žiūrint iš kito veidrodžio centro. Kuo daugiau Frenelio zonų perdengia rezonatoriaus veidrodis, tuo mažesni difrakciniai nuostoliai. Taigi rezonatoriaus geometrija, sąlygojanti visas jo savybes, apibūrinama parametrais: rezonatoriaus ilgiu L , veidrodžių kreivumo spinduliais R_i ir apertūriniu matmeniu a_i^2 .

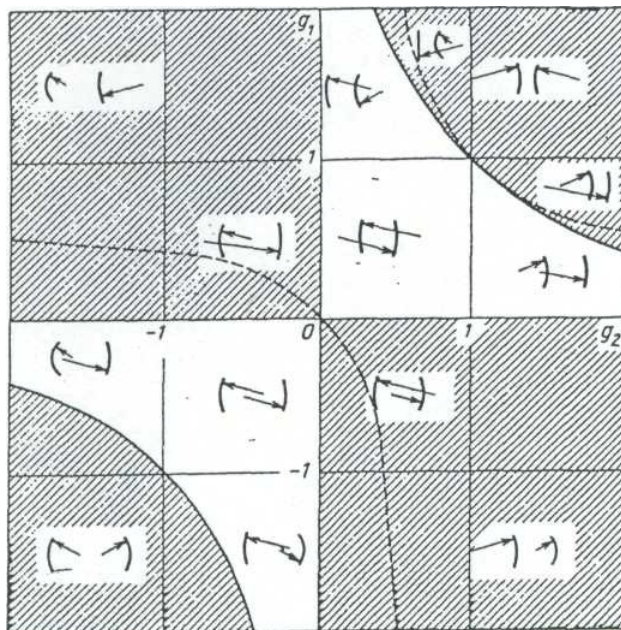
1. 3. Pastovieji rezonatoriai

Dažnai grubiai rezonatoriaus charakteristikai užtenka vieno parametro – sandaugos $(g_1 g_2)$, nes optiniams rezonatoriams c_1 , ir c_2 paprastai dideli skaičiai, artimi idealių rezonatorių $c_i \rightarrow \infty$. Iš nagrinėjimo aišku, kad vienalaikis parametru g_1 ir g_2 ženklo pasikeitimas nekeičia rezonatoriaus savybių. Elektromagnetinio lauko pasiskirstymas ant veidrodžių, difrakciniai nuostoliai ir fazės poslinkis priklauso nuo Frenelio skaičiaus ir paprastai pateikiamas grafiku pavidalu naudojantis gana sudėtingais skaičiavimais. Tačiau naudojant apibendrintus rezonatoriaus parametrus g_1 ir g_2 bent kokybiškai galima įvertinti apie rezonatoriaus

difrakcinius nuostolius. Rezonatorių įprasta apibūdinti tašku g koordinacių sistemoje. Pagal difrakcinių nuostolių dydį g plokštuma gali būti padalyta į dvi sritis. Sričiai

$$0 < g_1 \cdot g_2 < 1 \quad (1.14)$$

būdingi maži difrakciniai nuostoliai, o sričiai $0 > g_1 \cdot g_2 > 1$ - dideli. Šios sritys žymimos grafiškai taip, kaip pateikta 4 paveiksle. Užbrūkšniuota sritis atitinka pastovius rezonatorius. Bendru atveju pastovumo sąlyga yra tenkinama toms veidrodžių konfigūracijoms, kurioms pluošto ir veidrodžio kreivumas yra suderintas. Kitos sritys būdingos nepastoviams rezonatoriams. Jose difrakciniai nuostoliai labai išauga. Šviesos pluoštai, sklindantys tarp rezonatoriaus sferinių veidrodžių, periodiškai fokusuojami. Jei rezonatorius yra pastovus, tai šviesos pluoštas, sklisdamas tarp veidrodžių, papildomai neplinta. Jei rezonatorius yra nepastovus, tai pluoštas vis labiau plečiasi po kiekvienos rezonatoriaus eigos. Kietojo kūno lazeriuose plačiausiai naudojami plokšti ($R_1 = R_2 \leftarrow = \infty$), didelio kreivumo spindulio sferiniai ($R_1 \gg L; R_2 \gg L$); konfokalieji ($R_1 = R_2 = L/2$); įgaubtai išgaubti ($R_1 > L, R_2 = -(R_1 - L)$) bei pusiau sferiniai ($R_1 = L; R_2 = \infty$) rezonatoriai (5 pav.). Kai kurių rezonatorių vietos plokštumoje g pažymėtos 4 paveiksle.



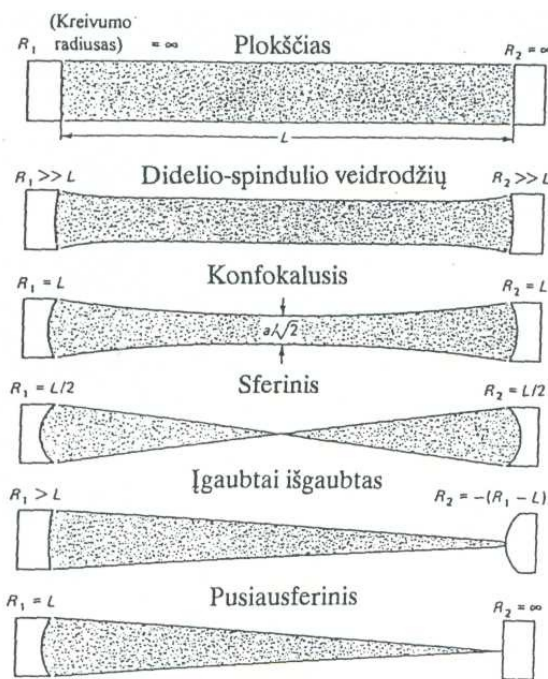
4 pav. Lazerio rezonatoriaus pastovumo diagrama. Neuzbrūkšniuota sritis atitinka pastovius, o užbrūkšniuota – nepastovius rezonatorius.

Kietojo kūno lazeriuose dažniausiai naudojami rezonatoriai sudaryti iš dviejų sferinių arba plokščių, atsuktų vienas į kitą veidrodžių. Iš pradžių pažiūrėsime, kaip tokiam

rezonatoriuje yra generuojama TEM₀₀ moda ir kas turi įtakos jos parametrams. Žinodami TEM₀₀ modos parametrus, galime rasti aukštesnių skersinių modų parametrus. Pradėkime nagrinėti imdami Gauso pluoštą su spinduliu sąsmaukoje w_0 (6 pav.). Į kairę nuo sąsmaukos atstumu t_1 , pluošto bangos fronto kreivumo spindulys yra R_1 . Šioje vietoje pastačius veidrodį su kreivumu, lygiu Gauso pluošto kreivumui, modos forma nepakis. Tokiu pat būdu atstumu t_2 į dešinę nuo sąsmaukos galime pastatyti veidrodį, kurio kreivumo spindulys R_2 sutaptų su sferinės bangos kreivumo spinduliu šioje vietoje. Modos forma vėl liks nepakitusi. Todėl norint sukurti rezonatorių, užtenka pastatyti du veidrodžius, atitinkančius du Gauso pluošto sferinius paviršius, apibrėžiamus lygybe

$$R(z) = z \left[1 + \left(\pi w_0^2 / \lambda z \right)^2 \right]; \quad (1.15)$$

čia: $R(z)$ – bangos fronto, kertančio z ašį atstumu z nuo sąsmaukos, kreivumo spindulys, λ – bangos ilgis, w_0 – pluošto spindulys sąsmaukoje. Galimas ir atvirkščias sprendimas, kai žinomas atstumas L tarp veidrodžių ir jų kreivumo spinduliai R_1 ir R_2 . Tada sąsmaukos vieta ir pluošto spindulys w_0 sąsmaukoje gali būti parinkti taip, kad veidrodžių kreivumai sutaptų su bangos fronto kreivumu.



5 pav. Kai kurių lazerio rezonatorių konfigūracija.

Svarbūs yra modos parametrų w_1 , w_2 , w_0 , t_1 , t_2 ir rezonatoriaus parametrų R_1 , R_2 , L sąryšiai. Kaip matome iš 6 paveikslo, w_1 ir w_2 yra pluošto spinduliai atitinkamai ant

veidrodžių M_1 ir M_2 . Įgaubtų veidrodžių kreivumai laikomi teigiamais. Pluošto spinduliai w_1 ir w_2 išreiškiami lygtimis:

$$w_1^4 = \left(\frac{\lambda R_1}{\pi} \right)^2 \frac{R_2 - L}{R_1 - L} \left(\frac{L}{R_1 + R_2 - L} \right),$$

$$w_2^4 = \left(\frac{\lambda R_2}{\pi} \right)^2 \frac{R_1 - L}{R_2 - L} \left(\frac{L}{R_1 + R_2 - L} \right). \quad (1.16)$$

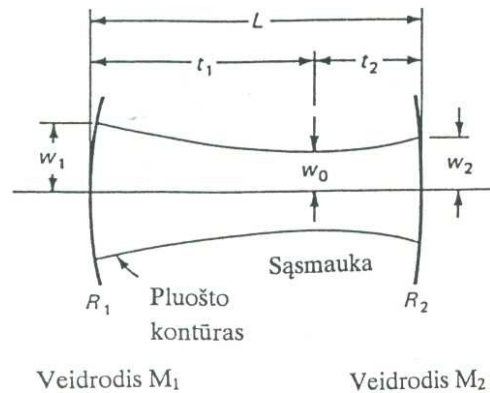
Pluošto spindulys sąsmaukoje, kuri gali būti tiek rezonatoriuje, tiek jo išorėje, išreiškiamas lygybe

$$w_0^4 = \left(\frac{\lambda}{\pi} \right)^2 \frac{L(R_1 - L)(R_2 - L)(R_1 + R_2 - L)}{(R_1 + R_2 - 2L)^2}. \quad (1.17)$$

Atstumai t_1 ir t_2 nuo veidrodžių iki sąsmaukos yra

$$t_1 = \frac{L(R_2 - L)}{R_1 + R_2 - 2L}, \quad t_2 = \frac{L(R_1 - L)}{R_2 + R_1 - 2L}. \quad (1.18)$$

Bendru atveju užrašytos formulės (1.14)-(1.16), daugeliui konkrečių rezonatorių labai supaprastėja.



6 pav. Rezonatoriaus su skirtingo kreivio veidrodžiais modos parametrai.

Vienodo kreivumo įgaubti veidrodžiai. Šiuo atveju $R_1 = R_2$

$$w_{1,2}^2 = \frac{\lambda R}{\pi} \left(\frac{L}{2R - L} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.19)$$

Pluošto spindulys sąsmaukoje, esančioje rezonatoriaus viduryje ($t_1 = t_2 = L/2$), yra

$$w_0^2 = \frac{\lambda}{2\pi} (L(2R - L))^{\frac{1}{2}}. \quad (1.20)$$

Jei veidrodžių kreivumo spindulys didelis ($R_1 = R_2 \gg L$), tai

$$w_{1,2}^2 = w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} \left(\frac{RL}{2} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.21)$$

Sferiniame rezonatoriuje, sudarytame iš dviejų veidrodžių, atstumas tarp kurių yra du kartus didesnis už jų kreivumo spindulį $R_1 = R_2 = L/2$, pluoštas sudarytas iš modos, kurios matmenys ant veidrodžių dideli ir kuri fokusuojasi rezonatoriaus centre iki difrakciškai riboto taško.

Kitas svarbus rezonatoriaus su vienodo kreivumo veidrodžiais atvejis yra konfokalus rezonatorius. Šiame rezonatoriuje atstumas tarp veidrodžių lygus veidrodžių kreivumo spinduliams $R = L$. Šiuo atveju

$$w_{1,2} = \left(\frac{\lambda R}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \text{ ir } w_0 = \frac{w_{1,2}}{\sqrt{2}}. \quad (1.22)$$

Konfokalaus rezonatoriaus moda turi mažiausius galimus matmenis.

Plokščiai įgaubtas rezonatorius. Rezonatorius su vienu plokščiu ($R_1 = \infty$) ir vienu įgaubtu veidrodžiu

$$w_1^2 = w_0^2 = \frac{\lambda}{\pi} (L(R_2 - L))^{\frac{1}{2}} \text{ ir } w_2^2 = \frac{\lambda}{\pi} R_2 \left(\frac{L}{R_2 - L} \right)^{\frac{1}{2}}. \quad (1.23)$$

Pluošto sąsmauka yra ant plokščiojo veidrodžio, t.y. $t_1 = 0$ ir $t_2 = L$. Atskiras šio rezonatoriaus atvejis yra pusiau sferinis rezonatorius, sudarytas iš plokščio ir įgaubto veidrodžio, kurio $R_2 = L$. Tokia moda turi didelį diametrą ant įgaubto veidrodžio ir fokusuojasi į difrakciškai ribotą tašką ant plokščio veidrodžio. Kuo R_2 artimesnis L , tuo labiau w_1 skiriasi nuo w_2 . Ribiniu atveju, kai $R_2 = L$, $w_2 \rightarrow 0$. Tai reikštų didelius difrakcinius nuostolius ant veidrodžio M_2 ir labai didelę spinduliuotės įtekio spartą ant veidrodžio M_1 . Todėl praktiškai L parenkamas truputį mažesnis už R_2 , kad difrakciniai nuostoliai dėl w_1 dydžio būtų pakankamai maži.

Įgaubtai išgaubtas rezonatorius. Jo parametrai gali būti apskaičiuoti pagal (1.16)-(1.18) formules, jei išgaubto veidrodžio kreivumo spindulys yra neigiamas ($-R_2$).

Plokščias rezonatorius. Jis gali būti nagrinėjamas kaip didelio kreivumo spindulio rezonatoriaus $R_1 = R_2$ atskiras atvejis. Dėl didelių difrakcinių nuostolių prie plokščio rezonatoriaus kraštų yra generuojama ne plokščia banga, bet su nedideliu fronto kreiviu. [2]

1. 4. Nepastovieji rezonatoriai

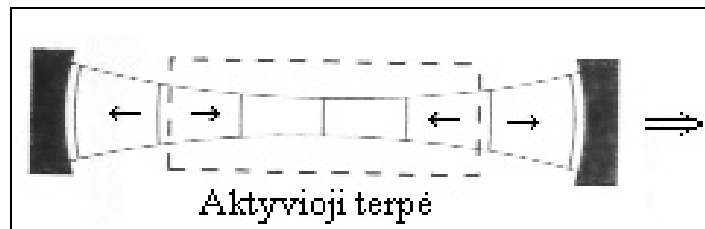
Lazerių rezonatoriai, kuriuose gali būti generuojami pakankamai geros kokybės pluoštai, tačiau neturintys stabilumo kriterijaus, priklauso nepastoviųjų rezonatorių tipui. Tokie rezonatoriai naudojami norint gauti didelę generacijos galią, kai pluoštas pakankamai artimas Gauso, o aktyvioji lazerio terpė pasižymi dideliu stiprinimu.

Pastoviojo rezonatoriaus moda TEM_{00} turi labai mažą pluošto skersmenį rezonatoriuje ir stiprinančioje lazerinėje terpėje (7 pav.). Pavyzdžiui, konfokaliai rezonatoriui ($g = 0$), kuriame pluošto skersmuo ties veidrodžiu

$$w = \sqrt{\lambda d / \pi} , \quad (1.24)$$

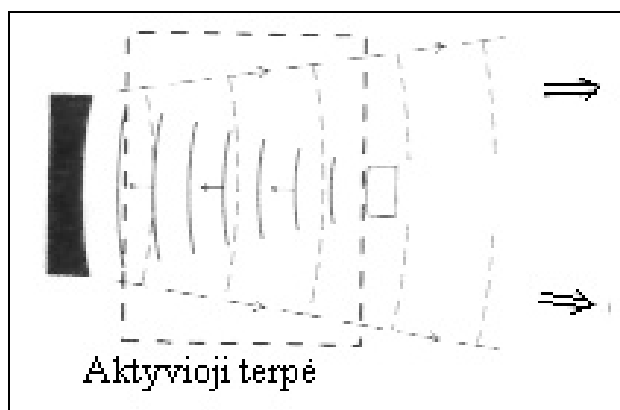
čia d yra rezonatoriaus ilgis, λ – bangos ilgis.

Nepriklausomai, koks yra lazerinio stiprintuvo skersmuo, energija bus imama tik iš siauros srities $2w$, likusiame aktyvios terpės tūryje sukaupta energija bus nepanaudojama ir prarandama arba bus generuojamos aukštesnės eilės modos, kurių pluošto kokybė yra bloga.



7 pav. Pastovusis rezonatorius.

Priešingai nepastoviam rezonatoriui, pluoštas yra stipriai prasiskleidžiantis (8 pav.) ir todėl užpildo didelį aktyviosios terpės tūrį, priešingai nei pastoviam rezonatoriui, kur aktyviosios terpės tūris yra mažas. Pro tinkamos konfigūracijos nepastovaus rezonatoriaus veidrodžių kraštus išeinantis didelio intensyvumo pluoštas gali būti suformuotas taip, kad jos skirstinys tolimame lauke gali būti artimas Gauso skirstiniui.



8 pav. Nestovusis rezonatorius.

Pagrindinė sąlyga, kurią turi tenkinti lazeris su nestoviu rezonatoriumi yra ši: stiprinimas aktyvioje terpėje modos užimame tūryje turi būti pakankamai didelis, kad pastovios žemos eilės modos nespėtų pakankamai sustiprėti per laiką, kol pasiekama stiprinimo sotis, be to didžiausias stiprinimas reikalingas ir tam, kad būtų kompensuojami dideli nestovaus rezonatoriaus difrakciniai nuostoliai.

Žvelgiant į rezonatoriaus pastovumo diagramą, matyti, kad pluoštas pradeda stipriai skleistis, jo skersmuo pasidaro didesnis už veidrodžio skersmenį, kai pereiname iš pastovumo į nestovumo sritį. Kai taip atsitinka, būtina atsižvelgti į baigtinius rezonatoriaus veidrodžių matmenis.

Daugelis nestovusių rezonatorių turi du labai skirtingo skersmens ir kreivumo veidrodžius. Jei didesnio skersmens veidrodžio kreivumo spindulys R_r , o mažesnio, pro kurio kraštus išeina spinduliavimas iš rezonatoriaus, kreivumo spindulys R_0 , tai tokio rezonatoriaus didinimas:

$$M = \frac{R_r}{R_0}. \quad (1.25)$$

Tokiame nestoviamame rezonatoriuje gali gyvuoti modos, kurios lengvai užpildo visą didelį lazerinės terpės tūrį ir kartu neleidžia sustiprėti aukštesnėms skersinėms modoms. Pagrindiniai tokio rezonatoriaus nuostoliai yra difrakciniai, reiškiantys, kad lazerio spinduliavimas išeina pro veidrodžio kraštus. Toks spindulio išvedimo iš rezonatoriaus būdas tinkamai parinkus rezonatoriaus konfiguraciją, leidžia suformuoti kolimuotą pluoštą, kurio skersmuo yra didelis, lyginant su pastovioje rezonatoriaus išvadiniu skersmeniu.

Nestovaus rezonatoriaus parametrui g tenkinama sąlyga

$$g_1 g_2 \geq 1 \quad \text{arba} \quad g_1 g_2 \leq 0,$$

kuri reiškia didelius difracinius nuotolius. Nagrinėjama atvejui

$$g_1 = 1 - \frac{d}{R_1} = 1 - \frac{d}{R_0}, \quad (1.26)$$

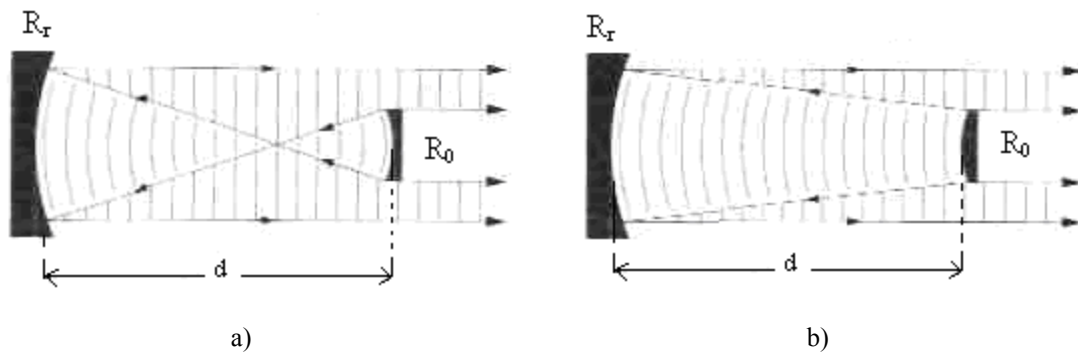
ir

$$g_2 = 1 - \frac{d}{R_2} = 1 - \frac{d}{R_r}. \quad (1.27)$$

Nepastovieji rezonatoriai gali būti skirstomi į neigiamos šakos ir teigiamos šakos. Jei $g_1 g_2 \geq 1$, tai rezonatorius priklauso teigiamai šakai, o jei $g_1 g_2 \leq 0$ – neigiamai šakai. Net esant dideliems nuostoliams nepastoviajame rezonatoriuje, tokiuose rezonatoriuose gali gyvuoti pastovios modos, jei yra tinkamai suderinti difraciniai nuostoliai ir stiprinimas per vieną lėkį aktyviojoje terpėje.

Buvo nustatyta, kad kai kuriems Frenelio skaičiams $N = a^2 / \lambda d$ (a – veidrodžio skersmuo) ir didinimui M egzistuoja viena moda, pasižyminti pastebimai mažais nuostoliais nei kitos modos. Todėl tinkamai parinkus rezonatoriaus Frenelio skaičių ir didinimą galima pasiekti gerą nepastovaus rezonatoriaus modų atranką.

Rezonatoriaus didinimas parodo, kokia dalis pluošto išeina pro mažojo veidrodžio kraštus, bei kartu su Frenelio skaičiumi lemia rezonatoriaus modos skersmenį. Norint, kad lazerio su nepastoviu rezonatoriumi pluošto tolimame lauke skersinio skirstinio centriniame pike būtų kuo didesnė išvadinės galios dalis, pageidautina, kad rezonatoriaus didinimas M būtų kuo didesnis.



9 pav. Nepastovieji rezonatoriai: a) neigiamos šakos, b) teigiamos šakos.

9 paveiksle parodyti du skirtingų tipų nepastovieji rezonatoriai, kurių išvadinis spindulys yra kolimuotas. Tokie rezonatoriai vadinami konfokaliais nepastoviais rezonatoriais ir yra dažniausiai naudojami. Tokias teigiamos šakos rezonatoriui tenkinama sąlyga:

$$R_r - R_0 = 2d, \quad (1.28)$$

o neigiamos šakos:

$$R_r + R_0 = 2d. \quad (1.29)$$

Tačiau neigiamos šakos nepastovaus rezonatoriaus viduje susidaro pluošto sąsmauka, kurioje intensyvumas gali būti toks didelis, kad sukeltų aktyvios terpės suardymą arba jonizaciją, kurie yra labai nepageidaujami reiškiniai. Todėl praktikoje yra dažniausiai naudojami teigiamos šakos rezonatoriai.

Teigiamos šakos rezonatorių kreivumo spinduliai R_0 ir R_r , bei dalis pluošto, išeinantis pro mažesniojo veidrodžio kraštus, gali būti išreikšti per rezonatoriaus didinimą ir jo ilgį:

$$R_0 = \frac{2d}{M-1}, \quad (1.30)$$

$$R_r = \frac{2Md}{M-1}, \quad (1.31)$$

$$\delta = 1 - \frac{1}{M^2}. \quad (1.32)$$

Kiekybiškai nepastovaus rezonatoriaus difrakciniai nuostoliai gali būti apibūdinti ekvivalentiniu Frenelio skaičiumi:

$$N = \frac{M-1}{2M^2} \frac{a^2}{\lambda d}. \quad (1.33)$$

Yra nustatyta, kad difrakciniai nuostoliai yra minimalūs, kai $N = 0.5; 1.5; 2.5; \dots$. Šiuo atveju išeinančio iš rezonatoriaus pluošto dalis artima geometrinei išraiškai (1.32).

Jei laikysime, kad įduboje veidrodžio kreivumo spindulys yra teigiamas, o iškyloje – neigiamas, tai nepastoviam konfokaliam rezonatoriui turėsime:

$$\frac{R_0}{2} + \frac{R_r}{2} = d, \quad (1.34)$$

o pasinaudojus parametų g išraiškomis ir pastovumo sąlyga, galima perrašyti:

$$g_1 + g_2 = 2g_1g_2. \quad (1.35)$$

Iš šios išraiškos išplaukia, kad toks rezonatorius yra nepastovioje (g_1, g_2) plokštumoje, išskyrus taškus $g_1 = g_2 = 0$ ir $g_1 = g_2 = 1$. Todėl visi simetriniai konfokalieji rezonatoriai yra nepastovūs. Tokio tipo nepastovieji rezonatoriai yra patrauklūs praktiniams taikymams, kadangi vienas iš rezonatoriuje sklindančių pluoštų visada yra kolimuotas ir gali būti panaudotas kaip išvadinis rezonatoriaus pluoštas. [5]

2. Gauso pluoštai

Kaip buvo minėta įvade, pastoviųjų ir nepastovimųjų rezonatorių pluoštų savybes gerai aprašo Gauso pluoštai arba jų kombinacijos. Todėl šiame skyriuje nuodugniau aptarsime tokių Gauso pluoštų savybes.

2. 1. Ritiniai Gauso pluoštai

Gauso pluošto lauko funkcija tenkina parabolinę bangų lygtį. Parabolinės lygties

$$\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} - 2ik \frac{\partial U}{\partial z} = 0, \quad (2.1)$$

pats paprasčiausias sprendinys yra funkcija:

$$U = \exp\left(-i\left(P + \frac{k}{2q}(x^2 + y^2)\right)\right), \quad (2.2)$$

čia P , q – išilginės koordinatės z kompleksinės funkcijos. Bangos skaičius ir dvejetas eksponentės vardiklyje paimti dėl patogumo. Parametras $P(z)$ nusako kompleksinį fazės poslinkį, o $q(z)$ charakterizuoja amplitudės pasiskirstymą skersinėse plokštumose ir fazinio paviršiaus kreivumą.

Ši (2.2) išraiška aprašo Gauso pluoštus, vadinamas ritinines nulines Gauso pluošto bangas. Tai reiškia, kad tokio pluošto laukas turi apskritiminę simetriją ir skersinėje plokštumoje kinta pagal Gauso dėsnį $\exp(-ar^2)$. Toliau išsamiau panagrinėsime pagrindinės nulinės modos savybes.

Įstatę (2.2) lygtį į (2.1) ir esant vienodiems kintamųjų x ir y laipsniams koeficientus prilyginę nuliui (2.1) lygtį turi tenkinti bet kokios šių kintamųjų reikšmės), gauname lygtis leidžiančias nustatyti P ir q :

$$\frac{dq}{dz} = 1, \quad (2.3)$$

$$\frac{dP}{dz} = -\frac{i}{q}. \quad (2.4)$$

Iš (2.3) lygties surandame sprendinį:

$$q(z) = q_0 + z. \quad (2.5)$$

Integravimo konstanta q_0 surandama pasinaudojus ribinėmis sąlygomis. Koordinačių pradžia ($z = 0$) geriausia pasirinkti tokioje vietoje, kur elektromagnetinių bangų lauko fazinis paviršius plokščias. Tokiu atveju galima teigti, kad kai $z = 0$ amplitudė $\varphi(x, y, z)$ turi pavidalą:

$$U = \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{\omega_0^2}\right), \quad (2.6)$$

kur ω_0 – skersinis šviesos pluošto spindulys. Jis nustatomas remiantis tuo, jog lauko amplitudė atstumu

$$r = \sqrt{x^2 + y^2} = \omega_0^2, \quad (2.7)$$

yra e kartų mažesnė už jos reikšmę pluošto ašyje ($x = 0, y = 0, z = 0$). Sulyginę (2.6) lygtį su (2.2), taip pat matome, kad koordinatinių pradžioje fazės poslinkis $P(z) = 0$. Matome, jog integravimo konstanta q_0 yra lygi menamam skaičiui:

$$q_0 = \frac{ik\omega_0^2}{2} = iz_0. \quad (2.8)$$

Remdamiesi šia lygtimi galime parašyti:

$$q(z) = iz_0 + z. \quad (2.9)$$

Iš (2.3) lygties turime:

$$iP(z) = \ln(iz_0 + z) + \ln P_0. \quad (2.10)$$

Atsižvelgdami, kad $P(0) = 0$, surandame:

$$P_0 = -\ln iz_0. \quad (2.11)$$

Iš to išplaukia, kad

$$iP(z) = \ln \frac{iz_0 + z}{iz_0} = \ln \left(1 - \frac{iz}{z_0}\right). \quad (2.12)$$

Atsižvelgę į pastarąją lygtį, atlikę prastus pertvarkymus gauname:

$$\exp[-iP(z)] = \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2}\right)^{-1/2} \left(i \cdot \operatorname{arctg} \frac{z}{z_0}\right). \quad (2.13)$$

Tokiu būdu, nustatėme funkcijas $P(z)$ ir $q(z)$ ir suradome (2.1) lygties sprendinį. Toliau panagrinėsime tokių pluoštų savybes. Patogu įvesti du naujus parametrus R ir ω sekančio santykio pagalba:

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{R} - i \frac{\lambda}{\pi \omega^2}. \quad (2.14)$$

Iš (2.9) ir (2.14) lygčių surandame:

$$R(z) = z \left(1 + \frac{z_0^2}{z^2}\right), \quad (2.15)$$

$$\omega^2(z) = \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right). \quad (2.16)$$

Įstatydami priklausomybes (2.13) – (2.16) į (2.2) lygtį, o po to į bet kurios lako komponentės lygtį

$$E = U(x, y, z) \exp(-ikz),$$

įsitikiname, kad bet kuri elektromagnetinio lauko Gauso pluošto komponentė gali būti užrašyta tokiu pavidalu:

$$E = \frac{\omega_0}{\omega} \exp \left(-ikz + i\phi - i \frac{k}{2R} (x^2 + y^2) - \frac{x^2 + y^2}{\omega^2} \right), \quad (2.17)$$

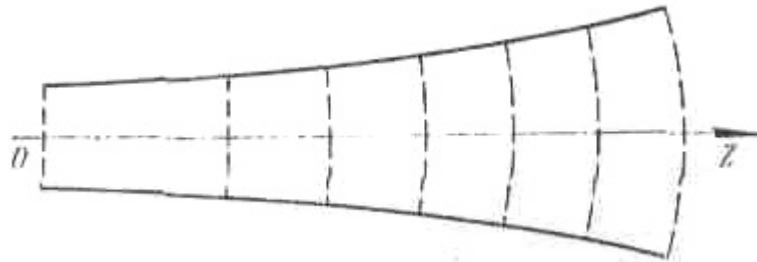
kur

$$\phi = \arctg \frac{z}{z_0}. \quad (2.18)$$

Kaip matome, trečias ir ketvirtas nariai, eksponentės laipsnio rodiklyje, nusako fazinio fronto ir pluošto amplitudės pasikeitimus lyginant su plokščia banga, o antras narys – pluošto fazės skirtumą, nuo fazės plokščios bangos, kuri sąlygoja difrakcija. Pluošto fazinis paviršius nustatomas lygtimi:

$$kz + \frac{k(x^2 + y^2)}{2R} - \Phi = kz_1. \quad (2.19)$$

Ši lygtis gaunama (2.17) lygties eksponentės rodiklio menamą dalį sulyginus su kz_1 .



10 pav. Gauso šviesos pluoštas. Ištisinėmis linijomis pavaizduota erdvinė pluošto forma, punktyrinėmis – fazinis paviršius.

Kadangi fazės poslinkis Φ lyginant su kitais (2.19) lygties nariais nedidelis, į jį galima nekreipti dėmesio. Tuomet iš 19 lygties seka:

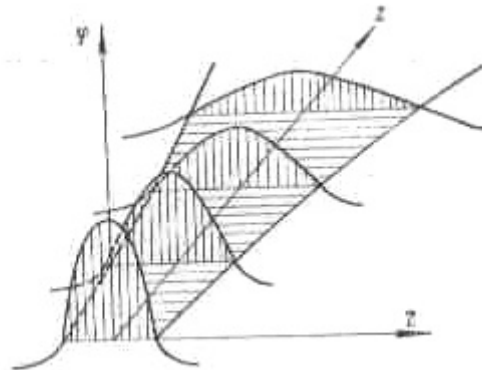
$$\frac{x^2 + y^2}{2R} = z_1 - z_2. \quad (2.20)$$

Tai sukimosi paviršiaus lygtis. Parametras R yra šio paviršiaus kreivumo spindulys taškams, esantiems pluošto ašyje Oz (10 pav.). Duotojo paviršiaus kreivumo centro koordinatės yra:

$$\left(0; 0; -\frac{z_0^2}{z_1} \right).$$

Kadangi kai $x = 0$, $y = 0$ dydis $z_1 = z$. Iš to seka, kad z_1 lygi koordinatei z , kurioje fazinis paviršius kerta ašį Oz . Paėmus R išvestinę pagal z , matome, kad fazinio paviršiaus maksimalus išsikreipimas stebimas kai $z = \pm z_0$. Šiuose taškuose $R_{\min} = 2z_0$. Iš to seka, kad fazinio paviršiaus kreivumo spindulys sumažėja nuo $R = \infty$, kai $z = 0$ iki $R_{\min} = 2z_0$, kai $z = z_0$, o po to vėl užauga iki begalybės, kai $z \rightarrow \infty$. Tai reiškia, kad pirminis plokščias fazės paviršius, kai $z = 0$ išsikreivina, o po to vėl artėja prie plokštumos. Lazero pluoštams ($\lambda \sim 1 \mu\text{m}$, $\omega_0 \sim 1 \text{ mm}$) $R \sim 2-3 \text{ m}$.

Pluošto erdvinę formą nusako jo amplitudės kitimas. Kaip seka iš (2.17) lygties amplitudė $U(x, y, z)$ skersinėse plokštumose tolstant nuo ašies kinta pagal Gauso dėsnį. Dėl to, didėjant pluošto sklidimo nuotoliui (didėjant z), didėja Gauso koeficientas ω^2 , kuris lemia skersinius pluošto matmenis. Tai reiškia, kad Gauso pluoštas plečiasi, jo skersiniai matmenys didėja (11 pav.).



11 pav. Pagrindinio Gauso pluošto amplitudės pasiskirstymo priklausomybė nuo prasiskverbimo ir į terpę gylis.

Mažiausi pluošto matmenys nusakomi dydžiu ω_0 . Daugiklis $\frac{\omega_0}{\omega}$ (2.17) lygtyje charakterizuoja lėtą amplitudės mažėjimą augant z . Taip yra dėl difrakcinio išsiskleidimo.

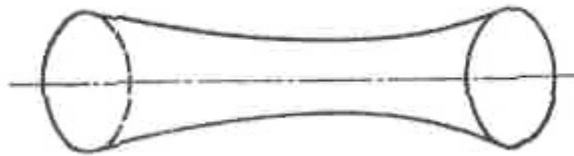
Gauso pluoštų erdvinio paviršiaus formą galima surasti preliminariai apibrėžus sąlygas koku būdu jos ieškoti. Gauso pluoštų teorijoje pluošto forma ieškoma kaip paviršius, kurį erdvėje sudaro taškai, turintys lauko amplitudę e kartų mažesnę už taškus, esančius tame pačiame skerspjūvyje ant centrinės ašies. Dėl to Gauso pluoštus aprašanti lygtis gaunama iš (2.17) lygties, eksponentės materialųjį rodiklį prilyginus vienetui. Tokiu būdu surandame:

$$\frac{x^2 + y^2}{\omega^2} = 1, \quad (2.21)$$

arba

$$x^2 + y^2 = \omega_0^2 \left(1 + \frac{z^2}{z_0^2} \right). \quad (2.22)$$

Tai vienašakio sukimosi hiperboloido lygtis.



12 pav. Gauso pluošto erdvinė forma.

Pluošto difrakcinio išsiskleidimo kampas tolimoje zonoje lygus kampui tarp hiperboloido asimptočių ir jo centrinės ašies. Atitinkamai iš (2.22) lygties gauname:

$$\theta = \frac{\lambda}{\pi \omega_0}. \quad (2.23)$$

Jeigu įvesime pluošto mažiausią diametrą $D_0 = 2\omega_0$, ir (2.23) lygtį užrašysime pavidalu:

$$\theta = \frac{2}{\pi} \frac{\lambda}{D_0} \cong 0.63 \frac{\lambda}{D_0}, \quad (2.24)$$

tai įsitikinsime, kad Gauso pluoštų išsiskleidimas šiek tiek didesnis už difrakcinį išsiskleidimą

plokščiai bangai difraguojant per apvalią angą $\left(\theta \cong 0.61 \frac{\lambda}{D} \right)$.

Išnagrinėjome nulinio tipo Gauso pluošto bangos savybes. Kitaip šį bangų tipą vadina nulinės eilės Gauso pluoštu. Tokio pluošto amplitudė maksimali jo centre ir monotoniškai kinta iki nulio traukiantis nuo ašies

2. 2. Gauso pluoštų transformacijos

Žinoma, jog Gauso pluoštai gerai aprašo savuosius virpesius, vykstančius lazerių rezonatoriuose bei optiniuose šviesolaidžiuose. Tačiau lazerinėje technikoje labai dažnai naudojami iš kelių rezonatorių sudaryti sudėtiniai generatoriai. Praktikoje taip pat kartais reikia lazerio spindulius nukreipti į rezonatorių arba šviesolaidį. Tuomet reikia suderinti vienos sistemos savuosius virpesius su kitos sistemos savaisiais virpesiais. Toks suderinimas gaunamas transformuojant Gauso pluoštus.

Transformacijos procesas numato, kad pereinant iš vienos sistemos į kitą, bus suderinti pluoštų skersiniai matmenys ir faziniai paviršiai. Kadangi bet kokios eilės pluoštų matmenys ir fazinių paviršių forma sutampa su tomis pačiomis charakteristikomis pagrindinio (nulinio) pluošto, pakaks išnagrinėti pagrindinio pluošto transformacijos savitumus.

Kadangi pagrindinės Gauso pluošto savybės nustatomos kompleksiniu parametru $q(z)$, pluošto transformacijos dėsnį erdvėje arba kokioje nors optinėje sistemoje sužinosime, išsiaiškinę kaip transformuojasi parametras q . Pavyzdžiui, jeigu viename rezonatoriaus veidrodyje (įėjime) šviesos pluoštą charakterizuoja parametras q_1 , tai atitinkamai antrame veidrodyje (išėjime) gausime:

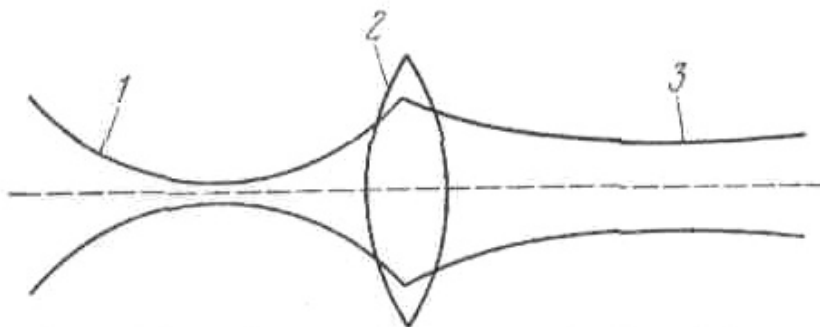
$$q_2 = q_1 + d, \quad (2.25)$$

kur d – atstumas tarp veidrodžių. Kad pluoštas antrame veidrodyje neišsikreiptų, reikia antrojo veidrodžio kreivumą parinkti tokį, kad jis atitektų pluošto kreivumą, nusakomą parametru q_2 .

Šviesos pluoštai dažniausiai transformuojami plonų lęšių pagalba. Lęšiai naudojami lazerio pluošto fokusavimui, arba tiesiog norint pakeisti šviesos lauko skersinius matmenis bei fazinį paviršių. Žinoma, kad bangos, kurių bangos fronto kreivumo spindulys yra R_1 , transformuosius lęšiais į bangas, kurių bangos fronto kreivumo spindulys R_2 pagal dėsnį:

$$\frac{1}{R_2} = \frac{1}{R_1} - \frac{1}{f}, \quad (2.26)$$

kur f – lęšio židinio nuotolis. Kadangi Gauso pluoštas turi sferinį fazinį paviršių su tam tikru kreivumo spinduliu, šviesos pluošto fazinio paviršiaus transformacijos dėsnis sutaps su (2.26) dėsniu.



13 pav. Gauso pluošto transformacija plonuoju lęšiu: 1 – krintantis pluoštas, 2 – lęšis, transformuojantis pluoštus, 3 – transformuotas pluoštas.

Jeigu atsižvelgsime, jog plonas lęšis neturėtų pakeisti pluošto skersinių matmenų, tai pagal (2.14) ir (2.26) formules gausime Gauso pluoštų transformacijos dėsnį ploniems lęšiams:

$$\frac{1}{q_2} = \frac{1}{q_1} - \frac{1}{f}, \quad (2.27)$$

kur q_1 – pluošto parametras įeinant į lęšį, o q_2 – išeinant.

Kad nustatytume kaip transformuojasi pluoštas esantis atstumu d_1 nuo lęšio, į pluoštą esantį atstumu d_2 už lęšio, būtina, kartu su (2.27) dėsniu atsižvelgti į (2.25) formulę. Tuomet atsižvelgę į ženklus prieš d_1 ir d_2 gauname trijų lygčių sistemą:

$$\begin{aligned} q_1' &= q_1 - d_1 \\ q_2 &= q_2' + d_2 \\ \frac{1}{q_2'} &= \frac{1}{q_1'} - \frac{1}{f} \end{aligned} \quad (2.28)$$

kur q_1 ir q_2 yra pluošto parametrai atitinkamai prieš ir už lęšio. Iš (2.28) lygčių sistemos surandame:

$$q_2 = \frac{\left(1 - \frac{d_2}{f}\right)q_1 + \left(d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f}\right)}{-\frac{q_1}{f} + \left(1 - \frac{d_1}{f}\right)}. \quad (2.29)$$

Bet kokios sistemos (lęšiais, šviesolaidžiais, rezonatoriais ir t. t.) Gauso pluoštų transformaciją galima aprašyti pasinaudojus kompleksinio parametro q matricinėmis transformacijomis. Transformacijos (2.25), (2.27) ir (2.29) dėsnius galima užrašyti bendru pavidalu pagal taip vadinamą $ABCD$ dėsnį:

$$q_2 = \frac{Aq_1 + B}{Cq_1 + D}. \quad (2.30)$$

Pagal tai iš koeficientų A, B, C, D dėl (2.25), (2.27), (2.29) dėsnių galima sudaryti matricas:

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & d_1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.31)$$

$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}, \quad (2.32)$$

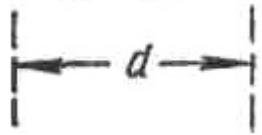
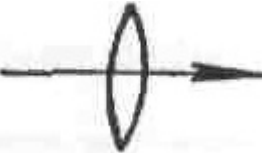
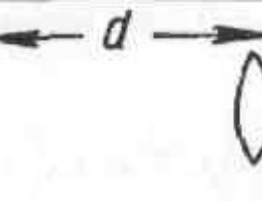
$$\begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 - \frac{d_2}{f} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f} \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d_1}{f} \end{pmatrix}. \quad (2.33)$$

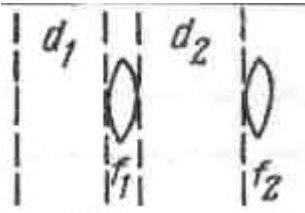
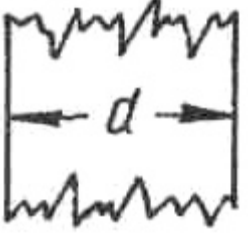
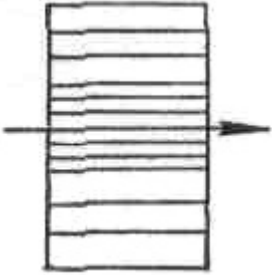
Nesunkiai galima įsitikinti, kad sudėtingo transformavimosi (2.33) matrica virsta sandauga dviejų matricų, kurios transformuojasi paprastai ir nuosekliai. Paprastų transformacijų $ABCD$ matricos, yra transformacijos matricos spindulių, kurie sudaro mažus kampus su optinės sistemos ašimi. Dėl to šios matricos tinka praktiškai visoms optinėms sistemoms.

Aišku, kad norint rasti, bet kokio sudėtingumo Gauso pluošto transformacijų dėsnį, pakanka nustatyti matricą, iš kurios matytųsi paprastos šios sistemos dauginamosios matricos. Lentelėje surašytos paprastų optinių elementų transformacijos matricos.

1 lentelė

Šviesos spindulių transformacijų elementai

Optinė sistema	Optinės sistemos schema	Transformacijos matrica
Atstumas erdvėje		$\begin{pmatrix} 1 & d \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$
Plonas lęšis		$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{f} & 1 \end{pmatrix}$
Atstumas d esantis plonas lęšis		$\begin{pmatrix} 1 & d \\ -\frac{1}{f} & 1 - \frac{d}{f} \end{pmatrix}$

Dviejų lęšių sistema		$\begin{matrix} 1 - \frac{d_2}{f_1} & d_1 + d_2 - \frac{d_1 d_2}{f_1} \\ -\frac{1}{f_1} - \frac{1}{f_2} + \frac{d_2}{f_1 f_2} & 1 - \frac{d_1}{f_2} - \frac{d_2}{f_2} + \frac{d_1 d_2}{f_1 f_2} \end{matrix}$
Plokštelė lygiagrečiomis sienelėmis		$\begin{matrix} 1 & d \\ 0 & n \end{matrix}$
Plokščia kvadratinė nevienalytė terpė		$\begin{matrix} \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \frac{1}{\sqrt{n_0 n_2}} \sin \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \\ -\sqrt{n_0 n_2} \sin d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} & \cos d \sqrt{\frac{n_2}{n_0}} \end{matrix}$

ABCD dėsnis teisingas daugeliui paprastų optinių sistemų ir netgi kvadratinėms nevienalytėms terpėms. Tačiau šio dėsnio negalima taikyti terpėse su bet koku skersiniu lūžio rodiklio pasiskirstymu, bei lęšiams, kurių aberacijos iškreipia skersinį pluošto intensyvumo pasiskirstymą ne pagal Gauso dėsnį.

Reiktų pastebėti, kad griežtai ir tiksliai sprendžiant pluoštų transformacijos uždavinį, reiktų įvertinti tai, jog dalis energijos atsispindi nuo dviejų terpių ribos. Tačiau tai susiję su dideliais skaičiavimais, ir apytikslėje Gauso pluoštų teorijoje ne visuomet būtina. [27]

3. Skaliarinė difrakcijos teorija

Gauso pluoštų teorija gerai tinka lazerio pluoštų savybėms aprašyti tik tuomet, jei Gauso pluošto skersinis amplitudės skirstinys nėra iškraipomas lazerio ar optinės sistemos elementų, tokių kaip apertūros, diafragmos ar lęšių aberacijos. Tuo atveju, kai koherentinės šviesos pluoštas stipriai skiriasi nuo Gauso pluošto, jo sklidimui erdvėje ar optinėje sistemoje aprašyti būtina taikyti optinių bangų difrakcijos teoriją. Bendroji difrakcijos teorija yra sudėtinga, tačiau daugeliu atvejų lazerio pluoštų sklidimui nagrinėti pakanka paprastesnės skaliarinės difrakcijos teorijos ir iš jos išplaukiančio Frenelio artinio. Todėl toliau glaustai pateiksime skaliarinės difrakcijos teorijos pagrindus.

3. 1. Bangų lygtis

Nesant laisvų krūvininkų Maksvelo lygčių sistema SI turi tokį pavidalą:

$$\begin{aligned}\nabla \times \vec{E} &= -\mu \frac{\partial \vec{H}}{\partial t}, \\ \nabla \times \vec{H} &= \varepsilon \frac{\partial \vec{E}}{\partial t}, \\ \nabla \cdot \varepsilon \vec{E} &= 0, \\ \nabla \cdot \mu \vec{H} &= 0.\end{aligned}\tag{3.1}$$

Čia \vec{E} – elektrinis laukas, kurio komponentės Dekarto koordinačių sistemoje (E_x, E_y, E_z) ; \vec{H} – magnetinis laukas, kurio komponentės (H_x, H_y, H_z) ; μ – magnetinė medžiagos skvarba; ε – dielektrinė skvarba. Simboliai \times ir \cdot atitinkamai reiškia vektorinę ir skaliarinę sandaugas, o nabla operatorius lygus:

$$\nabla = \frac{\partial}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial}{\partial z} \vec{k},\tag{3.2}$$

čia $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ – vienetiniai x, y, z ašių vektoriai.

Laikysime, kad banga juda dielektrike, kuris yra tiesinis, izotropinis ir homogeninis. Taip pat laikysime, kad medžiagos dispersija yra nesvarbi, bei medžiaga nemagnetinė ($\mu = 1$). Pritaikę rotoriaus operatorių pirmos Maksvelo lygties kairiajai pusei, gauname:

$$\nabla \times (\nabla \times \vec{E}) = \nabla (\nabla \cdot \vec{E}) - \nabla^2 \vec{E}.\tag{3.3}$$

Jei terpė tiesinė, izotropinė ir homogeninė ($\varepsilon = \text{const}$) ir be dispersijos, tai turime tokią bangų lygtį elektriniam laukui:

$$\nabla^2 \vec{E} - \frac{\bar{n} \partial^2 \vec{E}}{c^2 \partial t^2} = 0, \quad (3.4)$$

čia n – medžiagos lūžio rodiklis, kuris lygus

$$n = \left(\frac{\varepsilon}{\varepsilon_0} \right)^{\frac{1}{2}}, \quad (3.5)$$

ε_0 – vakuumo dielektrinė skvarba, c – šviesos greitis, kuris lygus

$$c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \varepsilon_0}}. \quad (3.6)$$

Magnetinis laukas tenkina tokią pačia bangų lygtį:

$$\nabla^2 \vec{H} - \frac{n^2 \partial^2 \vec{H}}{c^2 \partial t^2} = 0. \quad (3.7)$$

Tokias pačias bangų lygtis tenkina ir elektrinio bei magnetinio lauko vektorių komponentės.

Pavyzdžiui, E_x komponentei turime:

$$\nabla^2 E_x - \frac{n^2 \partial^2 E_x}{c^2 \partial t^2} = 0, \quad (3.8)$$

Tokios pat lygtys bus ir komponentėms E_y, E_z, H_x, H_y ir H_z . Todėl visoms komponentėms galime užrašyti vieną bendrą skaliarinę lygtį:

$$\nabla^2 u(\vec{r}, t) - \frac{n^2 \partial^2 u(\vec{r}, t)}{c^2 \partial t^2} = 0, \quad (3.9)$$

kurioje funkcija $u(\vec{r}, t)$ reiškia bet kurią laukų vektorių komponentę, kuri priklauso nuo erdviųjų koordinačių r ir laiko t .

3. 2. Helmholtz lygtis

Išvesime lygtį, kurią tenkina monochromatinės bangos nuo laiko nepriklausanti amplitudė. Monochromatinei stacionariai bangai funkcija $u(\vec{r}, t)$ galime užrašyti taip:

$$u(\vec{r}, t) = A(\vec{r}) \cos[2\pi \nu t - \phi(\vec{r})], \quad (3.10)$$

čia $A(\vec{r})$ ir $\phi(\vec{r})$ yra bangos amplitudė ir fazė erdvės taške, kurio koordinatė r , o ν optinis dažnis. Kompaktiškiau (3.10) lygtis gali būti perrašyta naudojant kompleksinius žymėjimus:

$$u(\vec{r}, t) = \operatorname{Re}\{U(\vec{r}) \exp(-j2\pi vt)\}, \quad (3.11)$$

čia $U(\vec{r})$ – yra kompleksinė erdvinių koordinačių funkcija (kartais vadinama fazoru):

$$U(\vec{r}) = A(\vec{r}) \exp[j\phi(\vec{r})]. \quad (3.12)$$

Tada iš bangų lygties skaliarinei funkcijai $u(\vec{r}, t)$

$$\nabla^2 u - \frac{n^2 \partial^2 u}{c^2 \partial t^2} = 0, \quad (3.13)$$

kurioje ∇^2 yra Laplaso operatorius, įstatę (3.11) lygtį į (3.13) gauname tokią lygtį funkcijai U :

$$(\nabla^2 + k^2)U = 0. \quad (3.14)$$

Šioje lygtyje bangos skaičius k lygus:

$$k = 2\pi n \frac{v}{c} = \frac{2\pi}{\lambda}. \quad (3.15)$$

(3.14) lygtis vadinama Helmholco lygtimi. Toliau paprastumo dėlei laikysime, kad banga sklinda vakuumu, t. y. lūžio rodiklis $n = 1$.

3.3. Helmholco ir Kirchhofo integralai

Tegul P_0 žymi stebėjimo tašką, kurią gaubia uždaras paviršius S kaip pavaizduota 14 paveiksle. Tolimesnis uždavinys yra rasti optinį signalą taške P_0 , kai žinomas signalas paviršiuje S . Šiam uždaviniui spręsti naudosime Kirchhofo metodą ir Green'o teoremą:

$$\iiint_V (U \nabla^2 G - G \nabla^2 U) dv = \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds, \quad (3.16)$$

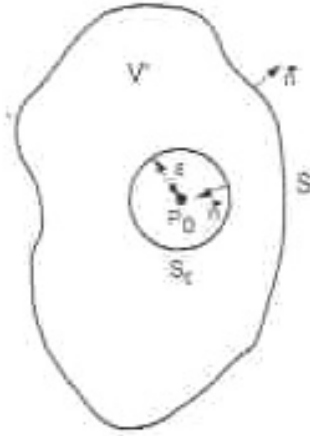
čia $U(r)$ ir $G(r)$ bet kokios kompleksinio kintamojo funkcijos, o V paviršiaus S juosiamas tūris,

bei $\frac{\partial}{\partial n}$ reiškia išvestinę išilgai n normalės.

Pasirinkime funkciją G vienetinės amplitudės sferinę bangą sklindančią iš taško P_0 .

Tada G funkcijos išraiška bus

$$G(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}. \quad (3.17)$$



14 pav. Integravimo paviršius

Kadangi G funkcija turi būti tolydinė visame tūryje V , tai tašką P_0 išmesime apgaubę nykstantai mažo spindulio ε paviršiumi S_ε . Tada Green'o teoremą galime taikyti tūriui V' , kuris yra tarp paviršių S ir S_ε , o paviršius gaubiantis šį tūrį V' bus paviršių suma

$$S' = S + S_\varepsilon \quad (3.18)$$

kaip pavaizduota 14 paveiksle. Tada tūryje V' funkcija G yra besiplečianti sferinė banga, tenkinanti Helmholco lygtį

$$(\nabla^2 + k^2)G = 0. \quad (3.19)$$

Įstatę Helmholco lygtis (3.14) ir (3.19) į Green'o teoremos kairiąją pusę, turime

$$\iiint_{V'} (\nabla^2 G - G \nabla^2 U) dv = - \iiint_{V'} (UGk^2 - GUk^2) dv \equiv 0 \quad (3.20)$$

ir

$$\iint_{S'} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = 0 \quad (3.21)$$

arba

$$- \iint_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \iint_S \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds. \quad (3.22)$$

Pastebėsime, kad bet kokiam taškui P_1 paviršiuje S' turime

$$G(P_1) = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (3.23)$$

ir

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \quad (3.24)$$

čia $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01})$ – kampas tarp išorinės normalės \vec{n} ir vektoriaus \vec{r}_{01} . Atskiru atveju, kai taškas P_1 yra paviršiuje S_ε , $\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) = -1$, (3.23) ir (3.24) lygtys turi tokius pavidalus:

$$G(P_1) = \frac{e^{jk\varepsilon}}{\varepsilon} \quad \text{ir} \quad \frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \frac{e^{jk\varepsilon}}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right). \quad (3.25)$$

Kai mažos sferos spindulys ε artėja į nulį, gauname, kad

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \iint_{S_\varepsilon} \left(U \frac{\partial G}{\partial n} - G \frac{\partial U}{\partial n} \right) ds = \\ \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} 4\pi \varepsilon^2 \left[U(P_0) \frac{\exp(jk\varepsilon)}{\varepsilon} \left(\frac{1}{\varepsilon} - jk \right) - \frac{\partial U(P_0) \exp(jk\varepsilon)}{\partial n \varepsilon} \right] = 4\pi U(P_0) \end{aligned} \quad (3.26)$$

Įstatę (3.26) lygtį į (3.22) randame lauko kompleksinę amplitudę taške P_0 :

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_S \left\{ \frac{\partial U}{\partial n} \left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \right] - U \frac{\partial}{\partial n} \left[\frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \right] \right\} ds. \quad (3.27)$$

Pastaroji išraiška žinoma kaip Helmholco ir Kirchhofo integralinė teorema. Ja remiantis galima apskaičiuoti optinės bangos amplitudę taške P_0 jei žinomas bangos lauko pasiskirstymas tašką P_0 gaubiančiame bet kokiame paviršiu.

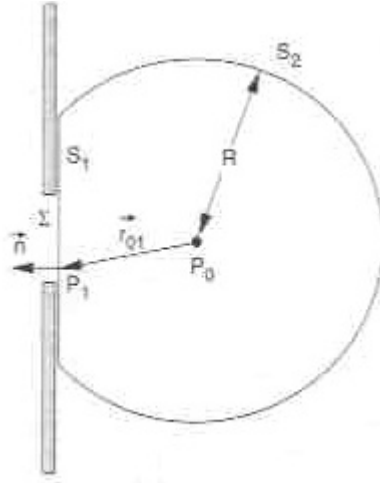
3. 4. Difrakcija už plokščio ekrano

Nagrinėsime difrakcijos uždavinį už plokščio ekrano, kuriame yra kiaurymė (15 pav.) į kurią iš kairės krenta monochromatinė banga. Taške P_0 , laukui apskaičiuoti taikysime Helmholco ir Kirchhofo integralinę teoremą. Kruopščiai pasirenkame tašką P_0 gaubiantį paviršių, kad skaičiavimas būtų kuo paprastesnis. Nagrinėsime uždarą paviršių S , kuris susideda iš dviejų paviršių (15 pav.): plokščio paviršiaus S_1 prigludusio prie ekrano ir su juo sujungto didelio spindulio R sferinio paviršiaus S_2 , kurio centras yra taške P_0 . Tada (3.27) lygtį galime užrašyti:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1+S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds; \quad (3.28)$$

čia kaip ir ankščiau

$$G = \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}. \quad (3.29)$$



15 pav. Plokščias ekranas su kiauryme.

Sferinio paviršiaus S_2 spinduliui R didėjant, funkcijos U ir G proporcingai $\frac{1}{R}$ mažėja, artėja į nulį. Todėl integralas paviršiumi S_2 taip pat artėja į nulį. Pastarasis teiginys nėra visiškai pagrįstas, nes paviršiaus plotas auga proporcingai R^2 , todėl reikalingas nuoseklesnis pagrindimas, kurį toliau pateiksime.

Paviršiuje S_2 ,

$$G = \frac{\exp(jkR)}{R}, \quad (3.30)$$

tada iš (3.24) lygties

$$\frac{\partial G}{\partial n} = \left(jk - \frac{1}{R} \right) \frac{\exp(jkR)}{R} \approx jkG, \quad (3.31)$$

jei tikrai R didelis. Tada integralas paviršiumi S_2 gali būti perrašytas taip:

$$\iint_{S_2} \left(G \frac{\partial U}{\partial n} - U(jkG) \right) ds = \int_{\Omega} G \left(\frac{\partial U}{\partial n} - jkU \right) R^2 d\omega, \quad (3.32)$$

čia Ω - erdvinis kampas, kuriuo matomas paviršius S_2 iš taško P_0 . Tada tam, kad (3.32) lygties integralas artėtų į nulį, kai R neapibrėžtai auga, reikia, kad būtų tenkinama sąlyga:

$$\lim_{R \rightarrow \infty} R \left(\frac{\partial U}{\partial n} - jkU \right) = 0. \quad (3.33)$$

Pastaroji išraiška žinoma, kaip Zomerfeldo spinduliavimo sąlyga. Ji tenkinama jei U mažėja bent jau tokiu pačiu greičiu, kaip ir sferinei bangai, kuri yra tolstanti nuo taško P_0 .

3. 5. Kirchhofo kraštinės sąlygos

Įrodžius, kad didelio spindulio sferinio paviršiaus integralas artėja į nulį, gauname išraišką laukui taške P_0 , kurioje įeina tik lauko išvestinė išilgai normalės begaliniam plačiam paviršiui S_1 :

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{S_1} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (3.34)$$

Intuityviai aišku, kad neskaidriam ekranui, pagrindinį indėlį integruojant paviršiumi S_1 turėtų įnešti tie paviršiaus taškai, kurie yra kiaurymės plote. Todėl Kirchhofo difrakcijos teorijoje daromos tokios prielaidos:

1. Paviršiaus plote Σ ties kiauryme laukas U ir jo išvestinė yra tokia, kaip ir nesant ekranui.
2. Likusioje S_1 paviršiaus dalyje laukas U ir jo išvestinė lygi nuliui.

Šios prielaidos žinomos kaip Kirchhofo kraštinės sąlygos. Jos leidžia apskaičiuoti optinį lauką už kiaurymės, neatsižvelgiant į ekrano įtaką. Tada (3.34) lygtį reikia integruoti tik paviršiaus plote Σ :

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \left(\frac{\partial U}{\partial n} G - U \frac{\partial G}{\partial n} \right) ds. \quad (3.35)$$

Nors Kirchhofo kraštinės sąlygos ženkliai supaprastina difrakcijos uždavinio sprendimą, tačiau reikia turėti omenyje, kad jos nėra visiškai tikslios, kadangi ekranas šiek tiek veikia lauko pasiskirstymą kiaurymės paviršiuje Σ . Tik tuo atveju jei kiaurymės matmenys daug didesni už šviesos bangos ilgį, ekrano įtaka laukui kiaurymės plokštumoje gali būti laikoma maža ir jos nepaisoma.

3.6. Frenelio-Kirchhofo difrakcijos formulės

Išraišką (3.35) galima dar supaprastinti, jei atstumas r_{01} nuo kiaurymės plokštumos iki stebėjimo taško P_0 yra daug didesnis už bangos ilgį. Tada, kadangi $k \gg \frac{1}{r_{01}}$, (3.24) lygtį galime perrašyti:

$$\frac{\partial G(P_1)}{\partial n} = \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \left(jk - \frac{1}{r_{01}} \right) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \approx jk \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}}. \quad (3.36)$$

Įstatę (3.36) ir (3.23) išraiškas į (3.35) lygtį, turime:

$$U(P_0) = \frac{1}{4\pi} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \left(\frac{\partial U}{\partial n} - jkU \cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) \right) ds. \quad (3.37)$$

Jei kiaurymę apšviečia pavienė sferinė banga, kurios centras yra taške P_2 , tada

$$U(P_1) = \frac{A \exp(jkr_{21})}{r_{21}}, \quad (3.38)$$

čia r_{21} - atstumas nuo P_2 iki taško P_1 kiaurymės plokštumoje. Jei r_{21} yra daug didesnis už bangos ilgį, (3.37) lygtį galime dar supaprastinti:

$$U(P_0) = \frac{A}{j\lambda} \iint_{\Sigma} \frac{\exp(jk(r_{21} + r_{01}))}{r_{21}r_{01}} \left(\frac{\cos(\vec{n}, \vec{r}_{01}) - \cos(\vec{n}, \vec{r}_{21})}{2} \right) ds. \quad (3.39)$$

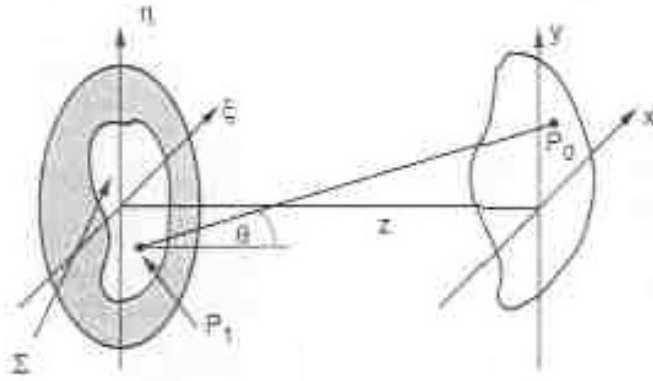
Gautoji išraiška, kai kiaurymę apšviečia pavienis taškinis šaltinis, vadinama Frenelio-Kirchhofo formule.

3.7. Frenelio ir Fraunhoferio artiniai

Aptarsime, kaip būtų galima supaprastinti Frenelio-Kirchhofo formulę. Gausime taip vadinamas Frenelio ir Fraunhoferio formules, kurios plačiai naudojamos optinių bangų difrakcijos uždaviniams spręsti.

Pirmiausia apibrėžime skaliarinės monochromatinės bangos intensyvumą, kaip dydį lygų bangos amplitudės modulio kvadratui:

$$I(P) = |U(P)|^2. \quad (3.40)$$



16 pav. Geometrinė difrakcija.

Toliau remsimės Hiuigenso-Frenelio principu. Kaip parodyta 16 paveiksle, laikysime, kad apertūra, už kurios vyksta difrakcija, yra plokštumoje (ξ, η) ir į ją iš kairės krenta plokščia monochromatinė banga. Skaičiuosime difrakcinį lauką plokštumoje (x, y) , kuri lygiagreti (ξ, η) ir yra nutolusi nuo jos atstumu z . Tada remiantis Hiuigenso-Frenelio principas gali būti išreikštas integralu:

$$U(P_0) = \frac{1}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(P_1) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}} \cos\theta \, ds, \quad (3.41)$$

čia θ - kampas tarp normalės vektoriaus \vec{n} ir vektoriaus \vec{r}_{01} , išvesto iš taško P_0 į tašką P_1 .

Kadangi

$$\cos\theta = \frac{z}{r_{01}}, \quad (3.42)$$

tai (3.41) galima užrašyti taip:

$$U(x, y) = \frac{z}{j\lambda} \iint_{\Sigma} U(\xi, \eta) \frac{\exp(jkr_{01})}{r_{01}^2} d\xi d\eta, \quad (3.43)$$

o atstumą:

$$r_{01} = \sqrt{z^2 + (x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}. \quad (3.44)$$

Lyginant su Frenelio-Kirchhofo formule, užrašant Hiuigenso-Frenelio formulę padaryti tokie supaprastinimai: laikoma, kad laukas yra skaliarinė funkcija ir atstumas r_{01} yra daug kartų didesnis už bangos ilgį.

3.8. Frenelio artinys

Norėdami dar supaprastinti Hiuigenso-Frenelio formulę, (3.44) išraišką perrašysime tokiu pavidalu:

$$r_{01} = z \sqrt{1 + \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2}, \quad (3.45)$$

ir šakniai pritaikysime skleidinį Teiloro eilute, pasilikdami tik pirmuosius du narius:

$$r_{01} \approx z \left[1 + \frac{1}{2} \left(\frac{x - \xi}{z}\right)^2 + \frac{1}{2} \left(\frac{y - \eta}{z}\right)^2 \right], \quad (3.46)$$

kadangi, kai tenkinama sąlyga $r_{01} \gg \lambda$, kvadratiniai nariai yra labai maži. Toliau vardiklyje r_{01}^2 atmesime ir kvadratinius narius. Toks supaprastinimas vardiklyje galimas, kadangi tik eksponentėje r_{01} yra padaugintas iš bangos skaičiaus k , kuris yra didelis. Pvz., regimai šviesai k yra 10^7 eilės. Tada gauname tokį integralą laukui xy plokštumoje apskaičiuoti:

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \int \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp\left[j \frac{k}{2z} ((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2) \right] d\xi d\eta, \quad (3.47)$$

čia integravimo rėžiai imami begaliniai, kadangi amplitudė $U(\xi, \eta)$ yra nelygi nuliui, tik apertūros ribose.

Nesunku matyti, kad (3.47) išraiška yra ne kas kita kaip sąsuka:

$$U(x, y) = \int \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) h(x - \xi, y - \eta) d\xi d\eta, \quad (3.48)$$

čia funkcija $h(x, y)$ turi tokį pavidalą:

$$h(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left(\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right). \quad (3.49)$$

Kitą (3.47) formulės išraišką galime gauti, jei iš po integralo išskelsime nari

$$\exp\left(\frac{jk}{2z} (x^2 + y^2) \right). \quad (3.50)$$

Tada turime tokią (3.47) formulės išraišką:

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz)}{j\lambda z} \exp\left(j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2) \right) \int \int_{-\infty}^{\infty} \left(U(\xi, \eta) \exp\left(j \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2) \right) \right) \exp\left(- j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta) \right) d\xi d\eta \quad (3.51)$$

Gautos (3.47) ir (3.48) formulės vadinamos Frenelio difrakciniais integralais. Sritis, kurioje galima taikyti šias formules, vadinama Frenelio difrakcijos arba artimo lauko sritimi.

Išskleidę Hiuigenso-Frenelio formulėje eksponentėje r_{01} Teiloro eilute ir pasilikę tik kvadratinius narius, antrinių šaltinių skleidžiamas sferines bangas pakeitėme parabolinėmis. Tokio pakeitimo įnešamas paklaidas galima įvertinti pagal atmestų narių didumą, lyginant su kvadratiniais nariais. Kad tikslumas būtų pakankamas, reikia, kad pirmasis atmestas narys būtų daug mažesnis už vieną radianą. Šis reikalavimas bus tenkinamas, jei atstumas z iki difrakcijos plokštumos tenkins sąlygą:

$$z^3 \gg \frac{\pi}{4\lambda} \left((x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 \right)_{\max}^2. \quad (3.52)$$

Taip apskritai apertūrai, kurios skersmuo 1 cm ir į ją krentančios šviesos bangos ilgis 0.5 μm ši sąlyga bus tenkinama, jei z bus daug didesnis už 25 cm. Kaip bus paaiškinta toliau, šis reikalavimas atstumui z yra per griežtas ir gali būti susilpnintas, kadangi nebūtina, kad atmesti nariai būtų labai maži, pakanka tik, kad jų indėlis į Frenelio artinį būtų nedidelis.

3. 9. Fraunhoferio artinys

Iš (3.47) formulės matyti, kad lauko amplitudė $U(x, y)$ yra ne kas kita, kaip dviejų funkcijų $U(\xi, \eta)$ ir $\exp\left(j \frac{k}{2z} (\xi^2 + \eta^2)\right)$ sandaugos Furje transformacijos. Jei papildomai pareikalautume, kad būtų tenkinama sąlyga:

$$z \gg \frac{k(\xi^2 + \eta^2)_{\max}}{2}, \quad (3.53)$$

tada kvadratinis fazės narys funkcijos (3.51) formulėje apytiksliai lygus vienetui visoje apertūros srityje. Tada difrakcinis laukas yra tiesiog lauko apertūros plokštumoje dvimatė Furje transformacija:

$$U(x, y) = \frac{\exp(jkz) \exp\left(j \frac{k}{2z} (x^2 + y^2)\right)}{j\lambda z} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} U(\xi, \eta) \exp\left(-j \frac{2\pi}{\lambda z} (x\xi + y\eta)\right) d\xi d\eta. \quad (3.54)$$

Šis integralas vadinamas Fraunhoferio difrakciniu integralu, o sritis, kuriai jį galima taikyti, vadinama Fraunhoferio difrakcijos arba tolumo lauko sritimi.

Nesunku nustatyti Fraunhoferio srities pradžią iš (3.53) sąlygos. Pavyzdžiui, kai bangos ilgis $0.6 \mu\text{m}$, o skersmuo 2.5 cm , atstumas z nuo kurio prasideda tolumo lauko sritis yra daug daugiau už 1600 m .

Ne toks griežtas Fraunhoferio srities pradžios įvertinimas būtų:

$$z > \frac{2D^2}{\lambda}. \quad (3.55)$$

Bet ir šiuo atveju z turi būti daug didesnis už 2000 m . Fraunhoferio difrakcijos vaizdą galime gauti ir mažesniais atstumais, jei panaudotume glaudžiamąjį lęšį, pastatytą tinkamu atstumu nuo apertūros, o difrakcinio lauko pasiskirstymą stebėtume lęšio židinio plokštumoje. Pastebėsime, kad Fraunhoferio difrakcija yra atskiras Frenelio difrakcijos atvejis. Todėl difrakcinį vaizdą Fraunhoferio srityje galima apskaičiuoti ir naudojant Frenelio difrakcinį integralą ir taip patikrinti Fraunhoferio aproksimacijos tikslumą. Toliau išnagrinėsime keletą Frenelio ir Fraunhoferio difrakcijos paprastų pavyzdžių. [4]

4. Rezonatorių su supergausiniais veidrodžiais formuojamų pluoštų difrakcijos modeliavimas

Buvo analizuota, kaip sklinda Gauso pluoštas, kai jis yra ribojamas apertūros. Pluošto amplitudei už apertūros apskaičiuoti buvo naudojamas Frenelio difrakcinis integralas (3.47), kuris buvo perrašytas polinėmis koordinatėmis plokštumose xy ir $\xi\eta$ ir laikyta, kad amplitudės pasiskirstymas priklauso tik nuo atstumo iki pluošto ašies ir nepriklauso nuo kampinės koordinatės. Frenelio integralas buvo apskaičiuojamas skaitmeniškai, naudojant skaitinio integravimo trapecijų formulę ir tolygų diskretųjį tinklę išilgai koordinatės r .

Amplitudė plokštumoje xy buvo normuojama į maksimalią amplitudę A_0 , o skersinė koordinatė į charakteringąjį spindulį $r_0=4w_0$, išilginė koordinatė į charakteringąjį Reilėjaus ilgį

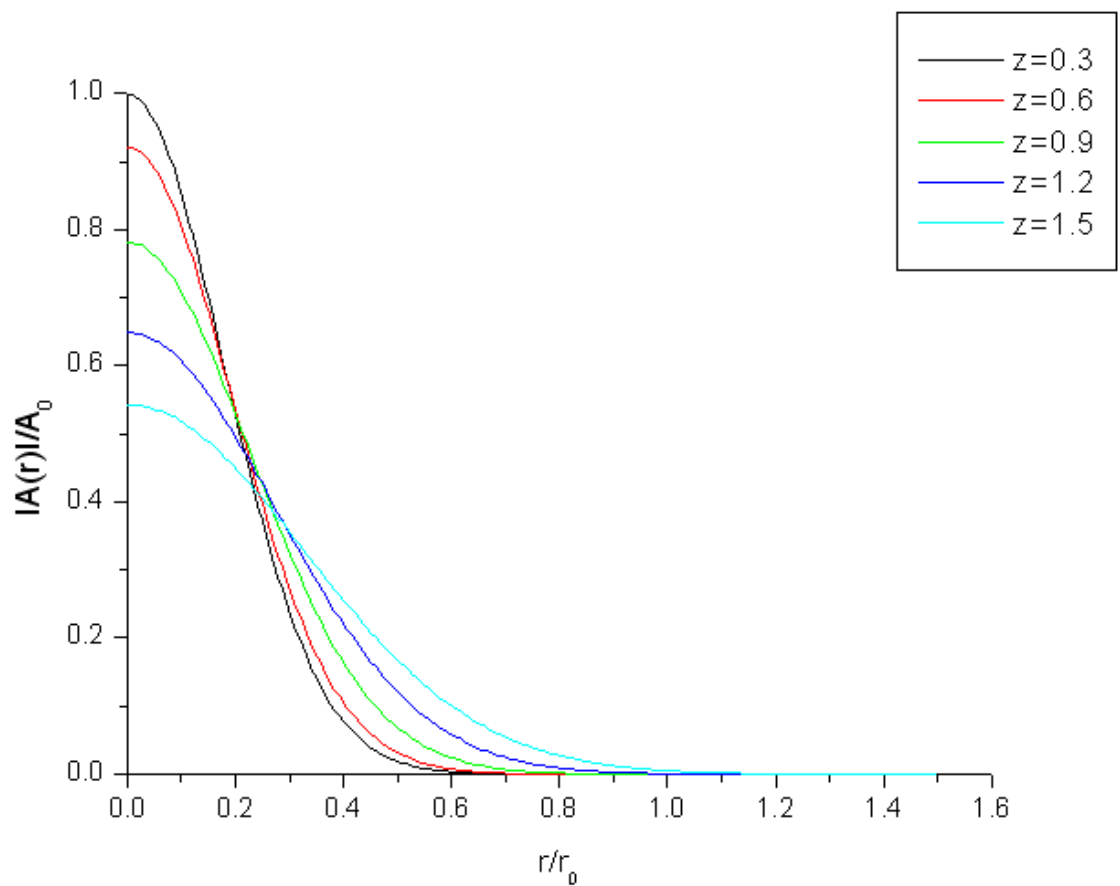
$$L_D = \frac{\pi w_0^2}{\lambda}, \text{ čia } w_0 - \text{pluošto spindulys, } \lambda - \text{bangos ilgis.}$$

Buvo analizuojami amplitudės modulio pasiskirstymai išilgai pluošto ašies ir skersiniai skirstiniai plokštumose, statmenose pluošto ašiai.

Pirmiausia tirta pluošto praėjusio pro stačiakampio pralaidumo profilio ir supergausinio pralaidumo profilio apertūrą difrakcija. Toks uždavinys aktualus nagrinėjant lazerių pluoštų sklidimą išėjusių iš rezonatoriaus, kurio veidrodžiai turi ribotą skersmenį palyginus su pluošto matmenimis.

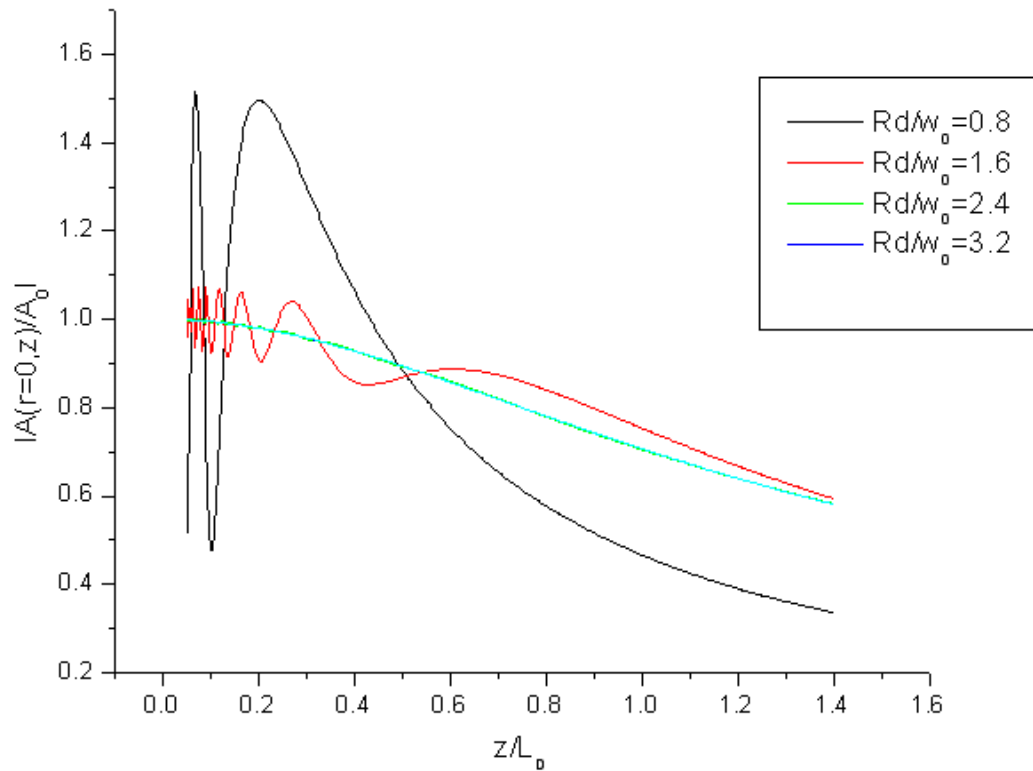
4.1. Apertūra apriboto Gauso pluošto difrakcija

Kai Gauso pluoštas neribojamas apertūra, tai pluošto amplitudės pasiskirstymas skirtingose skersinėse plokštumose lieka Gauso, tik mažėja intensyvumas ir didėja pluošto skersmuo (17 pav.).



17 pav. Neribojamo apertūra Gauso pluošto amplitudės pasiskirstymas erdvėje esant skirtingiems atstumams nuo plokštumos $z/L_D=0$.

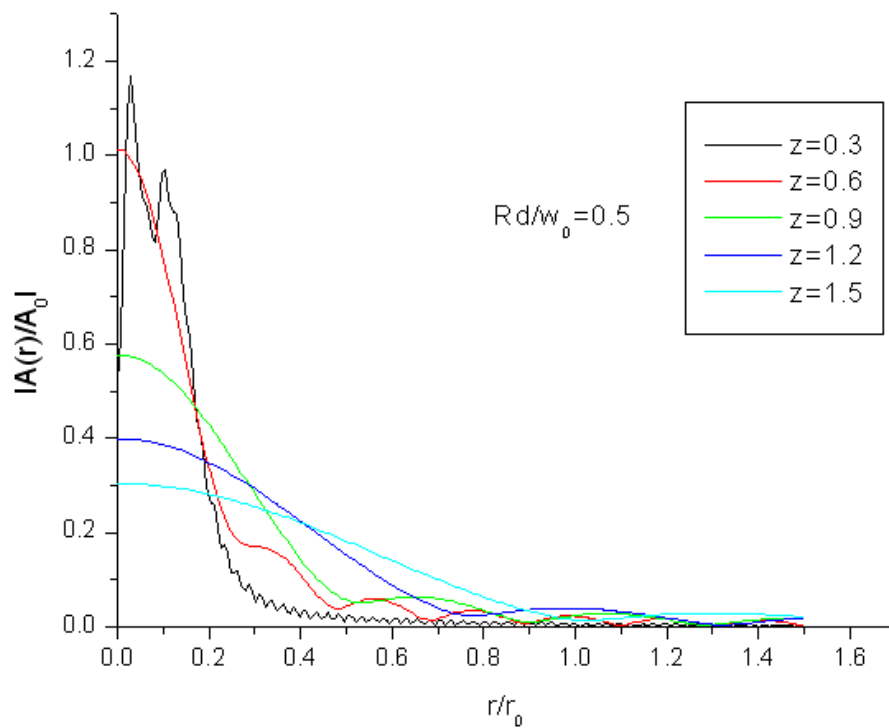
Kaip keičiasi skirtingo skersmens apertūra riboto Gauso pluošto amplitudė išilgai pluošto ašies jam sklindant, pavaizduota 18 paveiksle.



18 pav. Apertūra ribojamo Gauso pluošto sklidimas

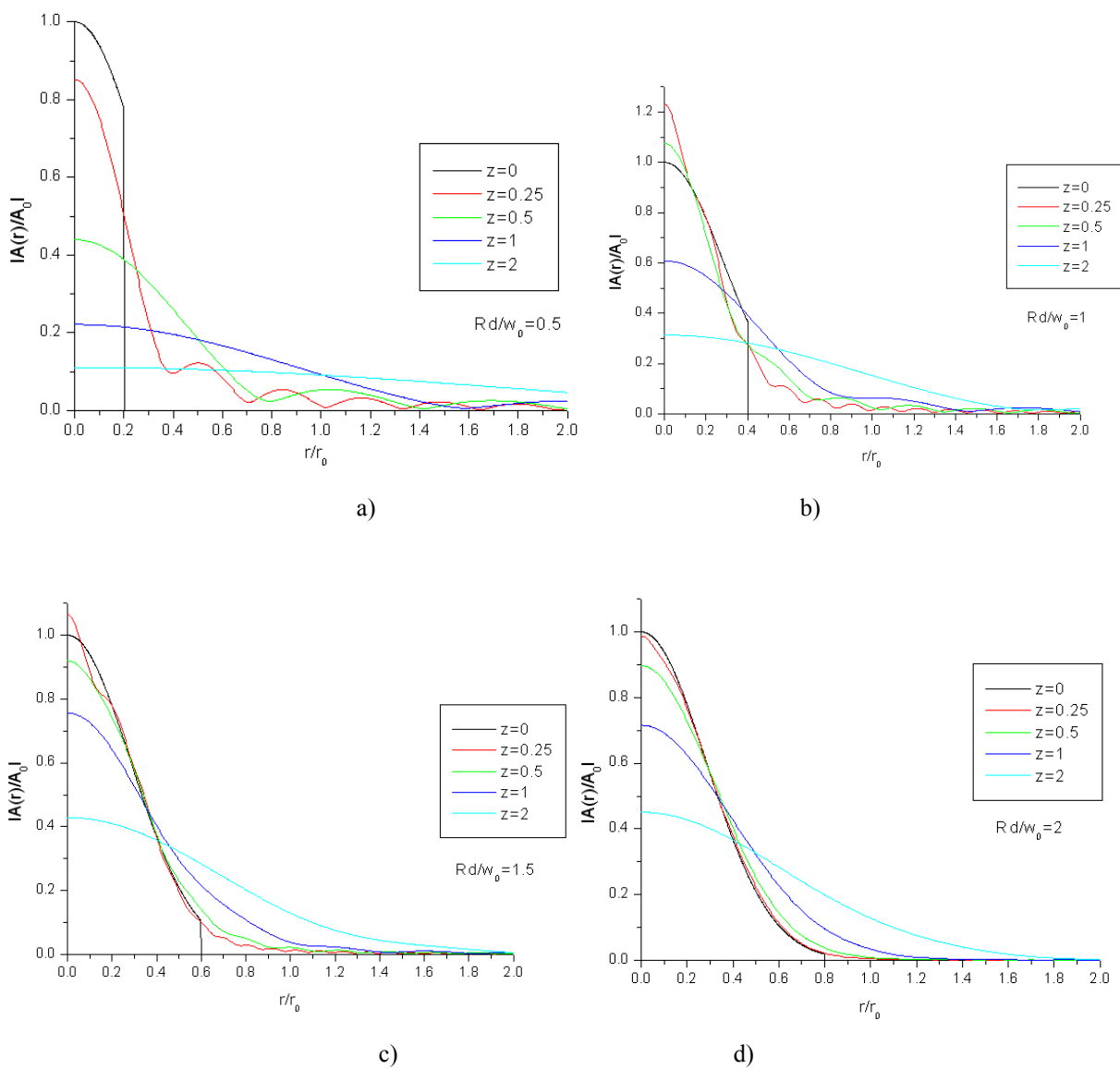
Mažėjant apertūros spinduliui R_D artimoje zonoje atsiranda amplitudės osciliacijos, kurių amplitudė auga mažėjant apertūros spinduliui. Tolimojoje zonoje ($z > L_D$) apertūros skersmeniui mažėjant, amplitudė pluošto ašyje krenta vis sparčiau, kadangi pluoštas išplinta stipriau. Osciliacijos tęsiasi toliau išilgai pluošto ašies apertūros skersmeniui didėjant, kol visai išnyksta, kai apertūros skersmuo yra apie du kartus didesnis už pluošto skersmenį. Osciliacijos jau aiškiai pastebimos kai apertūros spindulio santykis su pluošto spinduliu lygus 0,8.

Iš amplitudės skersinio pasiskirstymo grafikų (19 pav.) skirtingiems atstumam nuo plokštumos $z=0$, matyti, kad mažai apertūrai artimoje zonoje stebimi interferenciniai minimumai ir maksimumai, kurie vėliau išnyksta ir formuojasi centrinis pikas, apsuptas daugelio žiedų.



19 pav. Apertūra ribojamo Gauso pluošto amplitudės pasiskirstymas erdvėje esant skirtingiems atstumams nuo plokštumos $z/L_D=0$.

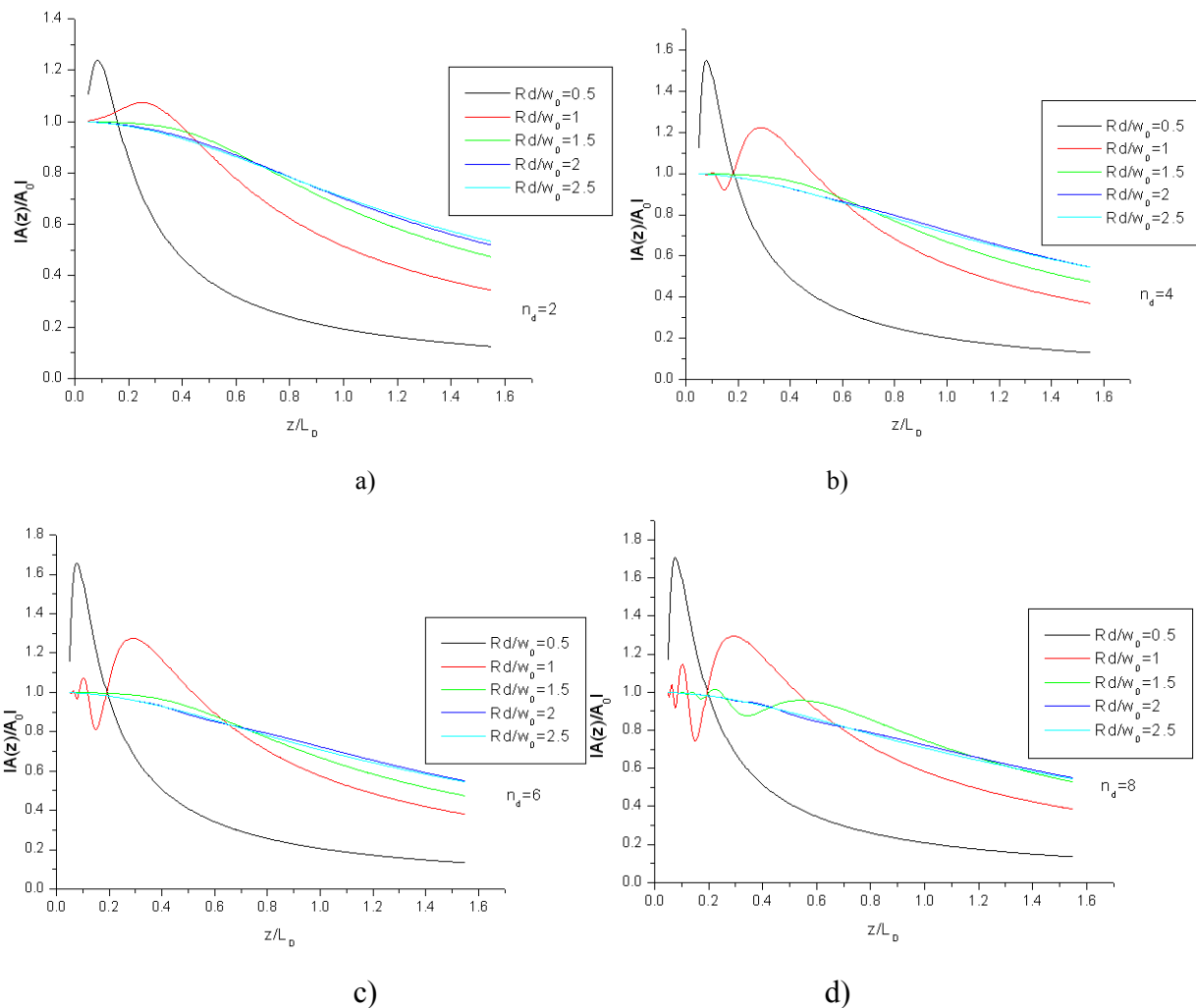
Žiedų skaičius ir jų intensyvumas didėja mažėjant apertūros matmenims (20 pav.).



20 pav. Skirtinga apertūra ribojamo Gauso pluošto amplitudės pasiskirstymas erdvėje esant skirtingiems atstumams nuo plokštumos $z/L_D=0$.

Kaip matyti 20 paveiksle d), galima daryti išvadą, kad apertūros įtaka pluošto sklidimui yra maža, pluoštas yra artimas Gauso pluoštui, jei apertūros spindulys yra daugiau kaip du kartus didesnis už pluošto spindulį.

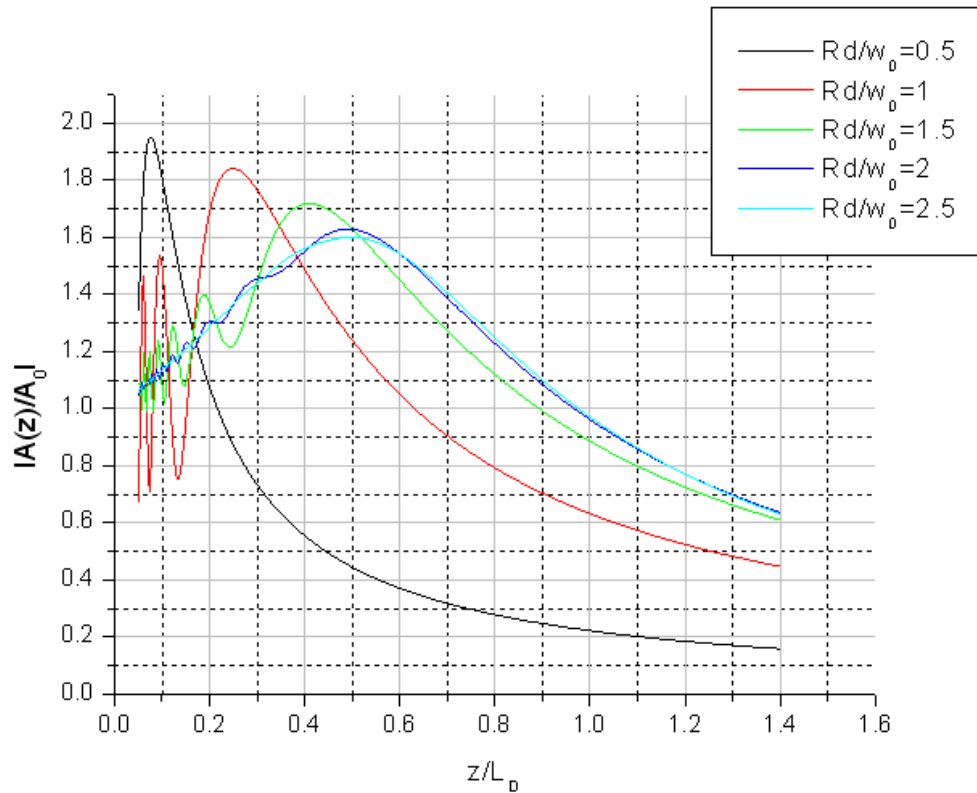
Taip pat buvo tirta ir apertūros pralaidumo supergausiškumo įtaka pluošto ašiniam amplitudės pasiskirstymui artimoje ir tolimoje zonose (21 pav.).



21 pav. Skirtingo dydžio ir pralaidumo apertūra ribojamo Gauso pluošto amplitudės ašinis pasiskirstymas.

Nedidelio supergausiškumo apertūra pastebimai sumažina amplitudės osciliacijas artimoje zonoje jau esant apertūros spindulio santykiui su pluošto spinduliu lygiam 1.5, skersinis amplitudės skirstinys mažai skiriasi nuo Gauso pluošto tiek artimoje, tiek tolimoje zonoje. Esant didelio supergausiškumo laipsnio apertūrai $n_d = 8$, dar pastebimos pakankamai didelės amplitudės osciliacijos ($Rd/w_0 = 1.5$) arti apertūros plokštumos.

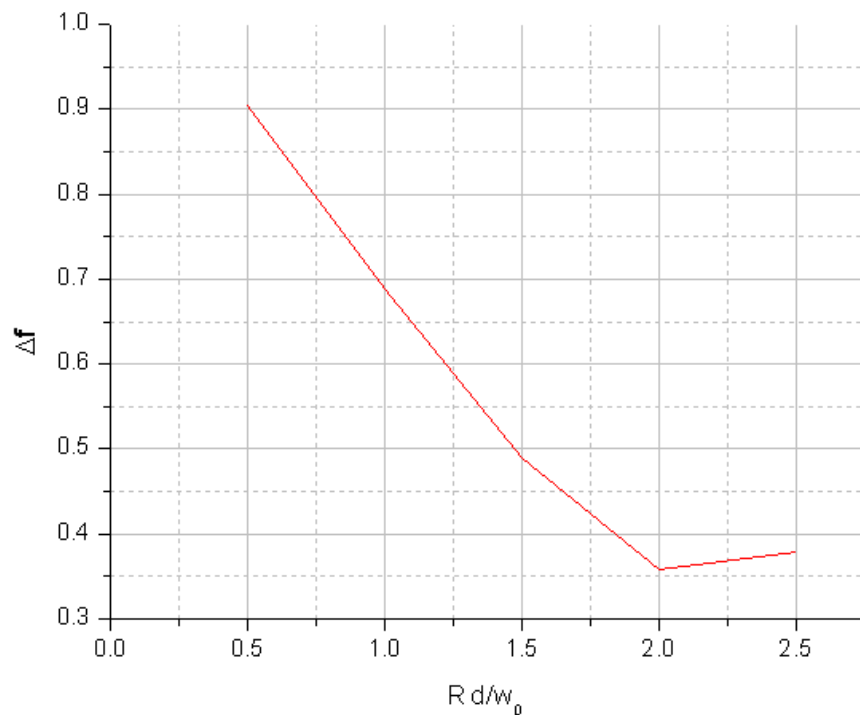
Toliau buvo analizuota, kaip vyksta apertūra riboto Gauso pluošto fokusavimas lęšiu, kurio židinio nuotolis $f/L_D = 0.8$. Iš ašinio amplitudės pasiskirstymo grafikų (22 pav.) matyti, kad maksimalus intensyvumas ant ašies pasiekiamas ne lęšio geometrinio židinio plokštumoje, o arčiau apertūros. Vyksta taip vadinamas židinio poslinkis. Šis židinio poslinkis yra svarbus praktiniams taikymams. Jei norima, kad lazerio spindulio poveikis objektui būtų maksimalus, tai objektas turi būti talpinamas ne geometrinio židinio plokštumoje, o arčiau, ties tikroju židiniu.



22 pav. Gauso pluošto fokusavimas lęšiu, esant skirtingoms apertūroms.

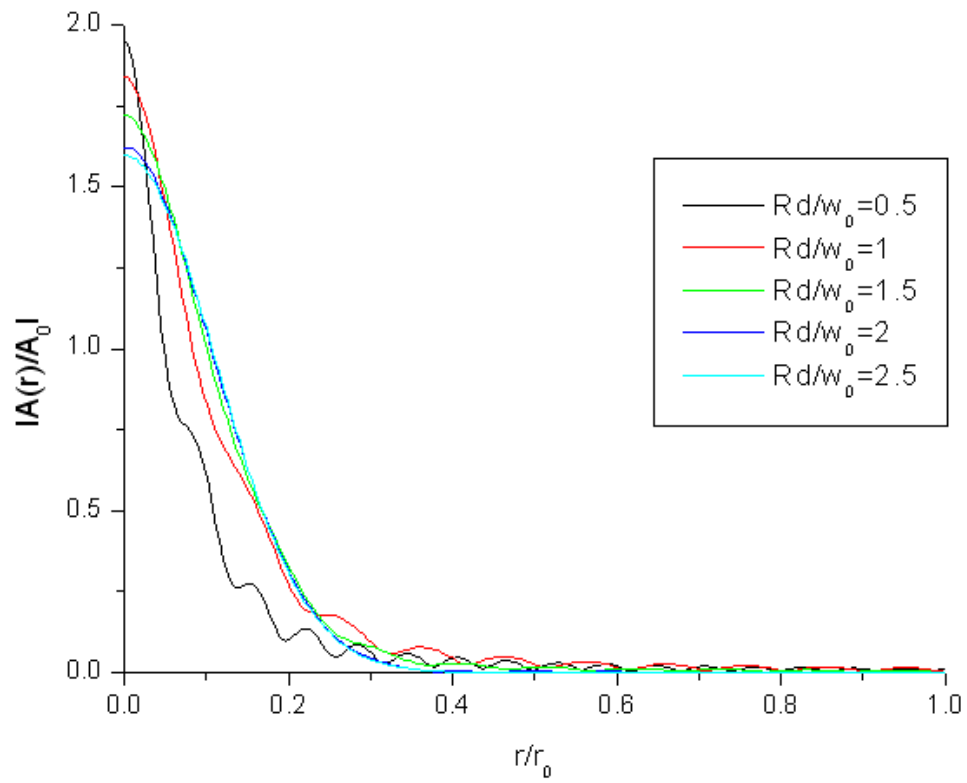
Apertūrai mažėjant, santykinis židinio poslinkis $\Delta f = \frac{f/L_D - z_{\max}/L_D}{f/L_D}$ vis didėja (23

pav.). Kai apertūros skersmuo yra pusė pluošto skersmens, židinio poslinkis siekia 90% lęšio židinio nuotolio. Kai apertūros matmenys 2 ir daugiau kartų didesni už pluošto skersmenį, židinio padėtis toliau beveik nesikeičia.

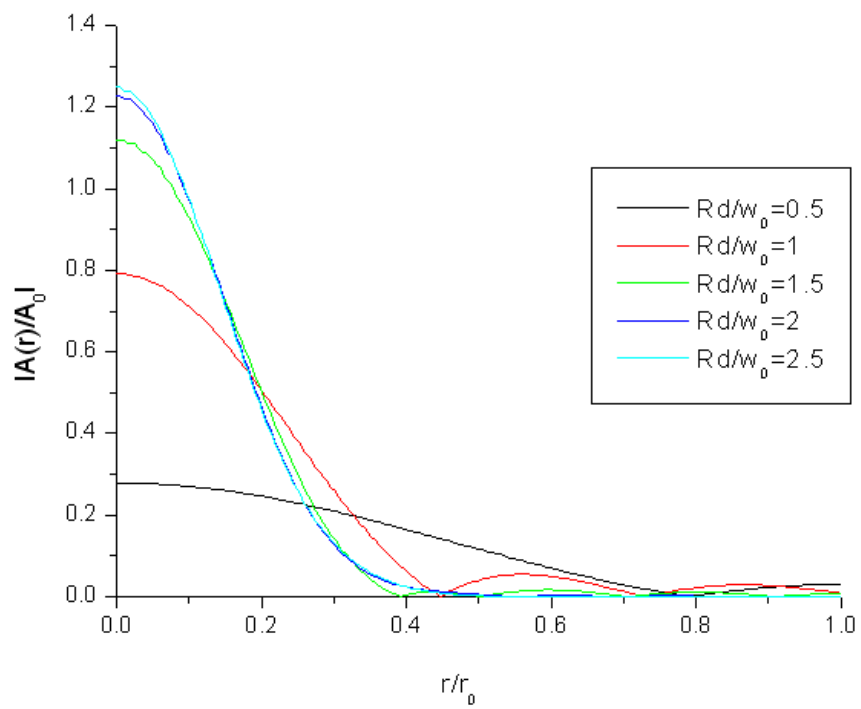


23 pav. Židinio poslinkio priklausomybė nuo apertūros skersmens.

Iš skersinių amplitudės pasiskirstymų didžiausių intensyvumų plokštumose (24 pav.) matyti, kad didžiausias ir siauriausias intensyvumas yra kai Gauso pluoštas praeina pro mažiausią apertūrą. Apertūrai didėjant pluoštas išplinta ir intensyvumas mažėja. Tolimame lauke stebimi žiedai. O skersinių amplitudės pasiskirstymų židinio plokštumoje (25 pav.) intensyvumas didžiausias, kai Gauso pluoštas praeina pro apertūrą, kuri du ir daugiau kartų didesnė už pluošto spindulį.

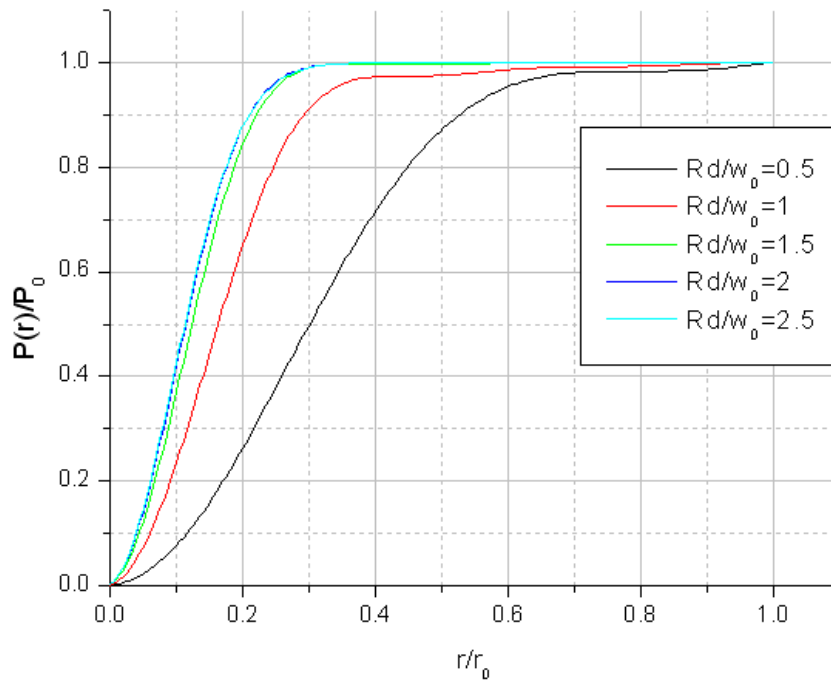


24 pav. Skersiniai amplitudės pasiskirstymai didžiausių intensyvumų plokštumose.

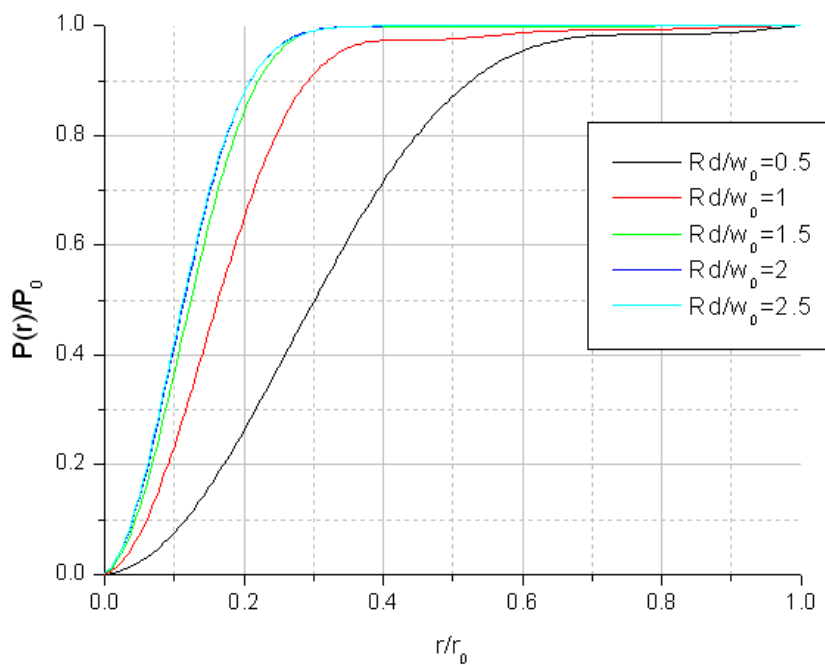


25 pav. Skersiniai amplitudės pasiskirstymai židinio plokštumoje.

Iš skersinių galios pasiskirstymų didžiausių intensyvumų (26 pav.) ir židinio (27 pav.) plokštumose matyti, kad centriniame pike galingumas nedidelis. Galingumas žymiai padidėja, kai apertūros matmenys yra lygūs pluošto skersmeniui. Galios pasiskirstymai didžiausių intensyvumų ir židinio plokštumose yra panašūs.

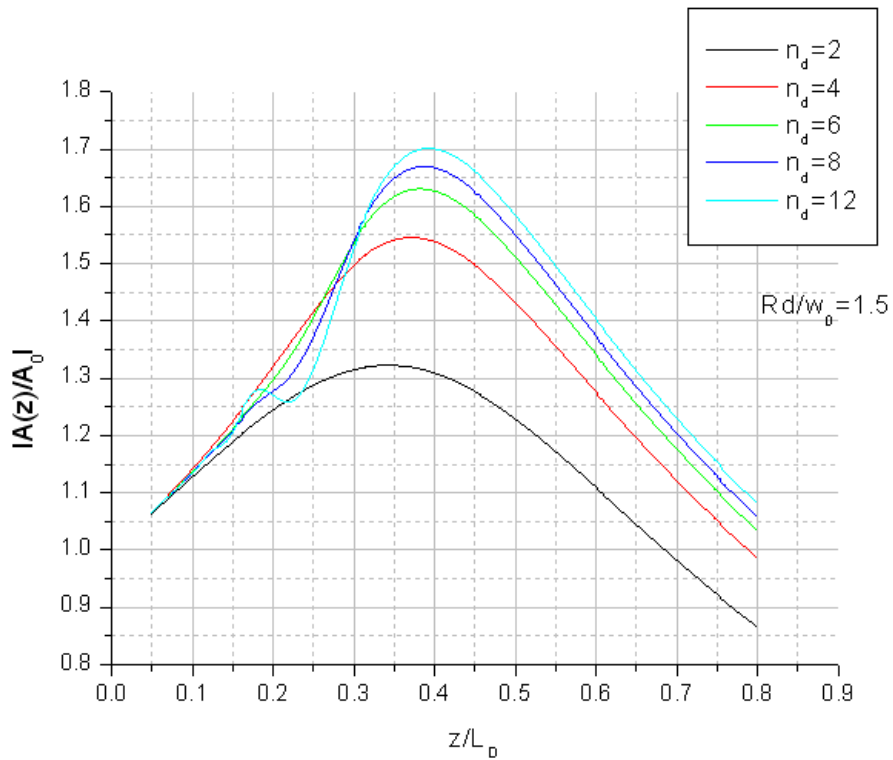


26 pav. Skersiniai galios pasiskirstymai didžiausių intensyvumų plokštumose.



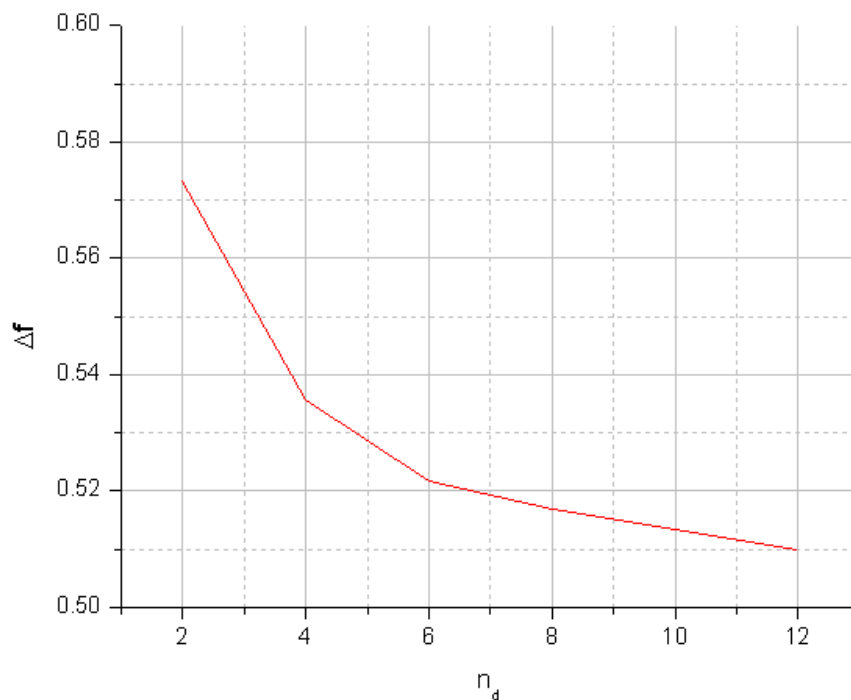
27 pav. Skersiniai galios pasiskirstymai židinio plokštumoje.

Mažėjant apertūros pralaidumo supergausiškumo laipsniui, maksimalus intensyvumas židinyje mažėja ir šiek tiek artėja prie lęšio (28 pav.).



28 pav. Amplitudės ašinis pasiskirstymas.

Židinio poslinkis nuo supergausiškumo (29 pav.), esant fiksuotam apertūros skersmeniui, priklauso silpnai. Kai $n_d > 10$ pradeda atsirasti amplitudės osciliacijos, būdingos stačiakampio pralaidumo profilio apertūrai. Tik osciliacijų amplitudė yra gerokai mažesnė.



29 pav. Židinio poslinkio priklausomybė nuo apertūros pralaidumo laipsnio.

4. 2. Gauso pluošto praėjusio pro super-Gauso pralaidumo veidrodį difrakcija artimoje ir tolimoje zonoje

Nagrinėta kokią įtaką lazerio pluošto praėjusio pro super-Gauso pralaidumo išvadinių rezonatoriaus veidrodį difrakcijai, ašiniam ir skersiniam pluošto intensyvumo skirstiniams turi veidrodžio atspindžio jo centre koeficientas K , pralaidumo supergausiškumo laipsnis N_V , pluošto spindulio w_0 santykis su veidrodžio charakteringuoju spinduliu w_c , $\beta = \frac{w_0}{w_c}$. Taip pat buvo analizuota, kaip keičiasi praėjusio pro super-Gauso veidrodį pluošto ašinis ir skersinis amplitudės skirstiniai, fokusuojat lęšiu.

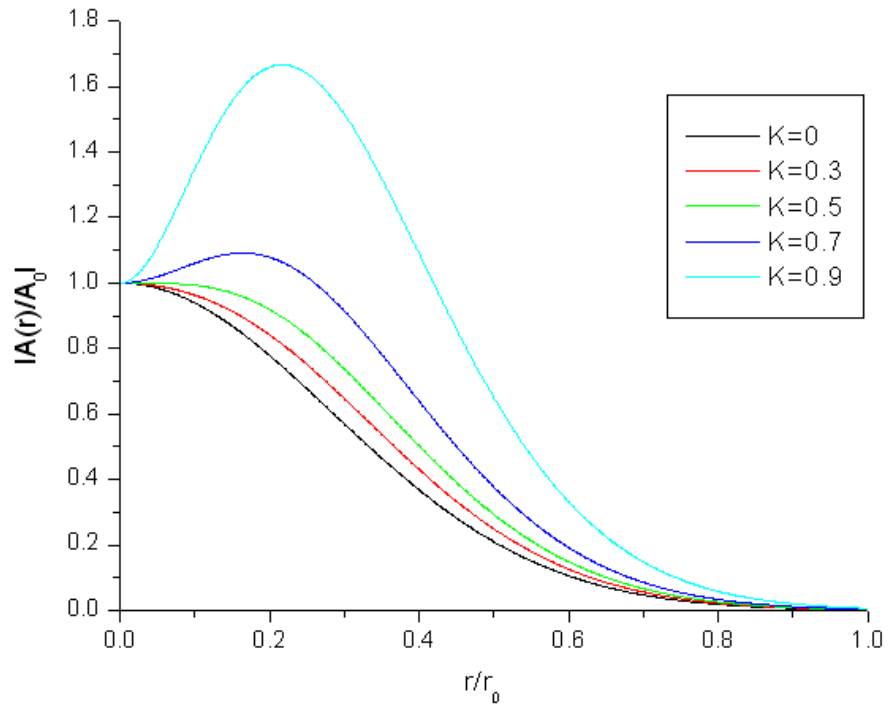
Super-Gauso veidrodžio pralaidumo profilis aprašomas formule:

$$R(r) = K \exp\left(-2\left(\frac{r}{w_c}\right)^{N_V}\right). \quad (4.1)$$

Kai $N_V=2$ turime Gauso pralaidumo veidrodį, o kai $N_V>2$ – super-Gauso. Kai į tokį kintamo atspindžio profilį turintį veidrodį krenta Gauso pluoštas, tai pro veidrodį praėjusio pluošto amplitudė bus:

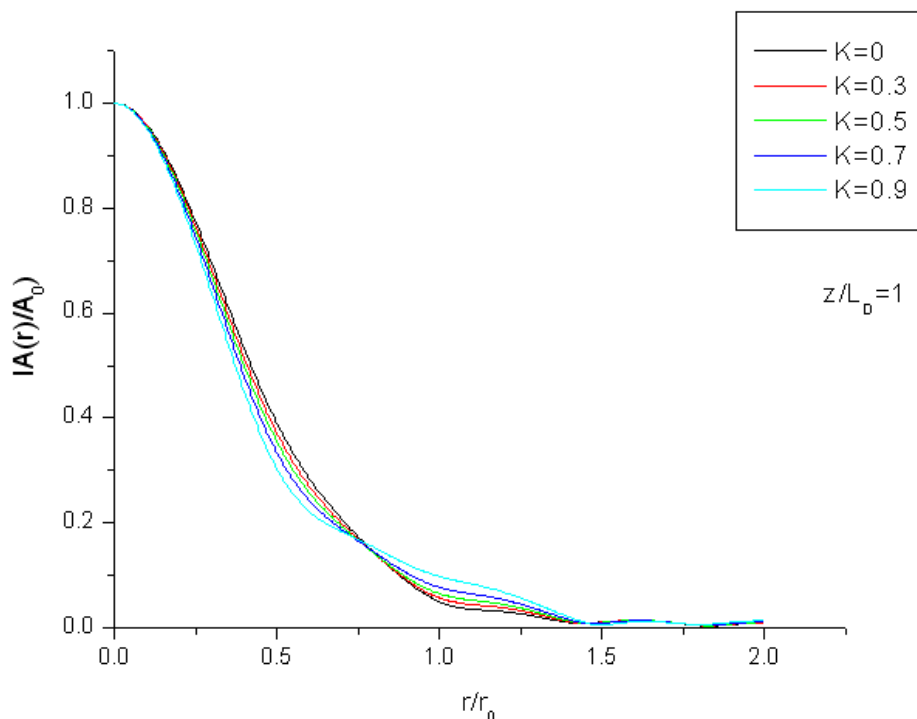
$$A(x, y, 0) = A_0 \exp\left(-\frac{x^2 + y^2}{w_0^2}\right) \left(1 - K \exp\left(-2\frac{x^2 + y^2}{w_c^2}\right)\right)^{1/2}. \quad (4.2)$$

Didėjant veidrodžio atspindžio koeficientui K , gilėja radialinė amplitudės įduba skirstinio centre (30 pav.). Kai K artimas vienetui, pluoštas artėja prie žiedinio skirstinio, būdingo nepastoviesiems rezonatoriams. Todėl artimoje zonoje didėjant K turime intensyvesnius interferencinius pikus.



30 pav. Gauso pluošto erdvinis amplitudės pasiskirstymas esant skirtingiems K , $z/L_D=0$ plokštumoje.

Kai K didesnis, tolimojoje zonoje matome siauresnį centrinį piką ir šiek tiek didesnę pirmojo žiedo intensyvumą (31 pav.).

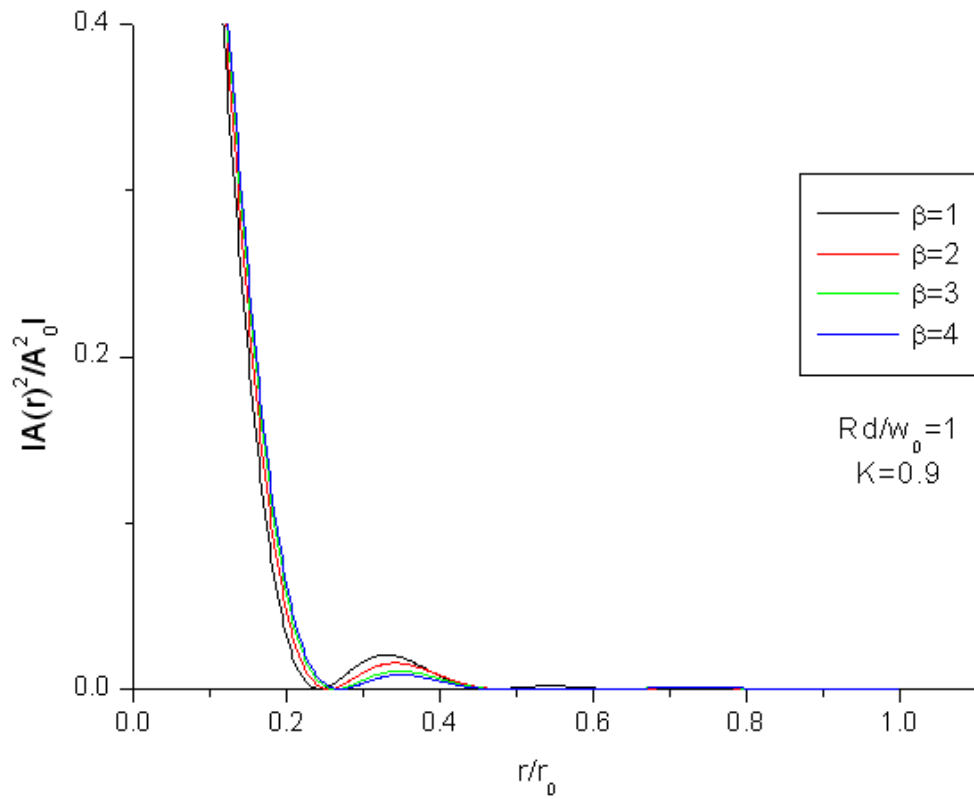


31 pav. Gauso pluošto erdvinis amplitudės pasiskirstymas esant skirtingiems K , $z/L_D=1$ plokštumoje.

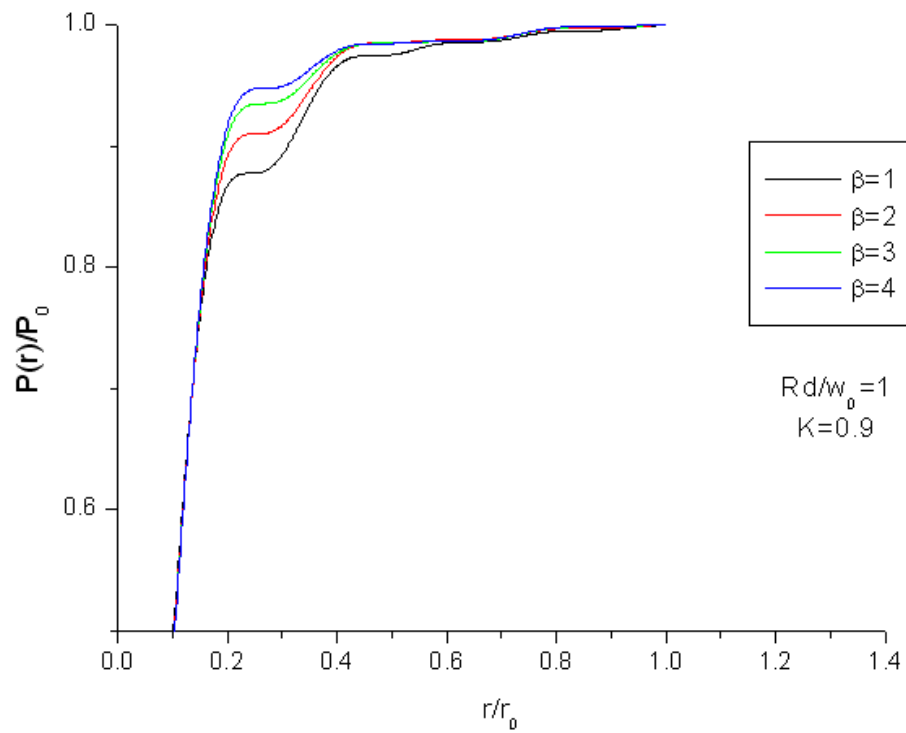
Tačiau net K esant lygiam 0,9 ir daugiau, kai praėjusio Gauso pluošto ąduba centre yra pakankami gili, tolimame lauke formuojasi pluoštas, kuris palyginti santykinai nedaug skiriasi nuo idealaus, t. y. Gauso pluošto.

Skaičiavimai skirtingoms β reikšmėms parodė, kad keičiant santykį $\frac{w_0}{w_c}$ dideliame intervale, tolimame lauke intensyvumo skirstinys tik nežymiai kito (32 pav.). Didėjant β , centrinio difrakcinio piko plotis šiek tiek didėjo, o pirmojo ir antrojo žiedų intensyvumas šiek tiek mažėjo.

Tai, kad priklausomybė nuo parametro β pakankamai silpna, matyti iš galios radialinių skirstinių kreivių (33 pav.). Centriniai pluošto daliai šios kreivės pilnai persikloja ir tik periferinėje pluošto dalyje šiek tiek išsiskiria. Tai rodo, kad kintant parametrai β , centriniame radialinio skirstinio pike galia praktiškai vienoda ir nepriklauso nuo β reikšmės.

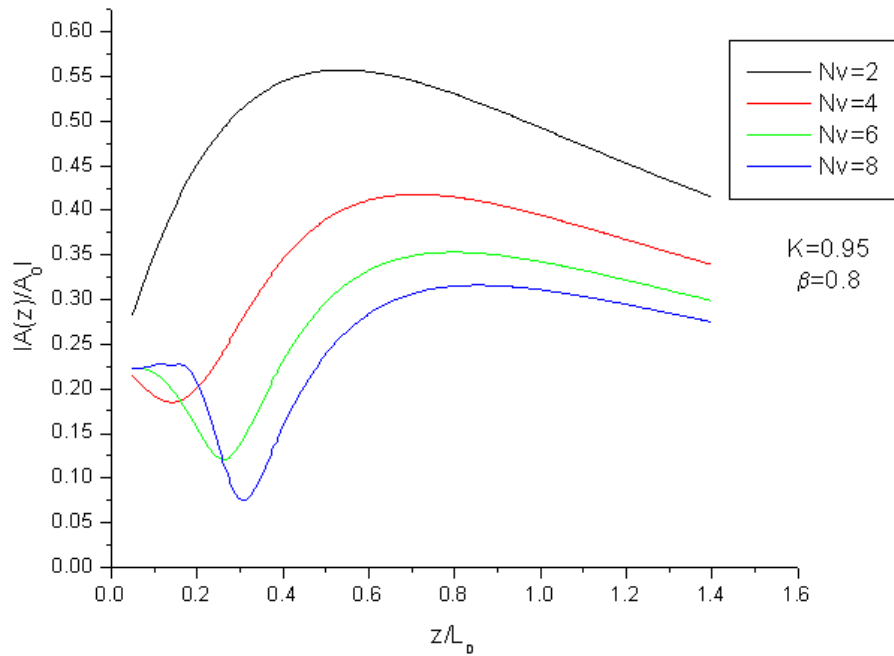


32 pav. Gauso pluošto intensyvumo skirstiniai esant skirtingiems β .

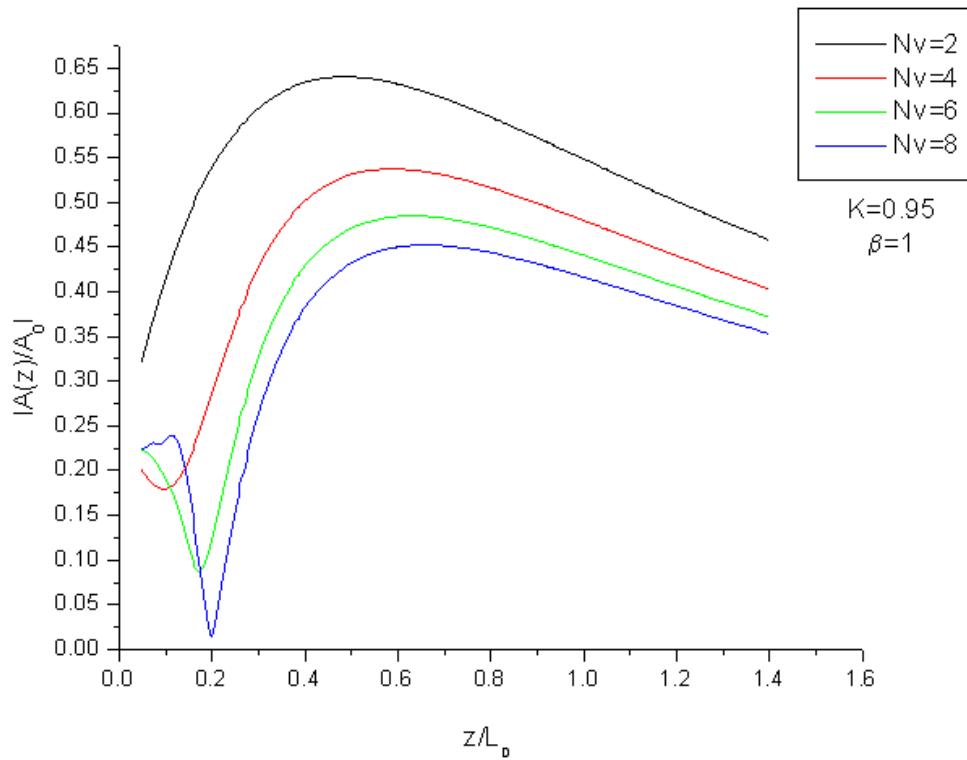


33 pav. Gauso pluošto galios skirstiniai esant skirtingiems β .

Veidrodžio supergausiškumo analizė parodė (34 pav.), kad supergausiškumo laipsniui augant, tolimojo lauko skirstinys formuojasi vis toliau nuo veidrodžio, o maksimalus intensyvumas pluošto ašyse yra mažesnis, nepriklausomai nuo santykio β (35 pav.). Kai supergausiškumo laipsnis didelis ($Nv > 4$), pradžioje matomas intensyvumo minimumas ir tik po to formuojasi maksimumas, už kurio turime tolimojo lauko skirstinį.

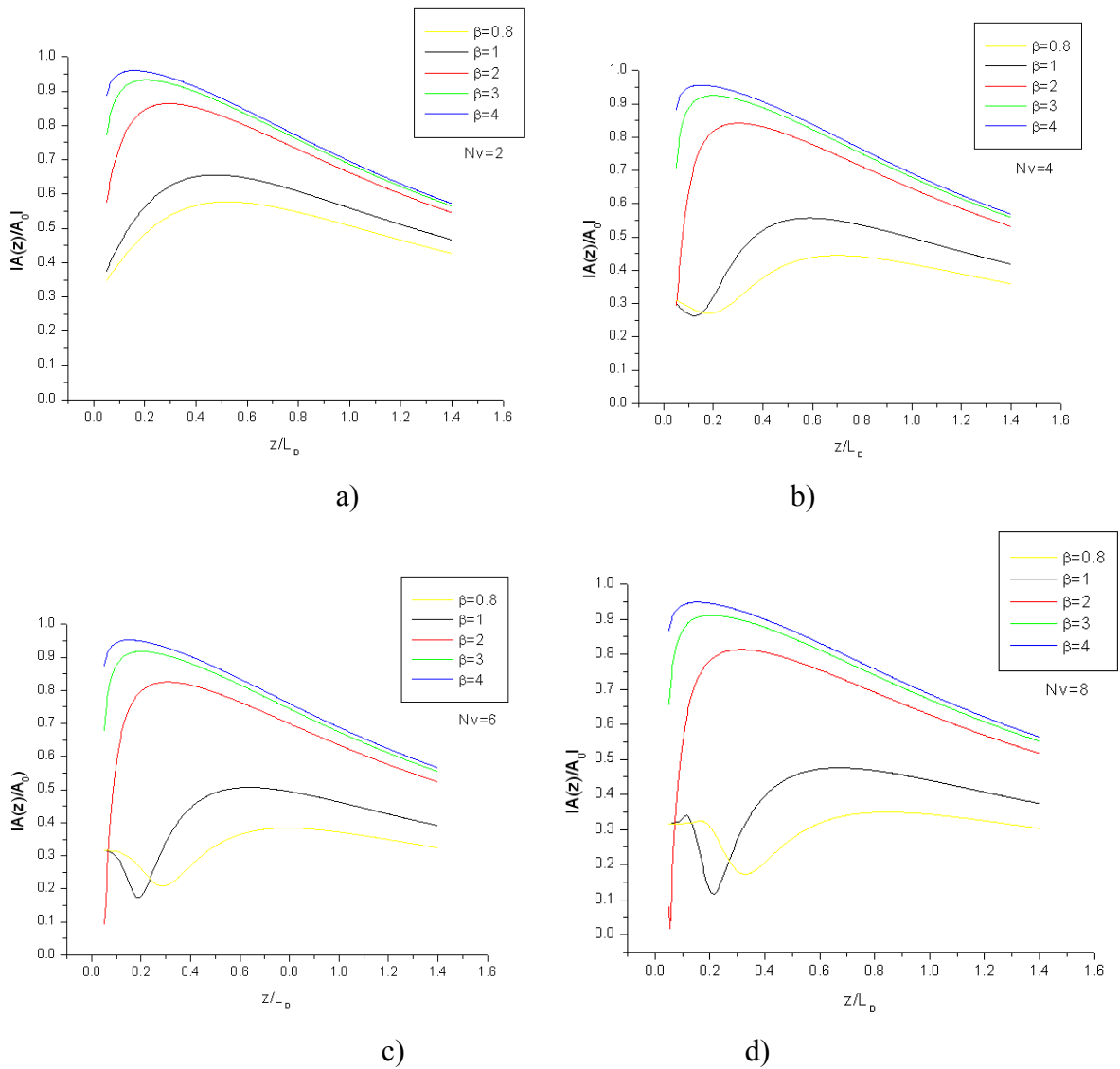


34 pav. Gauso pluošto ašinis amplitudės pasiskirstymas esant skirtingiems veidrodžio supergausiškumo laipsniams, kai $\beta = 0.8$.



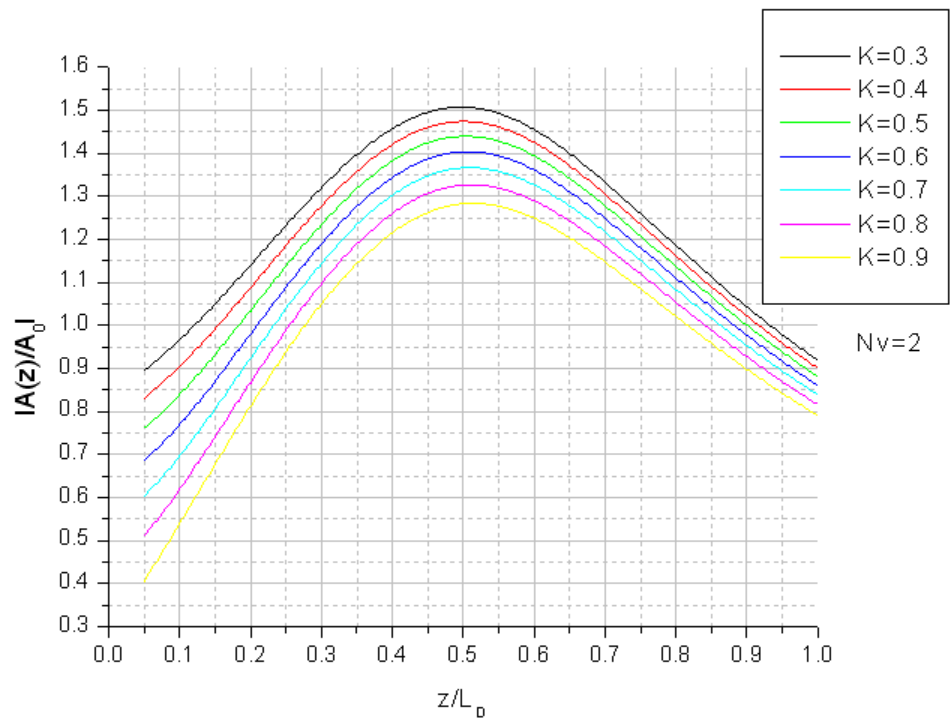
35 pav. Gauso pluošto ašinis amplitudės pasiskirstymas esant skirtingiems veidrodžio supergausiškumo laipsniams, kai $\beta = 1$.

Didėjant parametrai β , maksimalus intensyvumas ant ašies yra didesnis ir jis pasiekiamas vis arčiau veidrodžio (36 pav.). Esant mažam β , atsiranda ant ašies minimumas.

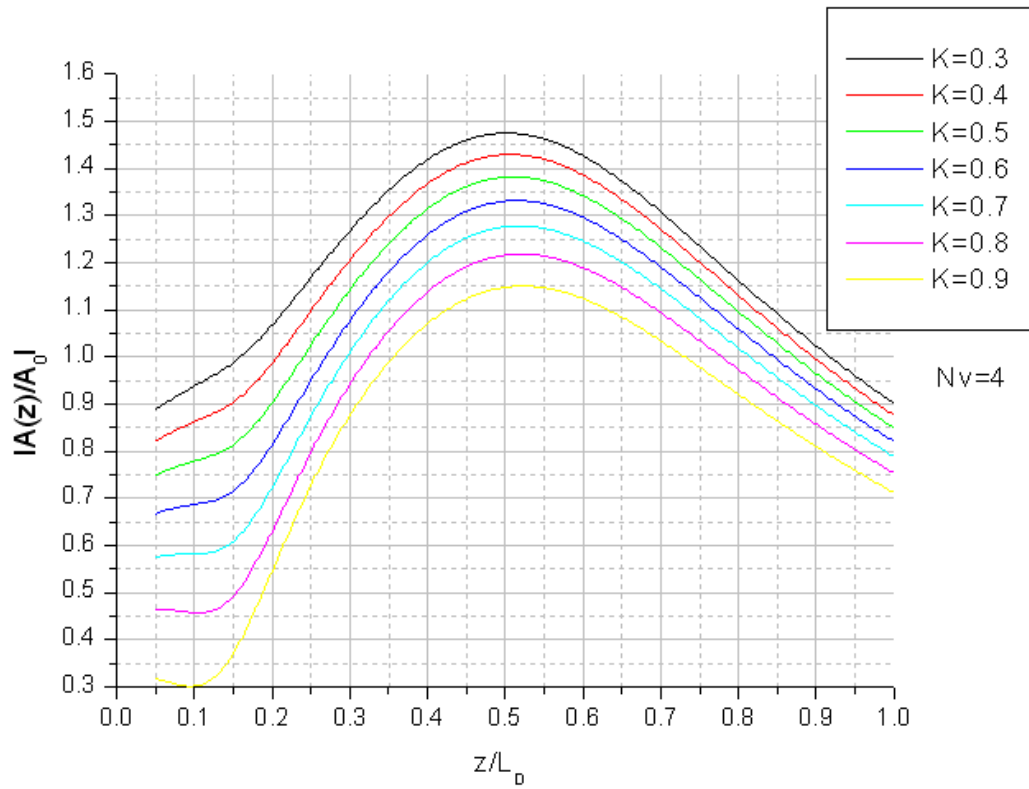


36 pav. Gauso pluošto ašinis amplitudės pasiskirstymas esant skirtingoms parametro β reikšmėms ir veidrodžio supergausiškumo laipsniams.

Kai pro Gauso veidrodį praėjęs pluoštas fokusuojamas lęšiu, kurio židinio nuotolis $0.8L_D$, stebimas židinio poslinkis, kuris silpnai priklauso nuo veidrodžio atspindžio koeficiento K (37 pav.) ir nedidelio supergausiškumo (38 pav.).



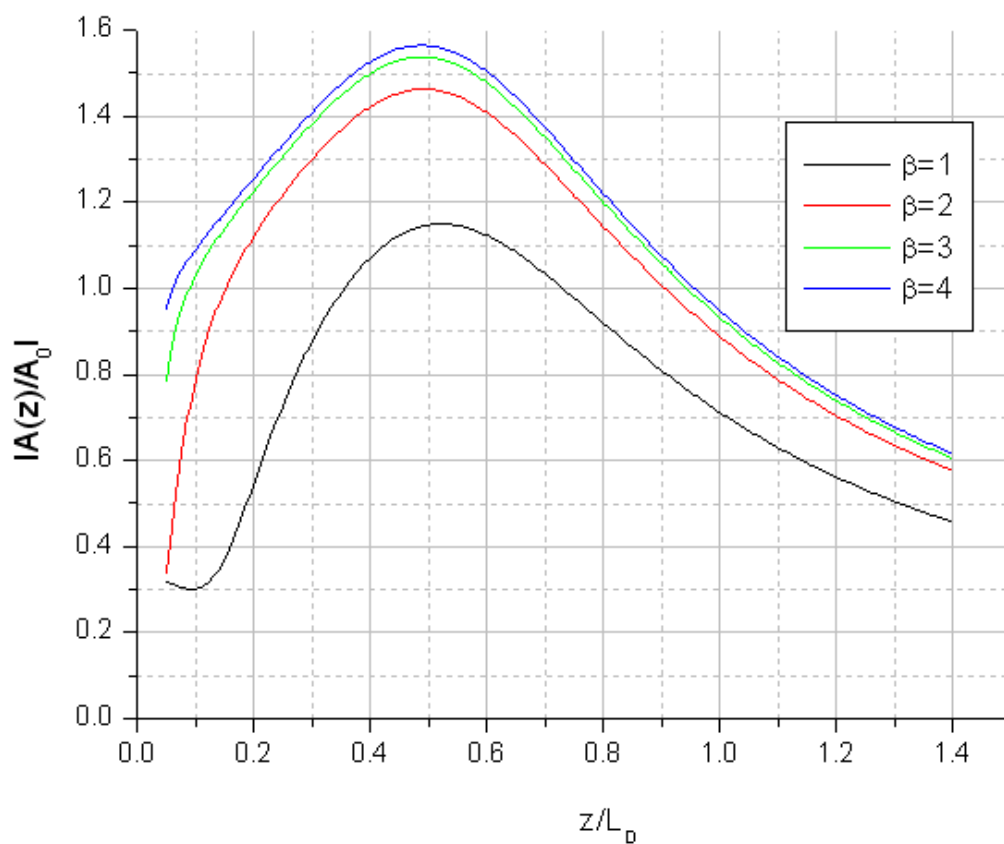
37 pav. Gauso pluošto fokusavimas lęšiu, kai kinta K , o $Nv=2$.



38 pav. Gauso pluošto fokusavimas lęšiu, kai kinta K , o $Nv=4$.

Visiems turėtiems K židinio poslinkis Δf artimas $0.375L_D$, t. y. tikrasis židinyje, kuriame pluošto intensyvumas yra maksimalus ($r/L_D = 0.5$), o ne geometrinio židinio plokštuma $r/L_D = 0.8$. Didesniam supergausiškumui maksimalus intensyvumas židinyje stipriau priklauso nuo veidrodžio atspindžio centre koeficiento.

Židinio poslinkis taip pat silpnai priklauso ir nuo parametro β (39 pav.).



39 pav. Gauso pluošto fokusavimas lęšiu, kai kinta β .

Išvados

1. Apertūros spinduliui mažėjant artimoje zonoje atsiranda amplitudės osciliacijos, kurių amplitudė auga, o tolimoje zonoje skersiniame pasiskirstyme formuojasi žiedai, kurių skaičius ir intensyvumas auga.

2. Apertūros įtaka Gauso pluoštui yra nedidelė, jei jos spindulys yra daugiau kaip du kartus didesnis už pluošto spindulį.

3. Nedidelio supergausiškumo apertūra pastebimai sumažina intensyvumo osciliacijas artimoje zonoje, todėl ašinis ir skersinis intensyvumo pasiskirstymai yra artimi Gauso tiek artimoje, tiek tolimoje zonose.

4. Fokusuojant apertūra ribotą Gauso pluoštą stebimas stiprus židinio poslinkis, kuris gali siekti 90% židinio nuotolio, kai apertūros spindulys yra lygus pusei pluošto spindulio.

5. Didėjant atspindžio koeficientui K supergausinio veidrodžio centre, gilėja įduba amplitudės radialinio skirstinio centre ir kai K artimas vienetui, skersinis skirstinys artėja prie židinio, būdingo nepastoviesiems rezonatoriams.

6. Net ir K didesniems už 0.9, kai praėjusio per Gauso veidrodį pluošto centre įduba yra gili, tolimate lauke formuojasi pluoštas, kurio skersinis skirstinys palyginti nedaug skiriasi nuo Gauso.

7. Augant veidrodžio atspindžio supergausiškumui, tolimojo lauko skirstinys formuojasi vis toliau nuo veidrodžio, o pasiekiamas maksimalus intensyvumas pluošto ašyje mažėja.

8. Pro Gauso veidrodį praėjusį pluoštą fokusuojant lęšiu, stebimas židinio poslinkis, kurio didumas silpnai priklauso nuo veidrodžio atspindžio koeficiento, veidrodžio supergausiškumo laipsnio, bei parametro β .

Literatūra

1. Matulis A. Elektrodinamika. Vilnius, 2001.
2. Sirutkaitis V. Kietojo kūno lazeriai. I dalis. Vilnius, 2000.
3. Šalna V. A. Optika. Vilnius, 2004.
4. Goodman J. W. Introduction to Fourier optics. Roberts & company, 2005.
5. Silfvast W. T. Laser fundamentals. Cambridge, 2004.
6. Anan'ev Y. A. Unstable resonators and their applications. // Sov. J. Quantum Electron. Vol. 1, 1972 p. 565 – 586.
7. Fox A. G., Li T. Resonant modes in a maser interferometer. // Bell Sys. Tech. J. Vol. 40, 1961 p. 453 – 458.
8. Fox A. G., Li T. Resonant modes in an optical maser. // Proc. IRE. Vol. 48, 1960 p. 1904 – 1905.
9. Boyd G. D., Gordon J. P. Confocal multimode resonator for millimeter through optical wavelength masers. // Bell Sys. Tech. J. Vol. 40, 1961 p. 489 – 508.
10. Boyd G. D., Kogelnik H. Generalized confocal resonator theory. // Bell Sys. Tech. J. Vol. 41, 1962 p. 1347 – 1369.
11. Fox A. G., Li T. Modes in a maser interferometer with curved and tilted mirrors. // Proc. IEEE. Vol. 51, 1963 p. 80 – 89.
12. Li T., Skinner J. G. Oscillating modes in ruby lasers with nonuniform pumping energy distribution. // J. Appl. Phys. Vol. 36, 1965 p. 2595 – 2596.
13. Fox A. G., Li T. Effect of gain saturation on the oscillating modes of optical masers. // IEEE J. Quantum Electron. Vol. QE-2, 1966 p. 774 – 783.
14. Streifer W. Modes in spherical resonators with rectangular mirrors. // J. Opt. Soc. Am. Vol. 54, 1964 p. 1399.
15. Tang C. L. On diffraction losses in laser interferometers. // Appl. Opt. Vol. 1, 1962 p. 768 – 770.
16. Bergstein L. Modes of stable and unstable optical resonators. // Appl. Opt. Vol. 7, 1968 p. 495 – 504.
17. Siegman A. E., Arrathoon R. Modes in unstable optical resonators and lens waveguides. // IEEE J. Quantum Electron. Vol. QE-3, 1967 p. 156 – 163.
18. Anan'ev Y. A., Svetsitskaya N. A., Sherstobitov V. E. Properties of a laser with an unstable resonator. // Sov. Phys. JETP. Vol. 28, 1969 p. 69 – 74.

19. Anan'ev Y. A., Vinokurov G. N., Koval'chuk L. V., Svetsitskaya N. A., Sherstobitov V. E. Telescopic-resonator laser. // *Sov. Phys. JETP*. Vol. 31, 1970 p. 420 – 424.
20. Anan'ev Y. A., Sherstobitov V. E. Influence of the edge effects on the properties of unstable resonators. // *Sov. J. Quantum Electron*. Vol. 1, 1971 p. 263 – 267.
21. Karman G. P., McDonald G. S., New G. H. C., Woerdman J. P. Fractal modes in unstable resonators. // *Nature*. Vol. 402, 1999 p. 138.
22. Siegman A. E. Laser Beams and Resonators: The 1960s. // *IEEE Journal of special topics in Quantum Electronics*. Vol. 6, 2000 p. 1380 – 1388.
23. Gerber M., Graf T. Generation of Super-Gaussian Modes in Nd: YAG Lasers With a Graded-Phase Mirror. // *IEEE Journal of Quantum Electronics*. Vol. 40, 2004 p. 741 – 746.
24. Deng D., Wei Ch., Yi K., Shao J., Fan Z., Tian Y. Propagation properties of beam generated by Gaussian mirror resonator. // *Optics Communications*. Vol 258, 2006 p. 43 – 50.
25. Deng D., Fu X., Y., Tian Y., Yi K., Shao J., Fan Z. Far-field intensity distribution of beam generated by Gaussian mirror resonator. // *Optics Communications*. Vol. 248, 2005 p. 185 – 189.
26. Ji X., Lu B. Focusing of flattened Gaussian beams by an annular lens. // *Optics & Laser Technology*. Vol. 35, 2003 p. 569 – 573.
27. Kogelnik H., Li T. *Appl. Opt.* Vol. 5, 1966 p. 1550.

Priedai