ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

IRMA GUDAITIENĖ

NETIESINĖS DIFUZIJOS DIFERENCIALINĖS LYGTIES KAI KURIE SPRENDINIAI

MAGISTRO DARBAS

Darbo vadovas
doc. dr. Mindaugas Stakvilevičius

Šiauliai, 2010

Turinys

Įvadas

Tema: NETIESINĖS DIFUZIJOS DIFERENCIALINĖS LYGTIES KAI KURIE SPRENDINIAI.

Temos aktualumas. Ši tema yra aktuali fizikams, nana technologijų specialistams, matematiškai modeliuojantiems priemaišų plitimo puslaidininkiuuose procesą.

Darbo objektas.

Magistro darbe išnagrinėta netiesinė parabolinė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{N}} \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Gavome šios lygties polinomais išreiškiamus sprendinius. Iš esmės šiuos polinomus galime pavadinti binomais (gauti sprendiniai sudaryti iš kelių narių, kurie pakelti sveikuoju laipsniu). Radome analizinius sprendinius su sveikaisiais N skaičiais, kai $N = 1,2,3,4,5,6$, dviem pavidalais.

Darbo antroje dalyje išnagrinėta netiesinės difuzijos diferencialinės lygties

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

kai kurie sprendiniai su bet kokiais teigiamais difuzijos koeficiento priklausomybės nuo koncentracijos u laipsnio rodikliais $\frac{1}{p}$.

Darbo tikslas. Rasti atskiruosius sprendinius ir juos susisteminti.

Darbo uždaviniai.

- Išspręsti netiesinę difuzijos diferencialinę lygtį automodelinio kintamojo metodu;
- Išspręsti dvimatę netiesinę parabolinę lygtį skaitiniais metodais;
- Išanalizuoti kiekvieną metodą;
- Palyginti gautus rezultatus ir pagrįsti kiekvieną iš jų;
- Pateikti pasiūlymus bei rekomendacijas tolimesniems tyrimams.

Darbo šaltiniai. Rašant magistrinį darbą naudojamos mokslinės knygos, straipsniai įvairiomis kalbomis. Informacija ieškoma įvairiuose šaltiniuose: bibliotekoje, internete ir kt.

Darbo metodika. Šiame darbe ieškomi atskirieji sprendiniai, naudojant įvairius matematinius metodus.

Darbo struktūra. Mokslinį darbą sudaro įvadas ir dvi dalys, suskirstytos į atskirus skyrius. Pirmoje dalyje aprašyta teorija, kurią panaudojome atskirų sprendinių radimui. Teorijoje nagrinėjama: difuzijos procesas ir jos lygtis; šilumos sklidimo procesas ir jos lygtis; tų procesų netiesinė lygtis. Antroje dalyje pateikti netiesinės difuzijos diferencialinės lygties sprendiniai. Remiantis empiriniais tyrimais suformuluotos išvados, pasiūlymai bei rekomendacijos bei trumpa santrauka lietuvių ir anglų kalba. Darbo pabaigoje pateikiamas literatūros sąrašas bei priedai.

1. Difuzijos lygtys, jų sprendimo būdai

Dujų difuzijos lygtis. Šią lygtį tenkina besisunkiančių (difuzuojančių) pro akytą medžiagą dujų koncentracija. Tarkime, kad difuzija vyksta pripildytame skystos medžiagos izoliuotame vienodo skersinio pjūvio vamzdyje išilgine kryptimi. Tada visi nagrinėjami dydžiai priklausys tik nuo laiko t ir koordinatės x. Pažymėkime $u = u(t, x)$ - dujų koncentraciją, q - vamzdelio skerspjūvį, $C(x)$ medžiagos akytumo koeficientą (jį įsivaizduojame, kaip dujų užimamo tūrio ir medžiagos tūrio santykį) ir $D(x)$ - vadinamąjį difuzijos koeficientą. Imkime vamzdžio atkarpą $[x, x+\Delta x]$. Jos tūris yra $q\Delta x$, o laisvas dujų užimamas tūris - $\overline{C(x)}$ $q\Delta x$ (kaip ir aukščiau, brūkšniais pažymime vidurines funkcijų reikšmes atkarpoje). Dujų masė tame tūryje lygi (1)

$$Q = \overline{C(x)} q \Delta x \bar{u}$$

Pagal Nernsto (H. V. Nernst) dėsnį dujų srovė pro vamzdžio skerspjūvį yra proporcinga to skerspjūvio plotui ir dujų koncentracijos gradientui. Proporcingumo koeficientas yra minėtasis difuzijos koeficientas. Taške (skerspjūvyje) x toji srovė yra lygi

$$-D(x) q \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}.$$

Prilyginame dujų kiekio pasikeitimą elemente $[x, x+\Delta x]$ per laiko vienetą – įeinančių į tą elementą per jo galus srovių atgebrinei sumai:

$$\overline{C(x)} q \Delta x \frac{\partial \bar{u}}{\partial t} = D(x+\Delta x) q \frac{\partial u(t, x+\Delta x)}{\partial x} - D(x) q \frac{\partial u(t, x)}{\partial x}.$$

Padaliję abi lygybės puses iš $q\Delta x$, riboje, kai $\Delta x \to 0$, gauname difuzijos lygtį

$$C(x) \frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left[D(x) \frac{\partial u}{\partial x}\right]. \tag{2}$$

Jei vamzdyje esanti medžiaga yra vienalytė, tai jos akytumo bei difuzijos koeficientai yra pastovūs ir, pažymėję

$$a = \sqrt{\frac{D}{C}}, \tag{3}$$

gauname lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{4}$$

Jei vamzdyje sienelės nebūtų sandarios, tai turėtume atsižvelgti į dujų sunkimąsi pro jas ir gautume difuzijos lygtis, analogiškas šilumos laidumo lygtims.

1.1. Tiesinės difuzijos lygtys, jų sprendimo būdai

Ištirsime difuzijos sklidimą tokiame ilgame homogeniniame strype, kad praktiškai jį galima laikyti begaliniu [7]. Tuo tikslu reikia išspręsti Koši uždavinį: rasime difuzijos laidumo lygties

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad (t > 0, -\infty > x > +\infty) \tag{1}$$

sprendinį, tolydinį srityje $(t \geq 0, -\infty < x < +\infty)$ ir tenkinantį pradinę sąlygą:

$$u(0, x) = \varphi(x). \tag{2}$$

Funkcija $\varphi(x)$ visoje begalinėje [tiesėje] imsime tolydine ir tolygiai aprėžta:

$$|\varphi(x)| \leq M \quad (-\infty < x < +\infty). \tag{3}$$

Analogiškas uždavinys, svyravimo lygties atveju, sprendžiamas Dalambero metodu, įrašydami pradines sąlygas į lengvai randamą bendrąjį lygties sprendinį. Tačiau (1) lygtis neturi tokio paprasto pavidalo bendrojo sprendinio, todėl teks panaudoti Furjė metodą, kurį iki šiol taikėme tik mišriajam uždaviniui. Kai nėra kraštinių sąlygų, iš gautų atskirų sprendinių aibės neišskiriame sprendinių sekos, ir gautasis sprendinys bus ne eilutės, o integralo pavidalo.

Pradžioje ieškosime netrivialių (1) lygties

$$u = T(t)\ \mathrm{X(x)} \neq 0 \tag{4}$$

pavidalo sprendinių. Įrašę tą išraišką į (1) lygtį ir jau žinomu būdu atskyrę kintamuosius bei paėmę neigiamą konstantą $-\lambda^2 (\lambda > 0)$, gauname

$$\frac{T'(t)}{a^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda^2. \tag{5}$$

Iš čia parašome dvi paprastąsias diferencialines lygtis

$$\frac{T'(t)}{T(t)} = -\lambda^2 a^2,$$

$$X''(x) + \lambda^2 X(x) = 0.$$

Jų bendrieji sprendiniai yra

$$T(t) = Ce^{-\lambda^2 a^2 t},$$

$$X(x) = A\cos\lambda x + B\sin\lambda x.$$

Iš čia atsižvelgę į (4), parašome ieškomų (1) lygties sprendinių šeimą

$$u = T(t)X(x) = e^{-\lambda^2 a^2 t}(A_1 \cos\lambda x + B_1 \sin\lambda x). \tag{6}$$

Čia A_1 ir B_1 yra naujos konstantos.

Pastebėsime, kad imdami (5) dešinėje neigiamą konstantą, gausime (6) sprendinyje teigiamą koeficientą prie t ir rodiklines arba hiperbolines funkcijas vietoj trigonometrinių, todėl tas sprendinys bus neaprėžtas tiek t, tiek x atžvilgiu.

Priskyrę (10) sprendiniuose kiekvienai parametro λ reikšmei atitinkamas konstantas A_1 ir B_1, pastarąsias laikome λ funkcijomis ir žymime $A(\lambda)$ ir $B(\lambda)$. Gauname tolydinę sprendinių šeimą

$$u_\lambda(t,x) = e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right] \ (0 < \lambda < +\infty). \tag{7}$$

Duotoji (1) lygtis yra tiesinė homogeninė, todėl (7) sprendinio integralas parametro λ atžvilgiu

$$u = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda \tag{8}$$

Taip pat yra (1) lygties sprendinys, kai tą integralą galima diferencijuoti po integralo ženklu vieną kartą t atžvilgiu ir dukart x atžvilgiu. Taip būtų, jei (8) integralas ir (7) funkcijos atitinkamų dalinių išvestinių integralai konverguotų tolygiai t ir x atžvilgiu bet kokioje uždaroje t, x kitimo srityje, telpančioje srityje $(t > 0, -\infty < x < +\infty)$.

Tarkime, kad minimos diferencijavimo sąlygos yra patenkintos ir (8) integralas turi prasmę, kai $t=0$. Sakykime, kad (8) funkcija tenkina (2) pradinę sąlygą:

$$u(0,x) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t}\left[A(\lambda)\cos\lambda x + B(\lambda)\sin\lambda x\right]d\lambda = \varphi(x). \tag{9}$$

Raskime funkcijas $A(\lambda)$ ir $B(\lambda)$.

Sakykime, kad funkciją $\varphi(x)$ galima išreikšti Furjė integralu

$$\varphi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty} d\lambda \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi. \tag{10}$$

Integraliniame skaičiavime (10) formulė buvo išvesta su sąlyga, kad funkcija *f(x)* būtų:

1) atkarpomis diferencijuojama kiekviename baigtiniame intervale,

2) absoliučiai integruojama intervale $(-\infty, +\infty)$:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |\varphi(x)|dx < +\infty, \tag{11}$$

3) tolydinė taške x. Tos sąlygos jokiu būdu neišplaukia iš to, kas buvo pasakyta apie funkciją *f(x)*, formuluojant uždavinį. Išvados, kaip matysime, bus teisingos ir be jų.

Pritaikę skirtumo kosinuso formulę, (10) formulę šitaip parašome

$$\phi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]d\lambda\,. \qquad (12)$$

Iš (9) ir (12) matyti, kad (9) sąlyga yra išpildyta, kai

$$A(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi\,,\ B(\lambda) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\,.$$

Įrašę tas išraiškas į (11) lygties sprendinį, gauname

$$u(t.x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\left[\cos\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\cos\lambda\xi d\xi + \sin\lambda x\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\sin\lambda\xi d\xi\right]d\lambda\,,$$

arba

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{+\infty}d\lambda\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\varphi(\xi)\cos\lambda(\xi - x)d\xi\,.$$

Pakeitę integravimo tvarką, gauname:

$$u(t,x) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}\varphi(\xi)\left[\int_0^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda\right]d\xi\,. \qquad (13)$$

Atskirai apskaičiuosime integralą skliaustuose, tarę, kad jis yra ξ funkcija ir pažymėję

$$I(\xi) = \int_0^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda\,. \qquad (14)$$

Kai $t > 0$, (14) integralas ir integralas, gaunamas išdefirencijavus ξ atžvilgiu jo pointegralinę funkciją, abu ξ atžvilgiu tolygiai konverguoja, nes atitinkami mažorantiniai integralai

$$\int_0^{+\infty}e^{-\lambda^2a^2t}d\lambda \text{ ir } \int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda^2a^2t}d\lambda$$

konverguoja ir nepriklauso nuo ξ. Vadinasi, (14) integralą galima diferencijuoti ξ atžvilgiu po integralo ženklu. Diferencijuodami ir toliau dalimis, randame

$$I'(\xi) = -\int_0^{+\infty}\lambda e^{-\lambda^2a^2t}\sin\lambda(\xi - x)d\lambda = -\frac{\xi - x}{2a^2t}\int_0^{+\infty}e^{-a^2\lambda^2t}\cos\lambda(\xi - x)d\lambda\,,$$

ir gauname diferencialinę lygtį

$$I'(\xi) = -\frac{\xi - x}{2a^2t}I(\xi)\,. \qquad (15)$$

Iš (14), įrašę $\xi = x$, išvedame pradinę sąlygą

$$I(\xi)|_{\xi=x} = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda^2 a^2 t} d\lambda = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}}\,. \tag{16}$$

Išsprendę (15) lygtį su (16) pradine sąlyga, gauname (14) integralo išraišką

$$I(\xi) = \frac{1}{2a}\sqrt{\frac{\pi}{t}} e^{-\frac{(\xi-x)}{4a^2 t}}$$

Ir įrašome į (13) lygybę:

$$u(t,x) = \frac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi \tag{17}$$

Reiškinys neturi prasmės, kai *t = 0*. Prirašę, kai *t = 0*, sprendinio reikšmę iš (2) pradinės sąlygos, gauname, kai $t \geq 0$,

$$u(t,x) = \begin{cases} \dfrac{1}{2a\sqrt{\pi t}} \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(\xi) e^{-\frac{(\xi-x)^2}{4a^2 t}} d\xi \quad (t > 0), \\ \varphi(x) \quad (t = 0). \end{cases} \tag{18}$$

1.2. Netiesinės difuzijos lygtys, jų sprendimo būdai

Klasikinė tiesinė difuzijos lygtis yra išvesta iš Fokerio - Planko lygties, darant prielaidą, kad difuzijos procesas yra lėtas ir dėl to difuzijos koeficientas D yra pastovus, nuo koncentracijos nepriklausantis parametras. Tačiau tai negali būti taikoma klasikinės tiesinės difuzijos lygties sprendinio erfc(x/2$\sqrt{Dt}$) asimptotiškai, aprašančiai difunduojančių priemaišų įsiskverbimą medžiagoje neribotais dideliais atstumais x per baigtinį laiką, nes tai prieštarauja reliatyvumo teorijai. Be to, iš Brauno judėjimo teorijos seka, kad per baigtinį laiką t difunduojančios dalelės gali įsiskverbti medžiagoje tik iki baigtinio atstumo nuo difunduojančių dalelių šaltinio. Tas atstumas apytikriai lygus vidutiniam kvadratiniam difunduojančių dalelių poslinkiui ($\sqrt{2Dt}$). Netiesinė difuzijos lygtis, pakankamai tiksliai aprašanti difunduojančių priemaišų pasiskirstymą puslaidininkiuose, gauta padarius prielaidą, kad difunduojančių dalelių srauto tankis yra apibrėžiamas difuzijos koeficientu *D*, įvairiai priklausančiu nuo priemaišų koncentracijos *N*. Tuomet srityje, kur priemaišų koncentracija lygi nuliui, difuzijos koeficientas lygus nuliui taip pat. Taip užtikrinama fizikinė sąlyga, kad per baigtinį laiką priemaišos medžiagoje turi įsiskverbti į baigtinį gylį.

Kai, vykstant difuzijos procesui, į silicį skverbiasi arsenas ir fosforas arba chromas į nikelio oksidą, difuzijos koeficientas yra tiesiog proporcingas koncentracijai ir tokį procesą aprašanti diferencialinė lygtis yra tokia:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^2\right).$$

Kai difunduoja cinkas į galio arsenidą difuzijos koeficientas proporcingas koncentracijos kvadratui difuzijos procesas aprašomas tokia lygtimi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^3\right).$$

Kitomis sąlygomis tų pačių medžiagų difuzijos koeficientas proporcingas kvadratinei koncentracijos šakniai, ir procesas aprašomas lygtimi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^{\frac{3}{2}}\right).$$

Būna ir kitų difuzijos koeficiento priklausomybių nuo koncentracijos, pavyzdžiui aprašomų tokia lygtimi:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(u^4\right).$$

Darbe išdėstyta netiesinės difuzijos lygties

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}(u^{\frac{1}{N}}\frac{\partial u}{\partial x})$$

atskirųjų sprendinių, išreiškiamų elementariomis funkcijomis, paieška. Taip pat sprendiniai atskirai iliustruojami, pasitelkus kompiuterinę matematinę programa MathCAD.

Uždavinio formulavimas

Difuzijos (taip pat ir šilumos) sklidimo lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t}=div[D(u)\ grad\ u], \tag{1}$$

D – difuzijos koeficientas, u - molekulių koncentracija.

Jei difuzijos koeficientas lygus konstantai: $D(u)=const$, tai

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\ div\ grad\ u$$

yra tiesinė lygtis. Šią lygtį galima užrašyti Dekarto koordinatėmis:

$$grad\ u=\frac{\partial u}{\partial x}\vec{i}+\frac{\partial u}{\partial y}\vec{j}+\frac{\partial u}{\partial z}\vec{k}\ ,$$

$$div\,\vec{F}=\frac{\partial F_x}{\partial x}+\frac{\partial F_y}{\partial y}+\frac{\partial F_z}{\partial z}\ .$$

Vektorius $\vec{F}$ yra gradientas u:

$$\vec{F}=grad\ u\ .$$

$$F_x=\frac{\partial u}{\partial x},\ F_y=\frac{\partial u}{\partial y},\ F_z=\frac{\partial u}{\partial z},$$

$$div\ grad\ u=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\ .$$

Išraiška $div\ grad\ u=\Delta u$, Δu vadinamas Laplaso operatoriumi.

Lygtis tiesiniu atveju, kai D - konstanta, vadinama Fiko lygtimi:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=D\Delta u\ .$$

Išskleidžiame Fiko lygtį:

$\frac{\partial u}{\partial t}=D(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial z^2})$ - Erdvinė Fiko lygtis.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})$$ - Plokštuminė lygtis.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = D\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$ - Vienmatė lygtis.

Kai D - ne konstanta, vienmačiu atveju

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}[D(u)\frac{\partial u}{\partial x}].$$

Paskutinė lygtis paprastai sprendžiama kompiuteriu. Yra nemažai ir analizinių sprendinių. Ieškome atskirųjų sprendinių, kada difuzijos koeficientas turi tokį pavidalą :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(u^{\frac{1}{N}}\frac{\partial u}{\partial x}) \tag{2}$$

arba

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(\sqrt[N]{u}\frac{\partial u}{\partial x}). \tag{2.1}$$

Natūralu sprendinio ieškoti tokio, kad (2.1) lygties dešinėje pusėje neliktų šaknies. Jį įrašius į difuzijos koeficiento išraiškos pošaknį, iracionalumo (šaknies) neliktų.

Tai netiesinė, parabolinė lygtis, kuri taikoma atskiriems difuzijos procesams aprašyti.

Šio darbo pirmojoje dalyje rasime sprendinius su **sveikaisiais** skaičiais, kai $N = 1,2,3,4,5,6$. Jų ieškosime keliais pavidalais.

Pateiksime išsamų sprendimą, kai $N = 2$. Su likusiais N parodysime tik rezultatus.

Pirmiausia ieškosime sprendinius polinomu:

$$u(x,t) = \left[f(t) + h(t)x^2\right]^N. \tag{3}$$

Sprendinio ieškojimas N laipsnio dvinario pavidalu, kai $N = 2$

Sprendžiame tokią lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{4}$$

O sprendinio ieškome tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \left(f(t) + h(t)\cdot x^2\right)^2. \tag{5}$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 2\left(f + hx^2\right)\cdot\left(\dot{f} + \dot{h}x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2\left(f + hx^2\right) \cdot 2hx \, .$$

Gautus rezultatus įrašome į (4) lygties dešinę pusę:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[2\left(f + hx^2\right)\left(f + hx^2\right) \cdot 2hx\right] = 4h\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f + hx^2\right)^2 \cdot x\right] =$$
$$= 4h\left\{2\left(f + hx^2\right) \cdot 2hx \cdot x + \left(f + hx^2\right)^2\right\}$$

Dabar surašome į (4) lygtį:

$$2\left(f + hx^2\right)\left(\dot{f} + \dot{h}x^2\right) = 4h\left(f + hx^2\right)\left[4hx^2 + f + hx^2\right].$$

Suprastiname abi puses iš $(f + hx^2)$:

$$\dot{f} + \dot{h}x^2 = 2h\left(f + 5hx^2\right).$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = 2hf \\ \dot{h} = 10h^2 \end{cases}.$$

(taškais žymimos išvestinės pagal laiką).

Gavome dvi paprastąsias, priklausančias tik nuo laiko t, diferencialines lygtis.

Sprendžiame šios sistemos antrąją lygtį kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 10h^2 \end{cases},$$

padauginame ją iš $\dfrac{dt}{h^2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 10h^2 \left| \cdot \dfrac{dt}{h^2} \Rightarrow \dfrac{dh}{h^2} = 10dt \right. \end{cases},$$

lygtį

$$\frac{dh}{h^2} = 10dt$$

integruojame ir gauname

$$-\frac{1}{h}=10t+C_1.$$

Čia const numetame, nes laiką galima parinkti bet kokį. C_1 yra koncentracijos reikšmė laiko momentu $t=1$ pradiniame taške $x=0$. Tada

$$h(t)=-\frac{1}{10t}.$$

Sprendžiame pirmąją lygtį:

$$\frac{\partial f}{\partial t}=2f\left(-\frac{1}{10t}\right)\Bigg|\cdot\frac{dt}{f},$$

$$\frac{df}{f}=-\frac{dt}{5t},$$

tada integruojame ir gauname

$$\ln f=-\frac{1}{5}\ln t+\ln c,$$

$$\ln f=\ln\left(t^{-\frac{1}{5}}\cdot c\right),$$

iš čia

$$f=c\cdot t^{-\frac{1}{5}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įrašome į (5) sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{5}}-\frac{1}{10t}\cdot x^2\right)^2. \tag{6}$$

Tai atskirasis (4) lygties sprendinys.

Sprendinio N laipsnio dvinario pavidalu patikrinimas, kai $N=2$

Patikrinsime, ar sprendinys teisingas:

Turime (4) diferencialinę lygtį ir (6) sprendinį $u(x,t)$.

Atliekame veiksmus su (6) reiškiniu:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\text{ diferencijuojame pagal } t \text{ laiką } =2\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}ct^{-\frac{6}{5}}+\frac{1}{10}t^{-2}x^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\text{ diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį } =2\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{1}{10t}\cdot x^2\right)\cdot\left(-\frac{2x}{10t}\right).$$

Dabar surašome į (4) lygties dešinę pusę:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{1}{10t}x^2\right)\cdot 2\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right)\cdot\left(-\frac{2x}{10t}\right)\right)=-\frac{4}{10t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right)^2\cdot x\right]=$$

$$=\frac{2}{5t}\left\{2\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right)\cdot\left(-\frac{2x}{10t}\right)\cdot x+\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right)\right\}=-\frac{2}{5t}\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right)\cdot\left[-\frac{4x^2}{10t}+ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right]$$

.

Įrašome abi išraiškas į (4) diferencialinę lygtį. Tada

$$2\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right)\left(-\frac{1}{5}ct^{-\frac{6}{5}}+\frac{x^2}{10t^2}\right)=\frac{2}{5t}\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{x^2}{10t}\right)\left(ct^{-\frac{1}{5}}-\frac{5x^2}{10t}\right).$$

Turime gauti lygybę abiejuose pusėse (suprastiname abi puses):

$$\left(-\frac{1}{5}ct^{-\frac{6}{5}}+\frac{x^2}{10t^2}\right)=-\frac{1}{5}\left(ct^{-\frac{1}{5}-1}+\frac{x^2}{2t^2}\right),$$

$$-\frac{1}{5}ct^{-\frac{6}{5}}+\frac{x^2}{10t^2}=-\frac{1}{5}ct^{-\frac{6}{5}}+\frac{x^2}{10t^2}.$$

Gavome, kad lygybė patenkinta visoms c parametro reikšmėms, vadinasi sprendinys teisingas.

Sprendinio ieškojimas N laipsnio trinario pavidalu, kai $N=2$

Toliau ieškosime sprendinių tokiu pavidalu:

$$u(x,t)=\left[f(t)+g(t)x+h(t)x^2\right]^N. \tag{7}$$

Kai $N=2$, sprendžiame (4) lygtį.

Sprendinio ieškome tokiu polinomu:

$$u(x,t)=\left[f(t)+g(t)x+h(t)x^2\right]^2. \tag{8}$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=2\left(f+gx+hx^2\right)\left(\dot{f}+\dot{g}\,x+\dot{h}\,x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2\left(f+gx+hx^2\right)\left(g+2hx\right).$$

Gautus rezultatus įrašome į (4) lygties dešinę pusę:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[2\left(f+gx+hx^2\right)^2\left(g+2hx\right)\right]=2\left[2\left(f+gx+hx^2\right)\left(g+2hx\right)^2+\left(f+gx+hx^2\right)^2\cdot 2h\right]=$$
$$=4\left(f+gx+hx^2\right)\left[\left(g+2hx\right)^2+\left(f+gx+hx^2\right)\cdot h\right]$$

Dabar surašome į (4) lygtį:

$$2\left(f+gx+hx^2\right)\left(\dot{f}+\dot{g}x+\dot{h}x^2\right)=4\left(f+gx+hx^2\right)\left(g^2+5ghx+fh+5h^2x^2\right).$$

Suprastiname abi puses iš $(f+gx+hx^2)$ ir gauname:

$$\dot{f}+\dot{g}x+\dot{h}x^2=2g^2+10ghx+2fh+10h^2x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases}\dot{f}=2g^2+2hf\\ \dot{g}=10gh\\ \dot{h}=10h^2\end{cases},$$

gavome tris paprastąsias diferencialines lygtis.

Sprendžiame šią sistemą (nuo trečios lygties) kintamųjų atskyrimo metodu:

$$h(t)=-\frac{1}{10t},$$

$$\dot{g}=10g\cdot\left(-\frac{1}{10t}\right)=-\frac{g}{t},$$

$$g=g_0t^{-1},$$

$$\dot{f}=2g_0^2t^{-3}-\frac{f}{5t},$$

$$\dot{f}+\frac{1}{5}ft^{-1}=2g_0^2t^{-3}. \tag{S1}$$

Šią lygtį galima išspręsti pagal formulę, kuri yra taip išvedama:

<u>LAGRANŽO KONSTANTŲ VARIJAVIMO METODAS</u>

Turime:

$$\dot{y}+\alpha\frac{y}{t}=\beta t^{\gamma}.$$

Sprendžiame homogeninę lygtį:

$$y' + \alpha \frac{y}{t} = 0.$$

Šią lygtį padauginame iš $\frac{dt}{y}$, tada turime:

$$y' + \alpha \frac{y}{t} = 0 \quad \left| \cdot \frac{dt}{y} \right.,$$

$$\frac{dy}{y} + \alpha \frac{dt}{t} = 0,$$

$$\ln y = -\alpha \ln t + \ln c,$$

$$y = c \cdot t^{-\alpha}.$$

Tarkime, kad c jau yra nuo t priklausantis kintamasis:

$$y' = c' t^{-\alpha} - c\alpha t^{-\alpha-1},$$

$$c' t^{-\alpha} - c\alpha t^{-\alpha-1} + \alpha c t^{-1} t^{-\alpha} = \beta t^{\gamma}.$$

Suprastiname ir gauname:

$$c' = \beta t^{\alpha+\gamma},$$

$$c = \frac{\beta}{\alpha+\gamma+1} \cdot t^{\alpha+\gamma+1} + c_2,$$

$$c_2 = const,$$

$$y = \left(\frac{\beta}{\alpha+\gamma+1} \cdot t^{\alpha+\gamma+1} + c_2 \right) \cdot t^{-\alpha},$$

$$y = \frac{\beta}{\alpha+\gamma+1} \cdot t^{\gamma+1} + c_2 \cdot t^{-\alpha}. \qquad (*)$$

Šį gautą rezultatą pritaikysime (S1) lygčiai, žinodami, kad

$$\alpha = \frac{1}{5},\ \beta = 2g_0^2,\ \gamma = -3.$$

Gauname

$$f = \frac{2g_0^2 t^{-2}}{\frac{1}{5} - 3 + 1} + f_0 t^{-\frac{1}{5}} = -\frac{10}{9} g_0^2 t^{-2} + f_0 t^{-\frac{1}{5}},$$

arba

$$f = -\frac{10}{9} g_0^2 t^{-2} + f_0 t^{-\frac{1}{5}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įrašome į (8) sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\left(-\frac{10}{9}g_0^2t^{-2}+f_0t^{-\frac{1}{5}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{10t}\cdot x^2\right)^2. \qquad (9)$$

Tai atskirasis (4) lygties sprendinys.

Sprendinio N laipsnio trinario pavidalu patikrinimas, kai $N=2$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime (4) diferencialinę lygtį ir (9) sprendinį $u(x,t)$.

Atliekame veiksmus su (9) išraiška:

$$\frac{\partial u}{\partial t}= \text{diferencijuojame pagal } t \text{ laiką}$$

$$=2\left(f_0t^{-\frac{1}{5}}-\frac{10}{9}g_0^2t^{-2}+\frac{g_0x}{t}-\frac{x^2}{10t}\right)\cdot\left(-\frac{1}{5}f_0t^{-\frac{6}{5}}+\frac{20}{9}g_0^2t^{-3}-g_0t^{-2}x+\frac{x^2}{10t^2}\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}= \text{diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį } =2\left[f_0t^{-\frac{1}{5}}-\frac{10g_0^2}{9t^2}+\frac{g_0x}{t}-\frac{x^2 10t}{}\right]\left[\frac{g_0}{t}-\frac{2x}{10t}\right].$$

Dabar surašome į (4) lygties dešinę pusę:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{2}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(f_0t^{-\frac{1}{5}}-\frac{10g_0^2}{9t^2}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{10t}x^2\right)^2\left(\frac{g_0}{t}-\frac{2x}{10t}\right)\right)=$$

$$=2\left[2\left(\frac{g_0}{t}-\frac{2x}{10t}\right)^2\left(f_0t^{-\frac{1}{5}}-\frac{10g_0^2}{9t^2}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{10t}x^2\right)+\left(f_0t^{-\frac{1}{5}}-\frac{10g_0^2}{9t^2}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{10t}x^2\right)^2\left(-\frac{2}{10t}\right)\right].$$

Įrašome abi išraiškas į (4) diferencialinę lygtį. Gauname, kad lygybė patenkinta visoms c parametro reikšmėms, vadinasi sprendinys teisingas.

Kai $N=2$, gavome sprendinius dviem skirtingais (6) ir (9) pavidalais. Su kitais N pateiksime tik gautus rezultatus. Išsamūs sprendimai pateikti priede.

Sprendinių suvestinė, su $N=1,2,3,4,5,6$

Kai $N=1$, sprendinio ieškome (3) pavidalu. Atskirasis sprendinys $u(x,t)$ lygus:

$$u(x,t)=c\cdot t^{-\frac{1}{3}}-\frac{1}{6t}\cdot x^2.$$

Kai sprendinio ieškome (7) polinomu, tada sprendinys bus

$$u(x,t)=-\frac{3}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{3}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{6t}\cdot x^2.$$

Kai $N=2$, sprendinio ieškome (3) pavidalu. Atskirasis sprendinys $u(x,t)$ lygus:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{5}}-\frac{1}{10t}\cdot x^2\right)^2.$$

Kai sprendinio ieškome (7) polinomu, tada sprendinys bus

$$u(x,t)=\left(-\frac{10}{9}g_0^2t^{-2}+f_0t^{-\frac{1}{5}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{10t}\cdot x^2\right)^2.$$

Kai $N=3$, sprendinio ieškome (3) pavidalu. Atskirasis sprendinys $u(x,t)$ lygus:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{7}}-\frac{1}{14t}\cdot x^2\right)^3.$$

Kai sprendinio ieškome (7) polinomu, tada sprendinys bus

$$u(x,t)=\left(-\frac{7}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{7}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{14t}\cdot x^2\right)^3.$$

Kai $N=4$, sprendinio ieškome (3) pavidalu. Atskirasis sprendinys $u(x,t)$ lygus:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{9}}-\frac{1}{18t}\cdot x^2\right)^4.$$

Kai sprendinio ieškome (7) polinomu, tada sprendinys bus

$$u(x,t)=\left(-\frac{9}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{9}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{18t}\cdot x^2\right)^4.$$

Kai $N=5$, sprendinio ieškome (3) pavidalu. Atskirasis sprendinys $u(x,t)$ lygus:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{11}}-\frac{1}{22t}\cdot x^2\right)^5.$$

Kai sprendinio ieškome (7) polinomu, tada sprendinys bus

$$u(x,t)=\left(-\frac{11}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{11}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{22t}\cdot x^2\right)^5.$$

Kai $N=6$, sprendinio ieškome (3) pavidalu. Atskirasis sprendinys $u(x,t)$ lygus:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{13}}-\frac{1}{26t}\cdot x^2\right)^6.$$

Kai sprendinio ieškome (7) polinomu, tada sprendinys bus

$$u(x,t)=\left(-\frac{13}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{13}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{26t}\cdot x^2\right)^6.$$

Sprendinio ieškojimas nekonkretizuotam $N\in \mathrm{N}$

Sprendinio ieškojimas N laipsnio dvinario pavidalu, kai N bet koks sveikasis skaičius

Pateiksime bendrąjį sprendimo atvejį su bet kokiu **sveikuoju** N.

Kai N - bet koks sveikasis skaičius, sprendžiame tokią lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{N}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{2}$$

O sprendinio ieškome tokiu pavidalu:

$$u(x,t)=\left(f(t)+h(t)\cdot x^2\right)^N. \tag{3}$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=N\left(f+hx^2\right)^{N-1}\left(\dot{f}+\dot{h}x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=2Nhx\left(f+hx^2\right)^{N-1},$$

$$u^{\frac{1}{N}}\frac{\partial u}{\partial x}=2hxN(f+hx^2)^N.$$

Gautus rezultatus įrašom į (2) lygties dešinę pusę:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{N}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2Nh\frac{\partial}{\partial x}\left[x^2\cdot\left(f+hx^2\right)^N\right]=2Nh\left[\left(f+hx^2\right)^N+xN2hx\left(f+hx^2\right)^{N-1}\right].$$

Dabar surašome į (2) lygtį:

$$N\left(f+hx^2\right)^{N-1}\left(\dot{f}+\dot{h}x^2\right)=2Nh\left(f+hx^2+2Nhx^2\right)\left[f+hx^2\right]^{N-1}.$$

Suprastiname abi puses iš $\left(f+hx^2\right)^{N-1}$ ir gauname:

$$\dot{f}+\dot{h}x^2=2h\left(f+(1+2N)hx^2\right).$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases}\dot{f}=2hf\\ \dot{h}=2(1+2N)h^2\end{cases},$$

gavome dvi paprastąsias diferencialines lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 2(1+2N)h^2 \end{cases},$$

antrąją lygtį padauginame iš $\dfrac{dt}{h^2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 2(1+2N)h^2 \Big| \cdot \dfrac{dt}{h^2} \Rightarrow \dfrac{dh}{h^2} = 2(1+2N)dt \end{cases},$$

lygtį

$$\frac{dh}{h^2} = 2(1+2N)dt$$

integruojame ir gauname

$$-\frac{1}{h} = 2(1+2N)t\,.$$

Čia const numetame, nes laiką galima parinkti bet kokį, tada:

$$h(t) = -\frac{1}{2(1+2N)t}\,,$$

gavome paprastą diferencialinę lygtį.

Sprendžiame pirmąją lygtį:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2f\left(-\frac{1}{2(1+2N)t}\right)\Big| \cdot \frac{dt}{f}\,,$$

$$\frac{df}{f} = -\frac{dt}{(1+2N)t}\,,$$

tada integruojame ir gauname

$$\ln f = -\frac{1}{1+2N}\ln t + \ln c\,,$$

$$\ln f = \ln\left(t^{-\frac{1}{1+2N}} \cdot c\right),$$

iš čia

$$f = c \cdot t^{-\frac{1}{1+2N}} .$$

Gautas f ir h reikšmes įrašome į (3) sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(c \cdot t^{-\frac{1}{1+2N}} - \frac{1}{2(1+2N)t} \cdot x^2 \right)^N . \tag{10}$$

Tai atskirasis (2) lygties sprendinys.

Sprendinio ieškojimas N laipsnio trinario pavidalu, kai N bet koks sveikasis skaičius

Kai sprendinio ieškome polinomu, kuris tokio pavidalo:

$$u(x,t) = \left[f(t) + g(t)x + h(t)x^2 \right]^N , \tag{7}$$

tada sprendžiame (2) lygtį.

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = N\left(f + gx + hx^2\right)^{N-1}\left(\dot{f} + \dot{g}\,x + \dot{h}\,x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = N(g + 2hx)\left(f + gx + hx^2\right)^{N-1} .$$

Gautus rezultatus surašome į (4) lygtį:

$$N\left(f + gx + hx^2\right)^{N-1}\left(\dot{f} + \dot{g}\,x + \dot{h}\,x^2\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[N\left(f + gx + hx^2\right)^N (g + 2hx)\right] = .$$
$$= N^2 (g + 2hx)^2 \cdot (f + gx + hx^2)^{N-1} + 2h(f + gx + hx^2)^N .$$

Suprastiname iš $(f + gx + hx^2)^{N-1}$ ir gauname:

$$\dot{f} + \dot{g}\,x + \dot{h}\,x^2 = Ng^2 + 4Nghx + +4Nh^2x^2 + 2fh + 2ghx + 2h^2x^2 .$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = Ng^2 + 2hf \\ \dot{g} = (4N+2)gh \, . \\ \dot{h} = (4N+2)h^2 \end{cases}$$

Gavome tris paprastąsias diferencialines lygtis.

Sprendžiame šią sistemą (nuo trečios lygties) kintamųjų atskyrimo metodu:

$$h(t) = -\frac{1}{(4N+2)t},$$

$$\dot{g} = (4N+2)g \cdot \left(-\frac{1}{(4N+2)t}\right) = -\frac{g}{t},$$

arba

$$\frac{\partial g}{\partial t} = -\frac{g}{t}$$

lygtį padauginame iš $\frac{dt}{g}$ ir gauname:

$$\frac{dg}{g} = -\frac{dt}{t}.$$

Šią lygtį galime suintegruoti:

$$\ln g = -\ln t + \ln g_0,$$

$$\ln g = \ln g_0 \cdot t^{-1},$$

iš čia

$$g = g_0 t^{-1},$$

kur

$$g_0 = const,$$

$$\dot{f} + \frac{2}{(4N+2)t} f = N g_0^2 t^{-2}. \tag{S2}$$

(S2) lygtį sprendžiame Lagranžo konstantų varijavimo metodu, pagal (*) formulę:

$$y = \frac{\beta}{\alpha+\gamma+1} \cdot t^{\gamma+1} + c_2 \cdot t^{-\alpha},$$

$$f = \frac{N g_0^2 t^{-2+1}}{\frac{1}{2N+1} - 2 + 1} + f_0 t^{-\frac{1}{2N+1}} = -\frac{2N+1}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{2N+1}}, \text{ arba}$$

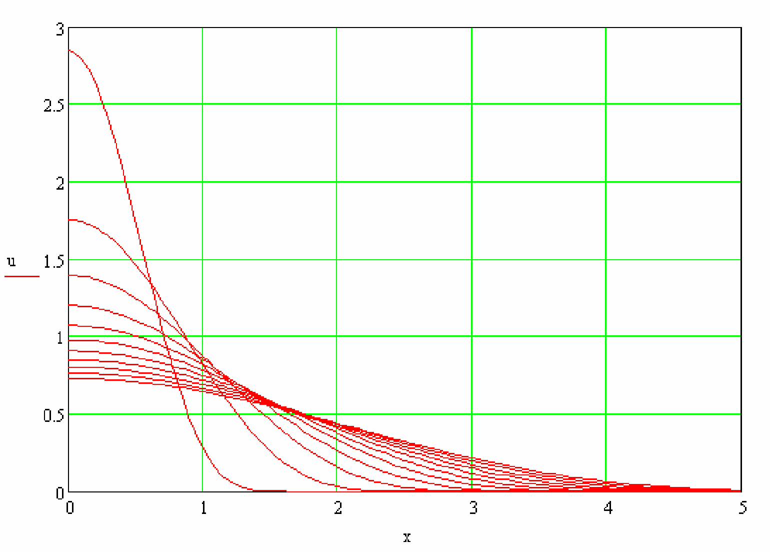
$$f = -\frac{2N+1}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{2N+1}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įrašome į (7) sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(\left(-N - \frac{1}{2}\right) g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{2N+1}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{(4N+2)t} \cdot x^2\right)^N \tag{11}$$

Tai atskirasis (2) lygties sprendinys.

1.3. Lygties sprendinių grafinis vaizdavimas programa MathCad



1. pav. Sprendinių šeima

1 paveikslėlyje parodytos difuzijos procesą, aprašančių atskirųjų sprendinių šeimos, rodančios koncentracijos u pasiskirstymą x ašies kryptimi, skirtingais laiko momentais.

2. Automodelinis metodas

Modifikuotu automodeliniu metodu simetrizuojama diferencialinė lygtis, ieškant (1) sprendinio

$$u(x,t) = A(t)f(\xi), \;\; \xi = \frac{x}{l(t)}, \tag{1}$$

kuriame ξ yra automodelinis kintamasis. Jeigu tokį automodelinį kintamąjį pavyksta rasti, tada dviejų kintamųjų parabolinę lygtį pavyksta suvesti į paprastąją diferencialinę lygtį, kurioje nepriklausomas kintamasis yra ξ.

Modifikuotas metodas skiriasi nuo paprastojo tuo, kad pastarajame daugiklis A(t)=1, ir dėl to difuzijos lygtis nesuvedama į išsprendžiamą analitiškai, o sprendinys išreiškiamas tik per eilutę. Tačiau įrodoma, kad ta eilutė konverguoja ir konkrečiam naudojimui pakanka tik pradinės eilutės daltes. Mes gi pasinaudojome modifikuotu (su daugikliu A(t)) metodu, ir uždavinį suvedėme į analiziškai išsprendžiamą paprastąją diferencialinę lygtį.

Svarbus atskiras tokio metodo atvejis yra bėgančios bangos gavimas

$$u(x,t) = A(t)g(x - V(t)).$$

Čia g yra vieno kintamojo funkcija.

Automodelinio kintamojo pritaikymas difuzijos lygčiai, kurioje difuzijos koeficientas $D = u$.

Kintamųjų transformacija patenkina lygties invariantiškumą, kai $A(t) = t^{-\frac{1}{3}}$, o $\xi = \frac{x}{t^{-\frac{1}{3}}}$. Po šios transformacijos (2) diferencialinė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right), \;\; u(x,0) = \delta(x) \tag{2}$$

yra suvedama į paprastą diferencialinę lygtį nuo kintamojo ξ. Ši lygtis suintegruojama pilnojo diferencialo metodu, gauname

$$ff' + \frac{1}{3}\xi f = 0, \tag{3}$$

kai integravimo konstanta lygi 0.

(3) lygtis turi du sprendinius: pirmasis yra elementarus, t.y. $f = 0$, o antrasis yra $f = C - \frac{\xi^2}{6}$. Tada bendrasis sprendinys „suklijuojamas“ iš dviejų

$$f(\xi)=\begin{cases} C-\dfrac{\xi^2}{6}, kai \xi^2 \le 6C. \\ 0, kai \xi^2 > 6C. \end{cases}. \tag{4}$$

Tokiu būdu netiesinės diferencialinės lygties sprendinys yra lygus

$$u(x,t)=t^{-\frac{1}{3}}\begin{cases} C-\dfrac{x^2}{6t^{\frac{2}{3}}}, kai C \ge C-\dfrac{6}{t^{\frac{2}{3}}}. \\ 0, kai C < C-\dfrac{6}{t^{\frac{2}{3}}}. \end{cases}. \tag{5}$$

Šis netiesinės diferencialinės lygties sprendinys aiškiai skiriasi nuo tiesinės diferencialinės lygties sprendinio tuo, kad kiekvienu laiko momentu sprendinio grafikas kerta nulinį sprendinį vis kitame taške.

Mūsų atveju sprendinys gaunamas toks:

$$u(x,t)=\left(ct^{-\frac{1}{1+2p}}-\frac{x^2}{2+4p}t^{-1}\right)^p.$$

Bangos fronto (u ir t susikirtimo taškas), koordinatė

$$x_f=\sqrt{c(2+4p)t^{-\frac{1}{1+2p}+1}}=\sqrt{2c(1+p)t^{\frac{2p}{2+4p}}}=\sqrt{2c(1+p)t^{\frac{p}{1+2p}}}.$$

Bangos fronto greitis lygus

$$V=\frac{dx}{dt}=p\sqrt{\frac{2c}{1+2p}t^{-\frac{p}{1+2p}-1}}=p\sqrt{\frac{2c}{1+2p}t^{\frac{-1-p}{1+2p}}}.$$

Automodelinio kintamojo pritaikymas difuzijos lygčiai, kurioje difuzijos koeficientas $D=u^{1/p}$, kur p - bet koks teigiamas skaičius.

Darbe sprendžiame panašiu metodu netiesinę parabolinę diferencialinę lygtį, neapsiribodami atveju, kai $D=u^1$.

Sprendžiame bendresnį uždavinį, suvesdami difuzijos lygtį

$$\frac{\partial U}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left\{(D_0+D_1U)^{\frac{1}{p}}\frac{\partial U}{\partial x}\right\}, \tag{6}$$

kurioje parabolinės lygties difuzijos koeficientas

$$D=(D_0+D_1U)^{\frac{1}{p}}, \tag{6A}$$

o U - difunduojančių dalelių koncentracija – tų dalelių skaičius tūrio vienete.

Ja atskirais atvejais aprašomas ir šilumos plitimas, kai $D_0 \neq 0$ ir $p \neq 1$.

Suvesime (6) lygtį į kanoninį pavidalą (be parametrų)

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x} \right\}.$$

Pasižymime

$$D_0 + D_1 U = u \tag{7}$$

ir išsireiškiame U:

$$\boxed{U = \frac{u - D_0}{D_1}}. \tag{8}$$

Diferencijuojame pagal laiką t:

$$\frac{\partial U}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ \left(D_0 + D_1 U\right)^{\frac{1}{p}} \frac{\partial U}{\partial x} \right\},$$

$$\frac{\frac{\partial u}{\partial t}}{D_1} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{D_1} \right\}.$$

Gauname kanoninę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left\{ u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x} \right\}. \tag{9}$$

Ją toliau ir spręsime.

2.1. Lygties sprendimas automodeliniu kintamuoju

Pirmojoje dalyje radome sprendinius su **sveikaisiais** skaičiais, kai $N = 1,2,3,4,5,6$. Antroje dalyje rasime šiuos sprendinius **su bet kokiu teigiamu** p.

Vienmatė diferencialinė lygtis

Turime (9) lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x}).$$

Įvedame z kintamąjį

$$z = xt^m, \tag{10}$$

čia x,t - kintamieji, m - kol kas neapibrėžtas parametras.

Apskaičiuojame išvestines:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t^m,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = mxt^{m-1},$$

$$v'(z) = \frac{dv}{dz}.$$

Sprendinio ieškome pavidalu

$$u = t^k v(z), \tag{11}$$

kur m,k - laisvieji parametrai, kuriuos galime pasirinkti;

$v(z)$ - funkcija tik nuo z.

Būtent daugikliu t^k modifikuotas metodas skiriasi nuo nemodifikuoto. Nemodifikuotame k=0, o čia mes k galėsime pasirinkti taip, kad gautą paprastąją lygtį galėtume išspręsti amališkai.

Diferencijuojame ieškomą sprendinį (11) pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = kt^{k-1}v(z) + t^k \frac{dv}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = kt^{k-1}v(z) + t^{k+m-1}mxv'(z).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^k \frac{dv}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = t^{k+m}v'(z),$$

$$u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x} = t^{\frac{k}{p}} t^{k+m} v^{\frac{1}{p}} v'(z) = t^{\frac{k}{p}+k+m} v^{\frac{1}{p}} v'(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(t^{\frac{k}{p}+k+m} v^{\frac{1}{p}} v'(z)\right) = t^{\frac{k}{p}+k+m} t^m \left(v^{\frac{1}{p}} v'(z)\right)' = t^{\frac{k}{p}+k+2m}\left(v^{\frac{1}{p}} v'(z)\right)'.$$

Gautus duomenis surašome į (9) lygtį:

$$kt^{k-1}v(z) + t^{k+m-1}mxv'(z) = t^{\frac{k}{p}+k+2m}\left(v^{\frac{1}{p}} v'(z)\right)'.$$

Padaliname abi puses iš t^{k-1} nario, gauname:

$$kv(z) + t^m mxv'(z) = t^{\frac{k}{p}+2m+1}\left(v^{\frac{1}{p}} v'(z)\right)'.$$

m ir k pasirenkame patys taip, kad v priklausytų tik nuo z.

Pareikalaujame:

$$\frac{k}{p} + 2m + 1 = 0. \tag{12}$$

Prilyginame (12) sąlygos kairiąją dalį nuliui, kad (10) lygtyje neliktų priklausomybės nuo t ir x. Gauname:

$$kv(z) + mzv'(z) = \left(v^{\frac{1}{p}} v'(z) \right)'.$$

Jei

$$k = m, \tag{13}$$

kairioji pusė – pilnoji išvestinė $(zv)'m$, t.y.

$$m(zv)' = \left(v^{\frac{1}{p}} v'(z) \right)',$$

$$(zv)' = v + zv'.$$

Suintegruojame:

$$mzv(z) + b = v^{\frac{1}{p}} v'(z),$$

čia $b = const$.

Jei ten, kur $x = 0$, $v'(z) = 0$ (max sąlyga), tai $b = 0$, ir

$$mzv(z) = v^{\frac{1}{p}} v'(z). \tag{14}$$

Iš (12) ir (13) – parametrai k ir m lygūs:

$$\frac{m}{p} + 2m + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{1}{p} + 2 \right) m = -1,$$

$$m = -\frac{1}{\frac{1}{p} + 2} = -\frac{p}{1 + 2p} = k,$$

$$m = -\frac{p}{1 + 2p} = k.$$

Įrašome gautas reikšmes į (10) ir (11) lygtis:

$$z = xt^{-\frac{p}{1+2p}},$$

$$u = t^{-\frac{p}{1+2p}} v(z).$$

Integruojame (14) lygtį ir gauname:

$$mzdz = v^{\frac{1}{p}-1} dv,$$

$$-\frac{pz^2}{2(1+2p)} = -c_1 + \frac{v^{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}} = -c_1 + pv^{\frac{1}{p}},$$

$$v^{\frac{1}{p}} = \frac{c_1}{p} - \frac{z^2}{2(1+2p)}.$$

Pažymime

$$\frac{c_1}{p} = c.$$

Gauname funkciją $v(z)$:

$$v(z) = \left(c - \frac{z^2}{2+4p}\right)^p.$$

Įrašome rastas reikšmes į (11) lygtį ir gauname sprendinį:

$$u = t^{-\frac{p}{1+2p}} \left[c - \frac{x^2 t^{-\frac{2p}{1+2p}}}{2+4p} \right]^p,$$

$$u = \left[ct^{-\frac{1}{1+2p}} - \frac{x^2}{2+4p} t^{-\frac{1}{1+2p}-\frac{2p}{1+2p}} \right]^p,$$

$$u = \left[ct^{-\frac{1}{1+2p}} - \frac{x^2}{2+4p} t^{-1} \right]^p. \tag{15}$$

Grįžtame prie jau išvestos (8) lygties

$$U = \frac{u - D_0}{D_1}$$

ir gauname

$$U = \frac{\left[ct^{-\frac{1}{1+2p}} - \frac{x^2}{2+4p}t^{-1}\right]^p - D_0}{D_1}.$$

Diferencialinės lygties sprendinio korektiškumą galime patikrinti pagal tai ,ar yra patenkintas difunduojančių dalelių skaičiaus tvermės dėsnis. Tuo tikslu apskaičiuojame bendrą dalelių skaičių N bet kuriam laiko momentui

$$N = \int_0^{x_f} u dx .$$

Įrašę sprendinį ir rėžio x_f reikšmę, gauname

$$N = \int_0^{\sqrt{2c(1+2p)}t^{\frac{p}{1+2p}}} \left(ct^{-\frac{1}{1+2p}} - \frac{x^2}{2+4p}t^{-1}\right)^p dx . \qquad (*)$$

Įvedame keitinį

$$x^2 = 2c(1+2p)t^{1-\frac{1}{1+2p}} y^2$$

arba

$$x = \sqrt{2c(1+2p)}t^{\frac{p}{1+2p}} y ,$$

$$dx = \sqrt{2c(1+2p)}t^{\frac{p}{1+2p}} dy .$$

Apskaičiuojame rėžius

$$y_1 = 0 ,$$

$$y_2 = \frac{x^2 t^{\frac{-p}{1+2p}}}{\sqrt{2c(1+2p)}} = \frac{\sqrt{2c(1+2p)}t^{\frac{p}{1+2p}} \cdot t^{\frac{-p}{1+2p}}}{\sqrt{2c(1+2p)}} = 1 .$$

Tai ką gavome, įrašome į (*)

$$N = \int_0^1 \left(ct^{-\frac{1}{1+2p}} - \frac{t^{-1} \cdot 2c(1+2p)t^{\frac{2p}{1+2p}} y^2}{2+4p}\right)^p \sqrt{2c(1+2p)}t^{\frac{p}{1+2p}} dy .$$

Apskaičiavus, N yra lygus:

$$N = \int_0^1 \left(ct^{-\frac{1}{1+2p}} - ct^{-\frac{1}{1+2p}} y^2\right)^p \sqrt{2c(1+2p)}t^{\frac{p}{1+2p}} dy ,$$

$$N = c\sqrt{2c(1+2p)}\int_0^1 \left(1-y^2\right)^p dy .$$

Gavome dalelių skaičiaus formulę, kurioje nėra priklausomybės nuo laiko, tai reiškia, kad galioja difunduojančių dalelių tvermės dėsnis.

Pažymime

$$I = \int_0^1 \left(1-y^2\right)^p dy .$$

I išreiškiamas elementariomis formulėmis tik atskirais atvejais, pavyzdžiui, kai p yra sveikasis skaičius.

Cilindrinės simetrijos atveju

Turime lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{x} u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x} \right). \tag{16}$$

Čia x yra atstumas nuo cilindrinės simetrijos ašies.

Įvedame z kintamąjį (10):

$$z = xt^{m},$$

$$\frac{1}{x} = \frac{t^{m}}{z},$$

čia x, t - kintamieji, m - dar nežinoma parametro reikšmė.

Išreiškiame išvestines:

$$\frac{\partial z}{\partial x} = t^{m},$$

$$\frac{\partial z}{\partial t} = mxt^{m-1},$$

$$v'(z) = \frac{dv}{dz}.$$

Sprendinio ieškome (11) pavidalu

$$u = t^{k} v(z),$$

kur m, k - laisvieji parametrai, kuriuos galime pasirinkti;

$v(z)$ - funkcija tik nuo z.

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = kt^{k-1} v(z) + t^{k} \frac{dv}{dz}\frac{\partial z}{\partial t} = kt^{k-1} v(z) + t^{k+m-1} mxv'(z).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = t^{k} \frac{dv}{dz}\frac{\partial z}{\partial x} = t^{k+m} v'(z),$$

$$u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x} = t^{\frac{k}{p}} t^{k+m} v^{\frac{1}{p}} v'(z) = t^{\frac{k}{p}+k+m} v^{\frac{1}{p}} v'(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(t^{\frac{k}{p}+k+m} v^{\frac{1}{p}} v'(z) \right) = t^{\frac{k}{p}+k+m} t^{m} \left(v^{\frac{1}{p}} v'(z) \right)' = t^{\frac{k}{p}+k+2m} \left(v^{\frac{1}{p}} v'(z) \right)',$$

$$\frac{1}{x}u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}=t^{\frac{k}{p}+k+m}\frac{t^m}{z}v^{\frac{1}{p}}v'(z)=\frac{1}{z}t^{\frac{k}{p}+k+2m}v^{\frac{1}{p}}v'(z).$$

Gautus duomenis surašome į (16) lygtį:

$$kt^{k-1}v(z)+t^{k+m-1}mxv'(z)=\frac{1}{z}t^{\frac{k}{p}+k+2m}v^{\frac{1}{p}}v'(z)+t^{\frac{k}{p}+k+2m}\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

Padaliname abi puses iš t^{k-1} nario, gauname:

$$kv(z)+t^m mxv'(z)=\frac{1}{z}t^{\frac{k}{p}+2m+1}v^{\frac{1}{p}}v'(z)+t^{\frac{k}{p}+2m+1}\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

m ir k pasirenkame patys (nes jie yra laisvieji nariai), kad v priklausytų tik nuo z. Pareikalaujame:

$$\frac{k}{p}+2m+1=0. \tag{17}$$

Prilyginame 0, kad (10) lygtyje neliktų priklausomybės nuo t ir x. Gauname:

$$kv(z)+mzv'(z)=\frac{1}{z}v^{\frac{1}{p}}v'(z)+\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

Padauginame abi puses iš z, turime:

$$kzv(z)+mz^2v'(z)=v^{\frac{1}{p}}v'(z)+z\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

Jei

$$k=2m, \tag{18}$$

tada:

$$2mzv(z)+mz^2v'(z)=m(2zv(z)+z^2v'(z))=m(z^2v(z))',$$

$$v^{\frac{1}{p}}v'(z)+z\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)=\left[z\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)\right]'.$$

Suintegruojame:

$$mz^2v(z)=zv^{\frac{1}{p}}v'(z)=const.$$

Kai $const=0$, tada gauname (14) lygtį

$$mzv(z)=v^{\frac{1}{p}}v'(z).$$

Iš (17) ir (18) – parametrai k ir m lygūs:

$$\frac{2m}{p} + 2m + 1 = 0,$$

$$\left(\frac{2}{p} + 2\right)m = -1,$$

$$m = -\frac{1}{\frac{2}{p} + 2} = -\frac{p}{2 + 2p} = k,$$

$$m = -\frac{p}{2 + 2p} = k .$$

Įrašome gautas reikšmes į (10) ir (11) lygtis:

$$z = xt^{-\frac{p}{2+2p}},$$

$$u = t^{-\frac{p}{2+2p}} v(z).$$

Integruojame (14) lygtį ir gauname:

$$mzdz = v^{\frac{1}{p}-1} dv,$$

$$\frac{mz^2}{2} = \frac{v^{\frac{1}{p}-1+1}}{\frac{1}{p}},$$

$$-\frac{pz^2}{2(2 + 2p)} = -c_1 + \frac{v^{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}} = -c_1 + pv^{\frac{1}{p}},$$

$$v^{\frac{1}{p}} = \frac{c_1}{p} - \frac{z^2}{2(2 + 2p)}.$$

Paskutinię lygtį pakeliame p laipsniu, pažymime $\frac{c_1}{p} = c$ ir gauname:

$$v(z) = \left(c - \frac{z^2}{4 + 4p}\right)^p.$$

Įrašome rastas reikšmes į (11) lygtį ir gauname sprendinį:

$$u = t^{-\frac{p}{2+2p}}\left[c - \frac{x^2 t^{-\frac{2p}{2+2p}}}{4+4p}\right]^p,$$

$$u = \left[ct^{-\frac{1}{2+2p}} - \frac{x^2}{4+4p}t^{-\frac{1}{2+2p}-\frac{2p}{2+2p}}\right]^p,$$

$$u = \left[ct^{-\frac{1}{2+2p}} - \frac{x^2}{4+4p}t^{-\frac{1+2p}{2+2p}}\right]^p. \tag{19}$$

Grįžtame prie (8) lygties

$$U = \frac{u - D_0}{D_1}$$

ir gauname

$$U = \frac{\left[ct^{-\frac{1}{2+2p}} - \frac{x^2}{4+4p}t^{-\frac{1+2p}{2+2p}}\right]^p - D_0}{D_1}.$$

Nesimetrinės dvimatės diferencialinės lygties sprendimas

Spręsime dvimatę diferencialinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial y}\right). \tag{20}$$

Sprendinio ieškome pavidalu

$$u = \left[a(t) + b(t)x^2 + c(t)y^2\right]^p. \tag{21}$$

Diferencijuojame (21) sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \left(\dot{a}(t) + \dot{b}(t)x^2 + \dot{c}(t)y^2\right)p\left(a(t) + b(t)x^2 + c(t)y^2\right)^{p-1}.$$

Diferencijuojame (21) sprendinį pagal kintamąjį x:

$$u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x} = 2pbx\left(a(t) + b(t)x^2 + c(t)y^2\right)^{p-1}\left(a(t) + b(t)x^2 + c(t)y^2\right),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2pb\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(a(t) + b(t)x^2 + c(t)y^2\right)^p\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2pb\left\{\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2\right)^p + 2pbx^2\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2\right)^{p-1}\right\},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2\right)^{p-1}\cdot 2pb\left\{a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+2pbx^2\right\}.$$

Diferencijuojame (21) sprendinį pagal kintamąjį y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial y}\right) = \left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2\right)^{p-1}\cdot 2pc\left\{a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+2pcy^2\right\}.$$

Gautus rezultatus surašome į (20) lygtį:

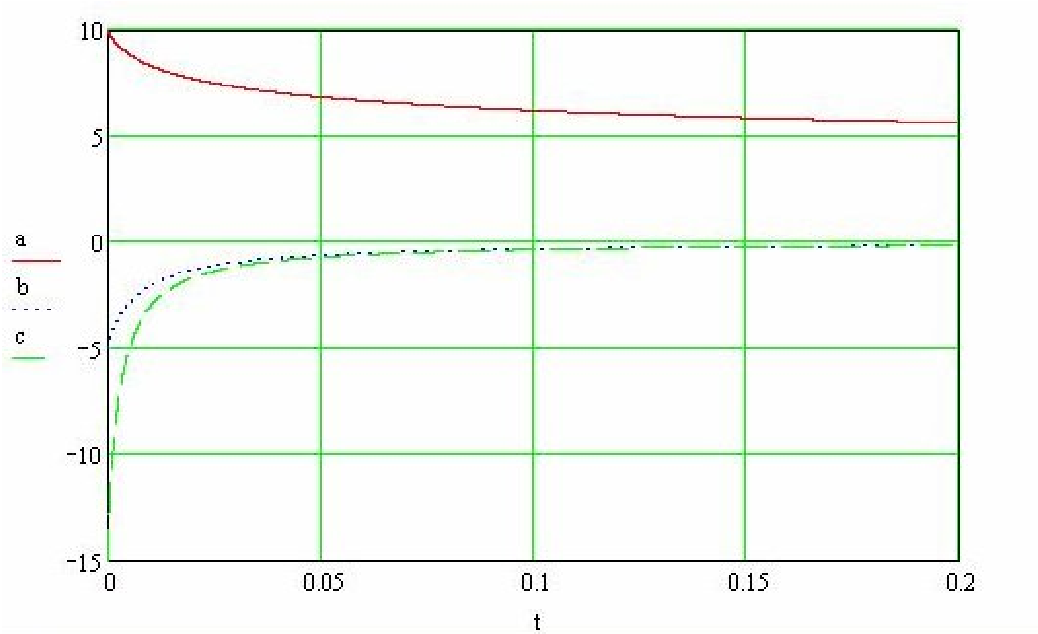
$$\dot{a}(t)+\dot{b}(t)x^2+\dot{c}(t)y^2 = 2\left\{ab+b^2x^2+bcy^2+2b^2px^2+ac+bcx^2+c^2y^2+2pc^2y^2\right\}.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{a} = 2a(b+c) \\ \dot{b} = 2b(b+2bp+c)\,. \\ \dot{c} = 2c(b+2cp+c) \end{cases} \qquad (22)$$

Ši (22) sistema neturi sprendinių, išreiškiamų elementariomis funkcijomis, išskyrus atvejį, kai $b=c$, t.y. kai yra cilindrinė simetrija. Mes tuos sprendinius nesimetriniu atveju gauname kompiuterio pagalba. Skaičiuojame programa MathCad, Rungės-Kutos metodu.

2.2. Difuzijos proceso dvimačio nesimetrinio atvejo grafikai



1. pav. Sprendiniai

Grafikai vaizduoja, kaip sprendinio koeficientai a, b, c priklauso nuo laiko. Primena hiperboles.

Sferinės simetrijos atveju

Turime lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{1}{x^2}\frac{\partial}{\partial x}\left(x^2u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{2}{x}u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{23}$$

Čia x yra atstumas nuo sferinės simetrijos centro.

Įvedame z kintamąjį (10):

$$z=xt^m,$$

$$\frac{1}{x}=\frac{t^m}{z},$$

čia x,t - kintamieji, m - nežinomasis.

Kur

$$\frac{\partial z}{\partial x}=t^m,$$

$$\frac{\partial z}{\partial t}=mxt^{m-1},$$

$$v'(z)=\frac{dv}{dz}.$$

Sprendinio ieškome (11) pavidalu

$$u=t^k v(z),$$

kur m,k - laisvieji parametrai, kuriuos galime pasirinkti;

$v(z)$ - funkcija tik nuo z.

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=kt^{k-1}v(z)+t^k\frac{dv}{dz}\frac{\partial z}{\partial t}=kt^{k-1}v(z)+t^{k+m-1}mxv'(z).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=t^k\frac{dv}{dz}\frac{\partial z}{\partial x}=t^{k+m}v'(z),$$

$$u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}=t^{\frac{k}{p}}t^{k+m}v^{\frac{1}{p}}v'(z)=t^{\frac{k}{p}+k+m}v^{\frac{1}{p}}v'(z),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(t^{\frac{k}{p}+k+m}v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)=t^{\frac{k}{p}+k+m}t^m\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'=t^{\frac{k}{p}+k+2m}\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)',$$

$$\frac{2}{x}u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x} = t^{\frac{k}{p}+k+m}\frac{2t^m}{z}v^{\frac{1}{p}}v'(z) = \frac{2}{z}t^{\frac{k}{p}+k+2m}v^{\frac{1}{p}}v'(z).$$

Gautus duomenis surašome į (23) lygtį:

$$kt^{k-1}v(z) + t^{k+m-1}mxv'(z) = \frac{2}{z}t^{\frac{k}{p}+k+2m}v^{\frac{1}{p}}v'(z) + t^{\frac{k}{p}+k+2m}\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

Padaliname abi puses iš t^{k-1} nario, gauname:

$$kv(z) + t^m mxv'(z) = \frac{2}{z}t^{\frac{k}{p}+2m+1}v^{\frac{1}{p}}v'(z) + t^{\frac{k}{p}+2m+1}\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

m ir k pasirenkame patys (nes jie yra laisvieji nariai), kad v priklausytų tik nuo z. Pareikalaujame:

$$\frac{k}{p} + 2m + 1 = 0. \tag{24}$$

Prilyginame 0, kad (10) lygtyje neliktų priklausomybės nuo t ir x. Gauname:

$$kv(z) + mzv'(z) = \frac{2}{z}v^{\frac{1}{p}}v'(z) + \left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

Padauginame abi puses iš z^2, gauname:

$$kz^2v(z) + mz^3v'(z) = 2zv^{\frac{1}{p}}v'(z) + z^2\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

Jei

$$k = 3m, \tag{25}$$

tada

$$3mz^2v(z) + mz^3v'(z) = m(3z^2v(z) + z^3v'(z)) = m(z^3v)',$$

$$2zv^{\frac{1}{p}}v'(z) + z^2\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)' = 2z\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z) + z\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'\right),$$

$$\left(z^2\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)\right)' = 2z\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right) + z^2\left(v^{\frac{1}{p}}v'(z)\right)'.$$

Suintegruojame:

$$mz^3 v(z) = z^2 v^{\frac{1}{p}} v'(z) = const .$$

Kai $const = 0$, tada gauname (14) lygtį, kaip ir paprastu atveju

$$mzv(z) = v^{\frac{1}{p}} v'(z) .$$

Iš (24) ir (25) – parametrai k ir m lygūs:

$$\frac{3m}{p} + 2m + 1 = 0 ,$$

$$\left(\frac{3}{p} + 2 \right) m = -1 ,$$

$$m = -\frac{1}{\frac{3}{p} + 2} = -\frac{p}{3 + 2p} = k ,$$

$$m = -\frac{p}{3 + 2p} = k .$$

Įrašome gautas reikšmes į (10) ir (11) lygtis:

$$z = xt^{-\frac{p}{3+2p}} ,$$

$$u = t^{-\frac{p}{3+2p}} v(z) .$$

Integruojame (14) lygtį ir gauname:

$$mzdz = v^{\frac{1}{p}-1} dv ,$$

$$\frac{mz^2}{2} = \frac{v^{\frac{1}{p}-1+1}}{\frac{1}{p}} ,$$

$$-\frac{pz^2}{2(3 + 2p)} = -c_1 + \frac{v^{\frac{1}{p}}}{\frac{1}{p}} = -c_1 + pv^{\frac{1}{p}} ,$$

$$v^{\frac{1}{p}} = \frac{c_1}{p} - \frac{z^2}{2(3 + 2p)} .$$

Lygtį pakeliame p laipsniu, pažymime $\frac{c_1}{p} = c$ ir gauname:

$$v(z)=\left(c-\frac{z^2}{6+4p}\right)^p.$$

Įrašome gautas reikšmes į (11) lygtį ir gauname sprendinį:

$$u=t^{-\frac{p}{3+2p}}\left[c-\frac{x^2t^{-\frac{2p}{3+2p}}}{6+4p}\right]^p,$$

$$u=\left[ct^{-\frac{1}{3+2p}}-\frac{x^2}{6+4p}t^{-\frac{1}{3+2p}-\frac{2p}{3+2p}}\right]^p,$$

$$u=\left[ct^{-\frac{1}{3+2p}}-\frac{x^2}{6+4p}t^{-\frac{1+2p}{3+2p}}\right]^p. \tag{26}$$

Grįžtame prie (8) lygties ir gauname

$$U=\frac{\left[ct^{-\frac{1}{3+2p}}-\frac{x^2}{6+4p}t^{-\frac{1+2p}{3+2p}}\right]^p-D_0}{D_1}.$$

Nesimetrinės trimatės diferencialinės lygties sprendimas

Spręsime trimatę diferencialinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial z}\right). \tag{27}$$

Sprendinio ieškome pavidalu

$$u=\left[a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right]^p. \tag{28}$$

Diferencijuojame (28) sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\left(\dot a(t)+\dot b(t)x^2+\dot c(t)y^2+\dot d(t)z^2\right)p\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+dz^2\right)^{p-1}.$$

Diferencijuojame (28) sprendinį pagal kintamąjį x:

$$u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}=\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)2pbx\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)^{p-1},$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2pb\frac{\partial}{\partial x}\left[x\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)^p\right],$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2pb\left\{\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)^p+2pbx^2\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)^{p-1}\right\}$$

,

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=2p\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)^{p-1}\cdot\left\{b\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)+2pb^2x^2\right\}$$

.

Diferencijuojame (28) sprendinį pagal kintamąjį y:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial y}\right)=2p\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)^{p-1}\cdot\left\{c\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)+2pc^2y^2\right\}$$

.

Diferencijuojame (28) sprendinį pagal kintamąjį z:

$$\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial z}\right)=2p\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)^{p-1}\cdot\left\{d\left(a(t)+b(t)x^2+c(t)y^2+d(t)z^2\right)+2pdz^2\right\}$$

Gautus rezultatus surašome į (27) lygtį:

$$\dot{a}(t)+\dot{b}(t)x^2+\dot{c}(t)y^2+d(t)z^2=$$

$$=2\left\{a(b+c+d)+b(b+c+d+2pb)x^2+c(b+c+d+2pc)y^2+d(b+c+d+2pd)z^2\right\}.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

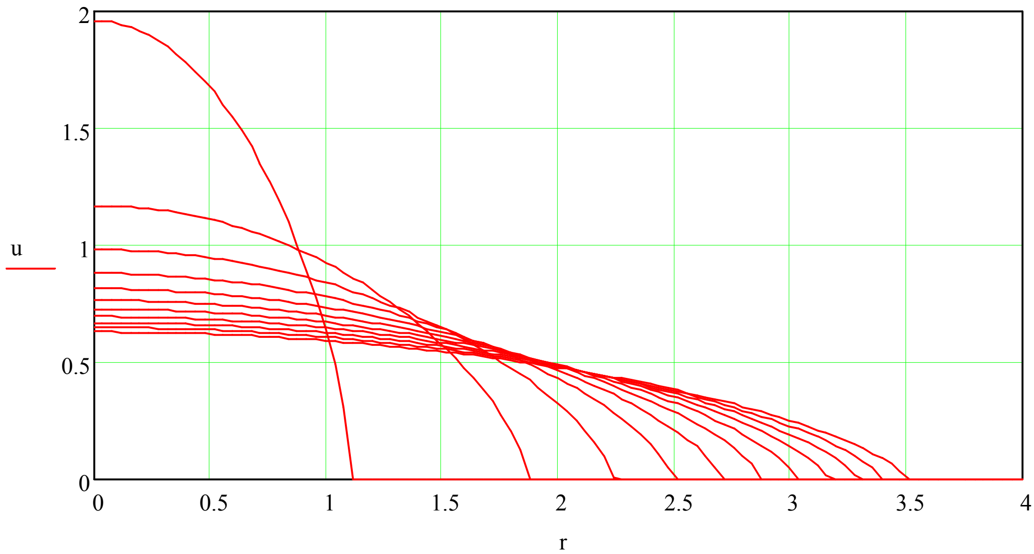
$$\begin{cases}\dot{a}=2a(b+c+d)\\ \dot{b}=b(b+c+d+2pb)\\ \dot{c}=c(b+c+d+2pb)\\ \dot{d}=c(b+c+d+2pd)\end{cases}. \tag{29}$$

Ši (29) sistema neturi sprendinių, išreiškiamų elementariomis funkcijomis, išskyrus atvejį, kai $b=c=d$, t.y. kai yra sferinė simetrija. Jas galima, kaip ir dvimačiu nesimetrišku atveju, suintegruoti tik skaitiniais metodais.

2.3. Lygties sprendinių grafinis vaizdavimas

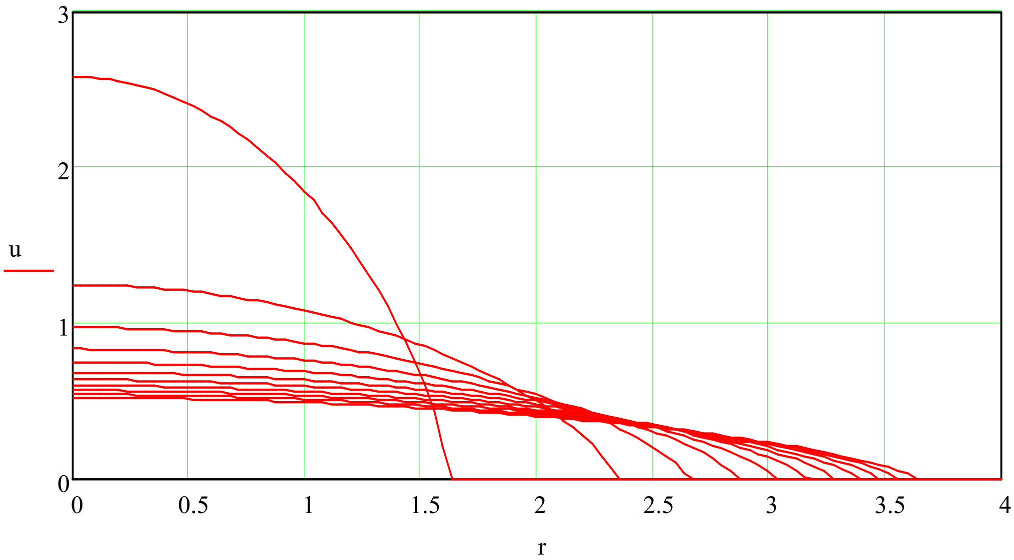
Pavaizduosime sprendinių šeimas vienmačiu ($q = 1$), cilindrinės simetrijos ($q = 2$) ir sferinės simetrijos ($q = 3$) atveju..

Kai $q = 1$



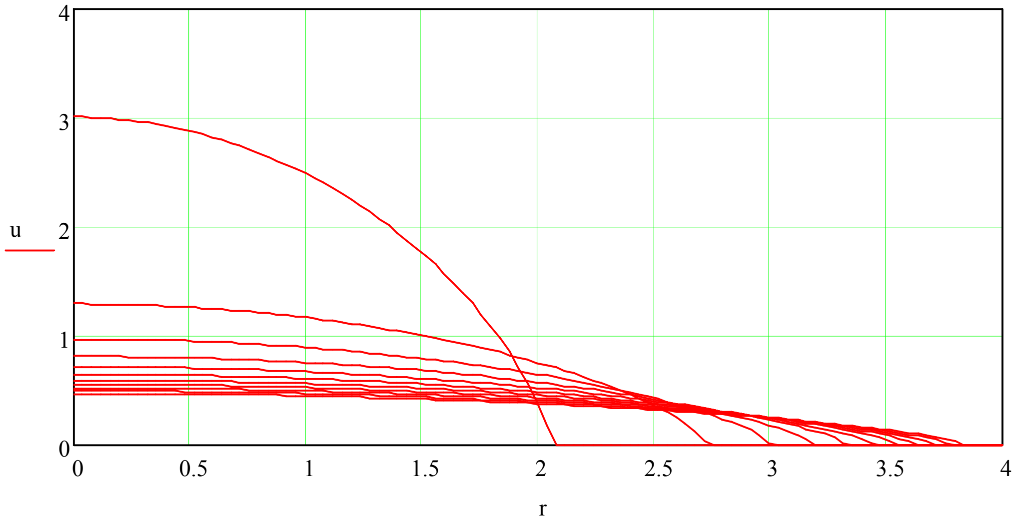
1 pav. Sprendinių šeima vienmačiu atveju skirtingiems laiko momentams

Kai $q = 2$



2. pav. Sprendinių šeima cilindrinės simetrijos atveju skirtingiems laiko momentams

Kai $q = 3$



3. pav. Sprendinių šeima sferinės simetrijos atveju skirtingiems laiko momentams

Paveikslėliuose parodyta difuzijos procesą aprašančių atskirųjų sprendinių šeimos, rodančios koncentracijos u pasiskirstymą x ašies kryptimi skirtingais laiko momentais.

Išvados

Šio darbo pirmoje dalyje išnagrinėta netiesinė parabolinė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{N}} \frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

Gavome analizinius šios lygties polinomais išreiškiamus sprendinius su sveikaisiais N skaičiais, kai $N = 1,2,3,4,5,6$.

Antroje dalyje rasti netiesinės difuzijos diferencialinės lygties

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial x}\right) + \frac{\partial}{\partial y}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial y}\right) + \frac{\partial}{\partial z}\left(u^{\frac{1}{p}} \frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

kai kurie sprendiniai su bet kokiais teigiamais difuzijos koeficiento priklausomybės nuo koncentracijos u laipsnio rodikliais $\frac{1}{p}$. Šie sprendiniai rasti modifikuoto automodelinio kintamojo metodu.

Pirmoje darbo dalyje sprendiniai buvo rasti konkrečiam N, antroje dalyje, naudojant kitą metodą, rasti sprendiniai bet kokiam p.

Gauti visi tyrimo metu rezultatai gali būti naudingi fizikams, nana technologijų specialistams, matematiškai modeliuojantiems priemaišų į puslaidininkius įnešimo procesą

Literatūra

1. AMBRAZEVIČIUS A. (1996). Matematinės fizikos lygtys. 1 dalis. Vilnius;
2. AMBRAZEVIČIUS A. (1996). Matematinės fizikos lygtys. 2 dalis. Vilnius;
3. ČIEGIS R. (2003). Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai. Technika. Vilnius;
4. GUDAITIENĖ I. (2008). Netiesinės vienmatės difuzijos lygties polinominių sprendinių savybės. Bakalauro darbas. Šiauliai;
5. JANAVIČIUS A. J. (2002). Atsitiktiniai procesai ir pernešimo reiškinių lygtys. Šiauliai;
6. MIŠKINIS P. (2003). Netiesiniai ir nelokalieji integruojamieji modeliai. Technika. Vilnius;
7. PAULAUSKAS V., GOLOKVISČIUS P. (1961). Diferencialinės lygtys. Mintis. Vilnius;
8. PAULAUSKAS V. (1974). Matematinės fizikos lygtys. Mintis. Vilnius;
9. PEKARSKAS V. (2000). Diferencialinis ir integralinis skaičiavimas. 2 dalis. Technologija. Kaunas;
10. PYRAGAS K. (2003). Netiesinės dinamikos pagrindai. Vilnius;
11. Шапиро Д. А. (2004). Уравнения в частных производных Специальные функции Асимптотики. кафедра теоретической физики НГУ;
12. Matematikos knygos internete. Prieiga per internetą: http://193.219.157.231/Vilkas/Dalys/Nuorodos_knygos.htm [Žiūrėta 2009 - 12-10];
13. Knyga internete. Prieiga per internetą: http://www.google.com/books?hl=lt&lr=&id=guLl-nx1LHgC&oi=fnd&pg=PR1&dq=Handbook+of+Nonlinear+Partial+Differential+Equations&ots=9g0-Up0hCi&sig=edrD3ggQRLGBKDV-vquVMC70VFE#v=onepage&q&f=false [Žiūrėta 2009 – 01 – 15].

Some of the solutions of nonlinear differential equations.

Summary

Objective. Find-specific solutions, and codify them.

Objectives of the study.

- Solving linear diffusion differential equations using automodeling variable method;
- Solve two-dimensional linear parabolic equations using numerical methods;
- Analyze each approach;
- Compare the results and justify each of them;
- Provide suggestions and recommendations for further research.

In the first part of the work a non-linear parabolic equation was investigated

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{N}}\frac{\partial u}{\partial x}\right).$$

We received the following analytical equation expressed by polynomials with integer solutions N, when $N=1,2,3,4,5,6$.

In the second part found nonlinear differential diffusion equation's

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial y}\right)+\frac{\partial}{\partial z}\left(u^{\frac{1}{p}}\frac{\partial u}{\partial z}\right)$$

some solutions to any positive diffusion coefficient of the concentration exponent $\frac{1}{p}$.

These solutions are found automodeling variable method.

.

Priedai

Lygties sprendimas su nelyginiais polinomo laipsniais

Duota diferencialinė lygtis su netiesiškumu, kuri taikoma difuzijai aprašyti:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{N}} \frac{\partial u}{\partial x}\right)$$

Jei $\left.\begin{matrix} N=1 \\ N=2 \\ N=3 \\ N=4 \\ \ldots \end{matrix}\right\}$ sveikieji skaičiai, tada galima gauti sprendinius polinomu:

$$u(x,t) = \left[f(t) + h(t)\cdot x^2\right]^N$$

Sprendimas, kai $N = 1$

Lygties sprendimas su dviem polinomo nariais.

Kai $N = 1$, tada sprendžiame tokią lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u \frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

O sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = f(t) + h(t)\cdot x^2 .$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{f} + \dot{h}x^2 .$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 2hx .$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = 2h\frac{\partial}{\partial x}\left[fx + hx^3\right] = 2h\left[f + 3hx^2\right].$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$\dot{f} + \dot{h}x^2 = 2hf + 6h^2x^2 .$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = 2hf \\ \dot{h} = 6h^2 \end{cases},$$

gavome dvi paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \frac{\partial h}{\partial t} = 6h^2 \end{cases},$$

antrąją lygtį padauginame iš $\frac{dt}{h^2}$:

$$\begin{cases} \frac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \frac{\partial h}{\partial t} = 6h^2 \Big| \cdot \frac{dt}{h^2} \Rightarrow \frac{dh}{h^2} = 6dt \end{cases},$$

lygtį $\frac{dh}{h^2} = 6dt$ integruojame ir gauname $-\frac{1}{h} = 6t$. Čia const numetame, nes laiką galima parinkti bet kokį, tada:

$$h(t) = -\frac{1}{6t},$$

gavome paprastą lygtį.

Sprendžiame pirmąją lygtį:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2f\left(-\frac{1}{6t}\right)\Big| \cdot \frac{dt}{f} \Rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{dt}{3t},$$

tada integruojame ir gauname :

$$\ln f = -\frac{1}{3}\ln t + \ln c,$$

$$\ln f = \ln\left(t^{-\frac{1}{3}} \cdot c\right),$$

iš čia

$$f = c \cdot t^{-\frac{1}{3}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t) = c \cdot t^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{6t} \cdot x^2,$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N = 1$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t) = c \cdot t^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{6t} \cdot x^2 .$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{ diferencijuojame pagal } t \text{ laiką } = -\frac{1}{3}ct^{-\frac{1}{3}-1} + \frac{1}{6}t^{-2}x^2,$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{ diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį } = -\frac{1}{6t} \cdot 2x = -\frac{x}{3t}.$$

Dabar surašome į lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(ct^{-\frac{1}{3}} - \frac{1}{6t}x^2\right)\left(-\frac{x}{3t}\right)\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(-\frac{x}{3t}t^{-\frac{1}{3}}c + \frac{x^3}{18t^2}\right) = -\frac{1}{3}ct^{-\frac{4}{3}} + \frac{x^2}{6t^2}.$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$-\frac{1}{3}ct^{-\frac{4}{3}} + \frac{x^2}{6t^2} = -\frac{1}{3}ct^{-\frac{4}{3}} + \frac{x^2}{6t^2}.$$

Gavome, kad lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Lygties sprendimas su triem polinomo nariais.

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = f(t) + g(t)x + h(t)x^2 .$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \dot{f} + \dot{g}\,x + \dot{h}\,x^2 .$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = g + 2hx .$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f+gx+hx^2\right)\left(g+2hx\right)\right]=\frac{\partial}{\partial x}\left[fg+2hfx+g^2x+2ghx^2+ghx^2+2h^2x^3\right]=$$
$$=g^2+2ghx+4ghx+6h^2x^2+2hf$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$\dot{f}+\dot{g}\,x+\dot{h}\,x^2=g^2+6ghx+2hf+6h^2x^2\,.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases}\dot{f}=g^2+2hf\\ \dot{g}=6gh\\ \dot{h}=6h^2\end{cases},$$

gavome tris paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$h(t)=-\frac{1}{6t},$$

$$g=g_0t^{-1},$$

$$\dot{f}=g_0^2t^{-2}-\frac{f}{3t}\Rightarrow\dot{f}+\frac{1}{3}ft^{-1}=g_0^2t^{-2}\,.$$

Šią lygtį sprendžiame Lagranžo konstantų varijavimo metodu:

$$\alpha=\frac{1}{3},\ \beta=g_0^2,\ \gamma=-2,$$

$$f=\frac{g_0^2t^{-1}}{\frac{1}{3}-1}+f_0t^{-\frac{1}{3}}=-\frac{3}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{3}},$$

$$f=-\frac{3}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{3}}\,.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t)=-\frac{3}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{3}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{6t}\cdot x^2\,.$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N=1$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t)=-\frac{3}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{3}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{6t}\cdot x^2.$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\text{ diferencijuojame pagal } t \text{ laiką }=\frac{3}{2}g_0^2t^{-2}-\frac{1}{3}f_0t^{-\frac{4}{3}}-\frac{g_0x}{t^2}+\frac{x^2}{6t^2},$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\text{ diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį }=\frac{g_0}{t}-\frac{x}{3t}.$$

Dabar surašome į lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(-\frac{3}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{3}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{6t}x^2\right)\left(\frac{g_0}{t}-\frac{x}{3t}\right)\right)=$$
$$=\left(\frac{g_0}{t}-\frac{x}{3t}\right)^2+\left(-\frac{3}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{3}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{x^2}{6t}\right)\left(-\frac{1}{3t}\right)=$$
$$=\frac{g_0^2}{t^2}-\frac{4g_0x}{3t^2}+\frac{x^2}{9t^2}+\frac{1}{2}g_0^2t^{-2}-\frac{f_0}{3t^{\frac{4}{3}}}-\frac{g_0x}{3t^2}+\frac{x^2}{18t^2}=$$
$$=\frac{3}{2}g_0^2t^{-2}-\frac{1}{3}f_0t^{-\frac{4}{3}}-\frac{g_0x}{t^2}+\frac{x^2}{6t^2}.$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

$$\frac{3}{2}g_0^2t^{-2}-\frac{1}{3}f_0t^{-\frac{4}{3}}-\frac{g_0x}{t^2}+\frac{x^2}{6t^2}=\frac{3}{2}g_0^2t^{-2}-\frac{1}{3}f_0t^{-\frac{4}{3}}-\frac{g_0x}{t^2}+\frac{x^2}{6t^2}.$$

Lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Kai $N=2$, visas sprendimas pateiktas darbe.

Sprendimas, kai $N=3$

Lygties sprendimas su dviem polinomo nariais.

Kai $N=3$, tada sprendžiame tokią lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

O sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t)=\left(f(t)+h(t)\cdot x^2\right)^3.$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=3\left(f+hx^2\right)^2\cdot\left(\dot{f}+\dot{h}\,x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x

$$\frac{\partial u}{\partial x}=3\left(f+hx^2\right)^2\cdot 2hx.$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[3\left(f+hx^2\right)\left(f+hx^2\right)^2\cdot 2hx\right]=6h\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f+hx^2\right)^3\cdot x\right]=6h\left\{3\left(f+hx^2\right)^2\cdot 2hx\cdot x+\left(f+hx^2\right.\right.$$

$$=6h\left(f+hx^2\right)^2\left[6hx^2+f+hx^2\right]=6h\left(f+hx^2\right)^2\left[f+7hx^2\right]$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$3\left(f+hx^2\right)^2\left(\dot{f}+\dot{h}\,x^2\right)=6h\left(f+hx^2\right)^2\left[f+7hx^2\right].$$

Suprastiname abi puses:

$$\left(\dot{f}+\dot{h}\,x^2\right)=2h\left[f+7hx^2\right],$$

$$\dot{f}+\dot{h}\,x^2=2hf+14h^2x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases}\dot{f}=2hf\\ \dot{h}=14h^2\end{cases},$$

gavome dvi paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\begin{cases}\dfrac{\partial f}{\partial t}=2hf\\ \dfrac{\partial h}{\partial t}=14h^2\end{cases},$$

antrąją lygtį padauginame iš $\frac{dt}{h^2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 14h^2 \Big| \cdot \dfrac{dt}{h^2} \Rightarrow \dfrac{dh}{h^2} = 14dt \end{cases},$$

lygtį $\dfrac{dh}{h^2} = 14dt$ integruojame ir gauname $-\dfrac{1}{h} = 14t$. Čia const numetame, nes laiką galima parinkti bet kokį, tada:

$$h(t) = -\frac{1}{14t},$$

gavome paprastą lygtį.

Sprendžiame pirmąją lygtį:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2f\left(-\frac{1}{14t}\right)\Bigg| \cdot \frac{dt}{f} \Rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{dt}{7t},$$

tada integruojame ir gauname:

$$\ln f = -\frac{1}{7}\ln t + \ln c,$$

$$\ln f = \ln\left(t^{-\frac{1}{7}} \cdot c\right), \text{ iš čia } f = c \cdot t^{-\frac{1}{7}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(c \cdot t^{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{14t} \cdot x^2\right)^3.$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N = 3$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}} \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t) = \left(c \cdot t^{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{14t} \cdot x^2\right)^3.$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{diferencijuojame pagal } t \text{ laiką } = 3\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{7}ct^{-\frac{8}{7}} + \frac{1}{14}t^{-2}x^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį } = 3\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{14t}\cdot x^2\right)^2 \cdot \left(-\frac{2x}{14t}\right).$$

Dabar surašome į pačią lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(3\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{1}{14t}x^2\right)\cdot\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)^2 \cdot \left(-\frac{x}{7t}\right)\right) = -\frac{3}{7t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)^3 \cdot x\right] =$$

$$= \frac{3}{7t}\left\{3\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)^2 \cdot \left(-\frac{2x}{14t}\right)\cdot x + \left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)^3\right\} = -\frac{3}{7t}\cdot\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)^2 \cdot \left[-\frac{6x^2}{14t} + ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right] =$$

$$= -\frac{3}{7t}\cdot\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)^2\left[ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{2t}\right].$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$3\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)^2 \cdot \left(-\frac{1}{7}ct^{-\frac{8}{7}} + \frac{x^2}{14t^2}\right) = -\frac{3}{7t}\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{14t}\right)\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{2t}\right).$$

Turime gauti lygybę abiejuose pusėse (suprastiname abi puses):

$$-\frac{3}{7t}\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{2t}\right) = -\frac{3}{7t}\left(ct^{-\frac{1}{7}} - \frac{x^2}{2t}\right).$$

Gavome, kad lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Lygties sprendimas su triem polinomo nariais.

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \left[f(t) + g(t)x + h(t)x^2\right]^3.$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 3\left(f + gx + hx^2\right)^2\left(\dot{f} + \dot{g}\,x + \dot{h}\,x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 3\left(f + gx + hx^2\right)^2\left(g + 2hx\right).$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[3\left(f + gx + hx^2\right)^3\left(g + 2hx\right)\right] = 3\left[3\left(f + gx + hx^2\right)^2\left(g + 2hx\right)^2 + \left(f + gx + hx^2\right)^3 \cdot 2h\right] =$$

$$= 3\left(f + gx + hx^2\right)^2\left[3\left(g + 2hx\right)^2 + \left(f + gx + hx^2\right)\cdot 2h\right] =$$

$$= 3\left(f + gx + hx^2\right)^2\left[3g^2 + 14ghx + 14h^2x^2 + 2fh\right].$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$3\left(f + gx + hx^2\right)^2\left(\dot{f} + \dot{g}x + \dot{h}x^2\right) = 3\left(f + gx + hx^2\right)^2\left(3g^2 + 14ghx + 2fh + 14h^2x^2\right).$$

Suprastiname ir gauname:

$$\dot{f} + \dot{g}x + \dot{h}x^2 = 3g^2 + 14ghx + 2fh + 14h^2x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = 3g^2 + 2hf \\ \dot{g} = 14gh \\ \dot{h} = 14h^2 \end{cases},$$

gavome tris paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$h(t) = -\frac{1}{14t},$$

$$\dot{g} = 14g \cdot \left(-\frac{1}{14t}\right) = -\frac{g}{t},\ g = g_0 t^{-1},\ g_0 = const,$$

$$\dot{f} = 3g_0^2 t - \frac{f}{7t} \Rightarrow \dot{f} + \frac{1}{7} f t^{-1} = 3g_0^2 t^{-2}.$$

Šią lygtį sprendžiame Lagranžo konstantų varijavimo metodu:

$$\alpha = \frac{1}{7},\ \beta = 3g_0^2,\ \gamma = -2,$$

$$f = \frac{3g_0^2 t^{-1}}{\frac{1}{7} - 2 + 1} + f_0 t^{-\frac{1}{7}} = -\frac{7}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{7}},$$

$$f = -\frac{7}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{7}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\left(-\frac{7}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{7}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{14t}\cdot x^2\right)^3.$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N=3$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t)=\left(-\frac{7}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{7}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{14t}\cdot x^2\right)^3.$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\text{ diferencijuojame pagal } t \text{ laiką}$$

$$=3\left(-\frac{7}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{7}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{14t}\cdot x^2\right)^2\cdot\left[-\frac{1}{7}f_0t^{-\frac{8}{7}}+t^{-2}\left(\frac{7}{2}g_0^2-g_0x+\frac{1}{14}\cdot x^2\right)\right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\text{ diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį}$$

$$=3\left(-\frac{7}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{7}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{14t}\cdot x^2\right)^2\cdot\left(g_0t^{-1}-\frac{x}{7t}\right).$$

Dabar surašome į lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(3\left(f_0t^{-\frac{1}{7}}-\left(\frac{7g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{14}x^2\right)t^{-1}\right)^3\left(\frac{g_0}{t}-\frac{x}{7t}\right)\right)=$$

$$=3\left[3\left(\frac{g_0}{t}-\frac{x}{7t}\right)^2\left(f_0t^{-\frac{1}{7}}-\left(\frac{7g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{14}x^2\right)t^{-1}\right)^2+3\left(f_0t^{-\frac{1}{7}}-\left(\frac{7g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{14}x^2\right)t^{-1}\right)^3\left(-\frac{1}{7t}\right)\right]$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{3}}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Sprendimas, kai $N = 4$

Lygties sprendimas su dviem polinomo nariais.

Kai $N = 4$, tada sprendžiame tokią lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

O sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \left(f(t) + h(t)\cdot x^2\right)^4.$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\left(f + hx^2\right)^3 \cdot \left(\dot{f} + \dot{h}\,x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\left(f + hx^2\right)^3 \cdot 2hx.$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[4\left(f + hx^2\right)\left(f + hx^2\right)^3 \cdot 2hx\right] = 8h\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f + hx^2\right)^4 \cdot x\right] = 8h\left\{4\left(f + hx^2\right)^3 \cdot 2hx \cdot x + \left(f + hx^2\right.\right.$$

$$= 8h\left(f + hx^2\right)^3\left[8hx^2 + f + hx^2\right] = 8h\left(f + hx^2\right)^3\left[f + 9hx^2\right].$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$4\left(f + hx^2\right)^3\left(\dot{f} + \dot{h}\,x^2\right) = 8h\left(f + hx^2\right)^3\left[f + 9hx^2\right].$$

Suprastiname abi puses:

$$\left(\dot{f} + \dot{h}\,x^2\right) = 2h\left[f + 9hx^2\right],$$

$$\dot{f} + \dot{h}\,x^2 = 2hf + 18h^2x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = 2hf \\ \dot{h} = 18h^2 \end{cases},$$

gavome dvi paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 18h^2 \end{cases},$$

antrąją lygtį padauginame iš $\dfrac{dt}{h^2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 18h^2 \Big| \cdot \dfrac{dt}{h^2} \Rightarrow \dfrac{dh}{h^2} = 18dt \end{cases},$$

lygtį $\dfrac{dh}{h^2} = 18dt$ integruojame ir gauname $-\dfrac{1}{h} = 18t$. Čia const numetame, nes laiką galima parinkti bet kokį, tada:

$$h(t) = -\frac{1}{18t},$$

gavome paprastą lygtį.

Sprendžiame pirmąją lygtį:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2f\left(-\frac{1}{18t}\right)\Big| \cdot \frac{dt}{f} \Rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{dt}{9t},$$

tada integruojame ir gauname

$$\ln f = -\frac{1}{9}\ln t + \ln c,$$

$$\ln f = \ln\left(t^{-\frac{1}{9}} \cdot c\right), \text{ iš čia } f = c \cdot t^{-\frac{1}{9}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(c \cdot t^{-\frac{1}{9}} - \frac{1}{18t} \cdot x^2\right)^4.$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N = 4$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}} \frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{9}}-\frac{1}{18t}\cdot x^2\right)^4.$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t}= \text{diferencijuojame pagal } t \text{ laiką } =4\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{18t}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{9}ct^{-\frac{10}{9}}+\frac{1}{18}t^{-2}x^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}= \text{diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį } =4\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{1}{18t}\cdot x^2\right)^3\cdot\left(-\frac{2x}{18t}\right).$$

Dabar surašome į pačią lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{1}{18t}x^2\right)^4\cdot\left(-\frac{4x}{9t}\right)\right)=-\frac{4}{9t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{18t}\right)^4\cdot x\right]=$$

$$=-\frac{4}{9t}\left\{4\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{18t}\right)^3\cdot\left(-\frac{2x}{18t}\right)\cdot x+\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{18t}\right)^4\right\}=-\frac{4}{9t}\cdot\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{18t}\right)^3\cdot\left[-\frac{x^2}{18t}+ct^{-\frac{1}{9}}-4x\cdot\frac{2x}{18t}\right]=$$

$$=-\frac{4}{9t}\cdot\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{18t}\right)^3\left[ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{9x^2}{18t}\right].$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$4\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{18t}\right)^3\cdot\left(-\frac{1}{9}ct^{-\frac{10}{9}}+\frac{x^2}{18t^2}\right)=-\frac{4}{9t}\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{x^2}{18t}\right)^3\left(ct^{-\frac{1}{9}}-\frac{9x^2}{18t}\right).$$

Turime gauti lygybę abiejuose pusėse (suprastiname abi puses):

$$-\frac{4}{9}\left(ct^{-\frac{10}{9}}-\frac{x^2}{2t^2}\right)=-\frac{4}{9}\left(ct^{-\frac{10}{9}}-\frac{x^2}{2t^2}\right).$$

Gavome, kad lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Lygties sprendimas su triem polinomo nariais.

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \qquad (1)$$

Sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t)=\left[f(t)+g(t)x+h(t)x^2\right]^4.$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 4\left(f + gx + hx^2\right)^3\left(\dot{f} + \dot{g}\,x + \dot{h}\,x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 4\left(f + gx + hx^2\right)^3\left(g + 2hx\right).$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[4\left(f + gx + hx^2\right)^4\left(g + 2hx\right)\right] = 4\left[4\left(f + gx + hx^2\right)^3\left(g + 2hx\right)^2 + \left(f + gx + hx^2\right)^4 \cdot 2h\right] =$$

$$= 4\left(f + gx + hx^2\right)^3\left[4\left(g + 2hx\right)^2 + \left(f + gx + hx^2\right)\cdot 2h\right]$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$4\left(f + gx + hx^2\right)^3\left(\dot{f} + \dot{g}\,x + \dot{h}\,x^2\right) = 4\left(f + gx + hx^2\right)^3\left(4g^2 + 18ghx + 2fh + 18h^2x^2\right).$$

Suprastiname ir gauname:

$$\dot{f} + \dot{g}\,x + \dot{h}\,x^2 = 4g^2 + 18ghx + 2fh + 18h^2x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = 4g^2 + 2hf \\ \dot{g} = 18gh \\ \dot{h} = 18h^2 \end{cases},$$

gavome tris paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$h(t) = -\frac{1}{18t},$$

$$\dot{g} = 18g\cdot\left(-\frac{1}{18t}\right) = -\frac{g}{t},\ g = g_0 t^{-1},\ g_0 = const,$$

$$\dot{f} = 4g_0^2 t^{-2} - \frac{f}{9t} \Rightarrow \dot{f} + \frac{1}{9}ft^{-1} = 4g_0^2 t^{-2}.$$

Šią lygtį sprendžiame Lagranžo konstantų varijavimo metodu:

$$\alpha = \frac{1}{9},\ \beta = 4g_0^2,\ \gamma = -2,$$

$$f = \frac{4g_0^2 t^{-1}}{\frac{1}{9} - 2 + 1} + f_0 t^{-\frac{1}{9}} = -\frac{9}{2}g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{9}},$$

$$f=-\frac{9}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{9}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\left(-\frac{9}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{9}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{18t}\cdot x^2\right)^4,$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N=4$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t)=\left(-\frac{9}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{9}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{18t}\cdot x^2\right)^4.$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\text{ diferencijuojame pagal } t \text{ laiką}$$

$$=4\left(-\frac{9}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{9}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{18t}\cdot x^2\right)^3\cdot\left[-\frac{1}{9}f_0t^{-\frac{10}{9}}+t^{-2}\left(\frac{9}{2}g_0^2-g_0x+\frac{1}{18}\cdot x^2\right)\right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\text{ diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį}$$

$$=4\left(-\frac{9}{2}g_0^2t^{-1}+f_0t^{-\frac{1}{9}}+\frac{g_0x}{t}-\frac{1}{18t}\cdot x^2\right)^3\cdot\left(g_0t^{-1}-\frac{2x}{18t}\right).$$

Dabar surašome į lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(4\left(f_0t^{-\frac{1}{9}}-\left(\frac{9g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{18}x^2\right)t^{-1}\right)^4\left(\frac{g_0}{t}-\frac{x}{9t}\right)\right)=$$

$$=4\left[4\left(\frac{g_0}{t}-\frac{x}{9t}\right)^2\left(f_0t^{-\frac{1}{9}}-\left(\frac{9g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{18}x^2\right)t^{-1}\right)^3+\left(f_0t^{-\frac{1}{9}}-\left(\frac{9g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{18}x^2\right)t^{-1}\right)^4\left(-\frac{1}{9t}\right)\right]$$

.

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{4}} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Sprendimas, kai $N = 5$

Lygties sprendimas su dviem polinomo nariais.

Kai $N = 5$, tada sprendžiame tokią lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}} \frac{\partial u}{\partial x} \right). \tag{1}$$

O sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \left(f(t) + h(t) \cdot x^2 \right)^5 .$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\left(f + hx^2 \right)^4 \cdot \left(\dot{f} + \dot{h}\, x^2 \right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5\left(f + hx^2 \right)^4 \cdot 2hx .$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) &= \frac{\partial}{\partial x}\left[5\left(f + hx^2 \right)\left(f + hx^2 \right)^4 \cdot 2hx \right] = 10h \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f + hx^2 \right)^5 \cdot x \right] = \\
&= 10h\left\{ 5\left(f + hx^2 \right)^4 \cdot 2hx \cdot x + \left(f + hx^2 \right)^5 \right\} = \\
&= 10h\left(f + hx^2 \right)^4 \left[10hx^2 + f + hx^2 \right] = 10h\left(f + hx^2 \right)^4 \left[f + 11hx^2 \right]
\end{aligned} .$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$5\left(f + hx^2 \right)^4 \left(\dot{f} + \dot{h}\, x^2 \right) = 10h\left(f + hx^2 \right)^4 \left[f + 11hx^2 \right].$$

Suprastiname abi puses:

$$\left(\dot{f} + \dot{h}\, x^2 \right) = 2h\left[f + 11hx^2 \right],$$

$$\dot{f} + \dot{h}\, x^2 = 2hf + 22h^2 x^2 .$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = 2hf \\ \dot{h} = 22h^2 \end{cases},$$

gavome dvi paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 22h^2 \end{cases},$$

antrąją lygtį padauginame iš $\dfrac{dt}{h^2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 22h^2 \Big| \cdot \dfrac{dt}{h^2} \Rightarrow \dfrac{dh}{h^2} = 22dt \end{cases},$$

lygtį $\dfrac{dh}{h^2} = 22dt$ integruojame ir gauname $-\dfrac{1}{h} = 22t$. Čia const numetame, nes laiką galima parinkti bet kokį, tada:

$$h(t) = -\frac{1}{22t},$$

gavome paprastą lygtį.

Sprendžiame pirmąją lygtį:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2f\left(-\frac{1}{22t}\right)\Big| \cdot \frac{dt}{f} \Rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{dt}{11t},$$

tada integruojame ir gauname

$$\ln f = -\frac{1}{11}\ln t + \ln c,$$

$$\ln f = \ln\left(t^{-\frac{1}{11}} \cdot c\right), \text{ iš čia } f = c \cdot t^{-\frac{1}{11}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(c \cdot t^{-\frac{1}{11}} - \frac{1}{22t} \cdot x^2\right)^5,$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N = 5$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t) = \left(c \cdot t^{-\frac{1}{11}} - \frac{1}{22t} \cdot x^2 \right)^5 .$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{diferencijuojame pagal } t \text{ laiką } = 5\left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{11} ct^{-\frac{12}{11}} + \frac{1}{22} t^{-2} x^2 \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį } = 5\left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{1}{22t} \cdot x^2 \right)^4 \cdot \left(-\frac{2x}{22t} \right).$$

Dabar surašome į pačią lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{1}{22t} x^2 \right)^5 \cdot \left(-\frac{10x}{22t} \right) \right) = -\frac{10}{22t} \cdot \frac{\partial}{\partial x}\left[\left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right)^5 \cdot x \right] =$$

$$= -\frac{10}{22t}\left\{ \left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right)^4 \cdot \left(-\frac{10x}{22t} \right) \cdot x + \left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right)^5 \right\} = -\frac{10}{22t} \cdot \left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right)^4 \cdot \left[-\frac{10x^2}{22t} + ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right]$$

$$= -\frac{10}{22t} \cdot \left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right)^4 \left[ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{11x^2}{22t} \right].$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$5\left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right)^4 \cdot \left(-\frac{1}{11} ct^{-\frac{12}{11}} + \frac{x^2}{22t^2} \right) = -\frac{10}{22t}\left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{22t} \right)^4 \left(ct^{-\frac{1}{11}} - \frac{x^2}{2t} \right).$$

Turime gauti lygybę abiejuose pusėse (suprastiname abi puses):

$$5\left(-\frac{1}{11} \cdot ct^{-\frac{12}{11}} + \frac{x^2}{22t^2} \right) = 5\left(-\frac{1}{11} \cdot ct^{-\frac{12}{11}} + \frac{x^2}{22t^2} \right).$$

Gavome, kad lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Lygties sprendimas su triem polinomo nariais.

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}} \frac{\partial u}{\partial x} \right). \tag{1}$$

Sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t) = \left[f(t) + g(t)x + h(t)x^2 \right]^5.$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = 5\left(f + gx + hx^2\right)^4 \left(\dot{f} + \dot{g}\, x + \dot{h}\, x^2 \right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = 5\left(f + gx + hx^2\right)^4 (g + 2hx).$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}} \frac{\partial u}{\partial x} \right) = \frac{\partial}{\partial x}\left[5\left(f + gx + hx^2\right)^5 (g + 2hx) \right] = 5\left[5\left(f + gx + hx^2\right)^4 (g + 2hx)^2 + \left(f + gx + hx^2\right)^5 \cdot 2h \right] =$$

$$= 5\left(f + gx + hx^2\right)^4 \left[5(g + 2hx)^2 + \left(f + gx + hx^2\right) \cdot 2h \right]$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$5\left(f + gx + hx^2\right)^4 \left(\dot{f} + \dot{g}\, x + \dot{h}\, x^2 \right) = 5\left(f + gx + hx^2\right)^4 \left(5g^2 + 22ghx + 2fh + 22h^2x^2 \right).$$

Suprastiname ir gauname:

$$\dot{f} + \dot{g}\, x + \dot{h}\, x^2 = 5g^2 + 22ghx + 2fh + 22h^2x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = 5g^2 + 2hf \\ \dot{g} = 22gh \\ \dot{h} = 22h^2 \end{cases},$$

gavome tris paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$h(t) = -\frac{1}{22t},$$

$$\dot{g} = 22g \cdot \left(-\frac{1}{22t} \right) = -\frac{g}{t}, \; g = g_0 t^{-1}, \; g_0 = const,$$

$$\dot{f} = 5g_0^2 t^{-2} - \frac{f}{11t} \Rightarrow \dot{f} + \frac{1}{11} f t^{-1} = 5g_0^2 t^{-2}.$$

Šią lygtį sprendžiame Lagranžo konstantų varijavimo metodu:

$$\alpha = \frac{1}{11},\ \beta = 5g_0^2,\ \gamma = -2,$$

$$f = \frac{5g_0^2 t^{-1}}{\frac{1}{11} - 2 + 1} + f_0 t^{-\frac{1}{11}} = -\frac{11}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{11}},$$

$$f = -\frac{11}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{11}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(-\frac{11}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{11}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{22t} \cdot x^2 \right)^5,$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N = 5$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t) = \left(-\frac{11}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{11}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{22t} \cdot x^2 \right)^5.$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{ diferencijuojame pagal } t \text{ laiką}$$

$$= 5\left(-\frac{11}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{11}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{22t} \cdot x^2 \right)^4 \cdot \left[-\frac{1}{11} f_0 t^{-\frac{12}{11}} + t^{-2}\left(\frac{11}{2} g_0^2 - g_0 x + \frac{1}{22} \cdot x^2 \right) \right],$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{ diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį}$$

$$= 5\left(-\frac{11}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{11}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{22t} \cdot x^2 \right)^4 \cdot \left(g_0 t^{-1} - \frac{2x}{22t} \right).$$

Dabar surašome į lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(5\left(f_0t^{-\frac{1}{11}}-\left(\frac{11g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{22}x^2\right)t^{-1}\right)^5\left(\frac{g_0}{t}-\frac{2x}{22t}\right)\right)=$$

$$=5\left[5\left(\frac{g_0}{t}-\frac{x}{11t}\right)^2\left(f_0t^{-\frac{1}{11}}-\left(\frac{11g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{22}x^2\right)t^{-1}\right)^4+\left(f_0t^{-\frac{1}{11}}-\left(\frac{11g_0^2}{2}-g_0x+\frac{1}{22}x^2\right)t^{-1}\right)^5\left(-\frac{1}{11t}\right)\right]$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{5}}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Sprendimas, kai $N=6$

Lygties sprendimas su dviem polinomo nariais.

Kai $N=6$, tada sprendžiame tokią lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

O sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t)=\left(f(t)+h(t)\cdot x^2\right)^6.$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=6\left(f+hx^2\right)^5\cdot\left(\dot{f}+\dot{h}x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6\left(f+hx^2\right)^5\cdot 2hx.$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f+hx^2\right)^6\cdot 12hx\right]=12h\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(f+hx^2\right)^6\cdot x\right]=12h\left\{6\left(f+hx^2\right)^5\cdot 2hx\cdot x+\left(f+hx^2\right)^6\right\}=$$

$$=12h\left(f+hx^2\right)^5\left[12hx^2+f+hx^2\right]=12h\left(f+hx^2\right)^5\left[f+13hx^2\right]$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$6\left(f+hx^2\right)^5\left(\dot{f}+\dot{h}x^2\right)=12h\left(f+hx^2\right)^5\left[f+13hx^2\right].$$

Suprastiname abi puses:

$$\left(\dot{f}+\dot{h}x^2\right)=2h\left[f+13hx^2\right],$$

$$\dot{f} + \dot{h} x^2 = 2hf + 26h^2x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases} \dot{f} = 2hf \\ \dot{h} = 26h^2 \end{cases},$$

gavome dvi paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 26h^2 \end{cases},$$

antrąją lygtį padauginame iš $\dfrac{dt}{h^2}$:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial t} = 2hf \\ \dfrac{\partial h}{\partial t} = 26h^2 \Big| \cdot \dfrac{dt}{h^2} \Rightarrow \dfrac{dh}{h^2} = 26dt \end{cases},$$

lygtį $\dfrac{dh}{h^2} = 26dt$ integruojame ir gauname $-\dfrac{1}{h} = 26t$. Čia const numetame, nes laiką galima parinkti bet kokį, tada:

$$h(t) = -\frac{1}{26t},$$

gavome paprastą lygtį.

Sprendžiame pirmąją lygtį:

$$\frac{\partial f}{\partial t} = 2f\left(-\frac{1}{26t}\right)\Big| \cdot \frac{dt}{f} \Rightarrow \frac{df}{f} = -\frac{dt}{13t},$$

tada integruojame ir gauname

$$\ln f = -\frac{1}{13}\ln t + \ln c,$$

$$\ln f = \ln\left(t^{-\frac{1}{13}} \cdot c\right), \text{ iš čia } f = c \cdot t^{-\frac{1}{13}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{13}}-\frac{1}{26t}\cdot x^2\right)^6,$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N=6$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t)=\left(c\cdot t^{-\frac{1}{13}}-\frac{1}{26t}\cdot x^2\right)^6.$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\text{ diferencijuojame pagal } t \text{ laiką } =6\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{13}ct^{-\frac{14}{13}}+\frac{1}{26}t^{-2}x^2\right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\text{ diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį } =6\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{1}{26t}\cdot x^2\right)^5\cdot\left(-\frac{2x}{26t}\right).$$

Dabar surašome į pačią lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(6\cdot\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{1}{26t}x^2\right)^6\cdot\left(-\frac{x}{13t}\right)\right)=-\frac{6}{13t}\cdot\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right)^6\cdot x\right]=$$

$$=-\frac{6}{13t}\left\{6\cdot\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right)^5\cdot\left(-\frac{2x}{26t}\right)\cdot x+\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right)^6\right\}=-\frac{6}{13t}\cdot\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right)^4\cdot\left[-\frac{12x^2}{26t}+ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right]=$$

$$=-\frac{6}{13t}\cdot\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right)^5\left[ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{13x^2}{26t}\right].$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$6\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right)^5\cdot\left(-\frac{1}{13}ct^{-\frac{14}{13}}+\frac{x^2}{26t^2}\right)=-\frac{6}{13t}\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{26t}\right)^5\left(ct^{-\frac{1}{13}}-\frac{x^2}{2t}\right).$$

Turime gauti lygybę abiejuose pusėse (suprastiname abi puses):

$$6\left(-\frac{1}{13}\cdot ct^{-\frac{14}{13}}+\frac{x^2}{26t^2}\right)=6\left(-\frac{1}{13}\cdot ct^{-\frac{14}{13}}+\frac{x^2}{26t^2}\right).$$

Gavome, kad lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.

Lygties sprendimas su triem polinomo nariais.

Sprendžiame lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}}\frac{\partial u}{\partial x}\right). \tag{1}$$

Sprendinio ieškosime tokiu pavidalu:

$$u(x,t)=\left[f(t)+g(t)x+h(t)x^2\right]^6.$$

Diferencijuojame sprendinį pagal laiką t:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=6\left(f+gx+hx^2\right)^5\left(\dot{f}+\dot{g}\,x+\dot{h}\,x^2\right).$$

Diferencijuojame sprendinį pagal kintamąjį x:

$$\frac{\partial u}{\partial x}=6\left(f+gx+hx^2\right)^5\left(g+2hx\right).$$

Gautus rezultatus įrašom į pagrindinę lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left[6\left(f+gx+hx^2\right)^6\left(g+2hx\right)\right]=6\left[6\left(f+gx+hx^2\right)^5\left(g+2hx\right)^2+\left(f+gx+hx^2\right)^6\cdot 2h\right]$$

Dabar surašome į (1) lygtį:

$$6\left(f+gx+hx^2\right)^5\left(\dot{f}+\dot{g}\,x+\dot{h}\,x^2\right)=6\left(f+gx+hx^2\right)^5\left(6g^2+26ghx+2fh+26h^2x^2\right).$$

Suprastiname ir gauname:

$$\dot{f}+\dot{g}\,x+\dot{h}\,x^2=6g^2+26ghx+2fh+26h^2x^2.$$

Lyginame koeficientus prie vienodų x laipsnių:

$$\begin{cases}\dot{f}=6g^2+2hf\\ \dot{g}=26gh\\ \dot{h}=26h^2\end{cases},$$

gavome tris paprastąsias lygtis.

Sprendžiame šią sistemą kintamųjų atskyrimo metodu:

$$h(t)=-\frac{1}{26t},$$

$$\dot{g}=26g\cdot\left(-\frac{1}{26t}\right)=-\frac{g}{t},\ g=g_0t^{-1},\ g_0=const,$$

$$\dot{f} = 6g_0^2 t^{-2} - \frac{f}{13t} \Rightarrow \dot{f} + \frac{1}{13} f t^{-1} = 6g_0^2 t^{-2}.$$

Šią lygtį sprendžiame Lagranžo konstantų varijavimo metodu:

$$\alpha = \frac{1}{13},\ \beta = 6g_0^2,\ \gamma = -2,$$

$$f = \frac{6g_0^2 t^{-1}}{\frac{1}{13} - 2 + 1} + f_0 t^{-\frac{1}{13}} = -\frac{13}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{13}},$$

$$f = -\frac{13}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{13}}.$$

Gautas f ir h reikšmes įstatome į sprendinį $u(x,t)$:

$$u(x,t) = \left(-\frac{13}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{13}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{26t} \cdot x^2 \right)^6,$$

turime atskirąjį sprendinį.

Sprendinio patikrinimas, kai $N = 6$

Patikrinsime ar sprendinys teisingas:

Turime diferencialinę lygtį:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}} \frac{\partial u}{\partial x} \right),$$

ir sprendinį $u(x,t)$, kuris lygus:

$$u(x,t) = \left(-\frac{13}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{13}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{26t} \cdot x^2 \right)^6.$$

Atliekame veiksmus:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \text{ diferencijuojame pagal } t \text{ laiką}$$

$$= 6\left(-\frac{13}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{13}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{26t} \cdot x^2 \right)^5 \cdot \left[-\frac{1}{13} f_0 t^{-\frac{14}{13}} + t^{-2}\left(\frac{13}{2} g_0^2 - g_0 x + \frac{1}{26} \cdot x^2 \right) \right]$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \text{ diferencijuojame pagal } x \text{ kintamąjį}$$

$$= 6\left(-\frac{13}{2} g_0^2 t^{-1} + f_0 t^{-\frac{1}{13}} + \frac{g_0 x}{t} - \frac{1}{26t} \cdot x^2 \right)^5 \cdot \left(g_0 t^{-1} - \frac{2x}{26t} \right).$$

Dabar surašome į lygtį:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}}\frac{\partial u}{\partial x}\right)=\frac{\partial}{\partial x}\left(6\left(f_0 t^{-\frac{1}{13}}-\left(\frac{13g_0^2}{2}-g_0 x+\frac{1}{26}x^2\right)t^{-1}\right)^6\left(\frac{g_0}{t}-\frac{2x}{26t}\right)\right)=$$

$$=6\left[6\left(\frac{g_0}{t}-\frac{x}{13t}\right)^2\left(f_0 t^{-\frac{1}{13}}-\left(\frac{13g_0^2}{2}-g_0 x+\frac{1}{26}x^2\right)t^{-1}\right)^5+\left(f_0 t^{-\frac{1}{13}}-\left(\frac{13g_0^2}{2}-g_0 x+\frac{1}{26}x^2\right)t^{-1}\right)^6\left(-\frac{1}{13t}\right)\right]$$

Įrašome abi lygtis į pagrindinę diferencialinę lygtį. Tada:

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial}{\partial x}\left(u^{\frac{1}{6}}\frac{\partial u}{\partial x}\right),$$

lygybė teisinga, vadinasi sprendinys teisingas.