ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Laima Papievienė

TRINOMINIS MODELIS

Magistro darbas

Darbo vadovas
Prof. Habil. Dr. Remigijus Leipus

Šiauliai, 2007

Turinys

1 Įvadas

Finansų rinka - tokia rinka, kurioje operuojama (prekiaujama, mainoma ir pan.) vertybiniais popieriais (akcijomis, užsienio valiuta ir pan.) arba išvestiniais vertybiniais popieriais (pasirinkimo sandoriais (options), ateities sandoriais (futures contracts) ir pan.). Finansų rinka sudėtinga tuo, kad ji yra neapibrėžta, rizikinga, „mįslinga“. Dažniausiai naudojamos priemonės finansų rinkai tirti yra matematika, tikimybių teorija, laiko eilutės, stochastinė analizė, optimizavimo metodai ir t.t.

Pagrindinis finansų rinkos teorijų uždavinys - aprašyti kainos susidarymo mechanizmą vertybinių popierių rinkoje. Nuo šio mechanizmo aprašymo priklauso, kaip yra sprendžiami kiti finansų rinkos klausimai: optimalaus portfelio sudarymas, finansinių priemonių įkainojimas ir pan.

Darbe nagrinėjamas binominio (CRR) modelio, pasiūlyto 1979 metais Dž. Kokso, S. Roso ir M. Rubinšteino (John C. Cox, Stephen A. Ross, Marc Rubinstein) darbe, apibendrinimas. Šiame modelyje kainos dinamiką aprašome trinominiu modeliu, kur yra laikoma, kad akcijos kaina iš esamos būsenos sekančiu laiko momentu gali patekti į tris būsenas, t.y. pakilti, nukristi arba įgyti tarpinę reikšmę. Tiek binominis, tiek trinominis modelis gali būti taikomas, pavyzdžiui, greitam europietiškojo ar amerikietiškojo pasirinkimo sandorio vertės skaičiavimui.

Darbo tikslas - išnagrinėti finansų rinkoje apibrėžtą trinominį modelį.

Pirmas uždavinys - ištirti diskretaus laiko trinominį modelį vienos ir dviejų akcijų atvejais. Nustatyti, kada taip apibrėžtos rinkos bus nearbitražinės, ištirti pilnumą, rasti pasirinkimo sandorio vertės skaičiavimo formulę ir, jei galima, sukonstuoti rizikos apsidraudimo (hedžingo) strategiją.

Antras uždavinys - išnagrinėti trinominio modelio ribinį perėjimą, t. y., suskaidžius visą prekybos laikotarpį į didelį skaičių intervalų, rasti ribinę pasirinkimo sandorio vertės skaičiavimo formulę.

Nagrinėjant diskretaus laiko trinominį modelį vienos akcijos atveju gauta, kad taip apibrėžta rinka nėra pilna. Dviejų akcijų atveju parodoma, kad atitinkama rinka yra pilna. Abiem atvejais nusakytos sąlygos arbitražo strategijai neegzistuoti, rastos pasirinkimo sandorio vertės skaičiavimo formulės. Dviejų akcijų atveju sukonstruota hedžingo strategija.

Nagrinėjant tolydaus laiko trinominį modelį gauta ribinė pasirinkimo sandorio vertės skaičiavimo formulė.

Darbą sudaro įvadas, teorinė dalis, praktinė dalis, išvados. Taip pat pateikiamas literatūros sąrašas ir anglų kalba parašyta santrauka. Bendra darbo apimtis - 45 puslapiai.

2 Teorinė dalis

2.1 Sąvokos ir apibrėžimai

2.1.1 apibrėžimas. *Pasirinkimo sandoriu* (option) vadinamas kontraktas, pagal kurį viena iš jo šalių įgyja teisę pirkti ar parduoti prekę fiksuota kaina fiksuotu laiko tarpu, o kita kontrakto šalis už tam tikrą kainą (premiją) įsipareigoja įvykdyti kontrakto sąlygas, parduodant ar perkant sandorio objektą fiksuota kaina. [1]

Žodis „teisė" kontrakto pirkėjo atžvilgiu reiškia, kad jis gali atsisakyti pirkti ar parduoti prekę, jeigu tai jam nenaudinga. Jeigu pasirinkimo sandorio pirkėjas nutaria realizuoti savo teisę, tai pardavėjas privalo įvykdyti kontrakto įsipareigojimus, parduodamas ar pirkdamas prekę. [1]

Pasirinkimo sandoriai turi dvi formas - pirkimo ir pardavimo.

2.1.2 apibrėžimas. *Pasirinkimo pirkti sandoriu* (call option) vadinamas kontraktas, pagal kurį pasirinkimo sandorio savininkas už tam tikrą premiją įgyja teisę fiksuota kaina pirkti norimą prekę. Pasirinkimo sandorio pardavėjas įsipareigoja parduoti prekę, jeigu pareikalautų pasirinkimo sandorio savininkas. [1]

2.1.3 apibrėžimas. *Pasirinkimo parduoti sandoriu* (put option) vadinamas kontraktas, pagal kurį pasirinkimo sandorio savininkas už tam tikrą premiją įgyja teisę fiksuota kaina parduoti norimą prekę. Pasirinkimo sandorio pardavėjas įsipareigoja pirkti prekę, jeigu pareikalautų pasirinkimo sandorio savininkas. [1]

2.1.4 apibrėžimas. Kaina, kurią pardavimo sandorio savininkas sumoka pardavėjui, vadinama *pasirinkimo sandorio verte.* [1]

Dažniausiai pasirinkimo sandorio prekė yra akcijos.

2.1.5 apibrėžimas. *Pasirinkimo sandorio įvykdymo kaina* (strike price, exercise price) - tai fiksuojama kontrakte kaina, kuria pasirinkimo sandorio savininkas gali pirkti ar parduoti norimą prekę. [1]

Pagal pasirinkimo sandorio realizavimo laiką skiriami europietiški ir amerikietiški pasirinkimo sandoriai (European and American options). Europietiškojo pasirinkimo sandorio atveju kontraktas įvykdomas tiksliai kontrakto dieną (maturity, expiration date). Amerikietiškasis pasirinkimo sandoris gali būti įvykdomas bet kada iki nurodytos dienos. [1]

Dažniausiai žymima:

$$N - \text{pasirinkimo sandorio įvykdymo (pasirašymo) data;}$$

$$S_n - \text{akcijos kaina momentu } n;$$

$$K - \text{įvykdymo kaina.}$$

Pasirinkimo pirkti sandorio išmoka (pelnas) momentu N yra

$$(S_N - K)^+ := \max\{S_N - K, 0\}.$$

[1]

Pasirinkimo parduoti sandorio išmoka (pelnas) momentu N yra

$$(K - S_N)^+ := \max\{K - S_N, 0\}.$$

[1]

2.1.6 apibrėžimas. Atsitiktinė seka $\{H_n, n = 0, 1, ..., N\}$ vadinama suderinta su filtracija $\mathbb{F}$ arba tiesiog *suderintąja*, jeigu su visais $n = 0, 1, .., N$ $H_n \sim \mathcal{F}_n$. [1]

2.1.7 apibrėžimas. Suderintoji seka $\{H_n, n = 0, 1, ..., N\}$ vadinama $\mathbb{F}$-numatoma arba tiesiog *numatomąja*, jeigu su visais $n = 0, 1, .., N$ $H_n \sim \mathcal{F}_{n-1}$. [1]

2.1.8 apibrėžimas. Investavimo *strategija*, arba *portfeliu*, vadinamas $(d + 1)$-matis atsitiktinis procesas

$$\Phi = \{\Phi_n, 0 \leq n \leq N\};$$

čia
$$\Phi_n = (\Phi_n^0, \Phi_n^1, ..., \Phi_n^d) : \Omega \to \mathbb{R}^{d+1.}.$$
Φ_0^1 yra i-ųjų vertybinių popierių, turimų momentu 0, skaičius. Φ_n^i ($n = 1, ..., N$) reiškia i-ųjų vertybinių popierių, laikomų nuo $n-1$ iki n momento, skaičių. Laikoma, kad su kiekvienu $i = 0, 1, .., d$ Φ^i yra numatomoji seka, t. y.
$$\Phi_0^i \in \mathbb{R} \text{ ir su visais } n = 1, 2, ..., N \;\; \Phi_n^i \sim \mathcal{F}_{n-1}.$$

Tai reiškia, kad momentu n portfelis Φ_n sudaromas atsižvelgiant tik į gautą momentu $n-1$ informaciją, po to portfelis nekeičiamas iki pat momento n. Paskelbus kainas S_n, sudaromas porfelis Φ_{n+1} ir laikomas tol, kol bus paskelbtos kainos S_{n+1}. [1]

2.1.9 apibrėžimas. *Portfelio verte* momentu n vadiname dydį
$$V_n = \Phi_n \bullet S_n \equiv \sum_{i=0}^{d} \Phi_n^i S_n^i.$$
[1]

2.1.10 apibrėžimas. *Diskontuota portfelio verte* momentu n vadiname dydį
$$\widetilde{V}_n = \beta_n(\Phi_n \bullet S_n) = \Phi_n \bullet \widetilde{S}_n;$$
čia $\widetilde{S}_n = (1, \beta_n S_n^1, ..., \beta_n S_n^d)$, $\beta_n = 1/S_n^0$ yra diskonto faktorius. [1]

2.1.11 apibrėžimas. Strategija vadinama *finansavimosi*, jeigu su visais $n = 0, 1, ..., N-1$ portfelio vertė $\Phi_n \bullet S_n$ prieš prekybą lygi jo vertei $\Phi_{n+1} \bullet S_n$ po prekybos:
$$\Phi_n \bullet S_n = \Phi_{n+1} \bullet S_n.$$
[1]

2.1.12 apibrėžimas. Strategija Φ vadinama *leistinąja*, jeigu ji yra finansavimosi ir su visais $n = 0, 1, ..., N$ $V_n \geq 0$. [1]

2.1.13 apibrėžimas. Leistinoji strategija Φ vadinama *arbitražine*, jeigu $V_0 = 0$ ir $V_N \neq 0$. [1]

2.1.14 apibrėžimas. Rinka vadinama *nearbitražine*, jeigu joje neegzistuoja arbitražo strategija. [1]

2.1.15 apibrėžimas. Tarkime, $\{M_n, n = 0, 1, ..., N\}$ yra suderintasis atsitiktinis procesas. Tada, jeigu su visais $n = 0, 1, ..., N-1$

$$E(M_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = M_n,$$

tai $\{M_n\}$ vadinamas *martingalu.* [1]

2.1.16 apibrėžimas. Du tikimybiniai matai P ir Q, apibrėžti toje pačioje mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, vadinami *ekvivalenčiais*, jeigu

$$P(A) = 0 \;\Leftrightarrow Q(A) = 0, \;A \in \mathcal{F}.$$

Tokiu atveju žymima $P \sim Q$. [1]

2.1.1 TEOREMA. Rinka yra nearbitražinė tada ir tik tada , kai egzistuoja toks matas P^*, apibrėžtas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$ ir ekvivalentus matui P, kuriam procesas $\{(\widetilde{S}^1_n, ..., \widetilde{S}^d_n), n = 0, ..., N\}$ yra martingalas P^* atžvilgiu. [1]

2.1.17 apibrėžimas. Matas P^*, tenkinantis 2.1.1 teoremos sąlygas, vadinamas *ekvivalenčiuoju martingaliniu matu.* [1]

2.1.18 apibrėžimas. Neneigiamas atsitiktinis dydis X, $X \sim \mathcal{F}_N$, vadinamas finansiniu ieškiniu arba tiesiog *ieškiniu* (contingent claim). [1]

2.1.19 apibrėžimas. Ieškinys X vadinamas *pasiekiamu*, jeigu egzistuoja tokia leistinoji strategija Φ, kuriai $V_N = X$. [1]

2.1.20 apibrėžimas. Rinka vadinama *pilnąja*, jeigu bet kuris ieškinys yra pasiekiamas, t.y. bet kuriam $X \geq 0$, $X \sim \mathcal{F}_N$, egzistuoja leistinoji strategija Φ, kuriai $V_N = X$. [1]

2.1.2 TEOREMA. Nearbitražinėje rinkoje yra ekvivalentūs šie du teiginiai:

(1) rinka yra pilnoji;

(2) egzistuoja vienintelis ekvivalentusis martingalinis matas. [1]

2.2 Binominis modelis

Šis modelis pasiūlytas Dž. Kokso, S. Roso ir M. Rubinšteino (John C. Cox, Stephen A. Ross, Marc Rubinstein), todėl dar vadinamas CRR modeliu. Jis nusako diskrečią finansų rinką. Nerizikingos ir rizikingos investicijų kainos apibrėžiamos lygybėmis:

$$S_n^0 = (1+r)^n,$$

$$S_{n+1} = \rho_{n+1} S_n,$$

$S_0 > 0$; čia ρ_n, $n = 1, .., N$ įgyja tik dvi reikšmes: $1+a$ ir $1+b$ $(-1 < a < b)$. Reikšmė $\rho_n = 1 + a$ atitinka akcijos kainos „kritimą“, o reikšmė $\rho_n = 1 + b$ - „kilimą“,

Formaliai CRR modelis gali būti aprašytas taip. Tarkime,

$$\Omega = \{1+a, 1+b\}^N$$

- aibė visų sekų $\omega = (x_1, .., x_N)$, čia kiekvienas x_n yra arba $1+a$, arba $1+b$, $\mathcal{F} = 2^\Omega$ - visų Ω poaibių σ algebra ir $\rho_n(\omega) = x_n$ su $n = 1, .., N$. Kiekvienas $\omega \in \Omega$ atitinka vieną binominio medžio šaką (laužtę).

Laikoma

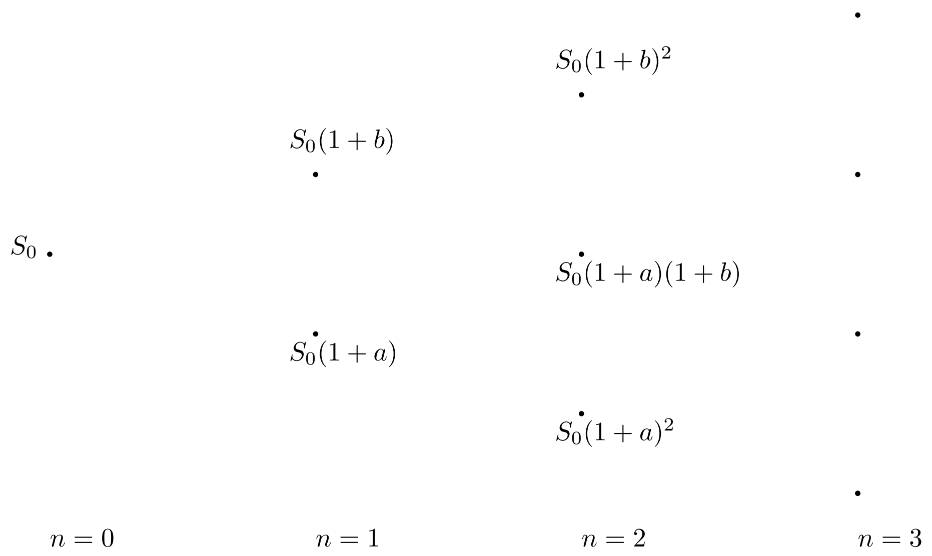
$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_1, ..., S_n) = \sigma(\rho_1, ..., \rho_n), \; n = 1, ..., N,$$

o P yra matas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, nusakytas lygybe:

$$P(x_1, ..., x_N) = P(\rho_1 = x_1, ..., \rho_N = x_N), \; (x_1, ..., x_N) \in \Omega.$$

[1]


$S_0(1+b)^2$
$S_0(1+b)$
S_0
$S_0(1+a)(1+b)$
$S_0(1+a)$
$S_0(1+a)^2$
$n=0$
$n=1$
$n=2$
$n=3$

2.3 Trinominis modelis

Finansų rinka, aprašoma trinominiu modeliu, funkcionuoja momentais $n = 0, 1, .., N$, kuriais galima pirkti ar parduoti vertybinius popierius, o kainos kiekvienu laiko momentu gali peršokti į tris būsenas. Tarkime, $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P\}$ - baigtinė tikimybinė erdvė, t.y.:

$\Omega = \{\omega_1, .., \omega_N\}$- baigtinė rinkos būsenų aibė,

$\mathcal{F} = 2^\Omega$ - visų Ω poaibių aibė,

$\mathbb{F}$- šeima σ algebrų $\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\} \subset \mathcal{F}_1 \subset .. \subset \mathcal{F}_N = \mathcal{F}$.

Tarkime, egzistuoja d+1 vertybinių popierių, kurių kainos $S_n^{(0)}, S_n^{(1)}, .., S_n^{(d)}$, $(n = 0, 1, .., N)$. Sakykime, kad bet kuriam $i = 0, 1, .., d$ kaina $S_n^{(i)}$ yra $\mathcal{F}_n$ matus atsitiktinis dydis. Nerizikingos ir rizikingos investicijų kainos apibrėžiamos lygybėmis:

$$S_n^{(0)} = (1 + r)^n,$$

$$S_{n+1}^{(i)} = \rho_{n+1}^{(i)} S_n^{(i)},$$

$S_0^{(i)} > 0, \quad i = 1, ..., d;$

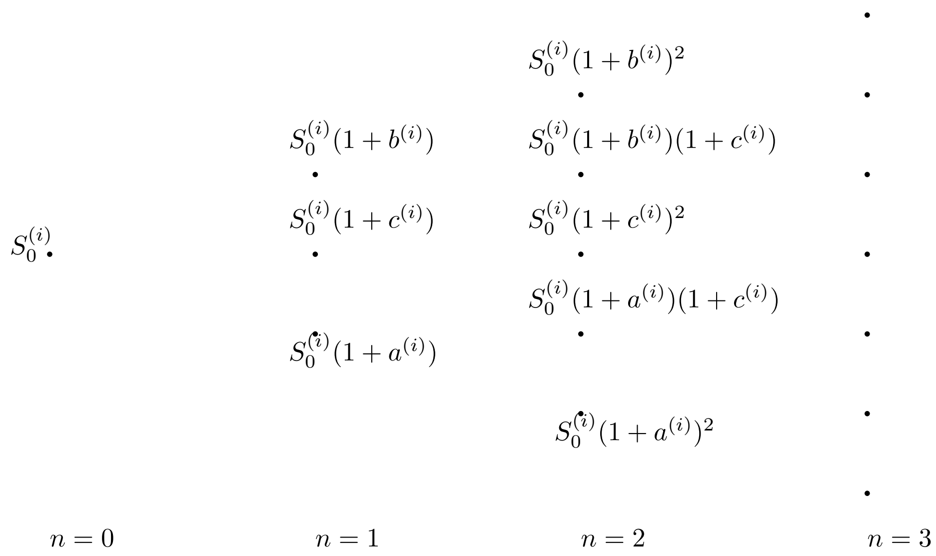
čia $\rho_n^{(i)}, n = 1, .., d$ įgyja tris reikšmes:

$1 + a^{(i)}$ - kainos „kritimas“,

$1 + b^{(i)}$ - kainos „kilimas“,

$1 + c^{(i)}$ - kainos „tarpinė reikšmė“, $(a^{(i)} < c^{(i)} < b^{(i)})$.

Darbe nagrinėjamas atskiras trinominio modelio, pavaizduoto paveiksle, nesusirišantis atvejis.



3 Praktinė dalis

3.1 Trinominis modelis vienos akcijos atveju

Tarkime, finansų rinka funkcionuoja momentais $n = 0, 1, ..., N$, kuriais galima pirkti ar parduoti vieną akciją. Tarkime, $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P\}$ - baigtinė tikimybinė erdvė,

$$\Omega = \{1 + a^{(1)}, 1 + b^{(1)}, 1 + c^{(1)}\}^N$$

- aibė visų sekų $\omega = (x_1^{(1)}, .., x_N^{(1)})$, čia kiekvienas $x_n^{(1)}$ yra arba $1 + a^{(1)}$, arba $1 + b^{(1)}$, arba $1 + c^{(1)}$, $\mathcal{F} = 2^{\Omega}$ - visų Ω poaibių σ algebra ir $\rho_n^{(1)}(\omega) = x_n^{(1)}$ su $n = 1, .., N$. Kiekvienas $\omega \in \Omega$ atitinka trinominio medžio šaką.

Tarkime, akcijos kaina $S_n^{(1)}$ $(n = 0, 1, ..., N)$ yra $\mathcal{F}_n$ matus atsitiktinis dydis. Šiuo atveju i įgyja tik vieną reikšmę , t.y. $i = 1$.

Tegul, algebrų šeima yra generuota kainų $S_1^{(1)}, S_2^{(1)}, ...$

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma(S_1^{(1)}, ..., S_n^{(1)}) = \sigma(\rho_1^{(1)}, ..., \rho_n^{(1)}), n = 1, ..., N.$$

Tarkime, kad P yra matas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, nusakytas lygybe:

$$P(x_1^{(1)}, ..., x_N^{(1)}) = P(\rho_1^{(1)} = x_1^{(1)}, ..., \rho_N^{(1)} = x_N^{(1)}),\ (x_1^{(1)}, ..., x_N^{(1)}) \in \Omega.$$

Pirmiausia pastebime, kad $\{\widetilde{S}_n^{(1)} \equiv (1 + r)^{-n} S_n^{(1)}\}$ yra martingalas kokio nors mato P atžvilgiu tada ir tik tada , kai su visais n $E(\rho_{n+1}^{(1)} | \mathcal{F}_n) = 1 + r$.

3.1.1 Lema. *Jeigu aprašytoji rinka yra nearbitražinė, tai* $r \in (a^{(1)}, b^{(1)})$.

Įrodymas. Jei rinka nearbitražinė, tai egzistuoja toks matas $P^{\star} \sim P$, kad $\{\widetilde{S}_n^{(1)}\}$ yra martingalas mato P^* atžvilgiu, t. y. $E^*(\rho_{n+1}^{(1)} | \mathcal{F}_n) = 1 + r$. Tada $E^*(\rho_{n+1}^{(1)}) = 1 + r$. Kadangi $\rho_{n+1}^{(1)}(\omega) \in \{1 + a^{(1)}, 1 + b^{(1)}, 1 + c^{(1)}\}$, tai $a^{(1)} < r < b^{(1)}$.

□

Sakykime, kad $r \in (a^{(1)}, b^{(1)})$, $0 < a^{(1)} < c^{(1)} < b^{(1)}$. Tuomet galime užrašyti:

$$(1 + a^{(1)})p^* + (1 + b^{(1)})q^* + (1 + c^{(1)})(1 - p^* - q^*) = 1 + r$$

arba

$$p^*(a^{(1)} - c^{(1)}) + q^*(b^{(1)} - c^{(1)}) = r - c^{(1)}.$$

Iš čia gauname

$$p^* = \frac{r - c^{(1)} - q^*(b^{(1)} - c^{(1)})}{a^{(1)} - c^{(1)}},$$

$$q^* = \frac{r - c^{(1)} - p^*(a^{(1)} - c^{(1)})}{b^{(1)} - c^{(1)}}. \tag{3.1}$$

Tarkime, kad $\rho_1^{(1)}, ..., \rho_N^{(1)}$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir $P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + a^{(1)}\} = p^*$, $P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + b^{(1)}\} = q^*$, $P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + c^{(1)}\} = 1 - P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + a^{(1)}\} - P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + b^{(1)}\}$, kur p^* ir q^* duoti (3.1). Tada $\{\widetilde{S}_n^{(1)}\}$ yra martingalas mato P^* atžvilgiu.

Tam, kad įsitikintume šiuo faktu, tarkime, kad $\rho_1^{(1)}, ..., \rho_N^{(1)}$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai atžvilgiu P^* ir $P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + a^{(1)}\} = p^*$, $P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + b^{(1)}\} = q^*$, $P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + c^{(1)}\} = 1 - P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + a^{(1)}\} - P^*\{\rho_1^{(1)} = 1 + b^{(1)}\}$. Tada

$$E^*(\rho_{n+1}^{(1)} | \mathcal{F}_n) = (1 + a^{(1)})p^* + (1 + b^{(1)})q^* + (1 + c^{(1)})(1 - p^* - q^*) = 1 + r,$$

t. y. $\{\widetilde{S}_n^{(1)}\}$ yra martingalas P^* atžvilgiu.

1. Pavyzdys. Tarkime, $a^{(1)} = 0,1$, $b^{(1)} = 0,6$, $c^{(1)} = 0,3$, $r = 0,5$, tada remiantis (3.1),

$$p^* = \frac{2}{3} - q^*.$$

p^* ir q^* gali įgyti reikšmes atitinkamai iš intervalo nuo 0 iki $\frac{2}{3}$.

Kadangi šiuo atveju nėra vienintelio ekvivalentaus martingalinio mato P^*, tai nagrinėjama rinka nėra pilna ir todėl neegzistuoja vienintelė pasirinkimo sandorio pirkti kaina, t. y. tokių kainų yra be galo daug.

3.1.2 Lema. *Tarkime, rinka aprašoma trinominiu modeliu ir rinkoje funkcionuoja vienas vertybinis popierius (akcija) su kainomis* $S_n^{(1)}$. *Tuomet* *europietiškojo pasirinkimo pirkti sandorio (call option) su įvykdymo kaina K vertės momentu n ($n \in \{0, ..., N\}$) randamos iš formulės:*

$$c(p^*, q^*, m, S_n^{(1)}) = S_n^{(1)} \Phi(m, \widetilde{p^*}, \widetilde{q^*}, S_n^{(1)}) - K(1+r)^{-m} \Phi(m, p^*, q^*, S_n^{(1)}),$$

kur

$$\begin{aligned} m &= N - n, \\ \Phi(m,p,q,x) &= \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\in A_m(x)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} p^i q^j (1-p-q)^{m-i-j}, \\ A_m(x) &= \{(i,j) : i\ln\frac{1+a^{(1)}}{1+c^{(1)}} + j\ln\frac{1+b^{(1)}}{1+c^{(1)}} > \ln\frac{K}{x(1+c^{(1)})^m}\}, \end{aligned}$$

$$\widetilde{p^*} = p^* \frac{1+a^{(1)}}{1+r}, \quad \widetilde{q^*} = q^* \frac{1+b^{(1)}}{1+r}.$$

Įrodymas. Pasinaudoję lygybe $S_N^{(1)} = S_n^{(1)} \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(1)}$, gauname:

$$\begin{aligned} c(p^*, q^*, m, S_n^{(1)}) &= (1+r)^{-m} E^*((S_N^{(1)} - K)^+ | \mathcal{F}_n) \\ &= (1+r)^{-m} E^*((S_n^{(1)} \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(1)} - K)^+ | \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

Čia $S_n^{(1)} \sim \mathcal{F}_n$, o $\prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(1)}$ nepriklauso nuo $\mathcal{F}_n$, todėl

$$\begin{aligned} c(p^*, q^*, m, x) &= (1+r)^{-m} E^*(x \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(1)} - K)^+ \\ &= (1+r)^{-m} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (x(1+a^{(1)})^i (1+b^{(1)})^j (1+c^{(1)})^{m-i-j} - \\ &\quad -K)^+ \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} {p^*}^i {q^*}^j (1-p^*-q^*)^{m-i-j}. \qquad (3.2) \end{aligned}$$

Atskliaudžiant (3.2) reikia patikrinti sąlygą:

$$x(1+a^{(1)})^i (1+b^{(1)})^j (1+c^{(1)})^{m-i-j} > K.$$

Perrašome ją:

$$\ln x + i\ln(1+a^{(1)}) + j\ln(1+b^{(1)}) + (m-i-j)\ln(1+c^{(1)}) > \ln K$$

arba

$$i\ln\frac{1+a^{(1)}}{1+c^{(1)}} + j\ln\frac{1+b^{(1)}}{1+c^{(1)}} > \ln\frac{K}{x(1+c^{(1)})^m}.$$

Turime:

$$\begin{aligned}
c(p^*,q^*,m,x) &= (1+r)^{-m} \sum_{\substack{i=0\\(i,j)\in A_m(x)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} x(1+a^{(1)})^i(1+b^{(1)})^j \times \\
&\quad \times(1+c^{(1)})^{m-i-j}\frac{m!}{i!j!(m-i-j)!}{p^*}^i{q^*}^j(1-p^*-q^*)^{m-i-j} - \\
&\quad -K(1+r)^{-m} \sum_{\substack{i=0\\(i,j)\in A_m(x)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} \times \\
&\quad \times{p^*}^i{q^*}^j(1-p^*-q^*)^{m-i-j} \\
&= \sum_{\substack{i=0\\(i,j)\in A_m(x)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} x\left(\frac{1+a^{(1)}}{1+r}p^*\right)^i\left(\frac{1+b^{(1)}}{1+r}q^*\right)^j \times \\
&\quad \times\left(\frac{1+c^{(1)}}{1+r}(1-p^*-q^*)\right)^{m-i-j}\frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} \times \\
&\quad \times{p^*}^i{q^*}^j(1-p^*-q^*)^{m-i-j} - \\
&\quad -K(1+r)^{-m} \sum_{\substack{i=0\\(i,j)\in A_m(x)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} \times \\
&\quad \times{p^*}^i{q^*}^j(1-p^*-q^*)^{m-i-j} \\
&= x\Phi(m,\widetilde{p^*},\widetilde{q^*},x) - K(1+r)^{-m}\Phi(m,p^*,q^*,x).
\end{aligned}$$

$\square$

3.2 Trinominis modelis dviejų akcijų atveju

Tarkime, finansų rinka funkcionuoja momentais $n = 0, 1, ..., N$, kuriais galima pirkti ar parduoti dvi akcijas.

Tegul, $\{\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{F}, P\}$ - baigtinė tikimybinė erdvė,

$$\Omega = \{(1 + a^{(1)}, 1 + a^{(2)}), (1 + b^{(1)}, 1 + b^{(2)}), (1 + c^{(1)}, 1 + c^{(2)})\}^N$$

- aibė visų sekų $\omega = \{(x_1^{(1)}, x_1^{(2)}), .., (x_N^{(1)}, x_N^{(2)})\}$, čia kiekvienas $(x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$ yra arba $(1+a^{(1)}, 1+a^{(2)})$, arba $(1+b^{(1)}, 1+b^{(2)})$, arba $(1+c^{(1)}, 1+c^{(2)})$. $\mathcal{F} = 2^\Omega$ - visų Ω poaibių σ algebra ir $(\rho_n^{(1)}(\omega), \rho_n^{(2)}(\omega)) = (x_n^{(1)}, x_n^{(2)})$ su $n = 1, .., N$. Kiekvienas $\omega \in \Omega$ atitinka atitinkamai pirmojo ir antrojo trinominių medžių šakas.

Tarkime, akcijų kainos $S_n^{(1)}, S_n^{(2)}$ yra $\mathcal{F}_n$ matūs atsitiktiniai dydžiai.

Tegul, algebrų šeima yra generuota kainų $(S_1^{(1)}, S_1^{(2)}), n = 1, 2, ...$

$$\mathcal{F}_0 = \{\emptyset, \Omega\},$$

$$\mathcal{F}_n = \sigma\big((S_1^{(1)}, S_1^{(2)}), ..., (S_n^{(1)}, S_n^{(2)})\big) = \sigma\big((\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}), ..., (\rho_n^{(1)}, \rho_n^{(2)})\big), n = 1, ..., N.$$

Tarkime, kad P yra matas mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{F})$, nusakytas lygybe:

$$P\big((x_1^{(1)}, x_1^{(2)}), ..., (x_N^{(1)}, x_N^{(2)})\big) =$$

$$= P\big((\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}) = (x_1^{(1)}, x_1^{(2)}), ..., (\rho_N^{(1)}, \rho_N^{(2)}) = (x_N^{(1)}, x_N^{(2)})\big),$$

$$\big((x_1^{(1)}, x_1^{(2)}), ..., (x_N^{(1)}, x_N^{(2)})\big) \in \Omega.$$

Tegul investuotojo turimų akcijų pirmos akcijos kiekis yra ε_1, antros akcijos kiekis yra ε_2. Šiuo atveju investuotojo portfelis yra vektorius $(\varepsilon_1, \varepsilon_2)$. Tada portfelio vertė momentu n bus $V_n = \varepsilon_1 S_n^{(1)} + \varepsilon_2 S_n^{(2)}$.

Vėl pastebime, kad $\{\widetilde{V}_n \equiv (1 + r)^{-n} V_n\}$ yra martingalas kokio nors mato P atžvilgiu tada ir tik tada , kai su visais n $E\big((\rho_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}^{(2)})|\mathcal{F}_n\big) = (1+r, 1+r)$.

3.2.1 Lema. *Jeigu aprašytoji rinka yra nearbitražinė, tai*

$$\min\{a^{(1)}, a^{(2)}\} < r < \max\{b^{(1)}, b^{(2)}\}.$$

Įrodymas. Jei rinka nearbitražinė, tai egzistuoja toks matas $P^* \sim P$, kad $\{\widetilde{V}_n\}$ yra martingalas mato P^* atžvilgiu, t. y. $E^*\big(\rho_{n+1}^{(i)}|\mathcal{F}_n\big)= 1 + r$, čia $i = 1, 2$. Tada $E^*\big(\rho_{n+1}^{(i)}\big)= 1+r$. Kadangi $\rho_{n+1}^{(i)}(\omega) \in \{1+a^{(i)}, 1+b^{(i)}, 1+c^{(i)}\}$, tai $\min\{a^{(1)}, a^{(2)}\} < r < \max\{b^{(1)}, b^{(2)}\}$.

□

3.2.1 TEOREMA. $\{\widetilde{V}_n\}$ *yra martingalas mato* P^* *atžvilgiu tada ir tik tada, kai* $(\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}), ..., (\rho_N^{(1)}, \rho_N^{(2)})$ *yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir*

$$P^*\{(\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}) = (1 + a^{(1)}, 1 + a^{(2)})\} = p^*,$$

$$P^*\{(\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}) = (1 + b^{(1)}, 1 + b^{(2)})\} = q^*,$$

$$P^*\{(\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}) = (1 + c^{(1)}, 1 + c^{(2)})\} = 1 - p^* - q^*.$$

Įrodymas. Pakankamumas. Tarkime, $(\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}), ..., (\rho_N^{(1)}, \rho_N^{(2)})$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir $P^*\{(\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}) = (1+a^{(1)}, 1+a^{(2)})\} = p^*$, $P^*\{(\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}) = (1 + b^{(1)}, 1 + b^{(2)})\} = q^*$, $P^*\{(\rho_1^{(1)}, \rho_1^{(2)}) = (1 + c^{(1)}, 1 + c^{(2)})\} = 1 - p^* - q^*$. Tada

$$E^*\big((\rho_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}^{(2)})|\mathcal{F}_n\big)= E^*\big(\rho_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}^{(2)}\big)=$$

$$= \begin{cases} (1 + a^{(1)})p^* + (1 + b^{(1)})q^* + (1 + c^{(1)})(1 - p^* - q^*\big)= 1 + r, \\ (1 + a^{(2)})p^* + (1 + b^{(2)})q^* + (1 + c^{(2)})(1 - p^* - q^*\big)= 1 + r, \end{cases}$$

t. y. $\{\widetilde{V}_n\}$ yra martingalas P^* atžvilgiu.

Būtinumas.Tarkime, $n \in \{0, 1, ..., N - 1\}$ ir

$$E^*\big((\rho_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}^{(2)})|\mathcal{F}_n\big)= (1 + r, 1 + r). \tag{3.3}$$

Įrašę į (3.3) lygybę išraišką

$$\begin{aligned}(\rho_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}^{(2)}) \; = \; & (1 + a^{(1)}, 1 + a^{(2)}) \, 1_{\{(\rho_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}^{(2)})=(1+a^{(1)},1+a^{(2)})\}} \\ & +(1 + b^{(1)}, 1 + b^{(2)}) \, 1_{\{(\rho_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}^{(2)})=(1+b^{(1)},1+b^{(2)})\}} \\ & +(1 + c^{(1)}, 1 + c^{(2)}) \, 1_{\{(\rho_{n+1}^{(1)}, \rho_{n+1}^{(2)})=(1+c^{(1)},1+c^{(2)})\}},\end{aligned}$$

gauname lygčių sistemą

$$\begin{cases} (1+a^{(1)})\,\mathbb{1}_{\{\rho_{n+1}^{(1)}=1+a^{(1)}\}} + (1+b^{(1)})\,\mathbb{1}_{\{\rho_{n+1}^{(1)}=1+b^{(1)}\}} + (1+c^{(1)})\,\mathbb{1}_{\{\rho_{n+1}^{(1)}=1+c^{(1)}\}} = 1+r, \\ (1+a^{(2)})\,\mathbb{1}_{\{\rho_{n+1}^{(2)}=1+a^{(2)}\}} + (1+b^{(2)})\,\mathbb{1}_{\{\rho_{n+1}^{(2)}=1+b^{(2)}\}} + (1+c^{(2)})\,\mathbb{1}_{\{\rho_{n+1}^{(2)}=1+c^{(2)}\}} = 1+r, \\ E^*(\mathbb{1}_{\{(\rho_{n+1}^{(1)},\rho_{n+1}^{(2)})=(1+a^{(1)},1+a^{(2)})\}}\,|\mathcal{F}_n) + E^*(\mathbb{1}_{\{(\rho_{n+1}^{(1)},\rho_{n+1}^{(2)})=(1+b^{(1)},1+b^{(2)})\}}\,|\mathcal{F}_n) + \\ + E^*(\mathbb{1}_{\{(\rho_{n+1}^{(1)},\rho_{n+1}^{(2)})=(1+c^{(1)},1+c^{(2)})\}}\,|\mathcal{F}_n) = 1. \end{cases}$$

Ją išsprendę, turime

$$\begin{cases} P^*\{(\rho_{n+1}^{(1)},\rho_{n+1}^{(2)}) = (1+a^{(1)},1+a^{(2)})|\mathcal{F}_n\} = p^*, \\ P^*\{(\rho_{n+1}^{(1)},\rho_{n+1}^{(2)}) = (1+b^{(1)},1+b^{(2)})|\mathcal{F}_n\} = q^*, \\ P^*\{(\rho_{n+1}^{(1)},\rho_{n+1}^{(2)}) = (1+c^{(1)},1+c^{(2)})|\mathcal{F}_n\} = 1-p^*-q^*. \end{cases} \tag{3.4}$$

Iš čia su $n=0$ gauname

$$\begin{cases} P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}) = (1+a^{(1)},1+a^{(2)})|\mathcal{F}_n\} = p^*, \\ P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}) = (1+b^{(1)},1+b^{(2)})|\mathcal{F}_n\} = q^*, \\ P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}) = (1+c^{(1)},1+c^{(2)})|\mathcal{F}_n\} = 1-p^*-q^*. \end{cases}$$

arba

$$P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}) = (x_1^{(1)},x_1^{(2)})\} = \begin{cases} p^*, & kai\ (x_1^{(1)},x_1^{(2)}) = (1+a^{(1)},1+a^{(2)}), \\ q^*, & kai\ (x_1^{(1)},x_1^{(2)}) = (1+b^{(1)},1+b^{(2)}), \\ 1-p^*-q^*, & kai\ (x_1^{(1)},x_1^{(2)}) = (1+c^{(1)},1+c^{(2)}). \end{cases}$$

Iš įvykių sandaugos tikimybės formulės ir (3.4) lygybės gauname

$$P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}) = (x_1^{(1)},x_1^{(2)}),(\rho_2^{(1)},\rho_2^{(2)}) = (x_2^{(1)},x_2^{(2)})\} =$$

$$= P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}) = (x_1^{(1)},x_1^{(2)})\}P^*\{(\rho_2^{(1)},\rho_2^{(2)}) = (x_2^{(1)},x_2^{(2)})|(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}) = (x_1^{(1)},x_1^{(2)})\} =$$

$$= P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}) = (x_1^{(1)},x_1^{(2)})\}P^*\{(\rho_2^{(1)},\rho_2^{(2)}) = (x_2^{(1)},x_2^{(2)})\};$$

čia

$$P^*\{(\rho_2^{(1)},\rho_2^{(2)}) = (x_2^{(1)},x_2^{(2)})\} = \begin{cases} p^*, & kai\ (x_2^{(1)},x_2^{(2)}) = (1+a^{(1)},1+a^{(2)}), \\ q^*, & kai\ (x_2^{(1)},x_2^{(2)}) = (1+b^{(1)},1+b^{(2)}), \\ 1-p^*-q^*, & kai\ (x_2^{(1)},x_2^{(2)}) = (1+c^{(1)},1+c^{(2)}). \end{cases}$$

Panašiai tęsdami, turime

$$P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)})=(x_1^{(1)},x_1^{(2)}),...,(\rho_N^{(1)},\rho_N^{(2)})=(x_N^{(1)},x_N^{(2)})\}=$$

$$=P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)})=(x_1^{(1)},x_1^{(2)})\}...P^*\{(\rho_N^{(1)},\rho_N^{(2)})=(x_N^{(1)},x_N^{(2)})\};$$

čia

$$(x_j^{(1)},x_j^{(2)})\in\{(1+a^{(1)},1+a^{(2)}),(1+b^{(1)},1+b^{(2)}),(1+c^{(1)},1+c^{(2)})\},$$

$j=1,...,N$, ir

$$P^*\{(\rho_j^{(1)},\rho_j^{(2)})=(x_j^{(1)},x_j^{(2)})\}=\begin{cases} p^*, & kai\ (x_j^{(1)},x_j^{(2)})=(1+a^{(1)},1+a^{(2)}),\\ q^*, & kai\ (x_j^{(1)},x_j^{(2)})=(1+b^{(1)},1+b^{(2)}),\\ 1-p^*-q^*, & kai\ (x_j^{(1)},x_j^{(2)})=(1+c^{(1)},1+c^{(2)}).\end{cases}$$

Vadinasi, $(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)}),...,(\rho_N^{(1)},\rho_N^{(2)})$ - nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir $P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)})=(1+a^{(1)},1+a^{(2)})\}=p^*$, $P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)})=(1+b^{(1)},1+b^{(2)})\}=q^*$, $P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)})=(1+c^{(1)},1+c^{(2)})\}=1-P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)})=(1+a^{(1)},1+a^{(2)})\}-P^*\{(\rho_1^{(1)},\rho_1^{(2)})=(1+b^{(1)},1+b^{(2)})\}$.

□

Sakykime, kad $\min\{a^{(1)},a^{(2)}\}<r<\max\{b^{(1)},b^{(2)}\}$, $0<a^{(i)}<c^{(i)}<b^{(i)}$. Tada galime užrašyti:

$$\begin{cases}(1+a^{(1)})p^*+(1+b^{(1)})q^*+(1+c^{(1)})(1-p^*-q^*)=1+r\\ (1+a^{(2)})p^*+(1+b^{(2)})q^*+(1+c^{(2)})(1-p^*-q^*)=1+r\end{cases}.$$

Sprendžiame šią sistemą:

$$\begin{cases}p^*(a^{(1)}-c^{(1)})+q^*(b^{(1)}-c^{(1)})=r-c^{(1)}\\ p^*(a^{(2)}-c^{(2)})+q^*(b^{(2)}-c^{(2)})=r-c^{(2)}\end{cases},$$

$$\begin{cases}q^*=\frac{(r-c^{(1)})(a^{(2)}-c^{(2)})+(r-c^{(2)})(c^{(1)}-a^{(1)})}{(b^{(1)}-c^{(1)})(a^{(2)}-c^{(2)})+(b^{(2)}-c^{(2)})(c^{(1)}-a^{(1)})}\\ p^*=\frac{(r-c^{(1)})(b^{(2)}-c^{(2)})+(r-c^{(2)})(c^{(1)}-b^{(1)})}{(a^{(1)}-c^{(1)})(b^{(2)}-c^{(2)})+(a^{(2)}-c^{(2)})(c^{(1)}-b^{(1)})}\end{cases}.$$

Matome, kad šiuo atveju, t.y. kai $i=1,2$, turime pilną rinką, nes egzistuoja vienintelis tikimybinis matas P^*.

2. Pavyzdys. Tarkime, $a^{(1)} = 0,1$, $c^{(1)} = 1,4$, $b^{(1)} = 2,1$, $a^{(2)} = 0,2$, $c^{(2)} = 1,3$, $b^{(2)} = 2,5$, $r = 0,8$, tada

$$p^* = 0,468354,\ q^* = 0,012658,\ 1 - p^* - q^* = 0,518987.$$

Pilnos rinkos atveju egzistuoja vienintelė optimali pasirinkimo pirkti ar parduoti sandorio kaina.

3.2.2 Lema. *Tarkime, rinka aprašoma trinominiu modeliu ir rinkoje funkcionuoja du vertybiniai popieriai (akcijos), kurių kainos lygios $S_n^{(1)}$, $S_n^{(2)}$. Tuomet europietiškojo pasirinkimo pirkti sandorio su įvykdymo kaina K vertė momentu n ($n \in \{0, ..., N\}$), su visais $\varepsilon_1, \varepsilon_2 > 0$, randama iš formulės:*

$$C_m(S_n^{(1)}, S_n^{(2)}) = \varepsilon_1 S_n^{(1)} \Phi(m, \widetilde{p_1^*}, \widetilde{q_1^*}, S_n^{(1)}, S_n^{(2)}) + \varepsilon_2 S_n^{(2)} \Phi(m, \widetilde{p_2^*}, \widetilde{q_2^*}, S_n^{(1)}, S_n^{(2)}) -$$

$$-K(1+r)^{-m} \Phi(m, p^*, q^*, S_n^{(1)}, S_n^{(2)}),$$

kur

$$m = N - n,$$

$$C_m(S_n^{(1)}, S_n^{(2)}) = c(p^*, q^*, m, S_n^{(1)}, S_n^{(2)}),$$

$$\Phi(m, p, q, x_1, x_2) = \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j) \in B_m(x_1, x_2)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{M!}{i! j! (m-i-j)!} p^i q^j (1-p-q)^{m-i-j},$$

$$B_m(x_1, x_2) = \{(i,j) : \varepsilon_1 x_1 (1+a^{(1)})^i (1+b^{(1)})^j (1+c^{(1)})^{m-i-j} +$$

$$+\varepsilon_2 x_2 (1+a^{(2)})^i (1+b^{(2)})^j (1+c^{(2)})^{m-i-j} > K\},$$

$$\widetilde{p_1^*} = p^* \frac{1+a^{(1)}}{1+r},\ \widetilde{p_2^*} = p^* \frac{1+a^{(2)}}{1+r},$$

$$\widetilde{q_1^*} = q^* \frac{1+b^{(1)}}{1+r},\ \widetilde{q_2^*} = q^* \frac{1+b^{(2)}}{1+r}.$$

Įrodymas. Turime:

$$V_N = \varepsilon_1 S_N^{(1)} + \varepsilon_2 S_N^{(2)}. \tag{3.5}$$

Pasinaudoję (3.5) lygybe

$$V_N = \varepsilon_1 S_N^{(1)} + \varepsilon_2 S_N^{(2)} = \varepsilon_1 S_n^{(1)} \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(1)} + \varepsilon_2 S_n^{(2)} \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(2)},$$

gauname:

$$\begin{aligned} C_m(S_n^{(1)}, S_n^{(2)}) &= (1+r)^{-m} E^*((V_N - K)^+ | \mathcal{F}_n) \\ &= (1+r)^{-m} E^*((\varepsilon_1 S_N^{(1)} + \varepsilon_2 S_N^{(2)} - K)^+ | \mathcal{F}_n) \\ &= (1+r)^{-m} E^*((\varepsilon_1 S_n^{(1)} \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(1)} + \varepsilon_2 S_n^{(2)} \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(2)} - K)^+ | \mathcal{F}_n). \end{aligned}$$

Čia $S_n \sim \mathcal{F}_n$, o $\varepsilon_1 \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(1)}$ ir $\varepsilon_2 \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(2)}$ nepriklauso nuo $\mathcal{F}_n$, todėl

$$\begin{aligned} c(p^*, q^*, m, x_1, x_2) &= (1+r)^{-m} E^*(\varepsilon_1 x_1 \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(1)} + \varepsilon_2 x_2 \prod_{i=n+1}^{N} \rho_i^{(2)} - K)^+ \\ &= (1+r)^{-m} \sum_{i=0}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} (\varepsilon_1 x_1 (1+a^{(1)})^i (1+b^{(1)})^j \times \\ &\quad \times (1+c^{(1)})^{m-i-j} + \varepsilon_1 x_2 (1+a^{(2)})^i (1+b^{(2)})^j \times \\ &\quad \times (1+c^{(2)})^{m-i-j} - K)^+ \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} \times \\ &\quad \times p^{*^i} q^{*^j} (1-p^*-q^*)^{m-i-j}. \end{aligned}$$

Atskliaudžiant turi būti tenkinama sąlyga:

$$\varepsilon_1 x_1 (1+a^{(1)})^i (1+b^{(1)})^j (1+c^{(1)})^{m-i-j} + \varepsilon_1 x_2 (1+a^{(2)})^i (1+b^{(2)})^j (1+c^{(2)})^{m-i-j} > K.$$

Pažymėkime:

$$\begin{aligned} B_m(x_1, x_2) &:= \{(i,j) : \varepsilon_1 x_1 (1+a^{(1)})^i (1+b^{(1)})^j (1+c^{(1)})^{m-i-j} + \\ &\quad + \varepsilon_1 x_2 (1+a^{(2)})^i (1+b^{(2)})^j (1+c^{(2)})^{m-i-j} > K\}, \end{aligned}$$

tada galime rašyti:

$$\begin{aligned} c(p^*, q^*, m, x_1, x_2) &= (1+r)^{-m} \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\in B_m(x_1,x_2)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \varepsilon_1 x_1 (1+a^{(1)})^i (1+b^{(1)})^j \times \\ &\times (1+c^{(1)})^{m-i-j} \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} {p^*}^i {q^*}^j (1-p^*-q^*)^{m-i-j} + \\ &+ (1+r)^{-m} \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\in B_m(x_1,x_2)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \varepsilon_2 x_2 (1+a^{(2)})^i (1+b^{(2)})^j \times \\ &\times (1+c^{(2)})^{m-i-j} \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} {p^*}^i {q^*}^j (1-p^*-q^*)^{m-i-j} - \\ &- K(1+r)^{-m} \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\in B_m(x_1,x_2)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} \times \\ &\times {p^*}^i {q^*}^j (1-p^*-q^*)^{m-i-j} \end{aligned}$$

Toliau tęsiame įrodymą:

$$\begin{aligned}
c(p^*, q^*, m, x_1, x_2) \quad = \quad & \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\in B_m(x_1,x_2)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \varepsilon_1 x_1 \left(\frac{1+a^{(1)}}{1+r} p^*\right)^i \left(\frac{1+b^{(1)}}{1+r} q^*\right)^j \times \\
& \times \left(\frac{1+c^{(1)}}{1+r}(1-p^*-q^*)\right)^{m-i-j} \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} {p^*}^i {q^*}^j \times \\
& \times (1-p^*-q^*)^{m-i-j} + \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\in B_m(x_1,x_2)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \varepsilon_2 x_2 \left(\frac{1+a^{(2)}}{1+r} p^*\right)^i \times \\
& \times \left(\frac{1+b^{(2)}}{1+r} q^*\right)^j \left(\frac{1+c^{(2)}}{1+r}(1-p^*-q^*)\right)^{m-i-j} \times \\
& \times \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} {p^*}^i {q^*}^j (1-p^*-q^*)^{m-i-j} - \\
& - K(1+r)^{-m} \sum_{\substack{i=0 \\ (i,j)\in B_m(x_1,x_2)}}^{m} \sum_{j=0}^{m-i} \frac{m!}{i!j!(m-i-j)!} {p^*}^i {q^*}^j \times \\
& \times (1-p^*-q^*)^{m-i-j} \\
= \quad & \varepsilon_1 x_1 \Phi(m, \widetilde{p_1^*}, \widetilde{q_1^*}, x_1, x_2) + \varepsilon_2 x_2 \Phi(m, \widetilde{p_2^*}, \widetilde{q_2^*}, x_1, x_2) - \\
& - K(1+r)^{-m} \Phi(m, p^*, q^*, x_1, x_2).
\end{aligned}$$

$\square$

3. Pavyzdys. Tarkime, rinka aprašoma trinominiu modeliu, $N = 2$, ir rinkoje funkcionuoja du vertybiniai popieriai (akcijos), kurių kainos momentu $n = 0$ yra $S_0^{(1)} = 1,2$, $S_0^{(2)} = 2$. Tęskime 2 pavyzdį, kuriame $a^{(1)} = 0,1$, $c^{(1)} = 1,4$, $b^{(1)} = 2,1$, $a^{(2)} = 0,2$, $c^{(2)} = 1,3$, $b^{(2)} = 2,5$, $r = 0,8$ ir

$$p^* = 0,468354, \; q^* = 0,012658, \; 1 - p^* - q^* = 0,518987.$$

Apskaičiuosime europietiškojo pasirinkimo pirkti sandorio su įvykdymo kaina $K = 5$ vertę momentu $n = 0$. Tarsime, kad $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$.

Šiam uždaviniui išspręsti taikome 3.2.2 lemą. Uždavinyje $m = N - n = 2 - 0 = 2$. Pirmiausia, reikia išrinkti aibę

$$B_2(1,2;2) = \{(i,j) : 1\cdot 1, 2\cdot 1, 1^i\cdot 3, 1^j\cdot 2, 4^{2-i-j} + 1\cdot 2\cdot 1, 2^i\cdot 3, 5^j\cdot 2, 3^{2-i-j} > 5\}$$

tenkinančius elementus.

Kai $i = 0, j = 0$, gauname $1 \cdot 1,2 \cdot 1,1^i \cdot 3,1^j \cdot 2,4^{2-i-j} + 1 \cdot 2 \cdot 1,2^i \cdot 3,5^j \cdot 2,3^{2-i-j} = 17,492$.

Kai $i = 0, j = 1$, gauname $1 \cdot 1,2 \cdot 1,1^i \cdot 3,1^j \cdot 2,4^{2-i-j} + 1 \cdot 2 \cdot 1,2^i \cdot 3,5^j \cdot 2,3^{2-i-j} = 25,028$.

Kai $i = 0, j = 2$, gauname $1 \cdot 1,2 \cdot 1,1^i \cdot 3,1^j \cdot 2,4^{2-i-j} + 1 \cdot 2 \cdot 1,2^i \cdot 3,5^j \cdot 2,3^{2-i-j} = 36,032$.

Kai $i = 1, j = 0$, gauname $1 \cdot 1,2 \cdot 1,1^i \cdot 3,1^j \cdot 2,4^{2-i-j} + 1 \cdot 2 \cdot 1,2^i \cdot 3,5^j \cdot 2,3^{2-i-j} = 8,688$.

Kai $i = 1, j = 1$, gauname $1 \cdot 1,2 \cdot 1,1^i \cdot 3,1^j \cdot 2,4^{2-i-j} + 1 \cdot 2 \cdot 1,2^i \cdot 3,5^j \cdot 2,3^{2-i-j} = 12,492$.

Kai $i = 2, j = 0$, gauname $1 \cdot 1,2 \cdot 1,1^i \cdot 3,1^j \cdot 2,4^{2-i-j} + 1 \cdot 2 \cdot 1,2^i \cdot 3,5^j \cdot 2,3^{2-i-j} = 4,332$.

Iš čia turime:

$$B_2(1,2;2) = \{(0;0),(0;1),(0;2),(1;0),(1;1)\}.$$

Išskleidę $\Phi(m, p^*, q^*, S_n^{(1)}, S_n^{(2)})$, turėsime:

$$\Phi(2, p^*, q^*, 1, 2; 2) = (1 - p^* - q^*)^2 + 2q^*(1 - p^* - q^*) +$$

$$+ q^{*2} + 2p^*(1 - p^* - q^*) + 2p^* q^* = 0,780642527.$$

Randame $\widetilde{p_1^*}$, $\widetilde{q_1^*}$ ir $1 - \widetilde{p_1^*} - \widetilde{q_1^*}$:

$$\widetilde{p_1^*} = p^* \frac{1 + a^{(1)}}{1 + r} = 0,286216333, \ \widetilde{q_1^*} = p^* \frac{1 + b^{(1)}}{1 + r} = 0,021799888,$$

$$1 - \widetilde{p_1^*} - \widetilde{q_1^*} = 0,691983778.$$

Tada

$$\Phi(2, \widetilde{p_1^*}, \widetilde{q_1^*}, 1.2, 2) = (1 - \widetilde{p_1^*} - \widetilde{q^*}_1)^2 + 2\widetilde{q_1^*}(1 - \widetilde{p_1^*} - \widetilde{q_1^*}) +$$

$$+ \widetilde{q_1^*}^2 + 2\widetilde{p_1^*}(1 - \widetilde{p_1^*} - \widetilde{q_1^*}) + 2\widetilde{p_1^*}\widetilde{q_1^*} = 0,918080207.$$

Randame $\widetilde{p_2^*}$, $\widetilde{q_2^*}$ ir $1 - \widetilde{p_2^*} - \widetilde{q_2^*}$:

$$\widetilde{p_2^*} = p^* \frac{1 + a^{(2)}}{1 + r} = 0,312236, \ \widetilde{p_2^*} = p^* \frac{1 + b^{(2)}}{1 + r} = 0,024612777,$$

$$1 - \widetilde{p_2^*} - \widetilde{q_2^*} = 0,663151222.$$

Tada

$$\Phi(2, \widetilde{p_2^*}, \widetilde{q_2^*}, 1.2, 2) = (1 - \widetilde{p_2^*} - \widetilde{q^*}_2)^2 + 2\widetilde{q_2^*}(1 - \widetilde{p_2^*} - \widetilde{q_2^*}) +$$

$$+\widetilde{q_2^*}^2 + 2\widetilde{p_2^*}(1 - \widetilde{p_2^*} - \widetilde{q_2^*}) + 2\widetilde{p_2^*}\widetilde{q_2^*} = 0,902508676.$$

Pasirinkimo pirkti sandorio vertė bus:

$$C_2(S_0^{(1)}, S_0^{(2)}) = C_2(1, 2; 2) = 1 \cdot 1,2 \cdot 0,918080207 + 1 \cdot 2 \cdot 0,902508676-$$

$$-5 \cdot (1 + 0,8)^{-2} \cdot 0,780642527 = 1,702.$$

3.3 Hedžingo konstravimas

Toliau darbe sukonstruosime tokią strategiją $\{\Phi_n\}$, kad visiems $n = 0, ..., N$ būtų teisinga lygybė

$$S_n = (1+r)^{-m} E^*((V_N - K)^+ | \mathcal{F}_n);$$

čia $m = N - n$. Laimysime, kad $\Phi_n = (H_n^0, H_n^{(1)}, H_n^{(2)})$. Tada

$$H_n^0 (1+r)^n + H_n^{(1)} S_n^{(1)} + H_n^{(2)} S_n^{(2)} = c(p^*, q^*, m, S_n^{(1)}, S_n^{(2)})$$

arba galima rašyti

$$\begin{aligned} &H_n^0(1+r)^n + (H_n^{(1)} S_{n-1}^{(1)} \rho_n^{(1)} + H_n^{(2)} S_{n-1}^{(2)} \rho_n^{(2)})(\mathbb{1}_{\{(\rho_n^{(1)}, \rho_n^{(2)}) = (1+a^{(1)}, 1+a^{(2)})\}} + \\ &+ \mathbb{1}_{\{(\rho_n^{(1)}, \rho_n^{(2)}) = (1+b^{(1)}, 1+b^{(2)})\}} + \mathbb{1}_{\{(\rho_n^{(1)}, \rho_n^{(2)}) = (1+a^{(1)}, 1+a^{(2)})\}}) = \\ &= c(p^*, q^*, m, \varepsilon_1 S_{n-1}^{(1)} \rho_n^{(1)} (\mathbb{1}_{\{\rho_n^{(1)} = 1+a^{(1)}\}} + \mathbb{1}_{\{\rho_n^{(1)} = 1+b^{(1)}\}} + \\ &+ \mathbb{1}_{\{\rho_n^{(1)} = 1+c^{(1)}\}}), \varepsilon_2 S_{n-1}^{(2)} \rho_n^{(2)} (\mathbb{1}_{\{\rho_n^{(2)} = 1+a^{(2)}\}} + \mathbb{1}_{\{\rho_n^{(2)} = 1+b^{(2)}\}} + \mathbb{1}_{\{\rho_n^{(2)} = 1+c^{(2)}\}})). \end{aligned} \tag{3.6}$$

Pažymėkime:

$$D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) := c(p^*, q^*, m, S_{n-1}^{(1)}(1+a^{(1)}), S_{n-1}^{(2)}(1+a^{(2)})),$$

$$D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) := c(p^*, q^*, m, S_{n-1}^{(1)}(1+b^{(1)}), S_{n-1}^{(2)}(1+b^{(2)})),$$

$$D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) := c(p^*, q^*, m, S_{n-1}^{(1)}(1+c^{(1)}), S_{n-1}^{(2)}(1+c^{(2)})).$$

Iš (3.6) lygties gauname lygčių sistemą, sudarytą iš trijų lygčių

$$\begin{cases} H_n^0(1+r)^n + H_n^{(1)} S_{n-1}^{(1)}(1+a^{(1)}) + H_n^{(2)} S_{n-1}^{(2)}(1+a^{(2)}) = D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) \\ H_n^0(1+r)^n + H_n^{(1)} S_{n-1}^{(1)}(1+b^{(1)}) + H_n^{(2)} S_{n-1}^{(2)}(1+b^{(2)}) = D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) \\ H_n^0(1+r)^n + H_n^{(1)} S_{n-1}^{(1)}(1+c^{(1)}) + H_n^{(2)} S_{n-1}^{(2)}(1+c^{(2)}) = D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) \end{cases},$$

kurioje yra trys nežinomieji H_n^0, $H_n^{(1)}$, $H_n^{(2)}$.

Sprendžiame šią lygčių sistemą, naudodami Kramerio taisyklę:

$$\begin{vmatrix} (1+r)^n & S_{n-1}^{(1)}(1+a^{(1)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+a^{(2)}) \\ (1+r)^n & S_{n-1}^{(1)}(1+b^{(1)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+b^{(2)}) \\ (1+r)^n & S_{n-1}^{(1)}(1+c^{(1)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+c^{(2)}) \end{vmatrix} =$$

$$= (1+r)^n S_{n-1}^{(1)} S_{n-1}^{(2)} (b^{(1)}c^{(2)} + a^{(1)}b^{(2)} + a^{(2)}c^{(1)} - a^{(2)}b^{(1)} - c^{(1)}b^{(2)} - a^{(1)}c^{(2)}) =$$

$$= (1+r)^n S_{n-1}^{(1)} S_{n-1}^{(2)} (\begin{vmatrix} a^{(1)} & b^{(1)} \\ a^{(2)} & b^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} b^{(1)} & c^{(1)} \\ b^{(2)} & c^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} c^{(1)} & a^{(1)} \\ c^{(2)} & a^{(2)} \end{vmatrix}),$$

$$\begin{vmatrix} D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) & S_{n-1}^{(1)}(1+a^{(1)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+a^{(2)}) \\ D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) & S_{n-1}^{(1)}(1+b^{(1)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+b^{(2)}) \\ D_m(c^{(1)}, c^{(2)})) & S_{n-1}^{(1)}(1+c^{(1)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+c^{(2)}) \end{vmatrix} =$$

$$= S_{n-1}^{(1)} S_{n-1}^{(2)} (D_m(a^{(1)}, a^{(2)})(b^{(1)} + b^{(1)}c^{(2)} + c^{(2)} - b^{(2)} - c^{(1)}b^{(2)} - c^{(1)}) +$$

$$+ D_m(b^{(1)}, b^{(2)})(c^{(1)} + c^{(1)}a^{(2)} + a^{(2)} - c^{(2)} - c^{(1)}a^{(1)} - a^{(1)}) +$$

$$+ D_m(c^{(1)}, c^{(2)})(b^{(2)} + b^{(2)}a^{(1)} + a^{(1)} - b^{(1)} - b^{(1)}a^{(2)} - a^{(2)})) =$$

$$= S_{n-1}^{(1)} S_{n-1}^{(2)} (\begin{vmatrix} D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) & D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) \\ a^{(1)} & b^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) & D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) \\ b^{(1)} & c^{(1)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) & D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) \\ c^{(1)} & a^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) & D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) \\ a^{(2)} & b^{(2)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) & D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) \\ b^{(2)} & c^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) & D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) \\ c^{(2)} & a^{(2)} \end{vmatrix} +$$

$$+ D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) \begin{vmatrix} b^{(1)} & c^{(1)} \\ b^{(2)} & c^{(2)} \end{vmatrix} + D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) \begin{vmatrix} c^{(1)} & a^{(1)} \\ c^{(2)} & a^{(2)} \end{vmatrix} + D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) \begin{vmatrix} a^{(1)} & b^{(1)} \\ a^{(2)} & b^{(2)} \end{vmatrix}),$$

$$\begin{vmatrix} (1+r)^n & D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+a^{(2)}) \\ (1+r)^n & D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+b^{(2)}) \\ (1+r)^n & D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) & S_{n-1}^{(2)}(1+c^{(2)}) \end{vmatrix} = (1+r)^n S_{n-1}^{(2)} (D_m(a^{(1)}, a^{(2)})(b^{(2)} - c^{(2)}) +$$

$$+ D_m(b^{(1)}, b^{(2)})(c^{(2)} - a^{(2)}) + D_m(c^{(1)}, c^{(2)})(a^{(2)} - b^{(2)})) =$$

$$= (1+r)^n S_{n-1}^{(2)} (\begin{vmatrix} D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) & D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) \\ c^{(2)} & b^{(2)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) & D_m(a^{(1)}, a^{(2)}) \\ c^{(2)} & a^{(2)} \end{vmatrix} +$$

$$+ \begin{vmatrix} D_m(b^{(1)}, b^{(2)}) & D_m(c^{(1)}, c^{(2)}) \\ b^{(2)} & c^{(2)} \end{vmatrix}),$$

$$\begin{vmatrix} (1+r)^n & S_{n-1}^{(1)}(1+a^{(1)}) & D_m(a^{(1)},a^{(2)}) \\ (1+r)^n & S_{n-1}^{(1)}(1+b^{(1)}) & D_m(b^{(1)},b^{(2)}) \\ (1+r)^n & S_{n-1}^{(1)}(1+c^{(1)}) & D_m(c^{(1)},c^{(2)}) \end{vmatrix} = (1{+}r)^n S_{n-1}^{(1)}(D_m(a^{(1)},a^{(2)})(c^{(1)}{-}b^{(1)}){+}$$

$$+D_m(b^{(1)},b^{(2)})(a^{(1)}-c^{(1)}) + D_m(c^{(1)},c^{(2)})(b^{(1)}-a^{(1)})) =$$

$$= (1{+}r)^n S_{n-1}^{(1)}(\begin{vmatrix} D_m(a^{(1)},a^{(2)}) & D_m(c^{(1)},c^{(2)}) \\ a^{(1)} & c^{(1)} \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} D_m(c^{(1)},c^{(2)}) & D_m(b^{(1)},b^{(2)}) \\ c^{(1)} & b^{(1)} \end{vmatrix} +$$

$$+\begin{vmatrix} D_m(c^{(1)},c^{(2)}) & D_m(a^{(1)},a^{(2)}) \\ c^{(1)} & a^{(1)} \end{vmatrix})$$

Pažymėkime:

$$\triangle(x,y) := \begin{vmatrix} x^{(1)} & y^{(1)} \\ x^{(2)} & y^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$\triangle_1(x,y) := \begin{vmatrix} D_m(x^{(1)},x^{(2)}) & D_m(y^{(1)},y^{(2)}) \\ x^{(1)} & y^{(1)} \end{vmatrix},$$

$$\triangle_2(x,y) := \begin{vmatrix} D_m(x^{(1)},x^{(2)}) & D_m(y^{(1)},y^{(2)}) \\ x^{(2)} & y^{(2)} \end{vmatrix},$$

$$\triangle := \triangle(a,b) + \triangle(b,c) + \triangle(c,a),$$

$$\triangle_1 := \triangle_1(a,b) + \triangle_1(b,c) + \triangle_1(c,a),$$

$$\triangle_2 := \triangle_2(a,b) + \triangle_2(b,c) + \triangle_2(c,a).$$

Tada:

$$H_n^0 = \frac{\triangle_1 + \triangle_2 + D_m(a^{(1)},a^{(2)})\triangle(b,c) + D_m(b^{(1)},b^{(2)})\triangle(c,a) + D_m(c^{(1)},c^{(2)})\triangle(a,b)}{(1+r)^n \cdot \triangle},$$

$$H_n^{(1)} = \frac{\triangle_2}{S_{n-1}^{(1)} \cdot \triangle},$$

$$H_n^{(2)} = \frac{\triangle_1}{S_{n-1}^{(2)} \cdot \triangle}.$$

3.4 Ribinis perėjimas

Tarkime, nagrinėjamas prekybos laikotarpis yra T metų ir prekyba vyksta tolydžiai. Suskaidome prekybos intervalą $[0, T]$ į N lygių dalių, parenkant N pakankamai didelį. Nagrinėkime diskretų N periodų modelį, atitnkantį sudėtinių palūkanų schemą su N išmokėjimų per laiko tarpą T ir vienodo periodo $[(i-1)T/N, iT/N]$, $i = 1, .., N$ palūkanomis $r = r_N$. Tarkime

$$\lim_{N\to\infty} (1 + r_N)^N = e^{RT}. \tag{3.7}$$

Sakykime, akcijų $S_N^{(1)}$, $S_N^{(2)}$ kainų šuoliai aprašomi parametrais $a^{(1)} = a_N^{(1)}$, $b^{(1)} = b_N^{(1)}$, $c^{(1)} = c_N^{(1)}$, $a^{(2)} = a_N^{(2)}$, $b^{(2)} = b_N^{(2)}$, $c^{(2)} = c_N^{(2)}$, kur

$$\begin{aligned}
1 + a_N^{(1)} &= (1 + r_N)e^{\sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}},\\
1 + a_N^{(2)} &= (1 + r_N)e^{\sigma_1^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}},\\
1 + b_N^{(1)} &= (1 + r_N)e^{\sigma_2^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}},\\
1 + b_N^{(2)} &= (1 + r_N)e^{\sigma_2^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}},\\
1 + c_N^{(1)} &= (1 + r_N)e^{\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}},\\
1 + c_N^{(2)} &= (1 + r_N)e^{\sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}}.
\end{aligned} \tag{3.8}$$

Be to, $\sigma_1^{(1)} < \sigma_2^{(1)} < \sigma_3^{(1)}$ ir $\sigma_1^{(2)} < \sigma_2^{(2)} < \sigma_3^{(2)}$.

Iš lygčių sistemos

$$\begin{cases}
(1 + a_N^{(1)})p^* + (1 + b_N^{(1)})q^* + (1 + c_N^{(1)})(1 - p^* - q^*) = 1 + r_N\\
(1 + a_N^{(2)})p^* + (1 + b_N^{(2)})q^* + (1 + c_N^{(2)})(1 - p^* - q^*) = 1 + r_N
\end{cases}$$

turime:

$$\begin{cases}
q^* = \frac{(r_N - c_N^{(1)})(a_N^{(2)} - c_N^{(2)}) + (r_N - c_N^{(2)})(c_N^{(1)} - a_N^{(1)})}{(b_N^{(1)} - c_N^{(1)})(a_N^{(2)} - c_N^{(2)}) + (b_N^{(2)} - c_N^{(2)})(c_N^{(1)} - a_N^{(1)})}\\
p^* = \frac{(r_N - c_N^{(1)})(b_N^{(2)} - c_N^{(2)}) + (r_N - c_N^{(2)})(c_N^{(1)} - b_N^{(1)})}{(a_N^{(1)} - c_N^{(1)})(b_N^{(2)} - c_N^{(2)}) + (a_N^{(2)} - c_N^{(2)})(c_N^{(1)} - b_N^{(1)})}
\end{cases}. \tag{3.9}$$

Skaičiuojame $\lim\limits_{N\to\infty} q^*$. Pasinaudoję (3.8) ir (3.9) formulėmis, turime:

$$
\begin{aligned}
(r_N - c_N^{(1)})(a_N^{(2)} - c_N^{(2)}) &= (r_N - (1+r_N)e^{\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1)((1+r_N)e^{\sigma_1^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - \\
&\quad -(1+r_N)e^{\sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1 \\
&= (1+r_N)^2(1 - \sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_3^{(1)})^2 T}{2N} - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) + 1) \times \\
&\quad \times(1 + \sigma_1^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{(\sigma_1^{(2)})^2 T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) - 1 - \sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \\
&\quad -\frac{(\sigma_3^{(2)})^2 T}{2N} - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}})) \\
&= (1+r_N)^2(-\sigma_3^{(1)}(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)})\frac{T}{N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(r_N - c_N^{(2)})(c_N^{(1)} - a_N^{(1)}) &= (r_N - (1+r_N)e^{\sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1)((1+r_N)e^{\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - \\
&\quad -(1+r_N)e^{\sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1) \\
&= (1+r_N)^2(1 - \sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_3^{(2)})^2 T}{2N} - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) + 1) \times \\
&\quad \times(1 + \sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{(\sigma_3^{(1)})^2 T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) - 1 - \sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \\
&\quad -\frac{(\sigma_1^{(1)})^2 T}{2N} - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}})) \\
&= (1+r_N)^2(-\sigma_3^{(2)}(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})\frac{T}{N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b_N^{(1)} - c_N^{(1)})(a_N^{(2)} - c_N^{(2)}) &= ((1+r_N)e^{\sigma_2^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - (1+r_N)e^{\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1) \times \\
&\quad \times ((1+r_N)e^{\sigma_1^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - (1+r_N)e^{\sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1) \\
&= (1+r_N)^2(1 + \sigma_2^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{(\sigma_2^{(1)})^2 T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) - 1 - \\
&\quad -\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_3^{(1)})^2 T}{2N} - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}))(1 + \sigma_1^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}} + \\
&\quad + \frac{(\sigma_1^{(2)})^2 T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) - 1 - \sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_3^{(2)})^2 T}{2N} - \\
&\quad - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}})) \\
&= (1+r_N)^2((\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}))\frac{T}{N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}})),
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
(b_N^{(2)} - c_N^{(2)})(c_N^{(1)} - a_N^{(1)}) &= ((1+r_N)e^{\sigma_2^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - (1+r_N)e^{\sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1) \times \\
&\quad \times ((1+r_N)e^{\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - (1+r_N)e^{\sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1) \\
&= (1+r_N)^2(1 + \sigma_2^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{(\sigma_2^{(2)})^2 T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) - 1 - \\
&\quad \sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_3^{(2)})^2 T}{2N} - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}))(1 + \sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} + \\
&\quad + \frac{(\sigma_3^{(1)})^2 T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) - 1 - \sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_1^{(1)})^2 T}{2N} - \\
&\quad - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}})) \\
&= (1+r_N)^2((\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)}))\frac{T}{N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}})),
\end{aligned}
$$

tada

$$
\lim_{N\to\infty} q^* = \frac{\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)}}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})}. \tag{3.10}
$$

Analogiškai gauname:

$$\lim_{N\to\infty} p^* = \frac{\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)}}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})}. \qquad (3.11)$$

3.4.1 Lema. *Sakykime, su kiekvienu* $N \geq 1$ $X_1^{(n)}, .., X_N^{(n)}$ $(n = 1, 2)$ *yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, įgyjantys reikšmes atitinkamai iš aibės* $\{\sigma_1^{(n)}\sqrt{\frac{T}{N}}, \sigma_2^{(n)}\sqrt{\frac{T}{N}}, \sigma_3^{(n)}\sqrt{\frac{T}{N}}\}$ *ir* $Y_N^{(1)} = X_1^{(1)} + .. + X_N^{(1)}$, $Y_N^{(2)} = X_1^{(2)} + .. + X_N^{(2)}$. *Tada atsitiktinis vektorius* $(Y_N^{(1)}, Y_N^{(2)})$ *konverguoja pagal pasiskirstymą į Gauso atsitiktinį vektorių su vidurkių matrica* $A = (\mu^{(1)}, \mu^{(2)})$ *ir kovariacijų matrica* $\mathrm{R} = (r_{ij})_{1\leq i,j\leq 2}$, *kur*

$$\mu^{(1)} = \Big(\frac{((\sigma_3^{(1)})^2 - (\sigma_1^{(1)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)} + \sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} - (\sigma_3^{(1)})^2\Big)\frac{T}{2},$$

$$\begin{aligned}\mu^{(2)} &= \Big(\frac{((\sigma_3^{(2)})^2 - (\sigma_1^{(2)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} + \\ &+ \frac{((\sigma_1^{(1)})^2 - (\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} - (\sigma_3^{(2)})^2\Big)\frac{T}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{11} &= \Big(\frac{((\sigma_1^{(1)})^2 - (\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} + \\ &+ \frac{((\sigma_2^{(1)})^2 - (\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} - (\sigma_3^{(2)})^2\Big)T,\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{22} &= \Big(\frac{((\sigma_1^{(2)})^2 - (\sigma_3^{(2)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} + \\ &+ \frac{((\sigma_2^{(2)})^2 - (\sigma_3^{(2)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} - (\sigma_3^{(2)})^2\Big)T,\end{aligned}$$

$$r_{12} = r_{21} = 0.$$

Įrodymas. Vektoriaus $(Y_N^{(1)}, Y_N^{(2)})$, kur $Y_N^{(1)} = X_1^{(1)} + .. + X_N^{(1)}$, $Y_N^{(2)} = X_1^{(2)} + .. + X_N^{(2)}$, charakteringoji fukcija yra:

$$\begin{aligned}
Ee^{i(t_1 Y_N^{(1)} + t_2 Y_N^{(2)})} &= Ee^{it_1(X_1^{(1)}+..+X_N^{(1)})} e^{it_2(X_1^{(2)}+..+X_N^{(2)})} \\
&= (Ee^{it_1 X_1^{(1)}})^N (Ee^{it_2 X_1^{(2)}})^N \\
&= (Ee^{it_1 X_1^{(1)} + it_2 X_1^{(2)}})^N \\
&= (E(1 + it_1 X_1^{(1)} + it_2 X_1^{(2)} + \frac{i^2(t_1 X_1^{(1)} + t_2 X_1^{(2)})^2}{2} + o(\frac{1}{N})))^N \\
&= (1 + it_1 EX_1^{(1)} + it_2 EX_1^{(2)} - \\
&\quad - \frac{E(t_1^2 (X_1^{(1)})^2 + 2t_1 t_2 EX_1^{(1)} X_1^{(2)} + t_2^2 E(X_1^{(2)})^2}{2} + o(\frac{1}{N}))^N \\
&= \Big(1 + i \begin{pmatrix} EX_1^{(1)} & EX_1^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} - \\
&\quad - \frac{1}{2} \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} E(X_1^{(1)})^2 & EX_1^{(1)} X_1^{(2)} \\ EX_1^{(2)} X_1^{(1)} & E(X_1^{(2)})^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix} + o(\frac{1}{N})\Big)^N.
\end{aligned}$$

Parodysime, kad ši charakteristinė funkcija , kai $N \to \infty$, asimtotiškai artėja į Gauso charakteristinę funkciją.

Turime

$X_N^{(1)}$	$\sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}$	$\sigma_2^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}$	$\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}$
P	p^*	q^*	$1 - p^* - q^*$

$X_N^{(2)}$	$\sigma_1^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}$	$\sigma_2^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}$	$\sigma_3^{(2)}\sqrt{\frac{T}{N}}$
P	p^*	q^*	$1 - p^* - q^*$

Ieškosime $EX_N^{(1)}$:

$$\begin{aligned} EX_N^{(1)} &= \sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}p^* + \sigma_2^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}q^* + \sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}(1-p^*-q^*) \\ &= (\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)})\sqrt{\frac{T}{N}}p^* + (\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})\sqrt{\frac{T}{N}}q^* + \sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}. \end{aligned}$$

Žinome,

$$(1+a_N^{(1)})p^* + (1+b_N^{(1)})q^* + (1+c_N^{(1)})(1-p^*-q^*) = 1 + r_N,$$
$$(a_N^{(1)} - c_N^{(1)})p^* + (b_N^{(1)} - c_N^{(1)})q^* = r_N - c_N^{(1)}.$$

Pasinaudojame (3.8) lygtimis:

$$(1+r_N)(e^{\sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - e^{\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1)p^* + (1+r_N)(e^{\sigma_2^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} - 1 - e^{\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1)q^* =$$
$$= r_N - (1+r_N)e^{\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}}} + 1.$$

Padalijame abi puses iš $1 + r_N$:

$$(1 + \sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{(\sigma_1^{(1)})^2 T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) - 1 - \sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_3^{(1)})^2 T}{2N} -$$
$$-o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}))p^* + (1 + \sigma_2^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} + \frac{(\sigma_2^{(1)})^2 T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}) - 1 - \sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_3^{(1)})^2 T}{2N} -$$
$$-o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}))q^* = 1 - 1 - \sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}} - \frac{(\sigma_3^{(1)})^2 T}{2N} - o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}),$$
$$\sqrt{\frac{T}{N}}((\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)})p^* + (\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})q^* + \sigma_3^{(1)}) = -((\sigma_1^{(1)})^2 - (\sigma_3^{(1)})^2)\frac{T}{2N}p^* - ((\sigma_2^{(1)})^2 -$$
$$-(\sigma_3^{(1)})^2)\frac{T}{2N}q^* - (\sigma_3^{(1)})^2\frac{T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}).$$

Gauname:

$$EX_N^{(1)} = \big(((\sigma_3^{(1)})^2 - (\sigma_1^{(1)})^2)p^* + ((\sigma_3^{(1)})^2 - (\sigma_1^{(1)})^2)q^* - (\sigma_3^{(1)})^2\big)\frac{T}{2N} + o(\frac{1}{N^{\frac{3}{2}}}).$$

Pasinaudoję (3.10) ir (3.11) lygtimis, gauname:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} N\cdot EX_N^{(1)} &= \Big(\frac{((\sigma_3^{(1)})^2-(\sigma_1^{(1)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)}-\sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}+ \\
&+\frac{((\sigma_1^{(1)})^2-(\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)}-\sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}-(\sigma_3^{(1)})^2\Big)\frac{T}{2} \\
&= \Big(\frac{((\sigma_3^{(1)})^2-(\sigma_1^{(1)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)}-\sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)}+\sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}- \\
&-(\sigma_3^{(1)})^2\Big)\frac{T}{2}.
\end{aligned}$$

Analogiškai gauname:

$$\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} N\cdot EX_N^{(2)} &= \Big(\frac{((\sigma_3^{(2)})^2-(\sigma_1^{(2)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)}-\sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}+ \\
&+\frac{((\sigma_1^{(1)})^2-(\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)}-\sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}- \\
&-(\sigma_3^{(2)})^2\Big)\frac{T}{2}.
\end{aligned}$$

Skaičiuojame $E(X_N^{(1)})^2$:

$$\begin{aligned}
E(X_N^{(1)})^2 &= (\sigma_1^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}})^2p^*+(\sigma_2^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}})^2q^*+(\sigma_3^{(1)}\sqrt{\frac{T}{N}})^2(1-p^*-q^*) \\
&= ((\sigma_1^{(1)})^2-(\sigma_3^{(1)})^2)p^*+((\sigma_2^{(1)})^2-(\sigma_3^{(1)})^2)q^*+(\sigma_3^{(1)})^2)\frac{T}{N},
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} N\cdot E(X_N^{(1)})^2 &= \Big(\frac{((\sigma_1^{(1)})^2-(\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)}-\sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}+ \\
&\quad +\frac{((\sigma_2^{(1)})^2-(\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)}-\sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}- \\
&\quad -(\sigma_3^{(1)})^2\Big)T \\
&= \Big(\frac{((\sigma_1^{(1)})^2-(\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)}-\sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}+ \\
&\quad +\frac{((\sigma_2^{(1)})^2-(\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)}-\sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}- \\
&\quad -(\sigma_3^{(2)})^2\Big)T.
\end{aligned}
$$

Analogiškai gauname:

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} N\cdot E(X_N^{(2)})^2 &= \Big(\frac{((\sigma_1^{(2)})^2-(\sigma_3^{(2)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)}-\sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}+ \\
&\quad +\frac{((\sigma_2^{(2)})^2-(\sigma_3^{(2)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)}-\sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}- \\
&\quad -(\sigma_3^{(2)})^2\Big)T.
\end{aligned}
$$

$X_N^{(1)}, X_N^{(2)}$ yra nepriklausomi, todėl $EX_N^{(1)}X_N^{(2)} = EX_N^{(1)}EX_N^{(2)} = EX_N^{(2)}EX_N^{(1)}$.
Skaičiuojame $\lim\limits_{N\to\infty} N\cdot EX_N^{(1)}EX_N^{(2)}$:

$$
\begin{aligned}
\lim_{N\to\infty} N\cdot EX_N^{(1)}EX_N^{(2)} &= \lim_{N\to\infty} N\cdot\Big(((\sigma_3^{(1)})^2-(\sigma_1^{(1)})^2)p^*+((\sigma_3^{(1)})^2-(\sigma_1^{(1)})^2)q^*- \\
&\quad -(\sigma_3^{(1)})^2\Big)\Big(((\sigma_3^{(2)})^2-(\sigma_1^{(2)})^2)p^*+((\sigma_3^{(2)})^2-(\sigma_1^{(2)})^2)q^*- \\
&\quad -(\sigma_3^{(2)})^2\Big)\frac{T}{N^2}+o(\frac{1}{N^{\frac{5}{2}}}) \\
&= 0
\end{aligned}
$$

ir

$$
\lim_{N\to\infty} N\cdot EX_N^{(2)}EX_N^{(1)} = 0.
$$

Taip pat

$$\lim_{N\to\infty} N(EX_N^{(1)})^2 = \lim_{N\to\infty} N(EX_N^{(2)})^2 = 0.$$

Gauname:

$$\lim_{N\to\infty} Ee^{i(t_1 Y_N^{(1)} + t_2 Y_N^{(2)})} = e^{itA - \frac{1}{2}(Rt,t)}, \tag{3.12}$$

kur

$$tA = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix},$$

$$(Rt,t) = \begin{pmatrix} t_1 & t_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} r_{11} & r_{12} \\ r_{21} & r_{22} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ t_2 \end{pmatrix}$$

ir

$$\mu^{(1)} = \lim_{N\to\infty} N \cdot EX_N^{(1)},$$

$$\mu^{(2)} = \lim_{N\to\infty} N \cdot EX_N^{(2)},$$

$$\begin{aligned} r_{11} &= \lim_{N\to\infty} N \cdot \mathrm{cov}(X_N^{(1)}, X_N^{(1)}) \\ &= \lim_{N\to\infty} N \cdot (E(X_N^{(1)})^2 - (EX_N^{(1)})^2) \\ &= \lim_{N\to\infty} N \cdot E(X_N^{(1)})^2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_{22} &= \lim_{N\to\infty} N \cdot \mathrm{cov}(X_N^{(2)}, X_N^{(2)}) \\ &= \lim_{N\to\infty} N \cdot (E(X_N^{(2)})^2 - (EX_N^{(2)})^2) \\ &= \lim_{N\to\infty} N \cdot E(X_N^{(2)})^2, \end{aligned}$$

$$r_{12} = r_{21} = 0.$$

Dešinioji (3.12) lygybės pusė yra Gauso atsistiktinio vektoriaus su vidurkių matrica A ir kovariacijų matrica R $= (r_{ij})_{1\le i,j\le 2}$, kur $r_{ij} = \mathrm{cov}(X_N^{(i)}, X_N^{(j)})$, charakteringoji funkcija.

$\square$

3.4.1 TEOREMA. *Tarkime, rinka aprašoma trinominiu dviejų akcijų $S_N^{(1)}$, $S_N^{(2)}$ modeliu, o parametrai $r = r_N$, $a^{(1)} = a_N^{(1)}$, $b^{(1)} = b_N^{(1)}$, $c^{(1)} = c_N^{(1)}$, $a^{(2)} = a_N^{(2)}$, $b^{(2)} = b_N^{(2)}$, $c^{(2)} = c_N^{(2)}$ apibrėžti (3.7) ir (3.8) lygybėmis. Sakykime, $P_0^{(N)}$ žymi europietiškojo pardavimo opciono su įvykdymo kaina K ir įvykdymo data N vertę nuliniu momentu. Tada*

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{d_1} (Ke^{-RT} e^{-\frac{1}{2}y_2^2} \Phi(d_2(y_2)) -$$

$$-\varepsilon_1 S_0^{(1)} e^{\mu^{(1)} - \frac{1}{2}y_2^2 + \frac{1}{2}r_{11}^2} \Phi(d_2(y_2) + r_{11}) - \varepsilon_2 S_0^{(2)} e^{-\frac{1}{2}(y_2 - r_{22})^2 + \frac{1}{2}r_{22}^2 + \mu^{(2)}} \Phi(d_2(y_2)))dy_2,$$

čia $\Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{u^2}{2}} du$ *- standartinio normaliojo dydžio pasiskirstymo funkcija,*

$$d_1 = \frac{1}{r_{22}}(lnK - ln(\varepsilon_2 S_0^{(2)}) - RT - \mu^{(2)}),$$

$$d_2(y_2) = \frac{1}{r_{11}}(ln(Ke^{-RT} - \varepsilon_2 S_0^{(2)} e^{r_{22}y_2 + \mu^{(2)}}) - ln(\varepsilon_1 S_0^{(1)}) - \mu^{(1)}),$$

$$\mu^{(1)} = \Big(\frac{((\sigma_3^{(1)})^2 - (\sigma_1^{(1)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)} + \sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} - (\sigma_3^{(1)})^2\Big)\frac{T}{2},$$

$$\begin{aligned}\mu^{(2)} \ = \ & \Big(\frac{((\sigma_3^{(2)})^2 - (\sigma_1^{(2)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} + \\ & + \frac{((\sigma_1^{(1)})^2 - (\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} - (\sigma_3^{(2)})^2\Big)\frac{T}{2},\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}r_{11} \ = \ & \Big(\frac{((\sigma_1^{(1)})^2 - (\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)} - \sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} + \\ & + \frac{((\sigma_2^{(1)})^2 - (\sigma_3^{(1)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)} - \sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)} - \sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)} - \sigma_3^{(2)}) + (\sigma_2^{(2)} - \sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)} - \sigma_1^{(1)})} - (\sigma_3^{(2)})^2\Big)T,\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
r_{22} &= \Big(\frac{((\sigma_1^{(2)})^2-(\sigma_3^{(2)})^2)(\sigma_3^{(1)}\sigma_2^{(2)}-\sigma_2^{(1)}\sigma_3^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}+\\
&\quad+\frac{((\sigma_2^{(2)})^2-(\sigma_3^{(2)})^2)(\sigma_3^{(2)}\sigma_1^{(1)}-\sigma_3^{(1)}\sigma_1^{(2)})}{(\sigma_2^{(1)}-\sigma_3^{(1)})(\sigma_1^{(2)}-\sigma_3^{(2)})+(\sigma_2^{(2)}-\sigma_3^{(2)})(\sigma_3^{(1)}-\sigma_1^{(1)})}-(\sigma_3^{(2)})^2\Big)T.
\end{aligned}
$$

Įrodymas. Pažymėkime:

$$X^{(1)} := ln\frac{\rho_n^{(1)}}{1+r_N},$$

$$X^{(2)} := ln\frac{\rho_n^{(2)}}{1+r_N},$$

$(n=1,...,N)$. Čia atsitiktinis dydis $\rho_n^{(1)}=\rho_n^{(1)}(N)$ įgyja reikšmes $1+a_N^{(1)}$, $1+b_N^{(1)}$, $1+c_N^{(1)}$, o atsitiktinis dydis $\rho_n^{(2)}=\rho_n^{(2)}(N)$ įgyja reikšmes $1+a_N^{(2)}$, $1+b_N^{(2)}$, $1+c_N^{(2)}$. Tada galime rašyti:

$$
\begin{aligned}
P_0^{(N)} &= (1+r_N)^{-N}E^*(K-V_N)^+\\
&= (1+r_N)^{-N}E^*(K-\varepsilon_1 S_N^{(1)}-\varepsilon_2 S_N^{(2)})^+,
\end{aligned}
\tag{3.13}
$$

čia $S_N=\varepsilon_1 S_N^{(1)}+\varepsilon_2 S_N^{(2)}$.

(3.13) lygybę galime užrašyti taip:

$$
\begin{aligned}
P_0^{(N)} &= E^*\big((1+r_N)^{-N}K-\varepsilon_1 S_0^{(1)}\prod_{n=1}^{N}\frac{\rho_n^{(1)}}{1+r_N}-\varepsilon_2 S_0^{(2)}\prod_{n=1}^{N}\frac{\rho_n^{(2)}}{1+r_N}\big)^+\\
&= E^*\big((1+r_N)^{-N}K-\varepsilon_1 S_0^{(1)}e^{Y_N^{(1)}}-\varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{Y_N^{(2)}}\big)^+,
\end{aligned}
$$

kur $Y_N^{(1)}=X_1^{(1)}+X_2^{(1)}+...+X_N^{(1)}$, $Y_N^{(2)}=X_1^{(2)}+X_2^{(2)}+...+X_N^{(2)}$.

Pasinaudoję įrodyta 3.4.1 lema, turime

$$\begin{pmatrix}Y_N^{(1)}\\ Y_N^{(2)}\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{pmatrix}Y^{(1)}\\ Y^{(2)}\end{pmatrix}\sim N(\mu,\Sigma),$$

kur $\mu = \begin{pmatrix} \mu^{(1)} & \mu^{(2)} \end{pmatrix}$ - vidurkių vektorius, $\Sigma = \begin{pmatrix} r_{11} & 0 \\ 0 & r_{22} \end{pmatrix}$ - kovariacijų matrica, kai $N \to \infty$. Čia „$\Rightarrow$" žymi atsitiktinių dydžių konvergavimą pagal pasiskirstymą.

Pažymėkime

$$g(x_1, x_2) := (Ke^{-RT} - \varepsilon_1 S_0^{(1)} e^{x_1} - \varepsilon_2 S_0^{(2)} e^{x_2})^+.$$

Funkcija $g(x_1, x_2) : \mathbb{R}^2 \to [0, \infty)$ yra aprėžta ($g(x_1, x_2) \leq Ke^{-RT}$) ir tolydi. Be to

$$\mid P_0^{(N)} - E^* g(Y_N^{(1)}, Y_N^{(2)}) \mid \leq K \mid (1 + r_N)^{-N} - e^{-RT} \mid \to 0$$

Turime

$$\lim_{N\to\infty} P_0^{(N)} = \lim_{N\to\infty} E^* g(Y_N^{(1)}, Y_N^{(2)}) = \iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2) F_{Y^{(1)}, Y^{(2)}}(dx_1 dx_2),$$

kur $F_{Y^{(1)}, Y^{(2)}}$ žymi atsitiktinio vektoriaus $\begin{pmatrix} Y^{(1)} \\ Y^{(2)} \end{pmatrix}$ skirstinį.

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2) F_{Y^{(1)} Y^{(2)}}(dx_1 dx_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi r_{11} r_{22}} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} (Ke^{-RT} - \varepsilon_1 S_0^{(1)} e^{x_1} - \varepsilon_2 S_0^{(2)} e^{x_2})^+ e^{-\frac{1}{2}(\frac{(x_1-\mu^{(1)})^2}{r_{11}^2} + \frac{(x_2-\mu^{(2)})^2}{r_{22}^2})} dx_1 dx_2.$$

Pažymime:

$$\frac{x_1 - \mu^{(1)}}{r_{11}} := y_1,$$

$$x_1 = r_{11} y_1 + \mu^{(1)},$$

$$dx_1 = r_{11} dy_1.$$

$$\frac{x_2 - \mu^{(2)}}{r_{22}} := y_2,$$

$$x_2 = r_{22} y_1 + \mu^{(2)},$$

$$dx_2 = r_{22}dy_2.$$

Įvedę pažymėjimus, gauname:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x_1, x_2)F_{Y^{(1)}Y^{(2)}}(dx_1dx_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_{-\infty}^{+\infty}(Ke^{-RT} - \varepsilon_1 S_0^{(1)}e^{r_{11}y_1+\mu^{(1)}} - \varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{r_{22}y_1+\mu^{(2)}})^+ e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)}dy_1dy_2.$$

Kad galėtume atskliausti, turi būti tenkinama sąlyga:

$$Ke^{-RT} > \varepsilon_1 S_0^{(1)}e^{r_{11}y_1+\mu^{(1)}} + \varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}}.$$

Sprendžiame šią nelygybę:

$$-\varepsilon_1 S_0^{(1)}e^{r_{11}y_1+\mu^{(1)}} > -Ke^{-RT} + \varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}},$$

$$e^{r_{11}y_1+\mu^{(1)}} < \frac{K}{\varepsilon_1 S_0^{(1)}}e^{-RT} - \frac{\varepsilon_2 S_0^{(2)}}{\varepsilon_1 S_0^{(1)}}e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}}.$$

Abi puses logaritmuojame:

$$r_{11}y_1 + \mu^{(1)} < ln(Ke^{-RT} - \varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}}) - ln(\varepsilon_1 S_0^{(1)}),$$

$$y_1 < \frac{1}{r_{11}}(ln(Ke^{-RT} - \varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}}) - ln(\varepsilon_1 S_0^{(1)}) - \mu^{(1)}).$$

Logaritmo apibrėžimo sritis yra $(0, +\infty)$, todėl gauname dar vieną nelygybę:

$$Ke^{-RT} > \varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}}.$$

Sprendžiame ją:

$$e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}} < \frac{Ke^{-RT}}{\varepsilon_2 S_0^{(2)}},$$

vėl logaritmuojame:

$$r_{22}y_2 + \mu^{(2)} < ln(\frac{K}{\varepsilon_2 S_0^{(2)}}) - RT$$

ir gauname:

$$y_2 < \frac{1}{r_{22}}(lnK - ln(\varepsilon_2 S_0^{(2)}) - RT - \mu^{(2)}).$$

Įveskime pažymėjimus:

$$d_2(y_2) := \frac{1}{r_{11}}(ln(Ke^{-RT} - \varepsilon_2 S_0^{(2)} e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}}) - ln(\varepsilon_1 S_0^{(1)}) - \mu^{(1)}),$$

$$d_1 := \frac{1}{r_{22}}(lnK - ln(\varepsilon_2 S_0^{(2)}) - RT - \mu^{(2)}).$$

Tada:

$$\iint\limits_{\mathbb{R}^2} g(x_1,x_2)F_{Y^{(1)}Y^{(2)}}(dx_1dx_2) =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{d_1}\int\limits_{-\infty}^{d_2(y_2)}(Ke^{-RT} - \varepsilon_1 S_0^{(1)}e^{r_{11}y_1+\mu^{(1)}} - \varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{r_{22}y_2+\mu^{(2)}})e^{-\frac{1}{2}(y_1^2+y_2^2)}dy_1dy_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\infty}^{d_1}(Ke^{-RT}e^{-\frac{1}{2}y_2^2}(\int\limits_{-\infty}^{d_2(y_2)}e^{-\frac{1}{2}y_1^2}dy_1) - \varepsilon_1 S_0^{(1)}e^{\mu^{(1)}-\frac{1}{2}y_2^2}(\int\limits_{-\infty}^{d_2(y_2)}e^{-\frac{1}{2}(y_1-r_{11})^2+\frac{1}{2}r_{11}^2}dy_1) -$$

$$-\varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{-\frac{1}{2}(y_2-r_{22})^2+\frac{1}{2}r_{22}^2+\mu^{(2)}}(\int\limits_{-\infty}^{d_2(y_2)}e^{-\frac{1}{2}y_1^2}dy_1))dy_2 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\int\limits_{-\infty}^{d_1}(Ke^{-RT}e^{-\frac{1}{2}y_2^2}\Phi(d_2(y_2)) -$$

$$-\varepsilon_1 S_0^{(1)}e^{\mu^{(1)}-\frac{1}{2}y_2^2+\frac{1}{2}r_{11}^2}\Phi(d_2(y_2)+r_{11}) - \varepsilon_2 S_0^{(2)}e^{-\frac{1}{2}(y_2-r_{22})^2+\frac{1}{2}r_{22}^2+\mu^{(2)}}\Phi(d_2(y_2)))dy_2.$$

$\square$

4 Išvados

Darbe nagrinėjamas finansų rinkoje apibrėžtas trinominis modelis. Pirmoje dalyje nagrinėjamas diskretaus laiko modelis vienos ir dviejų akcijų atvejais. Vienos akcijos atveju gauta, kad taip apibrėžta rinka nėra pilna. Nusakytos sąlygos arbitražo strategijai neegzistuoti. Dviejų akcijų atveju parodoma, kad atitinkama rinka yra pilna, sukonstruojama rizikos apsidraudimo (hedžingo) strategija. Taip pat abiem atvejais rastos pasirinkimo sandorio vertės skaičiavimo formulės.

Antroje dalyje nagrinėjamas tolydaus laiko trinominis modelis dviejų akcijų atveju. Išspręstas pagrindinis šio darbo uždavinys - ribinė pasirinkimo sandorio vertės skaičiavimo formulė, kuri vadinama Bleko-Šoulso formule.

5 Literatūra

1. R. Leipus (1999) *Finansų rinkos*, Vilniaus universiteto leidykla, Vilnius.

2. F. E. Benth (2003) *Option theory with stochastic analysis*, Springer.

3. R. Leipus, R. Norvaiša (2003) Finansų rinkos teorijų pagrindai, *Pinigų studijos*, Nr. 4, p. 5-28.

4. R. Leipus, R. Norvaiša (2004) Finansų rinkos teorijų taikymas, *Pinigų studijos*, Nr. 1, p. 31-53.

5. J. Kruopis (1993) *Matematinė statistika*, Mokslo ir enciklopedijų leidykla, Vilnius.

6. J. Kubilius (1980) *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*, Leidykla „Mokslas", Vilnius.

6 Summary

In this paper we generalize the binomial model of John C. Cox, Stephen A. Ross and Marc Rubinstein to the trinomial case. We study the existence of the equivalent martingale measure, completeness of the market and construct the hedging strategy. Finally, we derive the option pricing formula and provide its continuous time approximation.