

Šiaulių universitetas
Matematikos informatikos fakultetas
Matematikos katedra

Liutauras Brenčys

**Puasono lygties sprendimas naudojantis
šaltinio apibendrintomis
hiperbolinėmis funkcijomis**

Magistro darbas

Darbo vadovas: Doc. M.Stakvilevičius

Šiauliai, 2011

Turinys

Puasono ir Laplaso lygtys.....	3
Darbo tikslas:.....	4
Uždavinio sprendimo metodo esmė:	4
Atvirkštinis apibendrintojo potencialo Puasono lygties sprendimas.....	4
Tiesioginis apibendrintojo potencialo Puasono lygties uždavinys.....	6
Puasono lygties sprendimas, išreiškiant sąlygoje duotą krūvį per apbendrintus krūvio tankius.....	6
Puasono lygties sprendimo MATHCAD programa ir programos naudojimo instrukcija.....	7
Metodo aprobavimas, kai Puasono lygties sprendinys žinomas	12
MATHCAD'inė potencialo radimo programa	13
Išvados.....	16
Naudota literatūra:	17

Puasono ir Laplaso lygtys

Šios lygtys dažniausiai sutinkamos sprendžiant elektrostatikos uždavinius, todėl šių lygčių įvedimą ir aprašymą demonstruojame elektrostatikos dėsniais [8].

Dekarto koordinatinių sistemoje divergencija ir gradientas išreiškiami taip:

$$\operatorname{div} \vec{E} = \frac{\partial E_x}{\partial x} + \frac{\partial E_y}{\partial y} + \frac{\partial E_z}{\partial z}, \quad (2)$$

$$\operatorname{grad} \varphi = \frac{\partial \varphi}{\partial x} \vec{i} + \frac{\partial \varphi}{\partial y} \vec{j} + \frac{\partial \varphi}{\partial z} \vec{k}. \quad (3)$$

Čia $\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}$ -vienetiniai atitinkamų koordinatinių ašių vektoriai (ortai). Toje sistemoje

$$\vec{E} = E_x \vec{i} + E_y \vec{j} + E_z \vec{k}. \quad (4)$$

Pagal (3) ir (4) nustatome, kad

$$E_x = -\frac{\partial \varphi}{\partial x}, E_y = -\frac{\partial \varphi}{\partial y}, E_z = -\frac{\partial \varphi}{\partial z}.$$

Įrašę tai į (1.49), gauname:

$$\operatorname{div} \vec{E} = -\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}. \quad (5)$$

Įrašydami (5) į Kulono dėsnio diferencialinę išraišką, gauname:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = -\frac{\rho}{\epsilon_0} \quad (6)$$

Ši lygybė vadinama Puasono (*S. D. Poisson*) lygtimi. Jis sieja potencialą ir tūrinį krūvio tankį tame pačiame erdvės taške [4]. Išsprendę (6) lygtį, galime surasti elektrostatinį potencialą j .

Tose erdvės srityse, kuriose nėra krūvių, (6) tampa:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (7)$$

(7) vadinama Laplaso (*P. S. Laplace*) lygtimi.

Darbo tikslas:

Išspręsti Puasono lygtį $\Delta u = -\rho$ išreiškiant šaltinio tankį apibendrintomis hiperbolinėmis funkcijomis.

Uždavinio sprendimo metodo esmė:

Paprastai Puasono ir Laplaso lygtys yra sprendžiamos tinklelio metodais [2] arba įvairiais iteraciniais procesais [3], [5].

Yra žinomas fundamentalusis Puasono lygties sprendinys [4] $u = \frac{q}{r}$, kai yra vienas taškinis krūvis. Tačiau šis sprendinys ne visur yra harmoninė funkcija, nes kai $r \rightarrow 0$, $u \rightarrow \infty$, o fizikiniu požiūriu begalinis potencialas u yra negalimas. Todėl mes siūlome ieškoti tokio sprendinio

$$u = \frac{q \cdot th\left(\frac{r}{h}\right)}{4\pi r},$$

kuriam, kai $r \rightarrow 0$, $u = \frac{q}{4\pi h}$. O kai $r \rightarrow \infty$, $th\left(\frac{r}{h}\right) \rightarrow 1$ ir tada sprendinys $u \rightarrow \frac{q}{4\pi r}$, tai yra ir reikšmė, žinomą dar iš mokyklinių laikų. Būtinai nustatyti, koks turėtų būti krūvio tankis, kad Puasono lygties sprendinys būtų $u = \frac{q \cdot th\left(\frac{r}{h}\right)}{4\pi r}$. Šį sprendinį vėliau vadinsime apibendrintuoju.

Atvirkštinis apibendrintojo potencialo Puasono lygties sprendimas.

Duotas potencialas $u = \frac{q \cdot th\left(\frac{r}{h}\right)}{4\pi r}$. Reikia rasti tą šaltinio krūvio tankį ρ , kuriam Puasono lygties

$$\Delta u = -\rho$$

sprendinys yra $u = \frac{q \cdot th\left(\frac{r}{h}\right)}{4\pi r}$.

Puasono lygtis sferinėmis koordinatėmis

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2 \sin \Theta} \frac{\partial}{\partial \Theta} \left(\sin \Theta \frac{\partial u}{\partial \Theta} \right) + \frac{1}{r^2 \sin^2 \Theta} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} = -\rho,$$

kai yra sferinė simetrija, supaprastėja:

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = -\rho.$$

Mums reikia surasti tokį ρ , kuriam sprendinys būtų:

$$u = \frac{th\left(\frac{r}{h}\right)}{4\pi r}$$

su savybėmis

$$u_0 = \lim_{r \rightarrow 0} \frac{th\left(\frac{r}{h}\right)}{4\pi r} = \frac{1}{4\pi h},$$

kadangi

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{th\left(\frac{r}{h}\right)}{\frac{r}{h}} = 1.$$

Sprendžiame sferinėmis koordinatėmis sferinės simetrijos atveju:

$$\frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{d\Phi}{dr} \right) = -\rho$$

Randame išvestines ir įrašome jas į Puasono lygtį:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dr} &= \frac{\frac{r}{h \cdot ch^2 \frac{r}{h}} r - th \frac{r}{h}}{4\pi r^2} = \frac{1}{4\pi} \frac{\frac{r}{h \cdot ch^2 \frac{r}{h}} - th \frac{r}{h}}{r^2} \\ r^2 \frac{du}{dr} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ r \left(1 - th^2 \frac{r}{h} \right) - th \frac{r}{h} \right\} \\ \frac{1}{4\pi} \frac{d}{dr} \left\{ \frac{r}{h} - r \cdot th^2 \frac{r}{h} - th \frac{r}{h} \right\} &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{h^2} - th^2 \frac{r}{h^2} - 2 \frac{r}{h} th^2 \frac{r}{h^2} \left(1 - th^2 \frac{r}{h^2} \right) - \frac{1}{h^2} \left(1 - th^2 \frac{r}{h^2} \right) \right\} = \\ &= \frac{1}{4\pi} \left\{ \frac{1}{h^2} - \frac{1}{h^2} th^2 \frac{r}{h^2} - \frac{2r}{h} th \frac{r}{h^2} + \frac{2r}{h^2} th^3 \frac{r}{h^2} - \frac{1}{h^2} + \frac{1}{h^2} th^2 \frac{r}{h^2} \right\} = \frac{-1}{4\pi} \frac{2r}{h} th \frac{r}{h^2} \left(1 - th^2 \frac{r}{h} \right) = \frac{r}{2\pi h^2} \frac{th \frac{r}{h}}{ch^2 \frac{r}{h}}. \end{aligned}$$

Gavome, kad krūvio tankis ρ yra $\frac{th \frac{r}{h}}{2\pi h^2 r \cdot ch^2 \frac{r}{h}}$:

Taigi, jeigu krūvio tankis

$$\rho = \frac{th \frac{r}{h}}{2\pi h^2 r \cdot ch^2 \frac{r}{h}},$$

tai Puasono lygties sprendinys yra

$$u = \frac{q \cdot th \left(\frac{r}{h} \right)}{4\pi r}.$$

$$\rho = \frac{q \cdot th \left(\frac{r}{h} \right)}{2\pi h^2 \cdot ch^2 \frac{r}{h}} \cdot (8)$$

Parodysime, kad visas (8) formule išreikštas krūvis yra $Q = q$

$$Q = \int_0^\infty \int_0^{2\pi} \int_0^\pi r^2 \sin \Theta \rho d\varphi d\Theta dr$$

$$\int_0^{2\pi} \int_0^\pi \sin \Theta d\Theta d\varphi = 4\pi$$

$$Q = 4\pi \int_0^\infty \rho r^2 dr.$$

Integralą skaičiuosime integruodami dalimis:

$$\begin{aligned} Q &= \frac{4\pi q}{2\pi h^2} \int_0^\infty \frac{r \cdot th \left(\frac{r}{h} \right) dr}{ch^2 \frac{r}{h}} = \frac{4\pi}{2\pi h^2} \int_0^\infty \frac{r \cdot \sin \frac{r}{h}}{ch^3 \frac{r}{h}} dr = \frac{2}{h^2} \int_0^\infty hr \frac{d \left(ch \frac{r}{h} \right)}{ch^3 \frac{r}{h}} = \frac{2}{h^2} \int_0^\infty r \frac{d \left(ch \frac{r}{h} \right)}{ch^3 \frac{r}{h}} dr = \\ &= \frac{2}{h^2} \left(-\frac{h}{2} \right) \left\{ \frac{r}{ch^2 \frac{r}{h}} \Big|_0^\infty - \int_0^\infty \frac{dr}{ch^2 \frac{r}{h}} \right\} = \frac{1}{h} \int_0^\infty \frac{dr}{ch^2 \frac{r}{h}} = h \cdot th \frac{r}{h} \Big|_0^\infty = 1 \end{aligned}$$

$$4\pi \int_0^\infty \frac{q \cdot th \left(\frac{r}{h} \right)}{h^2 2\pi \cdot ch^2 \left(\frac{r}{h} \right)} r^2 dr = q$$

Jei $\rho = \frac{q \cdot th \left(\frac{r}{h} \right)}{2\pi h^2 \cdot ch^2 \frac{r}{h}}$, tai visas krūvis $Q = q$

Tiesioginis apibendrintojo potencialo Puasono lygties uždavinys

Duotas sferiškai simetriškas apibendrintas krūvio tankis $\rho = \frac{q \cdot th\left(\frac{r}{h}\right)}{2\pi h^2 \cdot ch^2 \frac{r}{h}}$, reikia rasti potencialą

u - lygties

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} \left(r^2 \frac{\partial u}{\partial r} \right) = \frac{-qth \frac{r}{h}}{2\pi h^2 r \cdot ch^2 \frac{r}{h}}$$

sprendinį. Atliekame veiksmus:

$$\frac{d}{dr} \left(r^2 \frac{du}{dr} \right) = -\frac{qr \cdot sh \frac{r}{h}}{2\pi h^2 ch^3 \frac{r}{h}}$$

$$r^2 \frac{du}{dr} = -\int_r^\infty \frac{qr \cdot sh \frac{r}{h}}{2\pi h^2 ch^3 \frac{r}{h}} dr = -h \int_r^\infty \frac{qr \cdot d\left(ch \frac{r}{h}\right)}{2\pi h^2 ch^3 \frac{r}{h}} = \left\{ \begin{array}{l} u = r; \quad dv = \frac{d\left(ch \frac{r}{h}\right)}{ch^3 \frac{r}{h}} \\ du = dr; \quad v = \frac{-2}{ch^2 \frac{r}{h}} \end{array} \right\} = \frac{q}{2\pi h ch^2 \frac{r}{h}} + 2h^2 - 2h^2 th \frac{r}{h}$$

$$\frac{du}{dr} = \left(\frac{q}{\pi h ch^2 \frac{r}{h}} + 2h^2 - 2h^2 th \frac{r}{h} \right) r^2$$

$$u = \frac{q \cdot th \frac{r}{h}}{4\pi r}$$

Puasono lygties sprendimas, išreiškiant sąlygoje duotą krūvį per apibendrintus krūvio tankius.

Žinodami, kaip išreikšti duotoje srityje nusakytą šaltinio funkciją $-\rho$ (krūvio tankį) per elementariusius apibendrintus „rutuliukų“ krūvius, kiekvienam tokiam „rutuliukui“ panaudojamas atskiras Puasono lygties sprendinys, o bendrą potencialą sudarys visų tų „rutuliukų“ potencialų suma. Jeigu žinotume, kaip Puasono lygties krūvio tankis išreiškiamas per „rutuliukų“ krūvius, tai pasinaudoję kiekvieno „rutuliuko“ sprendiniu galėtume rasti bendrą potencialo sprendinį. Taigi Puasono lygties uždavinys iš esmės suvedamas į kitą algebrinį uždavinį: duotąjį krūvio tankį išreikšti per „rutuliukų“ krūvių tankius – jų vietas, krūvių didumus q ir „rutuliukų“ efektyvius spindulius h [6].

Duotą sąlygoje krūvio tankį ρ išreiškiame per „rutuliukų“ krūvių koeficientus c :

$$\rho(x, y, z) = \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1+l+K1 \cdot L1 \cdot m} \cdot \rho(x, y, z, X_k, Y_l, Z_m, h)),$$

kur c - neapibrėžti koeficientai - „rutuliukų“ krūvių didumai, o ρ - Puasono lygties dešinėsios pusės šaltinio funkcija duotose taškuose [7].

Taip uždavinys suvedamas į tiesinę lygčių sistemą koeficientams c („rutuliukų“ krūviams) duotose taškuose surasti. Tuo tikslu buvo sudarytas MATHCAD programa.

Puasono lygties sprendimo MATHCAD programa ir programos naudojimo instrukcija

Šaltinio funkcija, kai "rutuliuko" centras yra koordinatinių centre:

$$\rho'(r, h) := \frac{\tanh\left(\frac{r}{h}\right) \cdot (r \neq 0)}{2\pi \cdot h^2 \cdot r \cdot \cosh\left(\frac{r}{h}\right)^2} + \frac{r = 0}{2\pi \cdot h^3}$$

Potencialo išraiška:

$$\phi(r, h) := \frac{\tanh\left(\frac{r}{h}\right)}{4\pi \cdot r}$$

Elektros lauko stiprio išraiška:

$$E'(r, h) := \frac{\sinh\left(\frac{2r}{h}\right) - \frac{2r}{h}}{4\pi \cdot h^2 \cdot r^2 \cdot \cosh\left(\frac{r}{h}\right)^2}$$

Spindulio, jungiančio tašką r su tašku r' , formulė :

$$r(x, y, z, x', y', z') := \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

Potencialas, kurį sukuria "rutuliukas", kurio centras yra taške r' , o krūvis vienetinis:

$$\phi(x, y, z, x', y', z', h) := \frac{\tanh\left(\frac{r(x, y, z, x', y', z')}{h}\right) \cdot (r(x, y, z, x', y', z') \neq 0)}{4\pi \cdot r(x, y, z, x', y', z')} + \frac{r(x, y, z, x', y', z') = 0}{4\pi \cdot h}$$

"Rutuliuko", kurio centras taške r' , krūvio tankio pasiskirstymas:

$$\rho(x, y, z, x', y', z', h) := \frac{\tanh\left(\frac{r(x, y, z, x', y', z')}{h}\right) \cdot (r(x, y, z, x', y', z') \neq 0)}{2\pi \cdot h^2 \cdot r(x, y, z, x', y', z') \cdot \cosh\left(\frac{r(x, y, z, x', y', z')}{h}\right)^2} + \frac{r(x, y, z, x', y', z') = 0}{2\pi \cdot h^3}$$

$$K_{\text{AAA}} := 9 \quad L_{\text{AAA}} := K \quad M := K$$

"Rutuliukų" vienos ašies kryptimi skaičius:

$$K1_{\text{AAAA}} := K + 1 \quad L1 := L + 1 \quad M1 := M + 1$$

Intervalo ribos:

$$X1 := 0 \quad X2 := 6 \quad Y1_{\text{AAAA}} := 0 \quad Y2 := X2 \quad Z1 := 0 \quad Z2 := X2$$

Intervalo centro koordinatė s :

$$Xv := 0.5(X1 + X2) \quad Yv := 0.5(Y1 + Y2) \quad Zv := 0.5(Z1 + Z2)$$

$$X_v = 3 \quad Y_v = 3 \quad Z_v = 3$$

Intervalų pločiai:

$$X_i := X_2 - X_1 \quad Y_i := Y_2 - Y_1 \quad Z_i := Z_2 - Z_1$$

Puasono lygties šaltinio funkcija Dekarto koordinatė mis (čia $H=0.09$):

$$f(x, y, z) := \left(\cos\left(\frac{4x}{X_i}\right) + \sin\left(\frac{3y}{Y_i}\right) \right) \cdot \cos\left(\frac{2z}{Z_i}\right) \cdot \exp\left[\frac{(x - X_v)^2 + (y - Y_v)^2 + (z - Z_v)^2}{-HX_i^2} \right] \cdot 28$$

"Rutuliukų" efektyvieji spinduliai:

$$p_x := \frac{0.94 X_i}{K} \quad p_y := \frac{0.94 Y_i}{L} \quad p_z := \frac{0.94 Z_i}{M}$$

"Rutuliukų" centrų indeksai:

$$k := 0..K \quad l := 0..L \quad m := 0..M$$

"Rutuliukų" centrų koordinatės:

$$X_k := X_v + (k - 0.5K) \cdot p_x \quad Y_l := Y_v + (l - 0.5L) \cdot p_y \quad Z_m := Z_v + (m - 0.5M) \cdot p_z$$

"Rutuliukų" efektyviojo spindulio parametras:

$$h := 2.2$$

Taškų, kuriuose turi būti patenkinta tankio per "rutuliukus" funkcijos reikšmė:

$$N := 2000$$

Taškų indeksai:

$$n := 0..N$$

Taškų koordinatės, nusakomos atsitiktiniais skaičiais:

$$x_n := X_1 + \text{rnd}(X_i) \quad y_n := Y_1 + \text{rnd}(Y_i) \quad z_n := Z_1 + \text{rnd}(Z_i)$$

Algebrinės lygčių sistemos, patenkinančios Puasono lygtį, kairiosios pusės matrica:

$$A_{n, k+K1 \cdot l+L1 \cdot m} := \rho(x_n, y_n, z_n, X_k, Y_l, Z_m, h)$$

Algebrinės lygčių sistemos, patenkinančios Puasono lygtį, dešinėsios pusės matrica:

$$F_n := f(x_n, y_n, z_n)$$

Algebrinės lygčių sistemos sprendimo komanda:

$$c := \text{solve}(A, F)$$

Skirtumas tarp didžiausios ir mažiausios neapibrėžtų koeficientų reikšmės:

$$\max(c) - \min(c) = 7.359 \times 10^4$$

Sprendimo tikslumo nusakymui generuojamos naujos atsitiktinės koordinatės:

$$x'_n := \text{rnd}(X_i) \quad y'_n := \text{rnd}(X_i) \quad z'_n := \text{rnd}(X_i)$$

Šaltinio funkcijos reikšmė s naujuose taškuose:

$$F'_n := f(x'_n, y'_n, z'_n)$$

Šaltinio krūvio tankis, kurį nusako sprendinys: aproksimuotas krūvio tankis išreikštas per "rutuliukų" su duotomis koordinatėmis, krūvius. Koeficientai c yra tų krūvių didumai:

$$\text{ro}(x, y, z) := \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1 \cdot l+K1 \cdot L1 \cdot m} \cdot \rho(x, y, z, X_k, Y_l, Z_m, h))$$

Krūvių tankių reikšmės konkrečiuose atsitiktiniuose taškuose, gautos aproksimavimu:

$$R'_n := \text{ro}(x'_n, y'_n, z'_n)$$

Aproksimavimo paklaidos konkrečiuose taškuose:

$$Kl := R' - F'$$

Aproksimavimo paklaidų standartinis nuokrypis:

$$\sigma := \text{stdev}(Kl) \quad \sigma = 1.889 \times 10^{-4}$$

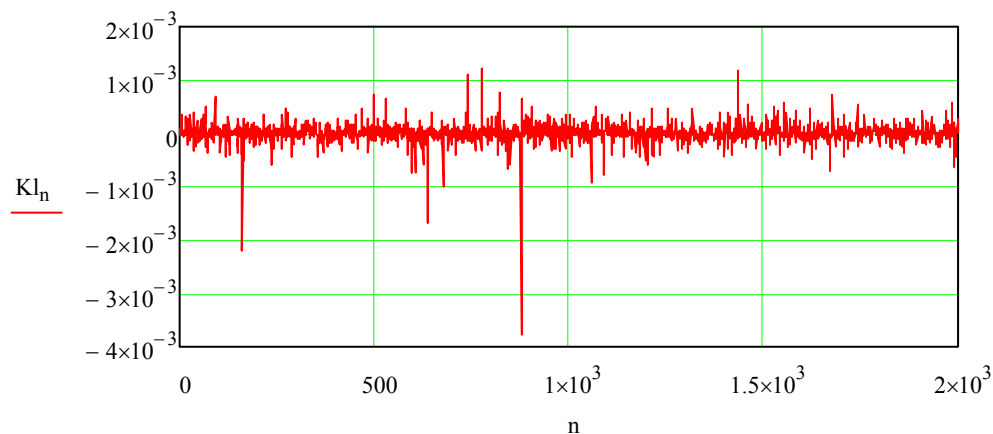
Skirtumas tarp didžiausios ir mažiausios paklaidos

$$Mm := \max(Kl) - \min(Kl) \quad Mm = 4.991 \times 10^{-3}$$

Krūvio tankio vidurkis:

$$\text{mean}(F) = 0.97$$

Paklaidų priklausomybės nuo eilės numerio n grafikas:



Potencialas konkrečiuose taškuose su koordinatėmis (x,y,z):

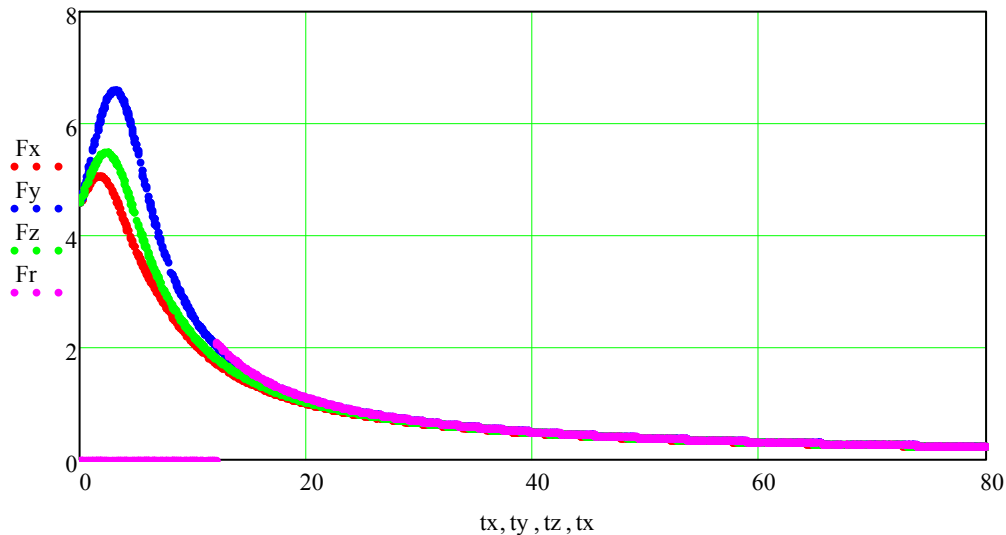
$$f_i(x,y,z) := \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1 \cdot l+K1 \cdot K1 \cdot m} \cdot \phi(x,y,z, X_k, Y_l, Z_m, h))$$

Bendras krūvis:

$$q := \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1 \cdot l+K1 \cdot K1 \cdot m}) \quad q = 238.253$$

Programos dalis potencialo priklausomybei nuo koordinatijų pavaizduoti:

$$\begin{aligned} rm &:= 80 & tx_n &:= \text{rnd}(rm) & ty_n &:= \text{rnd}(rm) & tz_n &:= \text{rnd}(rm) & Fr_n &:= \frac{q \cdot (tx_n > 2X2)}{4\pi \cdot (tx_n - Xv)} \\ Fx_n &:= f_i(tx_n, 0, 0) & Fy_n &:= f_i(0, ty_n, 0) & Fz_n &:= f_i(0, 0, tz_n) \end{aligned}$$



Puasono lygties sprendinio (potencialo) priklausomybė s nuo atstumo iki centro pagal atskiras koordinatijų ašis grafikas: Fx ašies x kryptimi, Fy ašies y kryptimi... ir Fr priklausomybė nuo atstumo iki centro.

Programa krūvio tankio reljefiniam planui pavaizduoti:

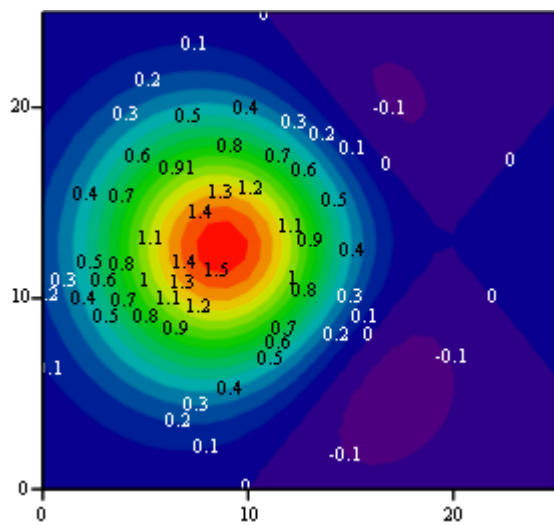
$$J := 25$$

$$jx := 0..J \quad jy := 0..J \quad jz := 0..J$$

$$x_{j_x}^i := X1 + Xi \cdot \frac{jx}{J} \quad y_{j_y}^i := Y1 + Yi \cdot \frac{jy}{J} \quad z_{j_z}^i := Z1 + Zi \cdot \frac{jz}{J}$$

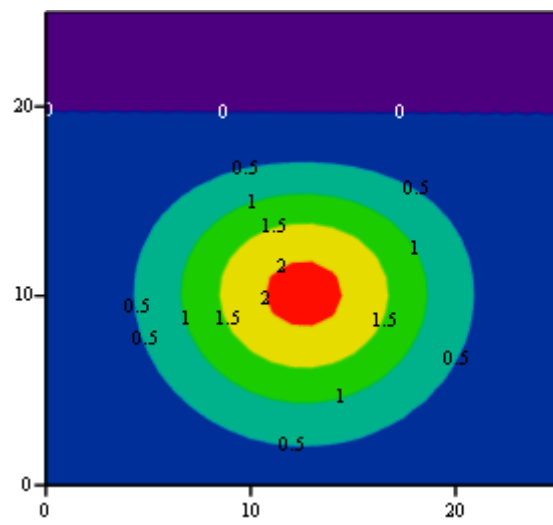
$$f_{xy_{j_x, j_y}} := f(x_{j_x}^i, y_{j_y}^i, 0) \quad f_{yz_{j_y, j_z}} := f(0, y_{j_y}^i, z_{j_z}^i) \quad f_{zx_{j_z, j_x}} := f(z_{j_z}^i, 0, x_{j_x}^i)$$

Krūvio tankio išraiškos per „rutuliukų“ tankius plokštumoje xy grafikas



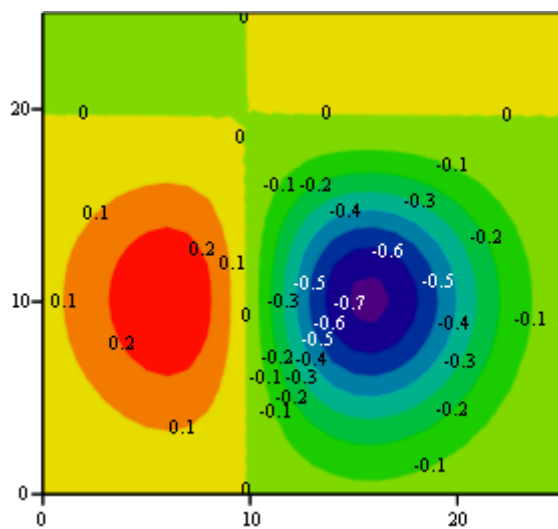
fx_y

Krūvio tankio išraiškos per „rutuliukų“ tankius plokštumoje yz grafikas



fy_z

Krūvio tankio nusakymo paklaidų grafikas plokštumoje zx grafikas



fz_x

Metodo aprobavimas, kai Puasono lygties sprendinys žinomas

Pasirenkame tokią centrinio krūvio tankio ρ išraišką

$$\rho(r) = \frac{Q'}{R^3} \left(\frac{r^4}{R^4} - 2 \frac{r^2}{R^2} + 1 \right) = \frac{Q'}{R^3} \left(\frac{r^2}{R^2} - 1 \right)^2,$$

kurioje Q' proporcingumo koeficientas, R tas atstumas nuo centro, nuo kurio krūvio tankis lygus nuliui. Šitokią krūvio tankį pasirenkame todėl, kad juo sukurtą potencialą galima apskaičiuoti teoriškai, kas jį vėliau palygintume su mūsų metodu apskaičiuotu potencialu.

Visą krūvį, kuris yra r spindulio rutulyje, gauname integruodami krūvio tankį sferinėmis koordinatėmis.

$$Q(r) = \frac{4\pi Q'}{R^3} \left(\frac{r^7}{7R^4} - \frac{2r^5}{5R^2} + \frac{r^3}{3} \right) = \frac{4\pi Q'}{R^3 105R^3} \left(15 \frac{r^7}{R^4} - 42 \frac{r^5}{R^2} + 35r^3 \right)$$

Visas krūvis

$$Q_R = \frac{32\pi Q'}{105}, \quad Q' = 105$$

Elektros lauko stipris

$$E(r) = \frac{Q}{4\pi r^2} = \frac{Q'}{105R^3} \left(15 \frac{r^5}{R^4} - 42 \frac{r^3}{R^2} + 35r \right)$$

Elektros lauko stipris ant R spindulio sferos paviršiaus

$$E_R = \frac{Q'}{105R^3} \cdot 8R = \frac{8Q'}{105R^2}$$

Potencialas ant sferos paviršiaus

$$\varphi_R = \frac{8Q'}{105R}$$

Potencialą sferos viduje gauname integruodami elektros lauko stiprį

$$\varphi(r) = -\int \frac{Q'}{105R^3} \left(15 \frac{r^5}{R^4} - 42 \frac{r^3}{R^2} + 35r \right) dr$$

Suintegravus

$$\varphi(r) = \frac{-Q'}{105R^3} \left(\frac{15 \cdot r^5}{6 \cdot R^4} - 42 \frac{r^3}{R^2} + 35r^2 \right) + C$$

$$\varphi(r) = \frac{-Q'}{105R^3} \left(\frac{5}{2} \frac{r^5}{R^4} - \frac{21}{2} \frac{r^3}{R^2} + \frac{35}{2} r^2 \right) + C$$

$$\varphi(r) = \frac{-Q'}{210R^3} \left(\frac{5 \cdot r^5}{R^4} - 21 \frac{r^3}{R^2} + 35r^2 \right) + C$$

Konstantos C reikšmę nustatome iš kraštinės sąlygos

$$\varphi_R = -\frac{Q'}{210R} (5 - 21 + 35) + C = \frac{19Q'}{210R} + C = \frac{8Q'}{105R}$$

$$C = \frac{35Q'}{210R} = \frac{Q'}{6R}$$

Potencialas sferos viduje

$$\varphi(r) = \frac{Q'}{6R} - \frac{Q'}{210R^3} \left(\frac{5 \cdot r^5}{R^4} - 21 \frac{r^3}{R^2} + 35r \right)$$

Potencialas sferos išorėje

$$\varphi = \frac{Q'}{6r}$$

MATHCAD'inė potencialo radimo programa

Potencialo ieškomas sprendinys:

$$f_i(x, y, z) := \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1 \cdot l+K1 \cdot L1 \cdot m} \cdot \phi(x, y, z, X_k, Y_l, Z_m, h))$$

Sprendinio reikšmės konkrečiuose taškuose:

$$\Phi'_n := f_i(x'_n, y'_n, z'_n)$$

$$r'_n := r(x'_n, y'_n, z'_n, X, Y, Z)$$

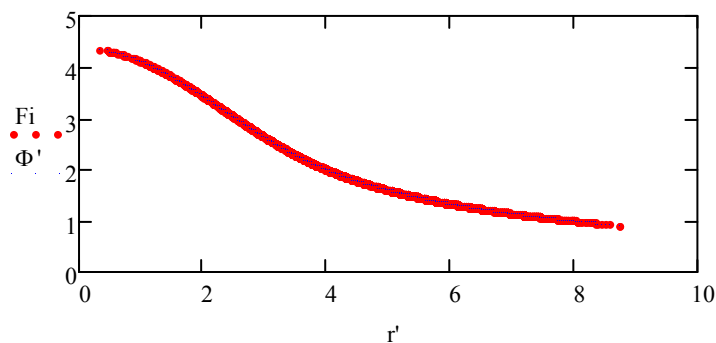
Tikrosios (analizinio sprendinio) reikšmės:

$$\Phi(t) := \left[\frac{t^2 \cdot Q'}{-H^3 210} \left[5 \cdot \left(\frac{t}{H} \right)^4 - 21 \cdot \left(\frac{t}{H} \right)^2 + 35 \right] + \frac{Q'}{6 \cdot H} \right] \cdot (t < H) + \frac{8}{t} \cdot (t \geq H)$$

Reikšmės s konkrečiuose (kontroliniuose taškuose) tikrosios potencialo reikšmės s:

$$F_i := \Phi(r'_n)$$

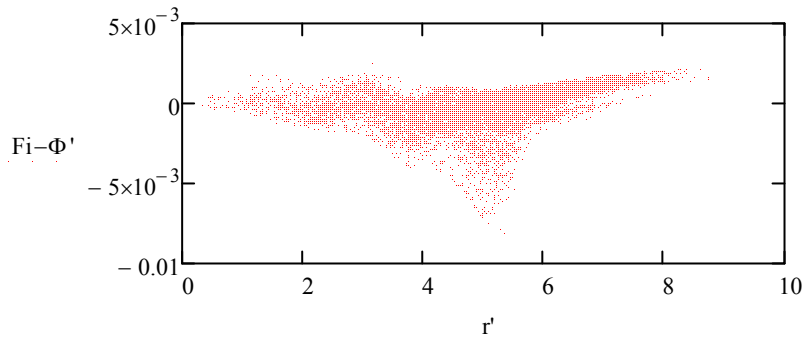
Grafikas vaizduoja tikrąsias ir mūsų sprendinio reikšmes konkrečiuose taškuose:



$$\sigma := \text{stdev}(\Phi' - F_i)$$

$$\sigma = 1.248 \times 10^{-3}$$

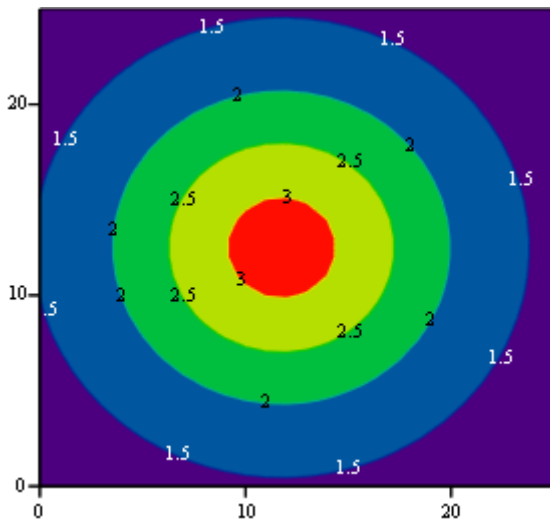
Sprendinio paklaidų grafikas:



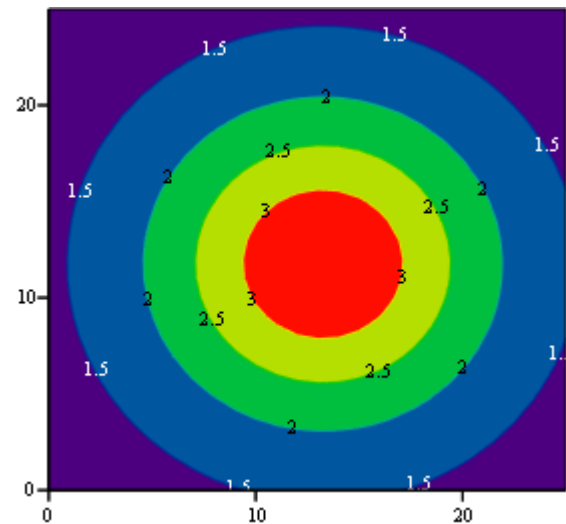
Tikrosios potencialo reikšmės s pjūviuose:

$$\Phi_{xy_{j_x, j_y}} := \Phi \left[\sqrt{(x_{j_x} - X')^2 + (y_{j_y} - Y')^2 + (s - Z')^2} \right]$$

$$\Phi_{zx_{j_z, j_x}} := \Phi \left[\sqrt{(z_{j_z} - Z')^2 + (x_{j_x} - X')^2 + (s - Y')^2} \right]$$



Φ_{xy}

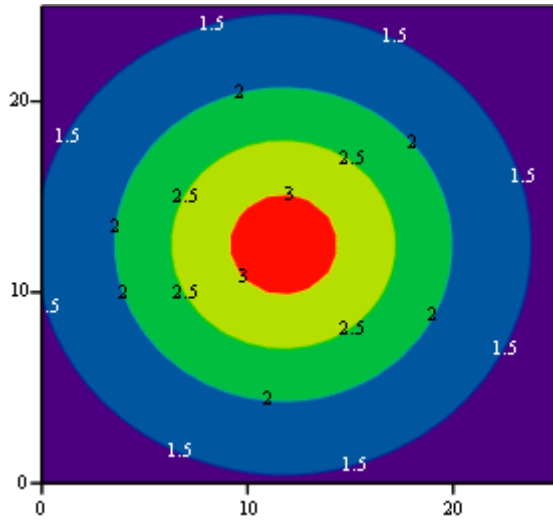


Φ_{zx}

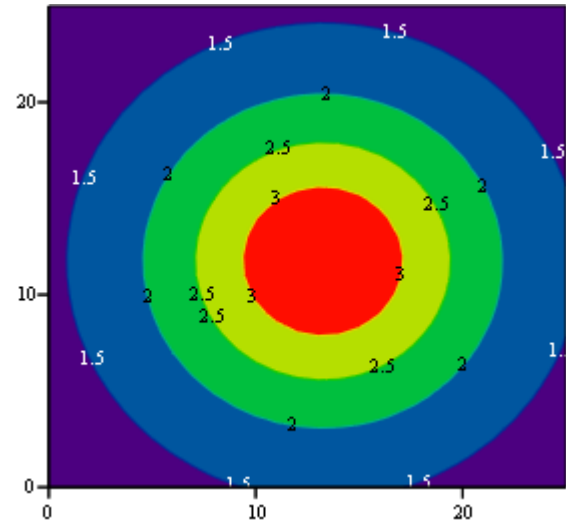
potencialo reikšmės, gautos per apibendrintas funkcijas, pjuvniuose:

$$\Phi'_{xy_{jx,jy}} := f_{i_{jx,jy}}(x_{jx}, y_{jy}, s)$$

$$\Phi'_{zx_{jz,jx}} := f_{i_{jz,jx}}(x_{jx}, s, z_{jz})$$



Φ'_{xy}

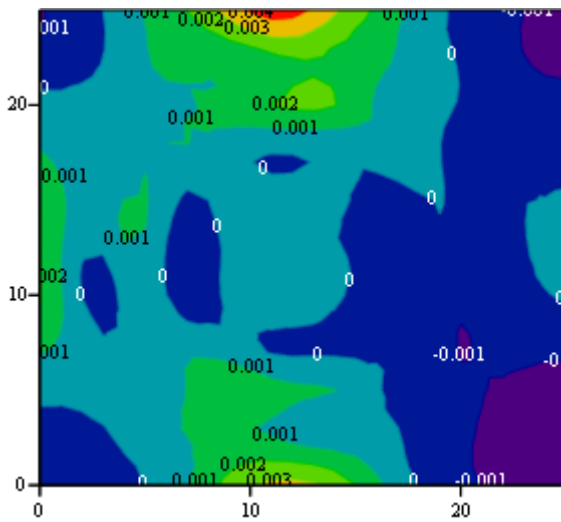


Φ'_{zx}

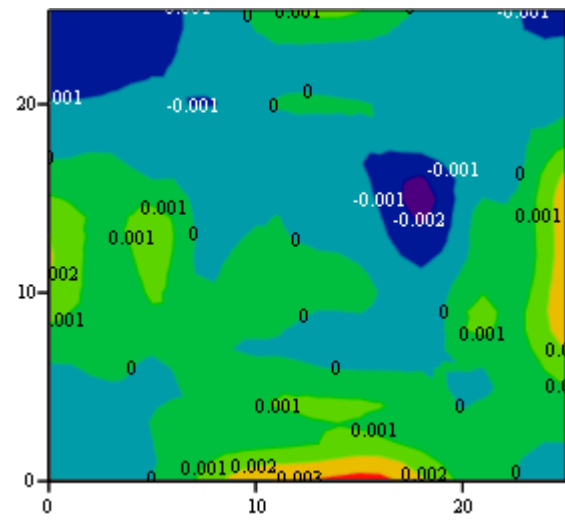
Skirtumas tarp apskaičiuotųjų ir tikrųjų potencialo reikšmių :

$$K_{xy} := \Phi'_{xy} - \Phi_{xy}$$

$$K_{zx} := \Phi'_{zx} - \Phi_{zx}$$



K_{xy}



K_{zx}

Išvados

Sudarytas Puasono lygties sprendimo per „rutuliukų“ potencialus algoritmas. Šiuo metodu Puasono lygties sprendimo uždavinys suvedamas į tiesinių algebrinių lygčių sistemos sprendimą. Sudaryta ir išbandyta matematinis paketu MATHCAD to sprendimo programa. Palyginus šiuo metodu gautus sprendinius su tais, kurie gaunami analiziškai, įvertintas mūsų gautų sprendinių tikslumas. Paklaida yra maždaug 10^{-3} laipsnio. Šį sprendimo būdą galima panaudoti realiams fizikiniams potencialams paskaičiuoti, turint galvoje realų potencialą su kuriuo realūs krūviai.

Naudota literatūra:

1. Branštein I.N., *Spravačnik po matematike*, Maskva, 1986
2. ČIEGIS R., *Diferencialinių lygčių skaitiniai sprendimo metodai*. Vilnius, 2003.
3. KVEDARAS. B., SAPAGOVAS M., *Skaičiavimo metodai*. Vilnius, 1974.
4. PAULAUSKAS V., *Matematinės fizikos lygtys*. Vilnius, 1974.
5. PLUKAS K., *Skaitiniai metodai ir algoritmai*. Kaunas, 2001.
6. STONKUTĖ., *A. Kintamo difuzijos koeficiento parabolinių lygčių sprendimas skaitiniais metodais* (magistrinis darbas). Šiauliai, 2010.
7. ŠUKUTIENĖ-BALTRUŠAITYTĖ D., *Didelių masyvu matavimo rezultatų aproksimavimas Kvazi-Gauso funkcijomis* (magistrinis darbas). Šiauliai, 2008.
8. MATULIS A., *Elektrodinamika*. Vilnius, 2001.

Brenčys L. Puasono lygties sprendimas naudojantis šaltinio apibendrintomis hiperbolinės funkcijomis / Matematikos ir informatikos magistro baigiamasis darbas. Vadovas Dr. M.Stakvilevičius. Šiauliai: Šiaulių Universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, 2011.- 25p.

SANTRAUKA

Sudarytas Puasono lygties sprendimo per „rutuliukų“ potencialus algoritmas. Šiuo metodu Puasono lygties sprendimo uždavinys suvedamas į tiesinių algebrinių lygčių sistemos sprendimą. Sudaryta ir išbandyta matematinis paketu MATHCAD to sprendimo programa. Palyginti gauti sprendiniai su tais, kurie gaunami analiziškai, įvertintas gautų sprendinių tikslumas. Ši sprendimo būdą galima panaudoti realiams fizikiniams potencialams paskaičiuoti, turint galvoje realų potencialą su kuriuo realūs krūviai.

Priedai

$$r(x, y, z, x', y', z') := \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2}$$

$$\phi(x, y, z, x', y', z', h) := \frac{\tanh\left(\frac{r(x, y, z, x', y', z')}{h}\right) \cdot (r(x, y, z, x', y', z') \neq 0)}{4\pi \cdot r(x, y, z, x', y', z')} + \frac{r(x, y, z, x', y', z') = 0}{4\pi \cdot h}$$

$$\rho(x, y, z, x', y', z', h) := \frac{\tanh\left(\frac{r(x, y, z, x', y', z')}{h}\right) \cdot (r(x, y, z, x', y', z') \neq 0)}{2\pi \cdot h^2 \cdot r(x, y, z, x', y', z') \cdot \cosh\left(\frac{r(x, y, z, x', y', z')}{h}\right)^2} + \frac{r(x, y, z, x', y', z') = 0}{2\pi \cdot h^3}$$

$$\begin{aligned} X1 &:= 0 & X2 &:= 10 & Xv &:= 0.5(X1 + X2) & Xi &:= X2 - X1 & Xv &= 5 & X' &:= 4.7 \\ Y1 &:= 0 & Y2 &:= 10 & Yv &:= 0.5(Y1 + Y2) & Yi &:= Y2 - Y1 & Yv &= 5 & Y' &:= 5.0 & H &:= 4 \\ Z1 &:= 0 & Z2 &:= 10 & Zv &:= 0.5(Z1 + Z2) & Zi &:= Z2 - Z1 & Zv &= 5 & Z' &:= 5.3 & Q' &:= 105 \end{aligned}$$

$$f(x, y, z) := \frac{Q'}{H^3} \cdot \left[\left(\frac{r(x, y, z, X', Y', Z')}{H} \right)^2 - 1 \right] \cdot (r(x, y, z, X', Y', Z') < H) \quad Q := 32\pi$$

$$\phi(x, y, z, X', Y', Z', H) := \frac{\tanh\left(\frac{r(x, y, z, X', Y', Z')}{H}\right) \cdot (r(x, y, z, X', Y', Z') \neq 0)}{4\pi \cdot r(x, y, z, X', Y', Z')} + \frac{r(x, y, z, X', Y', Z') = 0}{4\pi \cdot H}$$

$$K := 9 \quad K1 := K + 1 \quad px := \frac{v \cdot Xi}{K} \quad k := 0..K \quad X_k := Xv + (k - 0.5K) \cdot px \quad v := 0.9$$

$$L := K \quad L1 := L + 1 \quad py := \frac{v \cdot Yi}{L} \quad l := 0..L \quad Y_l := Yv + (l - 0.5L) \cdot py \quad h := 1.3$$

$$M := K \quad M1 := M + 1 \quad pz := \frac{v \cdot Zi}{M} \quad m := 0..M \quad Z_m := Zv + (m - 0.5M) \cdot pz$$

$$N := 1000 \quad n := 0..N \quad x_n := \text{rnd}(Xi) \quad y_n := \text{rnd}(Yi) \quad z_n := \text{rnd}(Zi)$$

$$A_{n, k+K1 \cdot l+K1 \cdot L1 \cdot m} := \rho(x_n, y_n, z_n, X_k, Y_l, Z_m, h) \quad A_{0, k+K1 \cdot l+K1 \cdot L1 \cdot m} := 1$$

$$F_n := f(x_n, y_n, z_n) \quad F_0 := Q \quad c := \text{lsolve}(A, F)$$

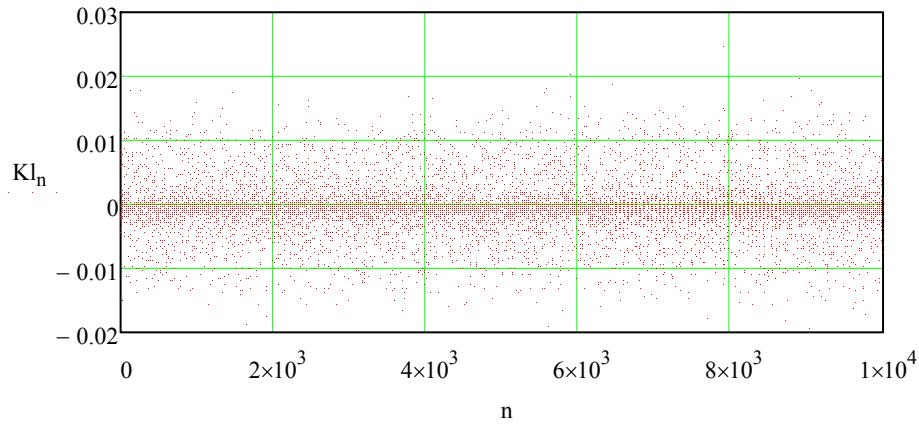
$$q := \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1 \cdot l+K1 \cdot L1 \cdot m}) \quad q = 100.53345 \quad Q = 100.53096$$

$$x'_n := \text{rnd}(Xi) \quad y'_n := \text{rnd}(Yi) \quad z'_n := \text{rnd}(Zi) \quad \max(c) - \min(c) = 4.831$$

$$F'_n := f(x'_n, y'_n, z'_n) \quad ro(x, y, z) := \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1 \cdot l+K1 \cdot L1 \cdot m} \cdot \rho(x, y, z, X_k, Y_l, Z_m, h))$$

$$R'_n := ro(x'_n, y'_n, z'_n)$$

$$KI := R' - F' \quad \text{stdev}(KI) = 4.492 \times 10^{-3} \quad \max(KI) - \min(KI) = 0.044 \quad \text{mean}(F) = 0.108$$



$$\underline{\underline{f}}i(x, y, z) := \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1 \cdot l + K1 \cdot K1 \cdot m} \cdot \phi(x, y, z, X_k, Y_l, Z_m, h))$$

$$\underline{\underline{s}} := 0.2 \cdot \text{FRAME} + 3$$

$$\Phi'_n := \underline{\underline{f}}i(x'_n, y'_n, z'_n)$$

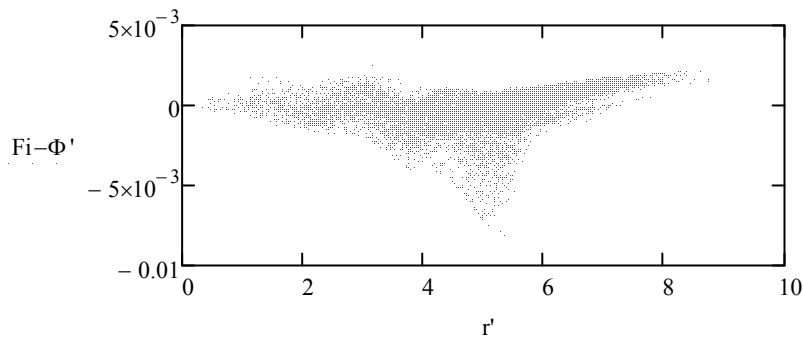
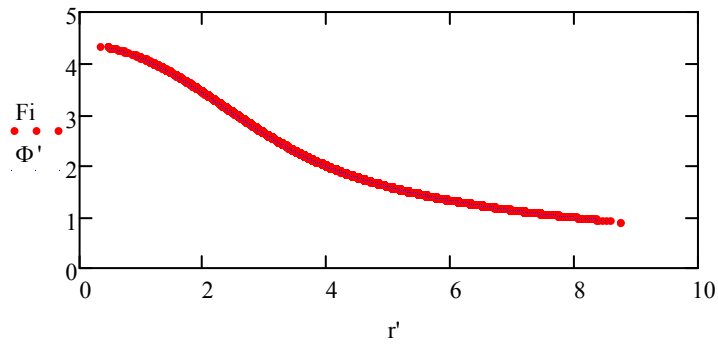
$$r'_n := r(x'_n, y'_n, z'_n, X', Y', Z')$$

$$\underline{\underline{\Phi}}(t) := \left[\frac{t^2 \cdot Q'}{-H^3 \cdot 210} \cdot \left[5 \cdot \left(\frac{t}{H} \right)^4 - 21 \cdot \left(\frac{t}{H} \right)^2 + 35 \right] + \frac{Q'}{6 \cdot H} \right] \cdot (t < H) + \frac{8}{t} \cdot (t \geq H)$$

$$F_i := \Phi(r'_n)$$

$$\sigma := \text{stdev}(\Phi' - F_i)$$

$$\sigma = 1.248 \times 10^{-3}$$



$$f_i(x, y, z) := \sum_{k=0}^K \sum_{l=0}^L \sum_{m=0}^M (c_{k+K1 \cdot l+K1 \cdot K1 \cdot m} \cdot \phi(x, y, z, X_k, Y_l, Z_m, h))$$

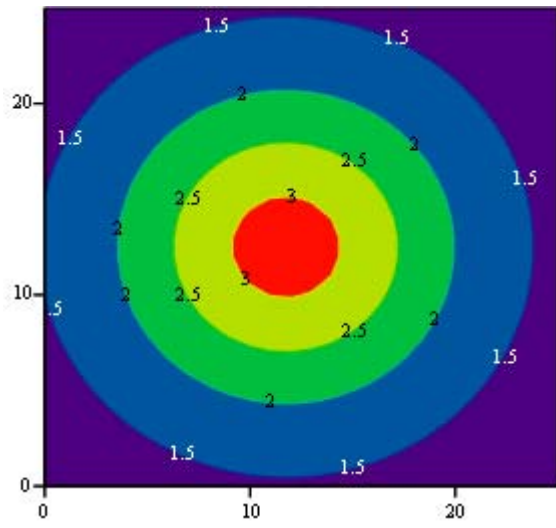
$$J := 25 \quad j_x := 0..J \quad j_y := 0..J \quad j_z := 0..J$$

$$x_{j_x} := X1 + X_i \frac{j_x}{J} \quad y_{j_y} := Y1 + Y_i \frac{j_y}{J} \quad z_{j_z} := Z1 + Z_i \frac{j_z}{J}$$

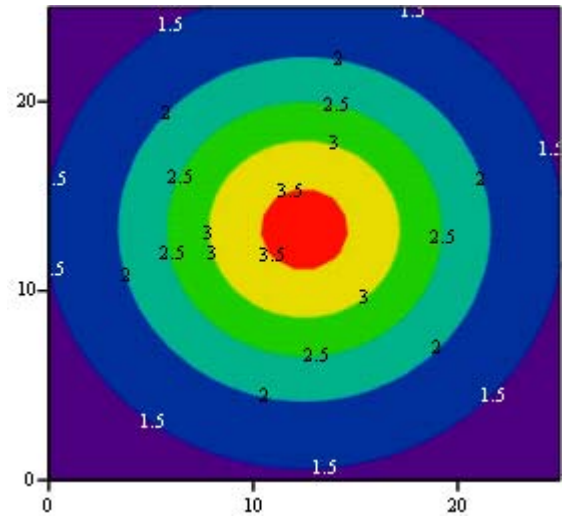
$$\Phi_{xy_{j_x, j_y}} := \Phi \left[\sqrt{(x_{j_x} - X)^2 + (y_{j_y} - Y)^2 + (s - Z)^2} \right]$$

$$\Phi_{yz_{j_y, j_z}} := \Phi \left[\sqrt{(z_{j_z} - Z)^2 + (y_{j_y} - Y)^2 + (s - X)^2} \right]$$

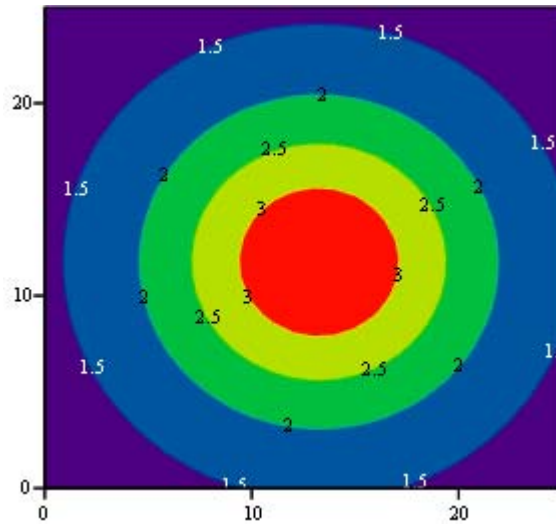
$$\Phi_{zx_{j_z, j_x}} := \Phi \left[\sqrt{(z_{j_z} - Z)^2 + (x_{j_x} - X)^2 + (s - Y)^2} \right]$$



Φ_{xy}



Φ_{yz}

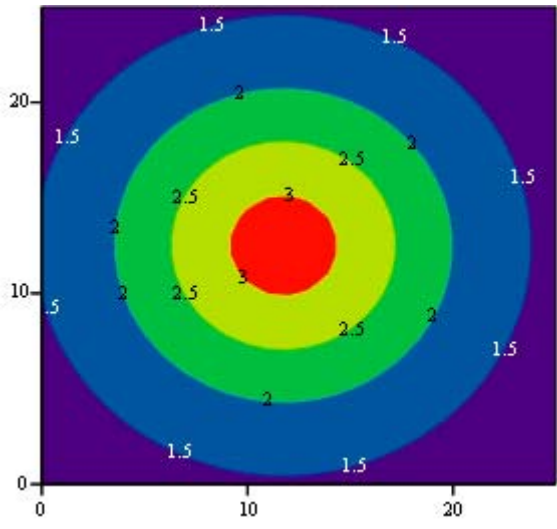


Φ_{zx}

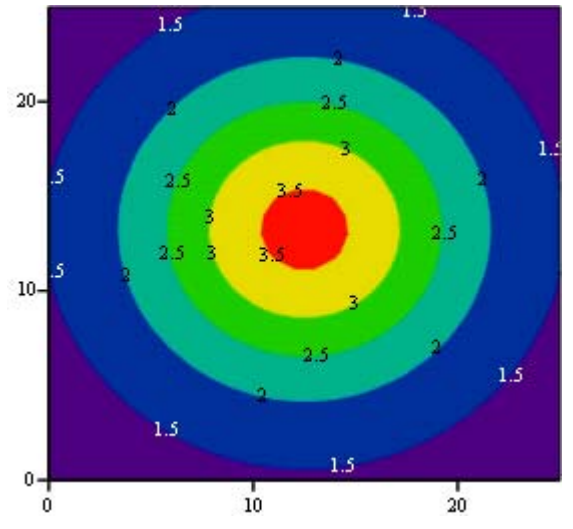
$$\Phi'_{xy, j_x, j_y} := f_i(x_{j_x}, y_{j_y}, s)$$

$$\Phi'_{yz, j_y, j_z} := f_i(s, y_{j_y}, z_{j_z})$$

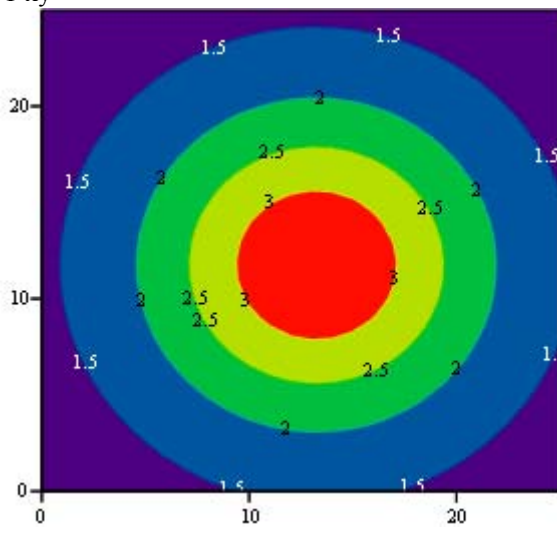
$$\Phi'_{zx, j_z, j_x} := f_i(x_{j_x}, s, z_{j_z})$$



Φ'_{xy}



Φ'_{yz}

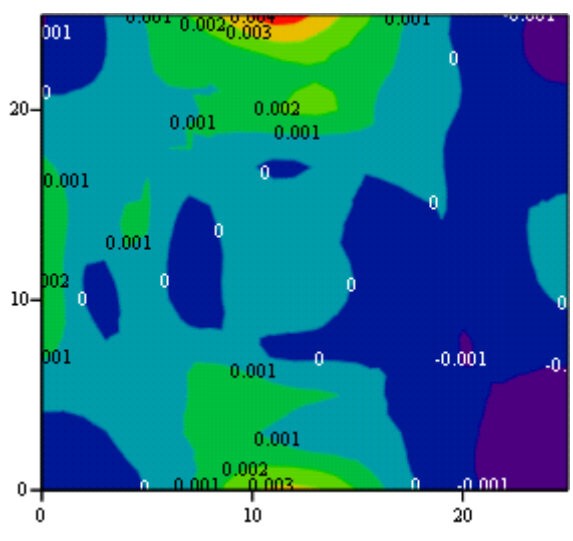


Φ'_{zx}

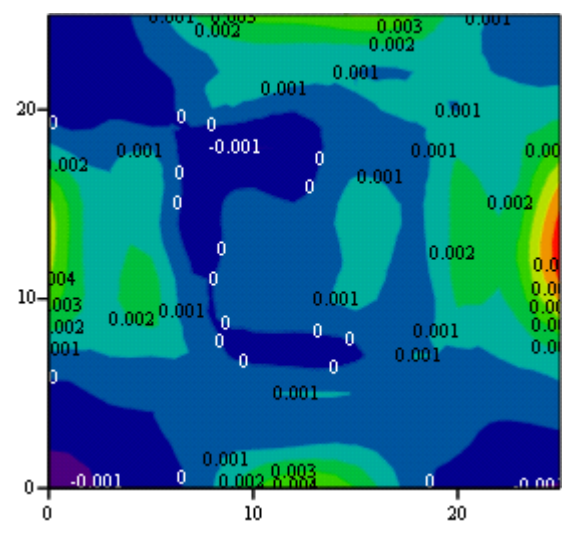
$K_{xy} := \Phi'_{xy} - \Phi_{xy}$

$K_{yz} := \Phi'_{yz} - \Phi_{yz}$

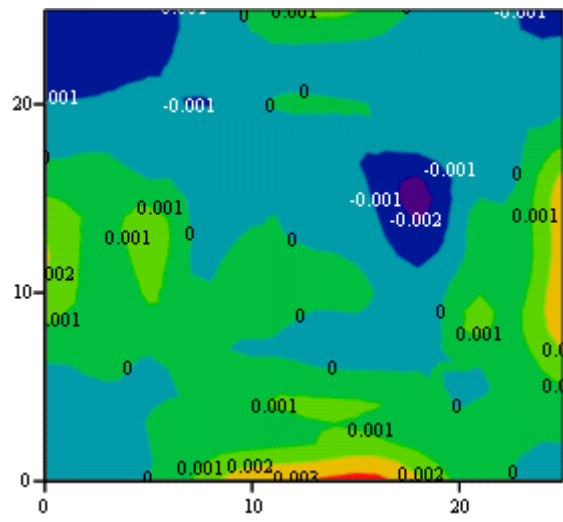
$K_{zx} := \Phi'_{zx} - \Phi_{zx}$



K_{xy}



K_{yz}



Kzx