ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Ugnė Tamašauskaitė

Sudėtinės funkcijos universalumas

Bakalauro darbas

Darbo vadovas

prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Šiauliai, 2013

Turinys

1. Įvadas 3

2. Tikimybių teorijos elementai 5

3. Funkcijos $F(\zeta(s))$ universalumas 8

4. Universality of one composite function 10

5. Literatūra 11

1. Įvadas

Viena iš įdomiausių ir žinomiausių funkcijų yra Rymano dzeta funkcija. Šią funkciją XVIII a. jau nagrinėjo vienas garsiausių matematikų L. Oileris (Euler), tačiau jis laikė, kad jos argumentas yra realus, visa šios funkcijos svarba ir nauda atsiskleidė tada, kai B. Rymanas (Riemann) ėmė ją nagrinėti, kaip kompleksinio kintamojo funkciją.

Tegul $s=\sigma+it$ - kompleksinis kintamasis. Tuomet pusplokštumėje $\sigma>1$ Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ yra apibrėžiama labai paprasta Dirichlė (Dirichlet) eilute

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s}.$$

Ši analizinių narių $\frac{1}{m^s}$ eilutė konverguoja tolygiai srityje $\sigma\geq 1+\varepsilon$ su kiekvienu $\varepsilon>0$, todėl funkcija $\zeta(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma>1$. Ši sritis nėra svarbi funkcijai $\zeta(s)$. Įvairiuose taikymuose, kaip pavyzdžiui pirminių skaičių pasiskirstymo tyrimuose, reikia žinoti funkcijos $\zeta(s)$ elgesį kairėje pusplokštumės $\sigma>1$ pusėje. Yra žinoma, kad funkcija $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s=1$, kuris yra paprastasis polius ir

$$\operatorname*{Res}_{s=1}\zeta(s)=1.$$

Kaip matėme funkcija $\zeta(s)$ yra apibrėžiama gana paprastai, tačiau nežiūrint to, apie ją dar daug ko nežinome. Pavyzdžiui, iki šiol neįrodyta ir nepaneigta yra garsioji Rymano hipotezė, tvirtinanti, kad visi funkcijos $\zeta(s)$ nuliai (s reikšmės, su kuriomis $\zeta(s)=0$) pusplokštumėje $\sigma>1$ guli kritinėje tiesėje $\sigma=\frac{1}{2}$. Šias ir kitas funkcijos $\zeta(s)$ savybes galima rasti [2] knygelėje.

Funkcija $\zeta(s)$ turi daug įdomių savybių, apie ją yra iškelta visa eilė hipotezių, tačiau viena savybė yra ypač įdomi ir naudinga. Ji vadinama funkcijos $\zeta(s)$ universalumu. Matematikoje, kaip ir kitose srityse, universalumas suprantamas panašiai: koks nors vienas objektas turi įtakos plačiai kitų objektų klasei. Funkcijos $\zeta(s)$ universalumas yra suprantamas taip: kiekviena analizinėje juostoje $D=\{s\in\mathbf{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\}$ funkcija $f(s)$ norimu tikslumu gali būti aproksimuojama funkcijos $\zeta(s)$ postūmiais $\zeta(s+i\tau)$, $\tau\in\mathbf{R}$. Matematiškai tai galima užrašyti taip: su kiekviena kompaktine juostos D aibe K ir kiekvienu $\varepsilon>0$ yra teisinga nelygybė

$$\sup_{s\in K}\left|f(s)-\zeta(s+i\tau)\right|<\varepsilon$$

su kuriuo nors $\tau\in\mathbf{R}$.

Šią universalumo savybę 1975 m. atrado rusų matematikas S. M. Voroninas (Voronin). Jo įrodyta teorema [4] eilės autorių buvo patikslinta ir tapo bendresne. Jos griežtam formulavimui reikalingi kai kurie žymenys. Tegul $\mu\{A\}$ yra mačios aibės $A\subset\mathbf{R}$ Lebegos (Lebesgue) matas. Prisiminkime, kad aibės $K\subset\mathbf{C}$ papildiniu yra vadinama aibė $\mathbf{C}\setminus K$. Aibė K yra vadinama kompaktine, jeigu ji yra uždara ir iš kiekvienos tos aibės sekos galima išskirti konverguojantį posekį. Aibė A yra vadinama jungiąja, jei kiekvienus du jos taškus galima sujungti atkarpa priklausančia tai aibei. Dabar jau galima formuoti šiuolaikinį Voronino universalumo teoremos variantą [3].

1.1 teorema. *Tarkime, kad K yra kompaktinė juostos D aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir $\neq 0$ aibėje K, bei analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mu(\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}\left|\zeta(s+i\tau)-f(s)\right|<\varepsilon)>0.$$

Ši teorema tvirtina, kad postūmių $\zeta(s+i\tau)$, aproksimuojančių funkciją $f(s)$, aibė yra begalinė: jos apatinis tankis yra griežtai teigiamas. Suformuluota teorema turi visą eilę tiek teorinių, tiek ir praktinių pritaikymų, pavyzdžiui įvertinant sudėtingas analizines funkcijas. Todėl yra natūralu siekti, kad universalių funkcijų suformuluotos teoremos prasme būtų kuo daugiau.

Bakalauro darbo tikslas yra panagrinėti sudėtinės funkcijos $F(\zeta(s))$ universalumą kuriai nors funkcijų F klasei.

Tarkime, kad $H(D)$ yra aibė visų funkcijų, analizinių juostoje D, be to, erdvė S tegul

$$S=\{g\in H(D):g(s)\neq 0 \text{ arba } g(s)\equiv 0\}.$$

Bakalauro darbe įrodysime tokią teoremą (simboliu $F^{-1}A$ žymėsime aibės A pirmavaizdį):

1.2 teorema. *Tarkime, kad funkcija $F:H(D)\to H(D)$ yra tolydi, o sankirta $(F^{-1}G)\bigcap S\neq\varnothing$ su kiekviena erdvės $H(D)$ atvira aibe G. Tegul $K\subset D$ yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolygi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon>0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{t\to\infty}\frac{1}{T}\mu(\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-f(s)\right|<\varepsilon)>0.$$

Ši teorema yra teorinio pobūdžio, ji gali būti naudojama kitų universalumo teoremų įrodymui.

2. Tikimybių teorijos elementai

Šiame skyriuje pateiksime kai kurias sąvokas ir rezultatus, apibendrinančius tradicinį tikimybių teorijos kursą bakalauro studijų programai.

Tegul Ω yra bet kokios prigimties elementų aibė. Šios aibės poaibių sistema $\mathcal{A}$ yra vadinama σ algebra, jeigu galioja tokios aksiomos:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;
2. Jei $A \in \mathcal{A}$, tai jos papildinys $A^C = \Omega \setminus A \in \mathcal{A}$;
3. Jei $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, tai ir $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \mathcal{A}$.

Pora $(\Omega; \mathcal{A})$ yra vadinama mačia erdve. Šioje erdvėje galima apibrėžti tikimybinį matą. Aibės funkcija $P: \mathcal{A} \to \mathbf{R}$ yra vadinama tikimybiniu matu, jei :

1) $P(A) \geq 0$ su $\forall A \in \mathcal{A}$;
2) $P(\Omega) = 1$;
3) Jei aibės $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, kas dvi neturi bendrų elementų, tai tuomet $P(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$.

Jeigu $\Omega = \mathbf{R}$, tai tikimybinis matas yra pasiskirstymo funkcijos apibendrinimas.

Mums bus reikalingi tikimybiniai matai, tam tikrose funkcijų aibėse. Tegul X yra metrinė erdvė, o $\mathcal{B}(X)$ yra tos erdvės Borelio σ algebra, t. y., minimali σ algebra, kuriai priklauso visos erdvės X atvirosios aibės. Mes nagrinėsime tikimybinius matus erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$. Bus reikalinga silpnojo tikimybinio mato konvergavimo sąvoka, kuri yra analogiškos sąvokos pasiskirstymo funkcijoms apibendrinimas.

Tegul turime matus P_n ir P, apibrėžtus erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$. Sakome, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realia aprėžta ir tolydžia funkcija f erdvėje $H(D)$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_{H(D)} f \mathrm{d}P_n = \int_{H(D)} f \mathrm{d}P.$$

Dar bus reikalinga tikimybinio mato P erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ atramos sąvoka. Kadangi erdvė $H(D)$ yra separabili (joje yra skaiti ir visur tiršta aibė), tai mato P atrama yra

vadinama tokia minimali, uždara aibė $S \subset H(D)$, su kuria yra teisinga lygybė $P(S)=1$, kitaip tariant, mato atrama yra minimali aibė, kurioje yra sukoncentruota visa to mato masė.

Primename, kad $S=\{g \in H(D): g(s) \neq 0$ arba $g(s) \equiv 0\}$. Apibrėžiame tikimybinį matą

$$P_T(A)=\frac{1}{T}\mu\{\tau \in [0;T]: \zeta(s+i\tau) \in A\},\ A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Mums bus reikalingas toks tvirtinimas.

2.1 teorema. *Tikimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į išreikštiniu pavidalu duotą tikimybinį matą P_ζ erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$, o mato P_ζ atrama yra aibė S.*

Teoremos įrodymas yra duotas [3] monografijoje.

Mes įrodysime analogišką teoremą sudėtinei funkcijai $P_\zeta F^{-1}$. Tam tikslui nagrinėsime tikimybinį matą

$$Q_T(A)=\frac{1}{T}\mu\{\tau \in [0;T]: F(\zeta(s+i\tau)) \in A\},\ A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

kai $T \to \infty$.

Tokio tipo teoremos įrodymui dar yra reikalingi kai kurie apibrėžimai ir tvirtinimai. Tegul turime dvi mačias erdves $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$, $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$, X_1 ir X_2 - metrinės erdvės. Funkcija $h: X_1 \to X_2$ yra vadinama mačia σ algebrų $\mathcal{B}(X_1)$ ir $\mathcal{B}(X_2)$ atžvilgiu, jei $h^{-1}\mathcal{B}(X_2) \subset \mathcal{B}(X_1)$.

Tarkime, jog turime tikimybinį matą T erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$, o funkcija $h: X_1 \to X_2$ yra mati $(\mathcal{B}(X_1), \mathcal{B}(X_2))$ atžvilgiu. Tuomet yra žinoma, kad matas P erdvėje $(X_2, \mathcal{B}(X_2))$ apibrėžia vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1}, kuris yra apibrėžiamas formule

$$Ph^{-1}(A)=P(h^{-1}A),\ A \in \mathcal{B}(X_2).$$

Yra žinoma labai naudinga teorema apie taip apibrėžtų matų silpnąjį konvergavimą.

2.2 teorema. *Tarkime, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P erdvėje $(X_1, \mathcal{B}(X_1))$, o funkcija $h: X_1 \to X_2$ yra tolydi funkcija. Tuomet matas $P_n h^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą Ph^{-1}.*

Įrodymą galima rasti [1] monografijoje. Pastebime, kad kiekviena tolydi funkcija $h: X_1 \to X_2$ yra mati $\mathcal{B}(X_1)$, $\mathcal{B}(X_2)$ atžvilgiu, todėl matų $P_n h^{-1}$ ir Ph^{-1} apibrėžimai yra korektiški.

Turėdami šią teoremą, jau galime nagrinėti tikimybinio mato Q_T silpnąjį konvergavimą, kai $T \to \infty$.

2.3 teorema. *Tegul* $F : H(D) \to H(D)$ *yra tolydi funkcija, o tikimybinis matas* P_ζ *yra toks, koks apibrėžtas 2.1 teoremoje. Tuomet matas* Q_T, *kai* $T \to \infty$ *silpnai konverguoja į matą* $P_\zeta F^{-1}$.

Įrodymas. Iš matų P_T ir Q_T apibrėžimų turime, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(H(D))$ yra teisinga lygybė

$$Q_T(A) = \frac{1}{T}\mu\{\tau \in [0;T] : F(\zeta(s+i\tau)) \in A\} =$$
$$= \frac{1}{T}\mu\{\tau \in [0;T] : \zeta(s+i\tau) \in F^{-1}A\} = P_T(F^{-1}A) = P_T F^{-1}(A).$$

Taigi gavome, kad

$$Q_T = P_T F^{-1}. \tag{2.1}$$

Kadangi, pagal 2.1 teoremą matas P_T, kai $T \to \infty$ silpnai konverguoja į matą P_ζ, tai iš 2.2 teoremos išplaukia, kad matas $P_T F^{-1}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P. Iš čia ir (2.1) lygybės gauname teoremos tvirtinimą.

Lieka apskaičiuoti tikimybinio mato $P_\zeta F^{-1}$ atramą. Iš mato P atramos apibrėžimo turime, kad atramą sudaro tokie erdvės elementai, kurių kiekvienai atvirai aplinkai G yra teisinga nelygybė $P(G) > 0$.

2.4 teorema. *Tarkime, kad* $F : H(D) \to H(D)$ *yra tokia tolydi funkcija, kad aibė* $(F^{-1}G) \cap S$ *su kiekviena atvira aibe* G *yra netuščia. Tuomet mato* $P_\zeta F^{-1}$ *atrama sutampa su visa erdve* $H(D)$.

Įrodymas. Tegul g yra bet kuris erdvės $H(D)$ elementas, o G yra bet kuri to elemento atviroji aplinka. Iš funkcijos F tolydumo išplaukia, kad aibė $F^{-1}G$ yra taip pat atvira. Kadangi aibė $\left(F^{-1}G\right) \cap S$ yra netuščia, tai yra toks elementas g_1, kuris priklauso abiems aibėms $F^{-1}G$ ir S. Tai reiškia, kad aibė $F^{-1}G$ yra elemento g_1 atviroji aplinka. Pagal 2.1 teoremą, mato P_ζ atrama yra aibė S, todėl $P_\zeta(F^{-1}G) > 0$. Iš čia randame, kad $P_\zeta F^{-1}(G) = P_\zeta(F^{-1}G) > 0$. Kadangi elementas g buvo pariktas laisvai iš čia turime, kad mato $P_\zeta F^{-1}$ atrama yra visa erdvė $H(D)$.

3. Funkcijos $F(\zeta(s))$ universalumas

Šiame skyriuje įrodysime teoremą apie sudėtinės funkcijos $F(\zeta(s))$ universalumą.

3.1 teorema. *Tarkime, kad funkcija* $F: H(D) \to H(D)$ *yra tolydi, o sankirta* $(F^{-1}G) \bigcap S \neq \varnothing$ *su kiekviena erdvės* $H(D)$ *atvira aibe* G *. Tegul* $K \subset D$ *yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f(s)$ *yra tolygi aibėje* K *ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{t\to\infty} \frac{1}{T} \mu(\tau \in [0;T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau)) - f(s)| < \varepsilon) > 0 .$$

3.1 teoremos įrodymui, be 2 skyriaus rezultatų dar bus reikalingas vienas tvirtinimas, vadinama Mergeliano teorema, apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais. Šios teoremos tvirtinimas yra 3.2 lemoje.

3.2 lema. *Tegul* $K \subset \mathbf{C}$ *yra kompaktinė aibė, kurios papildinys yra jungioji aibė, o funkcija* $g(s)$ *yra tolydi aibėje* K *ir analizinė jos viduje. Tuomet kiekvieną* $\varepsilon > 0$ *atitinka toks polinomas* $p(s)$*, su kuriuo yra teisinga nelygybė*

$$\sup_{s\in K} |g(s) - p(s)| < \varepsilon .$$

Lemos įrodymas supaprastinta forma yra duotas [5] monografijoje.

3.1 teoremos įrodymas. Tegul $p(s)$ yra bet koks polinomas, o

$$G = \{g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\} .$$

Tuomet aibė G yra atviras erdvės $H(D)$ rutulys su centru $p(s)$. Taigi, ši aibė yra polinomo $p(s)$ atviroji aplinka. Iš 2.4 teoremos turime, kad polinomas $p(s)$, kaip analizinė funkcija visoje juostoje D, yra mato $P_\zeta F^{-1}$ atramos elementas. Todėl iš atramos savybių išplaukia, kad teisinga nelygybė

$$P_\zeta F^{-1}(G) > 0 . \tag{3.1}$$

Dabar pasinaudosime silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentu atviroms aibėms, tvirtinančiu, kad P_n, $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P tada ir tik tada, kai su kiekviena atvira aibe G yra teisinga nelygybė

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G) .$$

Pritaikę šį ekvivalentą matui Q_T ir pasinaudoję 2.3 teorema bei 3.1 nelygybe, gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty} Q_T(G) \geq P_\zeta F^{-1}(G) > 0 .$$

Iš čia, mato Q_T bei aibės G apibrėžimų išplaukia, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mu\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-p(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\}>0. \tag{3.2}$$

Kad įrodytume teoremą, šioje nelygybėje polinomą $p(s)$ turime pakeisti funkcija $f(s)$.

Iš 3.2 lemos turime, kad polinomą $p(s)$ galima parinkti taip, kad galiotų nelygybė

$$\sup_{s\in K}\left|f(s)-p(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2}. \tag{3.3}$$

Tarkime, kad realieji skaičiai τ tenkina nelygybę

$$\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-p(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Tuomet tokiems τ, remdamiesi (3.3) nelygybe, gauname, kad

$$\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-f(s)\right|\le\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-p(s)\right|+\sup_{s\in K}\left|p(s)-f(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{\varepsilon}{2}=\varepsilon.$$

Šie samprotavimai rodo, kad yra teisingas sąryšis

$$\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-p(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\}\subset\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-f(s)\right|<\varepsilon\}.$$

Iš čia ir mato monotoniškumo turime, kad

$$\mu\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-p(s)\right|<\frac{\varepsilon}{2}\}\le\mu\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-f(s)\right|<\varepsilon\}.$$

Ši nelygybė, kartu su (3.2) nelygybe įrodo, kad

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mu\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}\left|F(\zeta(s+i\tau))-f(s)\right|<\varepsilon\}>0.$$

Teoremos įrodymas yra baigtas.

4. Universality of one composite function

Summary

Ugnė Tamašauskaitė

Let $s=\sigma+it$ be a complex variable. The Riemann zeta function $\zeta(s)$ is defined, for $\sigma>1$, by the Dirichlet series

$$\zeta(s)=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{1}{m^s},$$

and continues analytically to the whole complex plane, except for a simple pole at the point $s=1$ with residue 1.

S. M. Voronin proved that the function $\zeta(s)$ is universal in the sense that its shifts $\zeta(s+i\tau)$, $\tau\in\mathbf{R}$, approximate with a given accuracy any analytic function. In the bachelor work, we generalize the Voronin theorem for the composite function $F(\zeta(s))$. Denote by $H(D)$ the space of analytic functions on $D=\{s\in\mathbf{C}:\frac{1}{2}<\tau<1\}$ endowed with the topology of uniform convergence on compacta. Moreover, let $S=\{g\in H(D):g(s)\neq 0 \text{ or } g(s)\equiv 0\}$. Then we obtain the following theoretical theorem.

Theorem. *Suppose that a continuous function $F:H(D)\to H(D)$ is such that, for any open subset $G\subset H(D)$, the intersection $(F^{-1}G)\cap S\neq\varnothing$. Let $K\subset D$ be a compact set with connected complement, and $f(s)$ be a continuous on K function and analytic in the interior of K. Then, for every $\varepsilon>0$,*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mu\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau))-f(s)|<\varepsilon\}>0.$$

There $\mu\{A\}$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $A\subset\mathbf{R}$, and $F^{-1}G$ is the preimage of the set G.

5. Literatūra

1. P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*. New York: Wiley, 1968.
2. A. Laurinčikas. *Rymano dzeta funkcijos teorijos pagrindai*. Vilnius: Vilniaus universiteto leidykla, 1990.
3. A. Laurinčikas. *Limit Theorems for the Riemann Zeta – Function*. Dordrecht: Kluwer, 1996.
4. S. M. Voronin. *Theorem on „universality" of the Riemann zeta – function.* Math: USSR Izw. 9 (1975), 443-453.
5. J. L. Walsh. *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.* Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. 20, 1960.