ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Andrė Miltinienė

Kai kurių sudėtinių funkcijų universalumas

Magistro darbas

Darbo vadovas
prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Šiauliai, 2013

TURINYS

ĮVADAS

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o a_m yra kurie nors kompleksiniai skaičiai. Tuomet eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s} \tag{1}$$

yra vadinama Dirichlė eilute. Yra žinoma, kad Dirichlė eilučių konvergavimo sritis yra pusplokštumė. Tai reikškia, kad egzistuoja toks skaičius σ_0, kad srityje $\sigma > \sigma_0$ (1) eilutė konverguoja, o srityje $\sigma < \sigma_0$ ji diverguoja.

Sakome, kad (1) eilutė konverguoja absoliučiai, jeigu konverguoja eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{|a_m|}{m^\sigma}.$$

Dirichlė eilutės absoliutaus konvergavimo sritis taip pat yra pusplokštumė.

Analizėje Dirichlė eilutės yra retai naudojamos, tačiau jos yra labai naudingos analizinėje skaičių teorijoje. Dirichlė eilutėmis yra apibrėžiamos taip vadinamos dzeta funkcijos, kurios yra labai svarbios sprendžiant įvairius skaičių teorijos uždavinius.

Bene svarbiausia iš dzeta funkcijų yra Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apbrėžiama labai paprasta Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Iš Dirichlė eilučių savybių išplaukia, kad funkcija $\zeta(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > 1$. Be to, ji yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra užrašoma ir begaline sandauga pagal pirminius skaičius p

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Pastaroji lygybė yra vadinama Oilerio tapatybe ir parodo funkcijos $\zeta(s)$

sąryšį su pirminiais skaičiais.

Funkciją $\zeta(s)$ dar XVIII a. su realiuoju kintamuoju s nagrinėjo Oileris, o XIX a. viduryje Rymanas pradėjo nagrinėti funkciją $\zeta(s)$ su kompleksiniu kintamuoju s ir pritaikė ją pirminių skaičių pasiskirstymui tirti. Jam nepavyko įrodyti asimptotinės formulės, kai $x \to \infty$, funkcijai

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

Tačiau jo idėjas sėkmingai panaudojo kiti matematikai ir įrodė, kad

$$\pi(x) \sim \frac{x}{\log x}, \quad x \to \infty.$$

Tai tik vienas funkcijos $\zeta(s)$ pritaikymo pavyzdys, ji pasirodo įvairiose, nebūtinai skaičių teorijos, matematikos ir kitų tiksliųjų mokslų srityse. Iš kitos pusės, yra daug neišspręstų problemų, apie pačią funkciją $\zeta(s)$. Viena iš jų yra garsioji Rymano hipotezė, tvirtinanti, kad visi kompleksiniai funkcijos $\zeta(s)$ nuliai guli taip vadinamoje kritinėje tiesėje $\sigma = \frac{1}{2}$.

Tegul α, $\quad 0 < \alpha \leq 1$, yra fiksuotas parametras. Vienas iš funkcijos $\zeta(s)$ apibendrinimų yra Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Kai $\alpha = 1$, tai Hurvico dzeta funkcija tampa Rymano dzeta funkcija. Panašiai, kaip ir $\zeta(s)$, funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Tačiau Hurvico dzeta funkcija ir jos savybės skiriasi nuo Rymano dzeta funkcijos, kadangi jos apibrėžime naudojamas postūmis $m + \alpha$ ir jos negalima išreikšti sandauga pagal pirminius skaičius.

Abi funkcijos $\zeta(s)$ ir $\zeta(s, \alpha)$ turi bendrą įdomią savybę, kurią 1975 metais pastebėjo S.M.Voroninas. Ši savybė yra vadinama universalumu ir, grubiai kalbant, reiškia, kad kiekvieną analizinę funkciją tam tikros srities kompaktinėse aibėse norimu tikslumu galima aproksimuoti postūmiais $\zeta(s + i\tau)$ ir

$\zeta(s+i\tau,\alpha)$.

Tiksliam universalumo savybės formulavimui yra reikalingi kai kurie žymenys. Tegul $D=\{s\in\mathbb{C}:\frac{1}{2}<\sigma<1\}$, čia $\mathbb{C}$ žymi kompleksinę plokštumą. Juostos D kompaktinių poaibių, turinčių jungiuosius papildinius, klasę žymėsime $\mathcal{K}$. Tegul $H_0(K),\quad K\in\mathcal{K}$, yra tolydžiųjų ir nevirstančių nuliu aibėje K ir analizinių K viduje funkcijų aibė, o $H(K)$ yra tolydžių aibėje K ir analizinių jos viduje funkcijų aibė. Simboliu $meas\{A\}$ žymėsime mačiosios aibės $A\in\mathbb{R}$ Lebego matą. Tuomet Rymano dzeta funkcijos universalumo sąvybė yra formuluojama taip [2].

1.1 **teorema.** *Tarkime, kad $K\in\mathcal{K}$, o $f(s)\in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\epsilon\}>0.$$

Teoremos nelygybė parodo, kad postūmių $\zeta(s+i\tau)$, aproksimuojančių duotą analizinę funkciją yra be galo daug, jų visų aibė turi teigiamą apatinį tankį.

Analogiška teorema Hurvico dzeta funkcijai kol kas įrodyta tik kai parametras α yra transcendentusis arba racionalusis skaičius. Transcendentumas reiškia, kad α nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Mes nagrinėsime tik pastarąjį atvejį [5].

1.2 **teorema.** *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, $K\in\mathcal{K}$, ir $f(s)\in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon>0$*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha)-f(s)|<\epsilon\}>0.$$

1.2 teorema skiriasi nuo 1.1 teoremos tuo, kad joje yra aproksimuojamos funkcijos iš klasės $H(K)$, o 1.1 teoremoje yra aproksimuojamos funkcijos iš siauresnės klasės $H_0(K)$. Tai paaiškinama tuo, kad Rymano dzeta funkcija turi Oilerio sandaugą pagal pirminius, o Hurvico dzeta funkcija šios sandaugos neturi.

Neseniai japonų matematikas Mišu (Mishou) įrodė įdomią teoremą [6] apie jungtinį funkcijų $\zeta(s)$ ir $\zeta(s,\alpha)$ universalumą, tai yra apie dviejų analizinių funkcijų aproksimavimą tuo pat metu postūmiais $\zeta(s+i\tau)$ ir $\zeta(s+i\tau,\alpha)$.

1.3 **teorema.** *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, ir $f_1(s) \in H_0(K_1)$ ir $f_2(s) \in H(K_2)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau) - f_1(s)| < \epsilon,$$

$$\sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau,\alpha) - f_2(s)| < \epsilon\} > 0.$$

Yra žinoma [3], [4], kad kai kurioms funkcijų F ir F_1 klasėms funkcijos $F(\zeta(s))$ ir $F_1(\zeta(s,\alpha))$ yra taip pat universalios. Pateiksime keleta pavyzdžių. Simboliu $H(G)$ žymėsime analizinių srityje $G \in \mathbb{C}$ funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija.

1.4 **teorema.** *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra tokia tolydi funkcija, kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap S$, $S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \quad arba \quad g(s) \equiv 0\}$, yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau)) - f(s)| < \epsilon\} > 0.$$

Teoremos įrodymas yra pateiktas [3] straipsnyje.

Analogiškas tvirtinimas funkcijai $\zeta(s,\alpha)$ su transcendančiuoju parametru α buvo gautas [4] darbe.

1.5 **teorema.** *Tarkime, kad $F : H(D) \to H(D)$ yra tokia tolydi funkcija,* *kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap H(D)$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \epsilon\} > 0.$$

Magistro darbo tikslas yra apibendrinti Mišu teoremą (1.3 teorema), tai yra, gauti sudėtinės funkcijos $F(\zeta(s), \zeta(s,\alpha))$ universalumą.

Tegul $H^2(D) = H(D) \times H(D)$. Yra teisinga tokia teorema.

Teorema. *Tarkime, kad α yra transcendantusis skaičius, o $F : H^2(D) \to H(D)$ yra tokia tolydi funkcija, kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap (S \times H(D))$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \epsilon\} > 0.$$

Teoremos įrodymas remiasi 1.3 teorema ir tolydžiųjų atvaizdžių savybėmis.

2. SILPNASIS TIKIMYBINIŲ MATŲ KONVERGAVIMAS

Mišu teoremos (1.3 teorema) įrodymas remiasi ribine teorema apie silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą erdvėje $H^2(D)$. Todėl jos apibendrinimui, sudėtinėms funkcijoms, taip pat yra reikalingos tikimybių teorijos ir silpnojo tikimybių mato konvergavimo kai kurios sąvokos ir rezultatai. Šis skyrelis ir yra skiriamas šiam tikslui.

Pradėsime tikimybinio mato sąvoka. Tegul Ω yra bet kuri ne tuščia aibė, jos poaibių sistema $\mathcal{A}$ yra vadinama σ kūnu (σ algebra), jei galioja tokios aksiomos:

1. $\Omega \in \mathcal{A}$;

2. Jei $A \in \mathcal{A}$, tai ir papildinys $A^C \in \mathcal{A}$;

3. Jei seka $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$, tai ir sąjunga $\bigcup_{n=1}^{\infty} A_n \in \mathcal{A}$.

Sudarę aibės Ω σ kūną $\mathcal{A}$, gauname mačiąjį erdvę $(\Omega, \mathcal{A})$. Šioje erdvėje jau galime apibrėžti tikimybinį matą. Neneigiama aibės Ω funkcija P, apibrėžta σ kūne $\mathcal{A}$, yra vadinama tikimybiniu matu, jei ji tenkina aksiomas:

1. $P(\Omega) = 1$;

2. Jei aibės $A_1, A_2, ... \in \mathcal{A}$ ir kas dvi neturi bendrų elementų, tai tuomet $P(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m) = \sum_{m=1}^{\infty} P(A_m)$. (Eilutė turi konverguoti.)

Apibrėžę mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A})$ tikimybinį matą P, gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{A}, P)$.

Tegul E yra kuri nors metrinė erdvė. Tuomet tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$ galime apibrėžti E reikšmį atsitiktinį elementą. Erdvės E minimalus σ kūnas, kuriam priklauso tos erdvės atvirųjų aibių sistema, yra vadinamas erdvės E Borelio σ kūnu ir yra žymimas $\mathcal{B}(E)$. Atvaizdis $X : \Omega \to E$ yra vadinamas E reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$, jeigu su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(E)$ galioja sąlyga

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{A}.$$

Pastaroji sąlyga yra vadinama atvaizdžio X matumu σ kūnų $\mathcal{B}(E)$ ir $\mathcal{A}$ atžvilgiu.
Jeigu $E = \mathbb{R}$, tai atsitiktinis elementas yra tiesiog vadinamas atsitiktiniu dydžiu.

Dabar apibrėšime silpnąjį tikimybinių matų konvergavimą. Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai mačioje erdvėje $(E, \mathcal{B}(E))$. Sakome, kad $P_n, \quad n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jeigu su kiekviena realia aprėžta ir tolydžia funkcija g erdvėje E yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_E g \mathrm{d}P_n = \int_E g \mathrm{d}P.$$

Šis apibrėžimas turi ekvivalentus įvairių aibių terminais. Mums bus reikalingas silpnojo tikimybių mato ekvivalentas atvirųjų aibių terminais.

2.1 **lema.** *Tarkime, kad $P_n, \quad n \in \mathbb{N}$, ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(E, \mathcal{B}(E))$. P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P tada ir tik tada, kai su kiekviena atvira aibe $G \subset E$ yra teisinga lygybė*

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geq P(G).$$

Lema yra 2.1 teoremos iš [1] dalis.

Mums dar bus reikalinga viena silpnojo tikimybių mato savybė, naudojanti tolydžius erdvių atvaizdžius.

Tegul E_1 ir E_2 yra dvi metrinės erdvės, o $h : E_1 \to E_2$ yra $(\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2))$ mati funkcija, tai yra $h^{-1}B(E_2) \subset B(E_1)$. Tuomet kiekvienas tikimybinis matas P erdvėje $(E_1, \mathcal{B}(E_1))$ ir erdvėje $(E_2, \mathcal{B}(E_2))$ apibrėžia [1] vienintelį tikimybinį matą Ph^{-1} formule

$$Ph^{-1}(A) = P(h^{-1}A), \qquad A \in \mathcal{B}(E_2).$$

Yra gerai žinoma, kad jei funkcija $h : E_1 \to E_2$ yra tolydi, tai ji yra ir $(\mathcal{B}(E_1), \mathcal{B}(E_2))$ mati. Yra teisingas toks tvirtinimas [1].

2.2 **lema.** *Tarkime, kad* $P_n, \quad n \in \mathbb{N}$, *ir* P *yra tikimybiniai matai erdvėje* $(E_1, \mathcal{B}(E_1))$, *funkcija* $h : E_1 \to E_2$ *yra tolydi ir* P_n, *kai* $n \to \infty$, *silpnai konverguoja į* P. *Tuomet, kai* $n \to \infty$, $P_n h^{-1}$ *taip pat silpnai konverguoja į* Ph^{-1}.

Dar priminsime tikimybinio mato atramos sąvoką. Tarkime, kad P yra tikimybinis matas erdvėje $(E, \mathcal{B}(E))$, o E yra separabili metrinė erdvė. Tuomet mato P atrama yra vadinama tokia minimali uždara aibė $S_P \subset E$, kad $P(S_P) = 1$. Aibė S_P yra sudaryta iš visų tokių taškų $x \in E$, kurių kiekvienai atvirai aplinkai G yra teisinga nelygybė $P(G) > 0$.

Tegul X yra E reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{A}, P)$. Šio elemento skirstiniu yra vadinamas tikimybinis matas P, apibrėžiamas formule

$$P(A) = \mathbb{P}(\omega \in \Omega : X(\omega) \in A), \qquad A \in \mathcal{B}(E).$$

Atsitiktinio elemento atrama vadiname jo pasiskirstymo atramą.

3. LEMOS

Šiame skyrelyje suformuluosime bei įrodysime kai kuriuos tvirtinimus, kurie bus naudojami pagrindinės teoremos įrodymui. Mums bus reikalingos ribinės teoremos analizinių funkcijų erdvėse $H(D)$ ir $H^2(D)$ bei ribinių matų atramų tose teoremose išreikštinis pavidalas.

Pradėsime nuo kai kurių apibrėžimų. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra apskritimas kompleksinėje plokštumoje su centru taške 0 ir spinduliu 1. Apibrėžiame dvi aibes

$$\Omega_1 = \prod_p \gamma_p \qquad \text{ir} \qquad \Omega_2 = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m.$$

Čia sandaugos ženklai reiškia aibių Dekarto sandaugą. Pirmoje sandaugoje $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p, o antroje sandaugoje $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Aibės Ω_1 ir Ω_2 yra vadinamos begalinamačiais torais. Aibę Ω_1 sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios visų pirminių skaičių aibę vienetiniame apskritime γ, o aibę Ω_2 sudaro visos funkcijos, atvaizduojančios aibę $\mathbb{N}_0$ vienetiniame apskritime γ. Aibėse Ω_1 ir Ω_2 galime apibrėžti pataškinės daugybos operaciją ir sandaugos topologiją [7]. Tuomet aibės Ω_1 ir Ω_2 tampa topologinėmis grupėmis. Kadangi apskritimas γ yra kompaktinė aibė, o pagal Tichonovo teoremą [7] kompaktinių erdvių sandauga yra kompaktinė erdvė, tai topologinės grupės Ω_1 ir Ω_2 yra kompaktinės.

Apibrėžiame dar vieną Dekarto sandaugą $\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2$. Kadangi Ω_1 ir Ω_2 yra kompaktinės topologinės grupės, tai vėl iš Tichonovo teoremos išplaukia, kad Ω yra taip pat kompaktinė topologinė grupė. Yra žinoma, kad kompaktinėje topologinėje grupėje galima apibrėžti tikimybinį Haro matą. Taigi, mačioje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H. Visa ši konstrukcija duoda tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Primename, kad Haro matas m_H pasižymi invariantiškumo savybe, tai yra, jo reikšmė nekinta, jei aibę padauginame iš bet kurio elemento $\omega \in \Omega$.

Dabar apibrėšime atsitiktinius elementus, atitinkančius funkcijas $\zeta(s)$ ir

$\zeta(s,\alpha)$. Tegul $\omega_1(p)$ yra elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ projekcija į apskritimą γ_p, o $\omega_2(m)$ yra elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ projekcija į apskritimą γ_m. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H^2(D)$ reikšmį atsitiktinį elementą $\underline{\zeta}(s,\omega)$, $\omega = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega$ formule

$$\underline{\zeta}(s,\omega) = (\zeta(s,\omega_1), \zeta(s,\alpha,\omega_2)),$$

čia

$$\zeta(s,\omega_1) = \prod_p \Big(1 - \frac{\omega_1(p)}{p^s}\Big)^{-1}$$

ir

$$\zeta(s,\alpha,\omega_2) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega_2(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Pastebime, kad šiuose apibrėžimuose begalinė sandauga ir eilutė, beveik visiems $\omega \in \Omega$, konverguoja tolygiai juostos D kompaktinėse aibėse, todėl tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžia $H(D)$ reikšmius atsitiktinius elementus.

Tegul $P_{\underline{\zeta}}$ yra atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s,\omega)$ skirstinys. Tai reiškia, kad $P_{\underline{\zeta}}$ yra tikimybinis matas erdvėje $(H^2(D), \mathcal{B}(H^2(D)))$, apibrėžiamas formule

$$P_{\underline{\zeta}}(A) = m_H(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s,\omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H^2(D)).$$

Mišu teoremos įrodymas remiasi ribine teorema tikimybiniam matui

$$P_T(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s+i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H^2(D)),$$

čia

$$\underline{\zeta}(s) = (\zeta(s), \zeta(s,\alpha)).$$

Yra teisinga tokia ribinė teorema matui P_T.

3.1 **lema.** *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet tikimybinis matas P_T, kai $P \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}}$.*

Lemos įrodymas yra duotas [6] straipsnyje.

Dabar įrodysime ribinę teoremą sudėtinei funkcijai $F(\underline{\zeta}(s))$. Tegul

$$P_{T,F}(A) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : F(\underline{\zeta}(s+i\tau)) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

3.2 **lema.** *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o funkcija $F : H^2(D) \to H(D)$ yra tolydi. Tuomet tikimybinis matas $P_{T,F}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$.*

Įrodymas. Iš matų P_T ir $P_{T,F}$ apibrėžimų turime, kad su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(H(D))$

$$\begin{aligned} P_{T,F}(A) &= \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : F(\underline{\zeta}(s+i\tau)) \in A\} \\ &= \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \underline{\zeta}(s+i\tau) \in F^{-1}A\} \\ &= P_T(F^{-1}A) = P_T F^{-1}(A). \end{aligned}$$

Taigi, yra teisinga lygybė

$$P_{T,F} = P_T F^{-1}.$$

Iš šios lygybės bei 3.1 lemos, remdamiesi funkcijos F tolydumu ir 2.2 lema, gauname, kad matas $P_{T,F}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$.

Dabar formuluosime lemas apie matų $P_{\underline{\zeta}}$ ir $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ atramas.
Apibrėžiame aibę

$$S = \{g \in H(D) : g^{-1}(s) \in H(D) \quad \text{arba} \quad g(s) \equiv 0\}.$$

3.3 **lema.** *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet mato $P_{\underline{\zeta}}$ atrama yra aibė $S \times H(D)$.*

Lemos įrodymas yra duotas [6] straipsnyje.

3.4 **lema.** *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $F : H^2(D) \to H(D)$ yra tokia tolydi funkcija, kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė*

$(F^{-1}G) \cap (S \times H(D))$ *yra netuščia. Tuomet mato* $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ *atrama yra visa erdvė* $H(D)$.

Įrodymas. Imame bet kurį erdvės $H(D)$ elementą g. Tegul G yra bet kuri elemento g atviroji aplinka. Iš funkcijos F tolydumo gauname, kad aibė $F^{-1}G$ yra taip pat atvira. Kadangi sankirta $(F^{-1}G) \cap (S \times H(D))$ yra netuščia, tai yra toks elementas $g_1 \in H^2(D)$, kuris priklauso tiek aibei $F^{-1}G$, tiek ir aibei $S \times H(D)$. Tai reiškia (pagal 3.4 lemą), kad $F^{-1}G$ yra elemento, priklausančio mato $P_{\underline{\zeta}}$ atramai, atviroji aplinka. Todėl iš atramos savybių turime, kad

$$m_H(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s, \omega) \in F^{-1}G) > 0.$$

Iš čia išplaukia nelygybė

$$m_H(\omega \in \Omega : F(\underline{\zeta}(s, \omega)) \in G) = m_H(\omega \in \Omega : \underline{\zeta}(s, \omega) \in F^{-1}G) > 0.$$

Kadangi tiek elementas g, tiek ir jo aplinka G yra parinkti bet kaip, pastaroji nelygybė įrodo lemos tvirtinimą.

Dar pagrindinės magistro darbo teoremos įrodymui bus reikalinga Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

3.5 **lema.** *Tarkime, kad* $K \subset \mathbb{C}$ *yra kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi aibėje* K *ir analizinė aibės* K *viduje. Tuomet kiekvieną* $\epsilon > 0$ *atitinka toks polinomas* $p(s)$, *kad*

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \epsilon.$$

Lemos įrodymą galima rasti [8] monografijoje.

4. PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS

Šiame skyrelyje įrodysime pagrindinį magistro darbo rezultatą apie sudėtinės funkcijos nuo Rymano dzeta funkcijos ir Hurvico dzeta funkcijos universalumą.

4.1 **teorema.** *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius, o $F : H^2(D) \to H(D)$ yra tokia tolydi funkcija, kad su kiekviena atvira aibe $G \subset H(D)$ aibė $(F^{-1}G) \cap (S \times H(D))$ yra netuščia. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H(K)$. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |F(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau,\alpha)) - f(s)| < \epsilon\} > 0.$$

Įrodymas. Iš 3.5 lemos turime, kad egzistuoja toks polinomas $p(s)$, su kuriuo yra teisinga nelygybė

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.1}$$

Apibrėžiame aibę

$$G = \{g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - p(s)| < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Ši aibė yra erdvės $H(D)$ atviras rutulys su centru $p(s)$ ir spinduliu $\frac{\epsilon}{2}$. Taigi G yra polinomo $p(s)$ atviroji aplinka. Iš 3.4 lemos žinome, kad polinomas $p(s)$, kaip analizinė funkcija juostoje D, yra mato $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$ atramos elementas, todėl bet kurios atviros polinomo $p(s)$ atvirosios aplinkos šio mato reikšmė yra griežtai teigiama. Taigi, turime, kad

$$P_{\underline{\zeta}} F^{-1}(G) > 0. \tag{4.2}$$

Pagal 3.2 lemą, tikimybinis matas $P_{T,F}$, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{\underline{\zeta}} F^{-1}$. Sujungę šią lemą su 2.1 lema ir pasinaudoję aibės G atvirumu, gauname nelygybę

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : F(\zeta(s+i\tau)) \in G\} \geq P_{\underline{\zeta}} F^{-1}(G).$$

Iš čia ir (4.2) nelygybės išplaukia nelygybė

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:F(\zeta(s+i\tau))\in G\}\geq 0.$$

Prisiminę aibės G apibrėžimą, pastarąją nelygybę galime užrašyti pavidalu

$$\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))-p(s)|<\frac{\epsilon}{2}\}>0.$$

Belieka šioje nelygybėje polinomą $p(s)$ pakeisti funkcija $f(s)$. Iš (4.1) nelygybės ir

$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))-p(s)|<\frac{\epsilon}{2} \tag{4.3}$$

randame, kad

$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))-f(s)|$$

$$\leq\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))-p(s)|+\sup_{s\in K}|f(s)-p(s)|$$

$$<\frac{\epsilon}{2}+\frac{\epsilon}{2}=\epsilon.$$

Iš čia turime, kad tie $\tau\in\mathbb{R}$, kuriems galioja (4.3) nelygybė, tenkina ir nelygybę

$$\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))-f(s)|\leq\epsilon.$$

Vadinasi,

$$\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))-f(s)|<\epsilon\}$$

$$\supset\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))-p(s)|<\frac{\epsilon}{2}\}.$$

Todėl gauname, kad

$$meas\{\tau\in[0,T]:\sup_{s\in K}|F(\zeta(s+i\tau),\zeta(s+i\tau,\alpha))-f(s)|<\epsilon\}$$

$$\geq meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha)) - p(s)| < \frac{\epsilon}{2}\}.$$

Iš čia ir (4.3) nelygybės išplaukia nelygybė

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s+i\tau), \zeta(s+i\tau, \alpha)) - f(s)| < \epsilon\} > 0.$$

Teorema įrodyta.

Universality of some composite functions

Andrė Miltinienė

(Summary)

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, α, $0 < \alpha \leq 1$, be a fixed parameter, and let $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha)$ denote the Riemann and Hurwitz zeta-function, respectively. It is well known that the functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha)$ with transcendental parameter α are universal in the sense that their shifts $\zeta(s + i\tau)$ and $\zeta(s + i\tau, \alpha)$ approximate any analytic function. Also, the functions $\zeta(s)$ and $\zeta(s, \alpha)$ are jointly universal, that is, their shifts simultaneously approximate every pair of analytic functions.

In the master work, we consider the universality of a composite function $F(\zeta(s), \zeta(s, \alpha))$, where $F : H^2(D) \to H(D)$, $H(D)$ is the space of analytic functions on $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$. We prove the following statement.

Suppose that α is transcendental and F is continuous. Let K be a compact subset of D with connected complement, and $f(s)$ be a continuous on K and analytic in the interior of K function. Then, for every $\epsilon > 0$,

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |F(\zeta(s + i\tau), \zeta(s + i\tau, \alpha)) - f(s)| < \epsilon\} > 0.$$

LITERATŪRA

1. P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Willey, New York, 1968, Second ed., Wiley-Interscience, 1999.

2. A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

3. A. Laurinčikas, Universality of the Riemann zeta-function, *J.Number Theory*, **130** (2010), 2323 – 2331.

4. A. Laurinčikas, On the universality of the Hurwitz zeta-function, Intern. J.Number Theory, **9**, No 1 (2013), 155 – 165.

5. A. Laurinčikas, R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

6. H. Mishou, The joint value distribution of the Riemann zeta-function and Hurwitz zeta functions, *Lith. Math.J.*, **47**(1) (2007), 32 – 47.

7. V. Paulauskas, A. Račkauskas, *Funkcinė analizė*, Vilnius, 2007.

8. J. L. Walsh, *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, Vol. **20**, Amer. Math. Soc. Coll. Publ. 1960.