ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Aušra Vaičiūtė

Ribinė teorema su svoriu Hurvico dzeta funkcijai su algebriniu iracionaliuoju parametru

Magistro darbas

Darbo vadovė
Prof. dr. R. Kačinskaitė

Šiauliai
2013

Turinys

1. Įvadas

Kompleksinio kintamojo funkcijos tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilute yra vadinamos dzeta funkcijomis. Skaičių teorijoje jos užima svarbią vietą.

Tarkime, kad $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, $\{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ – kompleksinių skaičių seka, $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ – didėjanti teigiamų realiųjų skaičių seka, $\lim\limits_{m\to\infty} \lambda_m = +\infty$. Dirichlė eilute yra vadinama eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}.$$

Jeigu $\lambda_m = \log m$, tai pastaroji eilutė yra vadinama paprastąją Dirichlė eilute, o jos pavidalas yra

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Viena iš dzeta funkcijų yra Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$. Ją pirmą kartą 1882 metais aprašė vokiečių matematikas Adolfas Hurvicas (Hurwitz) (1859–1919) nagrinėdamas tam tikras Dirichlė funkcijos $F(s) = \sum (\frac{D}{n}) \frac{1}{n^s}$ savybes, nusakančias binarinių kvadratinių formų skaičių klasės kilmę [4].

Tegul α yra realusis skaičius, $0 < \alpha \leq 1$. Pusplokštumėje $\sigma > 1$ Hurvico dzeta funkcija yra apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$ išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Kai $\alpha = 1$, Hurvico dzeta funkcija virsta gerai žinoma Rymano dzeta funkcija

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Priminsime, kad, kai $\sigma > 1$, funkcija $\zeta(s)$ gali būti išreiškiama Oilerio sandauga pagal pirminius skaičius

$$\zeta(s) = \prod_{p \ -\text{pirminis}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Kai parametras $\alpha = \frac{1}{2}$, Hurvico dzeta funkcija gali būti užrašoma per Dirichlė L funkciją, t.y.

$$\zeta\left(s, \frac{1}{2}\right) = 2^s L(s, \chi);$$

čia χ yra charakteris moduliu 2. Bendru atveju funkcija $\zeta(s,\alpha)$ neturi išraiškos Oilerio sandauga.

Hurvico dzeta funkcijos savybės priklauso nuo aritmetinės parametro α prigimties. Todėl jos reikšmių pasiskirstymo bei su juo susijusių problemų tyrimas yra įdomus ir svarbus analizinės skaičių teorijos uždavinys.

Funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ asimptotinį elgesį galima aprašyti ribinėmis teoremomis silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme. Sakome, kad tikimybinis matas P_n silpnai konverguoja į matą P, kai $n \to \infty$, jei kiekvienai realiai tolydžiai aprėžtai erdvės S funkcijai f

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP;$$

čia tikimybiniai matai P_n ir P yra apibrėžti erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$, o $\mathcal{B}(S)$ žymi metrinės erdvės S Borelio aibių klasę.

Ribines teoremas Hurvico dzeta funkcijai su racionaliuoju ir transcendenčiuoju parametru α įrodė R. Garunkštis, A. Laurinčikas, R. Macaitienė (žr.[7], [10]). Algebrinio iracionaliojo parametro atveju analogiškus rezultatus įvairiose erdvėse gavo A. Laurinčikas ir J. Štoidingas (Steuding) (žr.[6], [8], [9]).

Tegul α yra algebrinis iracionalusis skaičius. Apibrėžkime

$$\mathcal{L}(s) = \{\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}.$$

J. V. S. Kasels įrodė [2], kad mažiausiai 51 procentas $\mathcal{L}(\alpha)$ elementų yra tiesiškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$. Šį rezultatą išplėtė R. T. Vorlėjus [14], o ribinę aproksimaciją gavo P. Drungilas ir A. Dubickas [3]. Tegul $I(\alpha)$ yra maksimalus tiesiškai nepriklausomų elementų $\log(m+\alpha)$ iš $\mathcal{L}(\alpha)$ poaibis ir sakykime, kad $I(\alpha) \neq \mathcal{L}(\alpha)$. Apibrėžkime $D(\alpha) = \mathcal{L}(\alpha) \backslash \mathcal{I}(\alpha)$ (pagal mūsų reikalavimą $D(\alpha) \neq \varnothing$). Kiekvienam elementui $d_m = \log(m+\alpha) \in D(\alpha)$ aibė $\{d_m\} \cup I(\alpha)$ yra tiesiškai priklausoma virš $\mathbb{Q}$. Taigi egzistuoja baigtinis elementų $i_{m_1}, \ldots, i_{m_n} \in I(\alpha)$ skaičius, kad

$$k_0(m)d_m + k_1(m)i_{m_1(m)} + \ldots + k_n(m)i_{m_n(m)} = 0$$

su sveikaisiais nelygiais nuliui skaičiais $k_0(m), \ldots, k_n(m)$. Vadinasi,

$$\log(m+\alpha) = -\frac{k_1(m)}{k_0(m)} \log(m_1(m)+\alpha) - \ldots - \frac{k_n(m)}{k_0(m)} \log(m_n(m)+\alpha)$$

ir

$$m+\alpha = (m_1(m)+\alpha)^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}} \ldots (m_n(m)+\alpha)^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}}. \tag{1}$$

Sudarykime aibės $\mathbb{N}\cup\{0\}$ poaibius

$$\mathcal{M}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}\cup\{0\} : \log(m+\alpha) \in I(\alpha)\}$$

ir

$$\mathcal{N}(\alpha) = \{m \in \mathbb{N}\cup\{0\} : \log(m+\alpha) \in D(\alpha)\}.$$

Apibrėžkime torą

$$\Omega = \prod_{m\in\mathcal{M}(\alpha)} \gamma_m;$$

čia $\gamma_m = \gamma =: \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje visiems $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja normuotas tikimybinis Haro matas m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Pažymėkime $\omega(m)$ elemento $\omega \in \Omega$ projekciją į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. $\omega(m)$ pratęskime į visą $\mathbb{N}\cup\{0\}$ formule

$$\omega(m) = \omega(m_1(m))^{-\frac{k_1(m)}{k_0(m)}} \ldots \omega(m_n(m))^{-\frac{k_n(m)}{k_0(m)}},$$

jei $m \in \mathcal{N}(\alpha)$ ir galioja (1) sąryšis. Kai $\sigma > \frac{1}{2}$, tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą

$$\zeta(s, \alpha, \omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\omega(m)}{(m+\alpha)^s}. \tag{2}$$

Pažymėkime meas$\{A\}$ mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Tegul $T > 0$.

A teorema ([8]). *Tarkime, kad α – algebrinis iracionalusis ir $\sigma > \frac{1}{2}$. Tada tikimybinis matas*

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it, \alpha) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą

$$m_H(\omega \in \Omega : \zeta(\sigma, \alpha, \omega) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

.

Pastebėsime, kad A teoremos įrodymas pateiktas A. Laurinčiko ir J. Štoidingo [8] straipsnyje yra nepilnas. (2) formulėje yra naudojamas atsitiktinių elementų $\omega(m)$ ortogonalumas, tačiau pastarojo fakto įrodymas nėra baigtas.

Mūsų magistro darbo tikslas – įrodyti ribinę teoremą su svoriu Hurvico dzeta funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α kompleksinėje plokštumoje. Ją suformuluosime 2 skyriuje.

Darbas yra sudarytas iš 7 skyrių, literatūros sąrašo bei naudojamų žymėjimų paaiškinimo. Skyriaus pradžioje pirmiausiai yra suformuluojama pagrindinė jo teorema. Po to pateikiami kai kurių sąvokų apibrėžimai bei žinomi rezultatai, reikalingi atitinkamų teiginių įrodymui. Tada įrodomas pats skyriaus pagrindinis teiginys.

2. Pagrindinė teorema

Pateiksime pagrindinės magistro darbo teoremos formuluotę.

Tegul $w(t)$ yra aprėžtos variacijos teigiama funkcija intervale $[T_0, \infty)$, $T_0 > 0$ ir yra teisingas sąryšis

$$U = \lim_{T\to\infty} U(T, w) = \lim_{T\to\infty} \int_{T_0}^{T} w(t)dt = +\infty.$$

Taip pat pareikalaukime, kad, kai $\sigma > \frac{1}{2}$ ir $\sigma \neq 1$, visiems $v \in \mathbb{R}$ galiotų įvertis

$$\int_{T_0+v}^{T+v} w(u-v)|\zeta(\sigma+it, \alpha)|^2 dt = O\Big((1+|v|)U\Big). \tag{3}$$

Aibės A indikatoriaus funkciją pažymėkime $\mathbb{I}_A(t)$. Apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{T,w}(A) = \frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(t)\mathbb{I}_{\{t\in[0,T]:\zeta(\sigma+it,\alpha)\in A\}}dt, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

1 teorema. *Tarkime, kad α yra algebrinis iracionalusis, $\sigma > \frac{1}{2}$, o svorio funkcija $w(t)$ tenkina* (3) *sąlygą. Tada erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P toks, kad, kai $T \to \infty$, $P_{T,w}$ silpnai konverguoja į P.*

Darbe yra įrodomas tik tikimybinio mato egzistavimas. Išreikštinis pavidalas nėra gaunamas.

3. Pagalbiniai teiginiai su svoriu tore

Pagrindinis šio skyriaus tikslas – suformuluoti ir/ar įrodyti teiginius, kurie buvo taikomi 1 teoremos įrodyme.

3.1 Ribinė teorema su svoriu tore

Šiame skyriuje įrodysime ribinę teoremą su svoriu tore Ω.

Apibrėžkime tikimybinį matą

$$Q_{T,w}(A) = \frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(t) \mathbb{I}_{\{t \in [0,T] : ((m+\alpha)^{-it} : m \in \mathcal{M}(\alpha)) \in A\}} dt, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega). \tag{4}$$

2 teorema. *Tegul α yra algebrinis iracionalusis. Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis matas Q_ω toks, kad, kai $T \to \infty$, matas $Q_{T,w}$ silpnai konverguoja į Q_w.*

Tegul γ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje, o Q – erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ apibrėžtas tikimybinis matas.

1 apibrėžimas. Tikimybinio mato Q Furjė transformacija $g(k_1, \dots, k_m)$ apibrėžiama formule

$$g(k_1, \dots, k_m) = \int_{\gamma^m} x_1^{k_1} \dots x_m^{k_m} dQ;$$

čia $k_j \in \mathbb{Z}$, $x \in \gamma$, $j = 1, \dots, m$.

1 lema. *Tegul $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ seka, o $\{g_n(k_1, \dots, k_m)\}$ – atitinkamų Furjė transformacijų seka. Pareikalaukime, kad kiekvienai sveikųjų skaičių aibei $(k_1, \dots, k_m)$ egzistuotų riba*

$$g(k_1, \dots, k_m) = \lim_{n \to \infty} g_n(k_1, \dots, k_m).$$

Tada erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas Q toks, kad, kai $n \to \infty$, į jį silpnai konverguoja tikimybinis matas Q_n. Be to, $g(k_1, \dots, k_m)$ yra mato Q Furjė transformacija.

Tai 1.3.19 teorema [5] monografijoje.

2 teoremos įrodymas. Duali grupė Ω yra izomorfinė

$$\mathbb{D} = \bigoplus_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \mathbb{Z}_m,$$

čia $\mathbb{Z}_m = \mathbb{Z}$ visiems $m \in \mathcal{M}(\alpha)$. Tegul $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathcal{M}(\alpha)$.

Elemento $\underline{k} = \{k_m : m \in \mathcal{M}(\alpha)\} \in \mathbb{D}$ atvaizdis į Ω apibrėžiamas formule

$$\omega \to \omega^{\underline{k}} = \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \omega^{k_m}(m), \quad \omega \in \Omega;$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų $k_m, m \in \mathcal{M}(\alpha)$, nėra nuliai. Mato $Q_{T,w}$ Furjė transformacija $g_T(\underline{k})$ yra

$$\begin{aligned} g_T(\underline{k}) &= \int_{\Omega} \Big(\prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} \omega^{k_m}(m) \Big) dQ_{T,w} \\ &= \frac{1}{U} \int_{T0}^{T} w(t) \prod_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} (m+\alpha)^{-itk_m} dt \\ &= \frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(t) \exp \Big(it \sum_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} k_m \log(m+\alpha) \Big) dt. \end{aligned} \tag{5}$$

Parametras α yra algebrinis iracionalusis, todėl aibė $\{\log(m+\alpha) : m \in \mathcal{M}(\alpha)\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$.

Kadangi aibė $I(\alpha)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš $\mathbb{Q}$ ir $w(t)$ yra aprėžtos variacijos funkcija, tenkinanti (3) sąlygą, iš (5) gauname

$$g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \underline{k} = \underline{0}, \\ O\Big(\Big(U \Big| \sum_{m \in \mathcal{M}(\alpha)} k_m \log(m+\alpha) \Big| \Big)^{-1} \Big), & \text{jei} \quad \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases} \tag{6}$$

Iš pastarojo sąryšio seka, kad

$$\lim_{T \to \infty} g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jei} \quad \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases} \tag{7}$$

Todėl teoremos tvirtinimas seka iš 1 lemos. Nors pastarojoje lemoje toras Ω yra aprėžtas pagal pirminius skaičius, tačiau tvirtinimas yra teisingas visiems begalinia-mačiams torams.

3.2 Ribinė teorema su svoriu absoliučiai konverguojančioms eilutėms

Dabar įrodysime ribinę teoremą su svoriu absoliučiai konverguojančioms eilutėms.

Tegul $\sigma_0 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius. Sudarome eilutę

$$\zeta_n(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_n(m+\alpha)}{(m+\alpha)^s} = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp(-(\frac{m+\alpha}{n+\alpha})^{\sigma_0})}{(m+\alpha)^s}. \tag{8}$$

Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{T,n,w}(A) = \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(t) \mathbb{I}_{\{t\in[0,T]:\zeta_n(\sigma+it,\alpha)\in A\}} dt, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

3 teorema. *Tarkime, kad $\sigma > \frac{1}{2}$ ir α – algebrinis iracionalusis. Tada erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas $P_{n,w}$ toks, kad, kai $T \to \infty$, į jį silpnai konverguoja matas $P_{T,n,w}$.*

Šio skyriaus pagrindiniam rezultatui įrodyti mums reikės Oilerio gama funkcijos bei tolydžiųjų atvaizdžių savybių.

Oilerio gama funkcija pusplokštumėje $\sigma > 0$ yra apibrėžiama netiesioginiu integralu

$$\Gamma(s) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-x} x^{s-1} dx.$$

3 lema (Melino atvirkštinė formulė). *Visiems teigiamiems a ir b teisinga lygybė*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(s) a^s ds = e^{-a}.$$

Tai – 5.4.1 lema iš [5] monografijos.

Tarkime, kad S_1 ir S_2 yra metrinės erdvės. Nagrinėkime funkciją $u : S_1 \to S_2$. Erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$ pažymėkime tikimybinį matą P, kuris erdvėje $(S_2, \mathcal{B}(S_2))$ indikuotų vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1}, apibrėžiamą lygybe

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), \quad A \in \mathcal{B}(S_2).$$

3 apibrėžimas. Funkcija $u : S_1 \to S_2$ yra tolydi, jeigu $u^{-1}G_1$ yra atvira erdvėje S_1 kiekvienai atvirai aibei $G_1 \in S_2$.

4 lema. *Tegul $u : S_1 \to S_2$ yra tolydusis atvaizdis ir P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$. Tada $P_n u^{-1}$ taip pat silpnai konverguoja į Pu^{-1}.*

Tai – 1.1.16 teorema iš [5].

3 teoremos įrodymas. Tam, kad įrodytume 3 teoremą, pirmiausiai parodysime, kad eilutė apibrėžianti funkciją $\zeta_n(s,\alpha)$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$.

Pažymėkime

$$l_n(s,\alpha) = \left(\frac{s}{\sigma_0}\right)\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_0}\right)(n+\alpha)^s, \quad n \in \mathbb{N} \cup \{0\}.$$

Apibrėžkime

$$a_n(m,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \frac{l_n(s,\alpha)ds}{s(m+\alpha)^s} \tag{9}$$

ir

$$\zeta_n(s,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_0 - i\infty}^{\sigma_0 + i\infty} \zeta(s+z,\alpha) l_n(s,\alpha)\frac{dz}{z}. \tag{10}$$

Iš $l_n(s,\alpha)$ ir $\zeta_n(s,\alpha)$ apibrėžimų bei pritaikius 3 lemą gauname, kad

$$a_n(m,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int_{1-i\infty}^{1+i\infty} \Gamma(s)\left(\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_0}\right)^{-s} ds = \exp\left(-\left(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\right)^{\sigma_0}\right).$$

Iš čia seka, kad (8) išraiškoje esanti eilutė pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$ konverguoja absoliučiai.

Dabar apibrėžkime funkciją $h_{n,\sigma} : \Omega \to \mathbb{C}$ formule

$$h_{n,\sigma}(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{\exp\{(-\frac{m+\alpha}{n+\alpha})^{\sigma_0}\}\omega(m)}{(m+\alpha)^{\sigma}}, \quad \omega \in \Omega.$$

Kadangi (8) eilutė konverguoja absoliučiai, todėl eilutė apibrėžianti funkciją $h_{n,\sigma}$ taip pat konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \frac{1}{2}$, o ω atžvilgiu ir tolygiai. Vadinasi funkcija $h_{n,\sigma}$ yra tolydi. Be to,

$$h_{n,\sigma}(((m+\alpha)^{-it} : m \in \mathcal{M}(\alpha))) = \zeta_n(\sigma + it, \alpha).$$

Pritaikius 4 lemą gauname, kad $P_{T,n,w} = Q_{T,w} h_{n,\sigma}^{-1}$, (čia $Q_{T,w}$ yra matas esantis 2 teoremoje ir apibrėžtas (4) formule). Todėl, iš funkcijos $h_{n,\sigma}$ tolydumo, minėtos teoremos ir 4 lemos seka, kad, kai $T \to \infty$, matas $P_{T,n,w}$ silpnai konverguoja į $Q_{T,w} h_{n,\sigma}^{-1}$.

3.3 Aproksimavimas vidurkiu

Šiame skyriuje pateiksime funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ aproksimavimą su svoriu funkcija $\zeta_n(s,\alpha)$.

4 teorema. *Tegul α ir $w(t)$ yra tokie pat kaip ir* 1 teoremoje. *Tada*

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(t)|\zeta(\sigma+it,\alpha)-\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|dt=0.$$

Šiai teoremai įrodyti mums reikės gerai žinomos reziduumų teoremos, o taip pat Galagherio teoremos.

5 lema (reziduumų teorema). *Jei funkcija $f(s)$ yra analizinė uždaroje srityje $\overline{D}$ išskyrus baigtinį skaičių izoliuotųjų ypatingųjų taškų $s_1, s_2, \ldots, s_n$ srities D viduje, tai*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\partial D}=\sum_{k=1}^{n} Res_{s=s_k} f(s).$$

Šios teoremos įrodymą galima rasti [13].

6 lema (Galagherio lema). *Tegul T_0 ir $T \geqslant \sigma > 0$ yra realieji skaičiai, $\mathbb{T}$ yra baigtinė aibė iš intervalo $[T_0+\frac{\delta}{2}, T_0+T-\frac{\delta}{2}]$, o*

$$N_\delta=\sum_{\substack{t\in\mathbb{T}\\ |t-x|<\delta}}^{N} 1.$$

Tarkime, kad $S(x)$ yra tolydi kompleksines reikšmes įgyjanti funkcija intervale $[T_0, T+T_0]$, turinti tolydžią išvestinę intervale $(T_0, T+T_0)$. Tada

$$\sum_{t\in\mathbb{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leq \frac{1}{\delta}\int\limits_{T_0}^{T_0+T}|S(x)|^2dx+\Bigg(\int\limits_{T_0}^{T_0+T}|S(x)|^2dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}\Bigg(\int\limits_{T_0}^{T_0+T}|S'(x)|^2dx\Bigg)^{\frac{1}{2}}.$$

Tai – 1.4 lema iš [12].

4 teoremos įrodymas. Sakykime, kad σ_0 yra toks pat kaip ir 4 skyriuje, t. y. $\sigma_0 > \frac{1}{2}$. Kai $\sigma > \sigma_0$, $\zeta_n(s,\alpha)$ galima apibrėžti (8) formule.

Pritaikius reziduumų teoremą (5 lema) gauname, kad

$$\zeta_n(s,\alpha) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-\sigma-i\infty}^{\sigma_1-\sigma+i\infty} \zeta(s,\alpha) l_n(z,\alpha)\frac{dz}{z} + \zeta(s,\alpha) + \frac{l_n(1-s,\alpha)}{1-s};$$

čia $\sigma_1 > \sigma_0$ parenkame taip, kad $\sigma_1 < \sigma$. Tada

$$\zeta_n(s,\alpha) = \zeta(s,\alpha) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\sigma_1-\sigma-i\infty}^{\sigma_1-\sigma+i\infty} \zeta(s+z,\alpha) l_n(z,\alpha)\frac{dz}{z}.$$

Iš čia, kai $T \to \infty$, randame

$$\begin{aligned} &\frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(t)|\zeta(\sigma+it,\alpha) - \zeta_n(\sigma+it,\alpha)|dt \\ &\ll \int\limits_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_1-\sigma+iv,\alpha)| \left(\int\limits_{T_0+v}^{T+v} w(t-v)|\zeta(\sigma,\alpha)|dt\right) dv + o(1). \qquad (11) \end{aligned}$$

Funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ vidurkis yra aprėžtas pusplokštumėje $\sigma > 1$. Taip pat žinoma [11], kad teisingas įvertis

$$\frac{1}{T}\int\limits_{0}^{T} |\zeta'(\sigma+it,\alpha)|^2 dt \ll 1.$$

Pritaikius Galagherio teoremą (6 lema) ir (3) įvertį funkcijoms $w(t)$ ir $\zeta(s,\alpha)$, gauname

$$\begin{aligned} &\frac{1}{U}\int\limits_{T_0+v}^{T+v} w(t-v)|\zeta(\sigma+it,\alpha)|dt \\ &\ll \frac{1}{U}\left(\int\limits_{T_0+v}^{T+v} w(t-v)dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int\limits_{T_0+v}^{T+v} w(t-v)|\zeta(\sigma+it,\alpha)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}. \\ &\ll (1+|v|). \end{aligned}$$

Tada pagal (11) sąryšį

$$\limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\int\limits_{T_0}^{T} w(t)|\zeta(\sigma+it,\alpha) - \zeta_n(\sigma+it,\alpha)|dt$$

$$\ll \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_1 - \sigma + iv, \alpha)(1 + |v|)dv. \tag{12}$$

Parinkus σ_1 taip, kad $\sigma_1 - \sigma < 0$, ir iš $l_n(s, \alpha)$ apibrėžimo gauname

$$\lim_{n\to\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} |l_n(\sigma_1 - \sigma + iv, \alpha)|(1 + |\tau|)dv = 0.$$

Iš pastarojo sąryšio kartu su (12) įverčiu seka teoremos tvirtinimas.

3.4 Reliatyvusis kompaktiškumas

Šiame skyriuje įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,w} : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta ir reliatyviai kompaktiška (čia $P_{n,w}$ yra tikimybinis matas 3 teoremoje).

5 teorema. *Tegul $\sigma > \frac{1}{2}$. Tikimybinių matų šeima $\{P_{n,w} : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta.*

Priminsime reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo apibrėžimus.

4 apibrėžimas. Tikimybinių matų šeima P erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jeigu bet kokia šeimos $\{P\}$ seka turi silpnai konverguojantį posekį.

5 apibrėžimas. Erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ apibrėžtų tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra vadinama suspausta, jeigu bet kokiam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė K tokia, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$ visiems P iš $\{P\}$.

Mums taip pat reikės Prochorovo teoremų, kurios tarpusavyje susieja reliatyvų kompaktiškumą ir suspaustumą.

7 lema. *Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra suspausta, tai ji yra reliatyviai kompaktiška.*

8 lema. *Tegul S yra separabili pilna metrinė erdvė. Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra suspausta.*

Tai atitinkamai 1.1.12 ir 1.1.13 teoremos iš [5].

5 teoremos įrodymas. Parinkime skaičių $M > 0$. Tada

$$\frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(t)\mathbb{I}_{\{t\in[0,T]:|\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|>M\}}dt \ll \frac{1}{MU}\int_{T_0}^{T} w(t)|\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|dt. \tag{13}$$

Iš 3 teoremos ir (3) įverčio gauname, kad

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(t)|\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|dt \\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(t)|\zeta(\sigma+it,\alpha)-\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|dt \\
&\quad + \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\int_{T_0}^{T} w(t)|\zeta(\sigma+it,\alpha)|dt \\
&\ll 1 + \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U}\left(\int_{T_0}^{T} w(t)|\zeta(\sigma+it,\alpha)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll R < \infty.
\end{aligned} \tag{14}$$

Parinkime $\varepsilon > 0$ ir $M_\varepsilon = R\varepsilon^{-1}$. Tada iš 3 ir 7 lemų seka, kad

$$
\begin{aligned}
&P_{n,w}(\{s \in \mathbb{C} : |s| > M_\varepsilon\}) \\
&\qquad \leq \liminf_{T\to\infty} P_{T,n,w}(\{s \in \mathbb{C} : |s| > M_\varepsilon\}) \\
&\qquad \leq \liminf_{T\to\infty} \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(t) \mathbb{I}_{\{t\in[0,T]:|\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|>M_\varepsilon\}} dt \\
&\qquad \leq \sup_{n\in\mathbb{N}\cup\{0\}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} \mathbb{I}_{\{t\in[0,T]:|\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|>M_\varepsilon\}} dt \leq \varepsilon. \qquad (15)
\end{aligned}
$$

Apibrėžkime aibę $K_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} : |s| \leq M_\varepsilon\}$. Ji yra kompaktas. Atsižvelgus į (15) nelygybę gauname, kad

$$P_{n,w}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

visiems $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$. Tai reiškia, kad šeima $\{P_{n,w} : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. O pagal 7 lemą – ir reliatyviai kompaktiška.

4. Pagrindinės teoremos įrodymas

Esame pasiruošę įrodyti pagrindinę darbo teoremą. Tačiau pirmiausiai pateiksime teiginį apie atsitiktinių elementų sekos konvergavimą.

6 apibrėžimas. Sakome, kad atsitiktinių elementų seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal skirstinį į atsitiktinį elementą X, kai $n \to \infty$, jei elementų X_n skirstiniai silpnai konverguoja į elemento X skirstinį.

Tegul S yra separabili metrinė erdvė, o joje apibrėžta metrika ρ. Sakykime $Y_n, X_{1n}, X_{2n}, X_{3n}$ yra S-reikšmiai atsitiktiniai elementai apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), P_0)$.

9 lema. *Tarkime, kad, kai $n \to \infty$, tai visiems k, $X_{n_k} \xrightarrow{D} X_k$ ir $X_k \to X$, kai $k \to \infty$. Jei bet kokiam $\varepsilon > 0$ teisinga lygybė*

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} P_0\{\rho(X_{n_k}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

tai, kai $n \to \infty$, $Y_n \to X$.

Tai 4.2 teorema iš [1].

<u>**1 teoremos įrodymas.**</u> Tikimybinėje erdvėje $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), P_0)$ apibrėžkime atsitiktinį kintamąjį $\theta = \theta_{T,w}$ formule

$$P_0(\theta_{t,w} \in A) = \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(t) \mathbb{I}_A dt, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

Tegul $X_{T,n,w} = \zeta_n(\sigma + i\theta_{T,w}, \alpha)$. Parinkime kompleksines reikšmes įgyjantį elementą $X_{n,w}$, turintį skirstinį $P_{n,w}$. Tada, atsižvelgus į 3 teoremą, kai $T \to \infty$, $X_{T,n,w}$ konverguoja pagal skirstinį į $X_{n,w}$, t. y.

$$X_{T,n,w} \xrightarrow[T\to\infty]{D} X_{n,w}. \tag{16}$$

Pagal 5 teoremą egzistuoja seka $\{P_{n_k,w}\} \subset \{P_{n,w}\}$ tokia, kad erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ matas $P_{n_k,k}$ silpnai konverguotų į tam tikrą tikimybinį matą P, kai $k \to \infty$. Vadinasi,

$$X_{n_k,w} \xrightarrow[k\to\infty]{D} P. \tag{17}$$

Apibrėžkime dar vieną kompleksines reikšmes įgyjantį elementą

$$X_{T,w} = \zeta(\sigma + i\theta_T, \alpha).$$

Pritaikius 4 teoremą randame, kad kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$
\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} P_0(|X_{T,w}(\sigma) - X_{T,n,w}(\sigma)| \geq \varepsilon) \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{U} \int\limits_{T_0}^{T} w(t) \mathbb{I}_{\{t\in[0,T]:|\zeta(\sigma+it,\alpha)-\zeta_n(\sigma+it,\alpha)|\geq\varepsilon\}} dt \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon U} \int\limits_{T_0}^{T} w(t) |\zeta(\sigma+it,\alpha) - \zeta_n(\sigma+it,\alpha)| dt = 0.
\end{aligned}
$$

Pastaroji lygybė kartu su (16) ir (17) sąryšiais bei 9 lema parodo, kad

$$X_{T,w} \xrightarrow[T\to\infty]{D} P.$$

Tai yra ekvivalentu mato $P_{T,w}$ konvergavimui į matą P. Teorema įrodyta.

5. Išvados

Magistro darbe nagrinėjamas Hurvico dzeta funkcijos su algebriniu iracionaliuoju parametru reikšmių pasiskirstymas. Taip pat yra naudojama teigiama aprėžtos variacijos funkcija $w(t)$, tenkinanti tam tikras sąlygas. Įrodoma, kad funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ yra teisinga ribinė teorema su svoriu tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje. Darbe nėra gautas išreikštinis mato pavidalas.

6. Santrauka

Sakykime $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, α – realusis skaičius, $0 < \alpha \leq 1$, o $\zeta(s, \alpha)$ – Hurvico dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m + \alpha)^s}.$$

Darbe įrodyta, kad funkcijai $\zeta(s, \alpha)$ su algebriniu iracionaliuoju parametru α yra teisinga ribinė teorema su svoriu kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$.

Tegul $w(t)$ yra realioji aprėžtos variacijos funkcija intervale $[T_0, \infty)$, $T_0 > 0$, tokia, kad

$$U = \lim_{T \to \infty} \int_{T_0}^{T} w(t) dt = +\infty$$

bei galioja įvertis

$$\int_{T_0+v}^{T+v} w(u - v) |\zeta(\sigma + it, \alpha)|^2 dt = O(U(1 + |v|)).$$

Tada, kai $\sigma > \frac{1}{2}$, tikimybinis matas

$$\frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(t) \mathbb{I}_{\{t \in [0,T] : \zeta(\sigma + it, \alpha) \in A\}} dt, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į tam tikrą erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuojantį tikimybinį matą P.

7. Summary

Limit theorem with weight for the Hurwitz zeta-function with an algebraic irrational parameter

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, α is a real number, $0 < \alpha \leq 1$, and $\zeta(s, \alpha)$ is the Hurwitz zeta-function, in the half-plane $\sigma > 1$, defined by the series

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}.$$

In this work, it is proved that a limit theorem with weight on the complex plane $\mathbb{C}$ for the function $\zeta(s, \alpha)$ with an algebraic irrational parameter α is true.

Let $w(t)$ be a real function of bounded variation on $[T_0, \infty)$, $T_0 > 0$, such that

$$U = \lim_{T \to \infty} \int_{T_0}^{T} w(t) dt = +\infty,$$

and the estimate

$$\int_{T_0+v}^{T+v} w(u-v) |\zeta(\sigma + it, \alpha)|^2 dt = O(U(1 + |v|))$$

valids. Then, for $\sigma > \frac{1}{2}$, there exists a probability measure P on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ such that the probability measure

$$\frac{1}{U} \int_{T_0}^{T} w(t) \mathbb{I}_{\{t \in [0,T] : \zeta(\sigma+it,\alpha) \in A\}} dt, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

converges weakly to P as $T \to \infty$.

Literatūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Wiley, New York, 1968.

[2] J. W. S. Cassels, Footnote to a note of Davenport and Heilbronn, *J. London Math. Soc.*, **36**, 171–184 (1961).

[3] P. Drungilas, A. Dubickas, A multiplicative dependence of shifted algebraic numbers, *Colloq. Math.*, **96**(1), 75–81 (2003).

[4] A. Hurwitz, Einige Eigenshaften den Dirichletschen Funktionen $F(x) = \sum(\frac{D}{n})\frac{1}{n^s}$, die bei der Bestimmung der Klassenzahlen binärer quadratischer Formen auftreten, *Schlömilch Z.*, **XXVII**, 86–102 (1882) = *Zeitschrift Math. Physik*, **27**, 86–101 (1889).

[5] A. Laurinčikas, *A Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[6] A. Laurinčikas, A limit theorem for the Hurwitz zeta-function with an algebraic irrational parameter, *J. Math. Sciences*, **137**(2), 4684–4689 (2006).

[7] A. Laurinčikas, R. Garunkštis *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[8] A. Laurinčikas, J. Steuding, A limit theorem for Hurwitz zeta function with an algebraic irrational parameter, *Arch. Math.*, **85**, 419–432 (2005).

[9] A. Laurinčikas, J. Steuding, A limit theorem for the Hurwitz-functions with algebraic irrational parameters, *Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Compt.*, **27**, 15–30 (2007).

[10] R. Macaitienė, A limit theorem for the Hurwitz zeta-function in the space of analytic functions, *Fiz. Mat. Fak. Moksl. Semin. Darb.*, **5**, 76–89 (2002).

[11] A. Makulavičius, *Hurvico dzeta funkcijos aproksimavimas pagal vidurkį absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms*, Bakalauro darbas, Šiaulių universitetas, Šiauliai, 2007.

[12] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[13] A. Nagelė, L. Papreckienė, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*, Žara, Vilnius, 1996.

[14] R. T. Worley, On a result of Cassels, *J. Austral. Math. Soc.*, **11**, 191–194 (1970).

Žymėjimai

p	– pirminis skaičius
k, l, m, n, j	– natūralieji skaičiai
$\mathbb{N}$	– natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{Z}$	– sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	– realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{Q}$	– racionaliųjų skaičių aibė
$\mathbb{C}$	– kompleksinių skaičių aibė
i	– menamasis vienetas, $i = \sqrt{-1}$
$s = \sigma + it$	– kompleksinis kintamasis
$\mathrm{Re}s = \sigma$	– realioji s dalis
$\mathrm{Im}s = t$	– menamoji s dalis
$\mathrm{meas}\{A\}$	– aibės A Lebego matas
$\xrightarrow{D}$	– konvergavimas pagal skirstinį
$\mathcal{B}(S)$	– erdvės S Borelio aibių klasė
$\Gamma(s)$	– Oilerio gama funkcija pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama integralu $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$
$\zeta(s)$	– Rymano dzeta funkcija puplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute $\zeta(s) = \sum\limits_{m=1}^\infty m^{-s}$, analiziškai pratęsiama į visą $\mathbb{C}$
$\mathbb{I}(A)$	– aibės A indikatorius
$\log m$	– m natūrinis logaritmas, $\log m = \ln m$