Turinys

1. ĮVADAS

1.1 *Tyrimo objektas*

Šiame darbe nagrinėjamas klasikinis rizikos modelis aprašantis draudimo bendrovės kapitalo kitimą. Pagal šį modelį draudiko kapitalas (angl. *insurer's surplus*) kinta pagal formulę:

$$U(t) = u + ct - S(t)\,,\ S(t) = \sum_{i=}^{N(t)}$$

čia u – kapitalas laiko momentu $t =$, $c >$ – intensyvumas tolygiai mokamų įmokų (premijų), $S(t)$ – bendras žalų kiekis iki laiko momento $t >$, $N(t)$ – Puasono procesas su intensyvumu λ ($\lambda >$, $Y_1, \ldots$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę, neneigiami atsitiktiniai dydžiai, nepriklausomi nuo atsitiktinio proceso $N(t)$.

Analizuoti draudiko kapitalo kitimams Hans U. Gerber ir Elias S.W. Shiu [2] pasiūlė funkciją, kuri apjungė pagrindinius 3 dydžius, nusakančius $U(t)$ kitimo kritines reikšmes: bankroto tikimybę, kapitalo kiekį prieš ir patirtą nuostolį po bankroto. Ta funkcija dabar vadinama Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija. Atskiru atveju ši funkcija parodo būsimojo draudimo bendrovės bankroto dabartinę vertę. Šią funkcija mes ir tiriame šiame darbe, kai žalų dydžiai $Y_1, \ldots$ pasiskirstę pagal Pareto dėsnį.

1.2 *Darbo tikslas ir uždaviniai*

Darbo tikslas – Pritaikyti skaitinius metodus diskontuotos Gerber-Shiu baudos funkcijos reikšmėms skaičiuoti.

Uždaviniai:

1. Sukonstruoti algoritmą, kuriuo naudojantis gautume Gerber-Shiu baudos funkcijos reikšmes.
2. Lentelių pagalba parodyti funkcijos priklausomybę nuo skirtingų modeliuojančių parametrų reikšmių.

1.3 *Temos aktualumas*

Nagrinėjant Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkciją didelis dėmesys buvo skirtas visai eilei skirstinių klasių, bet nepagrįstai primiršti pasiskirstymai su sunkia uodega (angl. *heavy tailed*). Šiame darbe naudojamas Pareto skirstinys ne išimtis. Iš dalies taip daroma buvo dėl sudėtingų skaičiavimų. Iki šiol nėra žinoma tiksli analizinė Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija žaloms pasiskirsčiusioms pagal Pareto dėsnį, nes kaip bus parodyta vėliau, norint ją paskaičiuoti reikia rasti n-tąją sąsūka transformuotos Pareto pasiskirstymo funkcijos. Šiai dienai nėra netgi iki galo paskaičiuotos sąsūkos bendruoju atveju paprastos Pareto pasiskirstymo funkcijos visiems laipsnio rodikliams ir visoms argumento reikšmėms. Taigi nagrinėjant mūsų darbe keliamą uždavinį taikomi kiti metodai. Apie tai plačiau bus parašyta 2 skyriuje.

Kalbant apie patį Pareto skirstinį būtina paminėti, jog šis skirstinys gerai žinomas ne tik draudimo, bet ir finansų bei eilių teorijoj. Taip pat didelis dėmesys skiriamas „ilgos uodegos“ savybių taikymui šiuolaikiniame versle žr. [8] [9]. Draudime šie skirstiniai atsiranda tada, kai modeliuojami galimi staigūs pokyčiai sukeliantys staigią žalų kiekio ir dydžio iškrovą – stichinės nelaimės, ekonominės krizės, naftos kainų šuoliai ar didelių korporacijų žlugimas, drastiški nepalankūs politiniai sprendimai ir pagaliau teroro aktai. Tokie modeliai ypač šiais permainų laikais yra itin svarbūs.

1.4 *Darbo struktūra*

Darbą sudaro 3 skyriai. Įvade aptariami tikslai ir uždaviniai, bei trumpai pristatomas nagrinėjamas modelis. 2 skyriuje plačiau aptariamas nagrinėjamas bankroto modelis, bei padaryta gretutinių tyrimų apžvalga bei analizė. 3 skyriuje sprendžiami sau iškelti klausimai bei uždaviniai. Rezultatai pateikiami lentelių pagalba.

Visame darbe naudojamas formulių žymėjimas pvz. (1.3), kur pirmasis skaičius žymi skyriaus numerį, antrasis formulės eiliškumą tame skyriuje. Paveikslėliai žymimi visame darbe paprasto eiliškumo tvarka pvz. (pav. 2).

Prieduose pateikiama papildoma informacija naudinga gilinantis į darbe pristatomą uždavinį. Priede A pateikta glausta kai kurių Eksponentinio integralo savybių santrumpa. Priede B pateiktas *Maple* matematiniame pakete realizuotų skaičiavimų kodas.

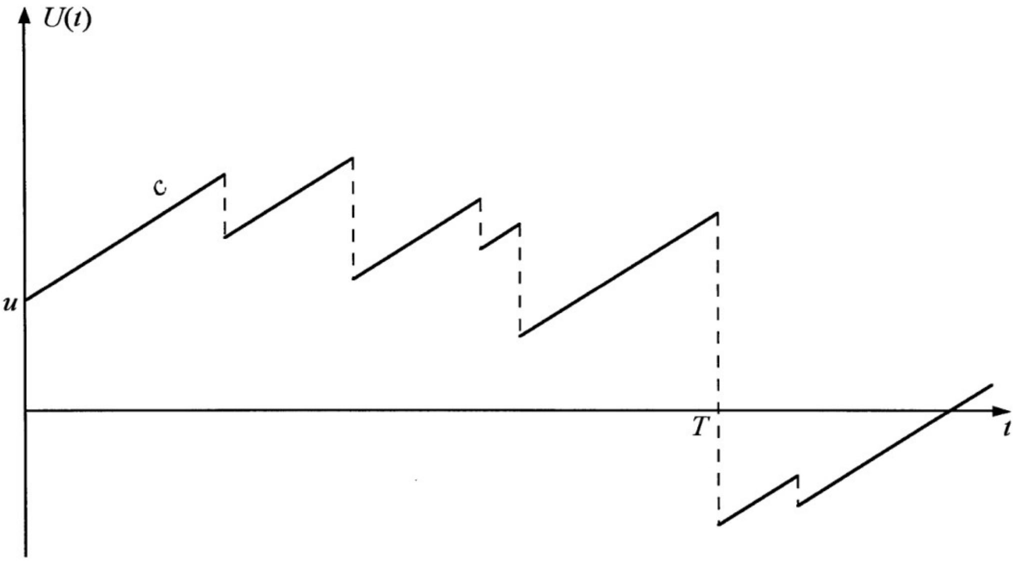
2. ANALITINĖ DALIS

2.1 *Modelio aprašymas*

Darbe nagrinėjame klasikinį draudimo bendrovės kapitalo kitimo modelį. Draudiko kapitalą sudaro prie pradinio draudimo bendrovės turto (pradinis fondas) pridedamos įmokos bei atimamos išmokėtos žalos. Klasikiniame modelyje draudiko kapitalas kinta pagal formulę:

$$U(t) = u + ct - S(t) \tag{2.1}$$

Čia $U(t)$ – draudimo įmonės kapitalas (angl. insurers surplus) laiko momentu t, $t \geq 0$, u – pradinis kapitalas. $S(t)$ – išmokėtos žalos iki laiko momento t.



1 pav. Draudimo bendrovės kapitalo kiekio kitimo kreivės pavyzdys

Iš 1 pav. matyti jog $U(t)$ didėja tiesiškai su krypties koeficientu c iki to laiko momento t, kada įvyksta žala. Laiko momentu, kai įvyksta žala $U(t)$ sumažėja tos žalos dydžiu. Svarbus momentas šiame procese yra draudiko perviršio kritimas žemiau 0. Laiko momentą, kai $U(t)$ reikšmė pirmą kartą krenta žemiau *0*, vadinsime draudimo įmonės bankrotu (angl. *time of ruin*). Pažymėkime šį laiko momentą *T*. Dydis

$$\psi(u) = P(T < \infty) \tag{2.2}$$

vadinamas draudiko bankroto tikimybe. u – įmonės kapitalas laiko momentu $t = 0$.

Plačiau panagrinėkime (2.1) lygybės dešinės pusės trečiąjį narį. Žalų atėjimui į sistemą aprašyti reikia 2 atsitiktinių procesų. Pirmiausia žala įvyksta kažkokiu atsitiktiniu laiko momentu *t*. Atsitiktinius dydžius W_i, $i =$ vadinsime sistemos laukimo laiko tarpais tarp dviejų iš eilės einančių žalų atėjimo momentų (angl. *waiting time*). Pažymėkime T_i – laiko momentą i-tosios žalos (paraiškos) atėjimo į sistemą. Mūsų nagrinėjamame modelyje, pagal susitarimą, dvi žalos negali įvykti tuo pačiu laiko momentu. Tada

$W_1 = \quad = \quad - \quad >$

Atsitiktinį dydį, kiekį žalų įvykusių iki tam tikro laiko momento t, žymėsime N(t). Akivaizdu jog kol $N(t) =$ tol $S(t) =$. Bendru atveju

$S(t) = \quad + \quad + \quad +$

Čia Y_i – individualių žalų dydžiai.

Perrašykime (2.1) pakeičiant S(t) narį.

$$U(t) = \quad + \quad - \sum_{i=} \qquad (2.3)$$

Ši lygybė dar vadinama klasikinio rizikos modelio matematine išraiška. Mūsų darbe ir remsimės būtent šiuo modeliu. Tarsime jog Y_i $(i =$ – nepriklausomi, vienodai pasiskirstę, absoliučiai tolydūs, teigiami atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal Pareto dėsnį, kurį plačiau aptarsime 2.2 poskyriuje. Taipogi turėsime omeny jog Y_i nepriklauso nuo $N(t)$. Be to, kaip jau minėjome, $N(t)$ – yra Puasono procesas su parametru λ. Todėl galima užrašyti (žr. [5])

$N(t) = \quad \geq \quad = \quad + \quad + \quad + \quad \leq \quad ,$

čia W_i, $i =$, yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę teigiami atsitiktiniai dydžiai pasiskirstę pagal eksponentinį dėsnį su parametru λ, t.y.:

$$P(W < \quad = \begin{cases} & < \\ & \geq \end{cases}$$

Norint „suvaldyti“ atsitiktinį procesą $U(t)$ (draudimo bendrovės pelno siekimo prasme) reikia nustatyti dydį c tokį kad $P(T < \infty \quad <$. Tai bus tik tuo atveju (žr. [5]) kai

$EY - \quad < \quad .$

Iš čia gauname:

$EY - \frac{}{\lambda} < \quad .$

Vadinasi turi būti:

$c = \quad + \quad .$

čia $\theta >$ yra santykine draudimo priemoka (angl. *security loading*).

2.2 *Pareto skirstinys*

Savo darbe žalų dydžiams pasirinkome Pareto skirstini. Italų ekonomisto vardu pavadintas tikimybinis skirstinys plačiai žinomas. Ypač socialinės ekonomikos tyrinėjimuose [6]. Iš šio skirstinio tyrinėjimų kilo Pareto taisyklė 80 – 20 (angl. pareto principal). Ji teigia jog daugeliui reiškinių 80% pasekmių yra sukeltos 20% priežasčių. Pavyzdį galėtume paimti žmonių populiaciją tada ši taisyklė sako jog 80% turto valdo 20% populiacijos. V.Pareto pastebėjo jog pajamų pasiskirstymas populiacijoje elgiasi panašiai į funkciją $Cx^{-\alpha}$, kur C realus skaičius, o $x >$. Konkrečius atvejus tyrę ir kritikavę tokią išraišką (kaip priemonę modeliuoti soc. ekonominius procesus) priėjo prie bendros tuo pačiu ir Pareto šalininkams nuomonės, jog didelėms argumento x reikšmėms panaši pasiskirstymo funkcijos išraiška visiškai tiksliai apibudina įvykių populiacijas. Savo ruožtu laipsnio rodiklis α, tam tikra prasme, atspindi populiacijos gerovę(dar vadinamas išsibarstymo laipsniu, arba ne(to)lygumu (angl. inequality of income distribution).

Pareto skirstinys priklauso skirstinių klasei su sunkiomis/ilgomis uodegomis (heavy/long tail). Šie skirstiniai gerai atitinka realius ekonominius procesus puikiai tinka ir yra dažnai naudojama modeliuoti draudiminius procesus įvertinant galimus staigius katastrofinius nuostolius. Pareto skirstinys turbūt yra dažniausiai naudojamas iš šios skirstinių klasės dėl santykinai paprastos išraiškos. Tai ir yra priežastys kodėl buvo pasirinktas šis skirstinys.
Bendru atveju Pareto skirstinys atrodo taip:

$$F(x) = \; - \left(\qquad \right),$$

čia x_m – postūmio koeficientas. Mūsų darbe imame šiek tiek supaprastintą Pareto skirstinio versiją.

$$H(x) = \; - \frac{1}{(1+ \qquad}, \; x \geq \; .$$

Tankis tokiu atveju:

$$h(x) = \frac{1}{(1+ \qquad}, \; x \geq \; .$$

Vardiklyje prie argumento reikšmės pridedame 1 tam, kad skirstinys prasidėtų lygiai taške $x =$.

2.3 *Diskontuota Gerber-Shiu baudos funkcija*

1998m. savo straipsnyje [2] matematikai H. Gerber ir E. Shiu pasiūlė nagrinėti ne bendrą draudiko portfelio bankroto tikimybę, o kitą dydį, dabar žinomą šių mokslininkų vardo funkciją. Ši nauja funkcija apjungė kelias ligi tol buvusias problemas į vieną. Trys pagrindiniai klausimai draudikui buvo bankroto tikimybė (bendra arba per tam tikrą laiko intervalą) arba bankroto laikas (angl. time of ruin), bei du dydžiai susieję su bankroto įvykiu – draudiko perviršis prieš pat įvykstant bankrotui (angl. surplus before ruin) ir deficitas kapitalo susidaręs po bankroto (angl. deficit after the ruin). Be to buvo įvertinta, jog kapitalas nuolatos auga jį investuojant su tam tikra palūkanų norma. Taigi buvo pasiūlyta nagrinėti tokią funkciją:

$$E\{e^{-} \; w(U(T- \quad |)I_{(T<\infty} \}, \tag{2.4}$$

čia δ – palūkanų norma, $w(U(T- \quad |)$ neneigiama funkcija reprezentuojanti baudą (nuostolius) įvykus bankrotui, kur $U(T-$ – kapitalo kiekis prieš išmokant žala, po kurios įvyksta bankrotas, $|U(T)|$ - deficitas išmokėjus tą žalą. $I_{(A)}$ – indikatorinė funkcija, lygi 1, jei A įvyko ir 0 priešingu atveju.

Nesunku pastebėti jog paėmus $\delta =$ ir $w(U(T- \quad \equiv$ gausime jau minėtą bankroto tikimybę.

Akivaizdu jog Gerber-Shiu funkcijos reikšmės priklauso nuo eilės parametrų – Puasono proceso parametro λ, pradinio kapitalo u, palūkanų normos δ, žalų dydžių pasiskirstymo funkcijos, funkcijos $w(U(T- \quad |)$ parinkimo. Tačiau literatūroje priimta žymėti supaprastintai $\psi \quad \delta$.

Diskontuota Gerber-Shiu baudos funkcija yra nagrinėjama daugeliu aspektų. Vienuose straipsniuose kreipiamas dėmesys į kapitalą prieš ir po bankroto momento taip įvertindami patį bankroto faktą draudimo bendrovei kažkokia finansine išraiška, bet neatsižvelgiant į palūkanų normų įtaką (nagrinėjama funkcija $\psi \quad \delta =$). Kituose šaltiniuose nagrinėjama ši funkcija nusistatant $w(U(T- \quad \equiv$, kitaip tariant vadovaujantis logika jog įsivertinam bankrotą konkrečiam santykiniam dydžiui. Tada turim atvejį:

$$\psi \quad \delta = \quad {}_{T<\infty} \}. \tag{2.5}$$

Būtent tokio pavidalo funkcijos reikšmių mes ir ieškosime savo darbe. Literatūroje šis atvejis dar vadinamas bankroto laiko Laplaso transformacija.

2.4 *Bibliografinis tyrimas*

Kaip jau buvo minėta įvadinėje dalyje prieš tai kai buvo sugalvota Gerber-Shiu baudos funkcija buvo nagrinėjama paprasto bankroto tikimybė baigtiniam arba begaliniam laikotarpiams. Pasiūlyta nauja funkcija nors ir uždavė naujus parametrus ir apribojimus, tačiau galima sakyti apibendrino prieš tai buvusią funkciją bankroto tikimybei gauti. Taip galima teigti dėl to, jog buvusioji funkcija yra ne kas kitas kaip diskontuotos Gerber-Shiu baudos funkcijos atskiras atvejis. Taigi mūsų klasifikacijoje pirmiausia išskirsime būtent šį atskirąjį atvejį (palūkanų normai $\delta =$, baudos funkcijai $w(U(T-$ $\equiv$.

Daugeliui atvejų neesant analizinei išraiškai norimų funkcijų, nagrinėjami asimptotiniai uždaviniai. Nemažai diskusijų sukelia įvairios asimptotinės formulės bankroto teorijos (angl. *ruin theory*) aspektams nagrinėti vien dėl to jog dalis jų pradeda galioti su nebereikšminai dideliais pradiniais draudiko kapitalais. Tačiau tai priklauso nuo konkrečių funkcijų. Dažnai tokie sprendimai yra ne tik pakankamai tikslūs, bet ir eliminuoja nereikšmingus problemų aspektus, kurie tik sukelia sunkumus skaičiavimuose. Pavyzdžiui Leipus ir Šiaulys [12] gavo asimptotines išraiškas bankroto tikimybių baigtiniam laiko intervalui žaloms su sunkių uodegų klasės skirstiniais:

$$\psi \qquad \frac{1}{\mu}\int$$

visiems $t \in$, kur $f(x)$ parinkta didėjanti f-ja, γ parinkta teigiama konstanta. $\mu >$ - santykinė draudimo priemoka, $\overline{B}(u) = \; -$ pasiskirstymo f-jos uodega.

Pereikime prie Pareto skirstinių, kurie yra plačiai naudojami dėl savo paprastos išraiškos (lyginant su kitais sunkios uodegos klasės skirstiniais). Problemos tokiems modeliams prasideda tuomet, kada reikia analiziškai skaičiuoti Paretinių skirstinių sąsūkas. Ramsay [14] pavyko paskaičiuoti sąsūkas sveikiems laipsnio α rodikliams imant pasiskirstymo funkciją:

$$F(x) = \; -\left(\qquad \right) \quad , x > \qquad \in \mathrm{N}$$

Prieš Ramsay literatūroje buvo aprašyti atvejai tik kai $\alpha =$, $0 < \; <$, $1 < \; <$ imant paprastą Pareto skirstinį. Vėliau Albrecher ir Kortschak [13] praplėtė Ramsay rezultatus iki bendrosios formos Pareto skirstinio su tankiu:

$$f(x) = \qquad ^{+} \quad , x > \frac{1}{d} \qquad > \qquad \geq$$

tačiau gauti jau buvo tik apytiksliai rezultatai.

Pereikime prie diskontuotos Gerber-Shiu baudos f-jos atvejui apibrėžtam išraiška (1.7). Gan geros asimptotinės išraiškos yra gautos Tang ir Wei darbe [7].Čia nagrinėjamas atvejis, kai žalų skirstinys priklauso tokiai klasei skirstinių, kur pasiskirstymo funkcijos uodegos ekvivalenčios sąsūkų uodegoms. Čia buvo gauta nagrinėjamo pavidalo diskontuota baudos funkcija tokiai skirstinių klasei. Pavyzdžiui, žaloms turinčioms tankio funkciją (inverse Gaussian distribution):

$$f(x) = \sqrt{\frac{\beta}{2\pi}} \quad \left\{ \qquad \right\}, \ \beta \ \mu > \ ,$$

gauta:

$$\psi \quad \delta \qquad 97 \int \qquad dx .$$

Kelios asimptotinės formulės gautos Šiaulio ir Asanavičiūtės [1]. Čia gautos asimptotinės formulės žaloms pasiskirsčiusioms pagal skirstinius iš sunkios/ilgos uodegos (sub eksponentinių) skirtinių klasės. Gauta jog didelėms pradinio kapitalo x reikšmėms modelyje, kai žalos pasiskirstę pagal Pareto skirstinį diskontuota Gerber-Shiu baudos funkcija turi tokį pavidalą:

$$\psi \quad \delta \quad \begin{cases} \qquad - \qquad \delta > \\ \qquad \qquad \delta = \end{cases}$$

čia λ – Puasono proceso parametras, θ – santykinė draudimo priemoka.

Imant kitus skirstinius galima paminėti tikrai nemažą kiekį straipsnių, kuriuose gautos asimptotinės arba analizinės Gerber-Shiu baudos f-jos išraiškos. Galima paminėti Kokso pasiskirstymui [15], žaloms pagal eksponentinį skirstinį Drekic ir Wilmont [16], mišriam eksponentiniam skirstiniui asimptotika Šiaulys ir Kočetova [12].

3. TIRIAMOJI DALIS

Antrame skyriuje šnekėjome tik apie 2 šio uždavinio sprendimo būdus: analizinį bei asimptotinį. Būtų idealu jei kiekvieną uždavinį galėtume išspręsti analiziniais metodais. Akivaizdu, kad uždavinių, išsprendžiamų analiziniais metodais, klasė yra nepalyginamai mažesnė už analiziškai neišsprendžiamų uždavinių klasę. Todėl turime kalbėti apie apytikslius metodus. Reikėtų paminėti jog yra trečias panašių uždavinių sprendimo metodas – modeliavimas paremtas atsitiktinių skaičių generavimu. Pastarojo metodo mes netaikėme sprendžiant mūsų uždavinį. Bandysime pritaikyti skaitinius metodus, bei asimptotiką.

3.1 *Atstatymo lygtis. Teoremų formulavimas.*

Pateiksime 2 teoremas, kuriomis naudojamės vėliau. Tariame jog nagrinėjame (2.5) pavidalo diskontuotos baudos funkciją. Pirmoji teorema

Teorema 1: [2],[4] Tarkim kad $H(y)$ – absoliučiai tolydi pasiskirstymo funkcija ateinančių žalų dydžiams nusakyti. Be to, tarkime

$$EY = \int_0^\infty \qquad ,$$

o $N(t)$ yra Puasono procesas su parametru λ. Jeigu $c = \quad + \quad , \theta > \quad$, tai $\psi \quad \delta$ fiksuotam δ tenkina taip vadinamą atstatymo lygtį:

$$\psi \quad \delta = \int_0^x \qquad + \qquad , \tag{3.1}$$

čia:

$$\overline{F}(x) = \frac{\int^\infty}{\int_0} \qquad , \tag{3.2}$$

$$\phi = \frac{\int^\infty}{(1+} \qquad , \tag{3.3}$$

o ρ yra neneigiamas Lundbergo lygties

$$\lambda \int_0^{\infty} \quad + \quad + \qquad (3.4)$$

sprendinys.

Suformuluosime dar vieną teoremą kuri nusako (3.1) lygties sprendinio pavidalą.

Teorema 2 (žr. [4]) Sakykime $\xi \; \xi \; \xi$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija *F(x)* apibrėžta (3.2). Be to, tarkime, kad M diskretus geometrinis skirstinys:

$P(M = \quad = \quad - \quad , n = \quad ,$

o ϕ apibrėžiamas lygybe (3.3). Tada

$$\psi \quad \delta = \sum_{n=} \qquad (3.5)$$

3.2 *Spendimo rezultatai*

Pereikime prie pagrindinio uždavinio sprendimo. Mūsų atveju imama jog žalų dydžiai tenkina Pareto skirstinį. $Y_1, Y_2, .., Y_{N(t)}$ nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su tankio funkcija:

$h(x) = \frac{}{(1+} \; .$

Žalų pasiskirstymo funkcijos uodega:

$\overline{H}(x) = \frac{}{(1+} \; .$

Laisvai pasirenkame parametrus α, λ, δ, θ. Tada

$EY = \frac{}{\alpha -} \; , \; c = \frac{}{\alpha -} \; .$

Iš Lundbergo lygties

$\lambda \int_0^{\infty} \quad = \quad + \quad +$

gaunam ρ. Paskaičiuojam ϕ iš (3.3). Gaunam transformuotą Pareto skirstinio pasiskirstymo funkciją:

$$F(x) = - \quad \frac{E_{\alpha} \rho +}{(1+} \quad , x \geq \qquad (3.6)$$

čia $D = \frac{1}{\int_{0} \quad}$,

$E_n(x)$ – specialioji funkcija Eksponentinis integralas:

$$E_n(x) = \int_{1}^{\infty} \quad ,$$

Pagal 2 teoremą Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcija:

$$\psi \quad \delta = \sum_{n=} \quad ,$$

čia $\overline{F}^{*n}(x)$ – n-toji transformuoto Pareto skirstinio, apibrėžto (3.6) formule, uodegos sąsūka. Reikia pastebėti jog čia ϕ reikšmės yra teigiamos ir neviršija 1.

Sąsūkos apibrėžiamos tokia iteracija:

$$F^{*2} = \quad = \int_{0}^{x} \quad ,$$

$$(3.7)$$

$$F^{*n} = \quad = \int_{0}^{x} \quad - \quad ,$$

čia $\xi \; \xi \quad \xi$ neneigiami atsitiktiniai dydžiai su (3.6) pasiskirstymo funkcija, kur pirmoji sąsūka yra pati transformuota Pareto skirstinio pasiskirstymo funkcija.

Kadangi (3.6) formule apibrėžta transformuota Pareto skirstinio pasiskirstymo funkcija yra tolydi visame intervale $(0, x]$, kur $x >$, tai (3.7) sąsūkas galima perrašyti supaprastintai tokia sistema:

$$F^{*2}(x) = \int_{0}^{x} \quad ,$$

$$(3.8)$$

$$F^{*n}(x) = \int_{0}^{x} \quad ,$$

čia $f(x)$ – transformuoto Pareto skirstinio tankio funkcija:

$$f(x) = - \quad \frac{\alpha \, \mu \; +}{(1+} \; + \quad \frac{\quad}{\quad +} , x \geq \qquad (3.9)$$

Gauta transformuoto Pareto skirstinio pasiskirstymo funkcija, bei tankis $(F(x), f(x))$ išraiškose turi dydį $e^x E_{\alpha}(x)$, $\alpha =$. ($E_n(x)$ – specialioji funkcija vadinama Eksponentiniu integralu) Skaičiuojant jau pirmąją sąsūką paskaičiuoti integralą tiesiogiai tampa nerealu (naudojantis *Maple* matematiniu paketu), o ką jau kalbėti apie didesnių eilių sąsūkas. Šio reiškinio keitimas žinomomis aproksimacinėmis funkcijomis taip pat neduoda naudos (plačiau apie Eksponentinį integralą priede 1). Net naudojant santykinai mažo tikslumo aproksimacines eksponentinio integralo keitimo formules, reiškiniai jau skaičiuojant pirmąją sąsūką tampa per sudėtingi. Tapo akivaizdu, kad asimptotiniais reiškiniais keisti eksponentini integralą galima tokiu atveju jei turėtume n-tosios sąsūkos išraišką, ko nepavyko padaryti. Priešingu atveju nuoseklūs sąsūkų skaičiavimai yra per sudėtingi. Belieka gauti funkcijos reikšmes skaitinių metodų pagalba.

3.3 *Sąsūkos funkcijos interpoliavimas. Sąsūkų išraiškos*

Laisvai pasirenkame argumento reikšmių gardelę $y = \ldots$ ir paskaičiuojame antrosios sąsūkos reikšmes toje gardelėje. Gauname poras funkcijos ir argumento reikšmių. Per tuos taškus ieškome interpoliacinės funkcijos.

Interpoliacinė funkcija turi tenkinti šias sąlygas [16]:

1. Interpoliacinė funkcija $G_{inp}(y_i) =$, $i =$;
2. Turėtų nesudėtingą analizinę išraišką;
3. Jos reikšmės kiek galima mažiau skirtųsi nuo $G(y)$ reikšmių pastarosios apibrėžimo srityje.

Praktikoje suderinti 2 ir 3 sąlygas yra ganėtinai sudėtinga, tačiau bendru atveju galima pasirinkti tokią interpoliacinę funkciją, kuri kartu būtų ir pakankamai nesudėtinga, ir neviršytų užsiduoto tikslumo.

Įvertinus mūsų nagrinėjamų funkcijų (sąsūkų) funkcijos reikšmių pokyčius, bei iš anksto nusistatant argumentu reikšmes, kurios bus naudojamos Gerber-Shiu funkcijos argumentais, parenkame argumento reikšmių tankumą, tada pagal pasirinktus interpoliavimo taškus parinkome interpoliacinę funkciją.

Pasirinkome interpoliuoti splainais (angl. *spline*), nes tuo metodu išvengiamos svarbios problemos: galima naudoti gerokai daugiau interpoliavimo taškų neprarandant santykinai paprastos interpoliacinės funkcijos formos.

Kiekvieną interpoliavimo intervalą aprašome 3 laipsnio polinomu (kubinis splainų metodas angl. *cubic spline*). Pateiksime splaino apibrėžimą (žr. [11]):

Apibrėžimas. Tarkime, kad intervale $[a,b]$ duota gardelė $\Delta \quad = \quad < \quad < \quad < \quad =$. Tada n-tosios eilės defekto k splainas yra funkcija $y =$, tenkinanti šias sąlygas:

1) $\forall \; [y_{i-}$ $(i =$ $g(y)$ yra n-tojo laipsnio polinomas;

2) $\forall \; y_i$, $i =$ $-$, galioja lygybė

$g^{(l)}(y_i -$ $=$ $+$, $l =$ $-$. (Dažniausiai $k =$)

Gavę interpoliacinę pirmosios sąsūkos išraišką, pagal (3.8) ir šio poskyriaus pradžioje minimą algoritmą, ieškome antrosios sąsūkos interpoliacinės funkcijos. Kartojam algoritmą sekančioms n sąsūkoms.

Interpoliacinės funkcijos paprastumo dėlei ėmėme nevienodą interpoliavimo žingsnį. Tai apsunkino paklaidos įvertinimą. Pasirinkus vienodus argumento reikšmių skirtumus kubinio splaino paklaida yra dydis eilės $O(h^4)$ vidiniuose interpoliavimo taškuose, bei $O(h^2)$ eilės intervalo kraštuose, čia h – interpoliavimo žingsnis. Pasirinkę interpoliavimo taškus skirtingais intervalais mes naudojamės prielaida jog kubinis splaino metodas yra tikslesnis už tiesinį interpoliavimą, bei tuo naudodamiesi padarom grubų liekamojo nario įvertinimą kiekviename intervale $[y_{i-}$ (žr. [16]):

$$R(y) \le \frac{M}{2} \quad - \quad - \quad , \; i = \quad , \qquad (3.10)$$

čia $M =$ $\left|f^{(2)}(y)\right|$, mūsų atveju, nežinant antros funkcijos išvestinės, galima naudoti antros eiles skirtuminius santykius.

Vėliau grafikais iliustruoto pavyzdžio atveju pasirinkta tokia argumento reikšmių gardelė:

$\{0.02, 0.04, 0.06, 0.08, 0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0,$
$1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0, 2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0,$
$11.0, 21.0, 33.0, 51.0\}$

sąsūkoms 2 ir 3.

Gardelė sąsūkoms 4 ir 5 (atsižvelgiant į aukštesnių eilių sąsūkų grafikus):

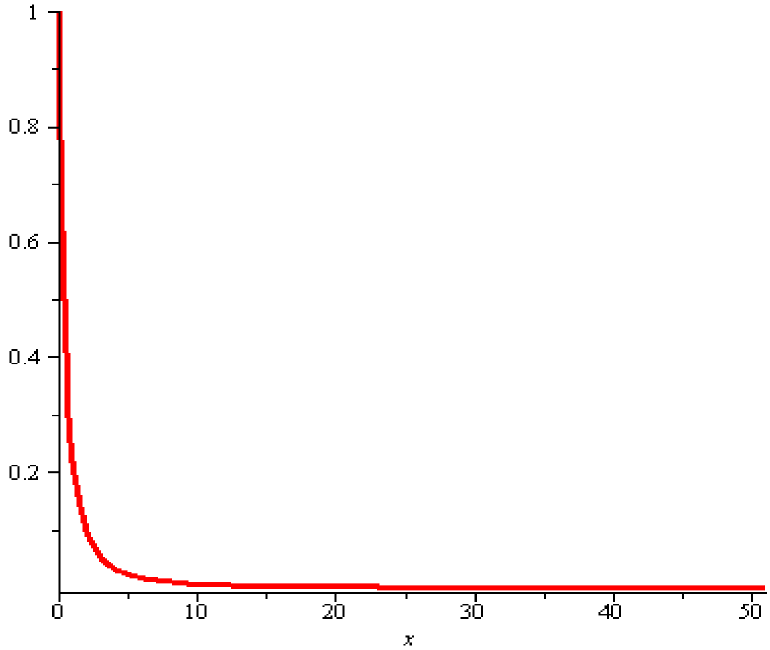
$\{0.1, 0.2, 0.3, 0.4, 0.5, 0.6, 0.7, 0.8, 0.9, 1.0, 1.2, 1.4, 1.6, 1.8, 2.0,$
$2.5, 3.0, 3.5, 4.0, 4.5, 5.0, 6.0, 7.0, 8.0, 9.0, 10.0, 11.0, 21.0, 33.0, 51.0\}$

Paskaičiavę sąsūkų reikšmes gardelėse, interpoliacinėms funkcijoms rasti naudojamės *Maple* matematinio paketo siūlomomis funkcijomis iš paketo *CurveFitting*.

Pateiksime sąsūkos uodegų išraiškas ir grafikus atvejui kai $\alpha =$, $\lambda =$, $\theta =$, $\delta =$.

1 sąsūkos uodega ir grafikas:

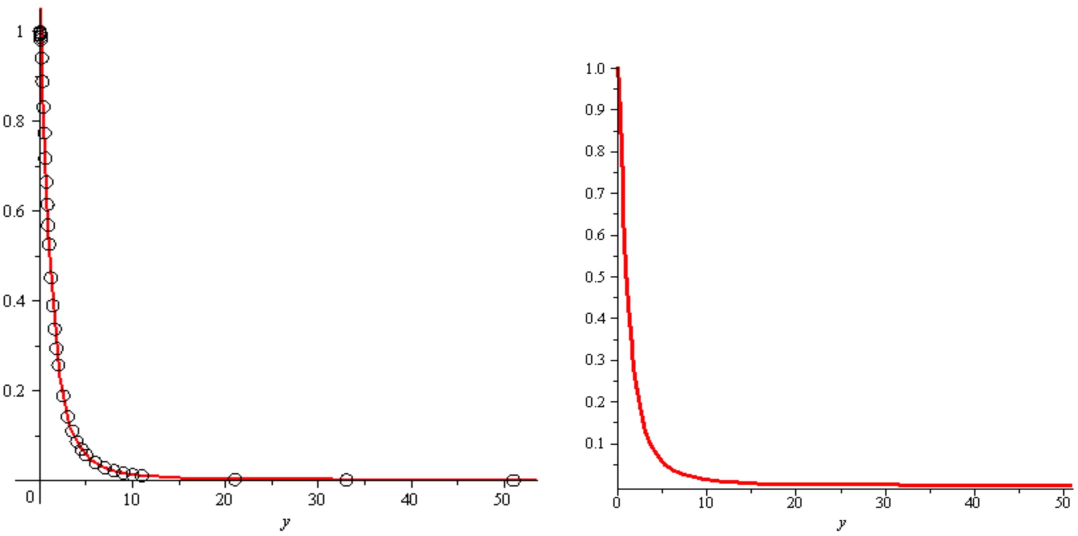
$$F\_sas\_uod(y) = \frac{\ldots 3945 e^{0.08752458274+ \quad 458274 y} E_3(0.08752458274 + \quad 458274 y)}{(1+}$$



Pav. 2. 1 sąsūkos grafikas.

Antrosios sąsūkos uodega ir grafikas:

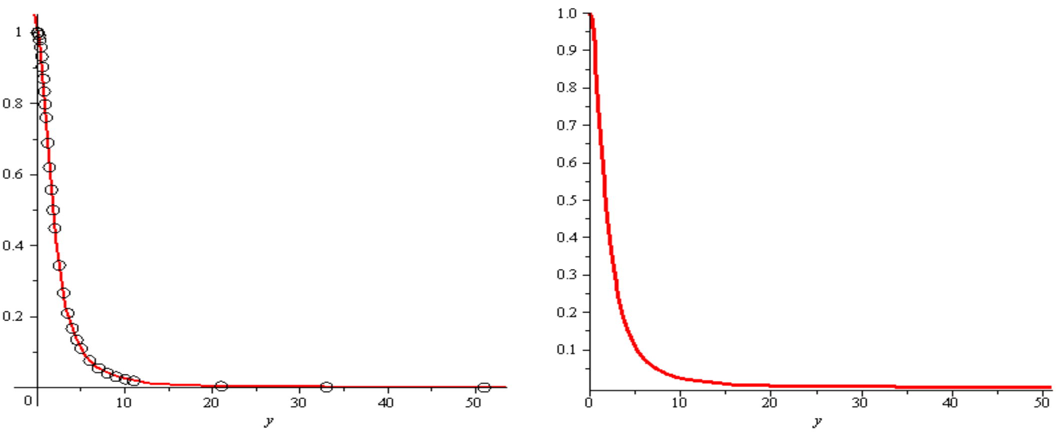
$$
F\_sas\_uod2 := \begin{cases}
1.001222830 - 0.102140062700000006\, y - 36.2055307700000029\, (y - 0.02)^3 & y < 0.04 \\
1.002671051 - 0.145586699600000008\, y - 2.17233184625024388\, (y - 0.04)^2 + 13.9878163499999992\, (y - 0.04)^3 & y < 0.06 \\
1.006120495 - 0.215694593800000000\, y - 1.33306286499902571\, (y - 0.06)^2 - 0.0152971500000000007\, (y - 0.06)^3 & y < 0.08 \\
1.009854417 - 0.269035464999999972\, y - 1.33398069375365469\, (y - 0.08)^2 + 3.76154723299999994\, (y - 0.08)^3 & y < 0.1 \\
1.014235454 - 0.317880836100000008\, y - 1.10828785998635526\, (y - 0.1)^2 + 1.90842800900000009\, (y - 0.1)^3 & y < 0.2 \\
1.037941950 - 0.482285567799999981\, y - 0.535759457282016016\, (y - 0.2)^2 + 1.09296905499999996\, (y - 0.2)^3 & y < 0.3 \\
1.055986170 - 0.556648387600000016\, y - 0.207868740885580244\, (y - 0.3)^2 + 0.637310472300000042\, (y - 0.3)^3 & y < 0.4 \\
1.063526567 - 0.579102821600000040\, y - 0.0166755991756630112\, (y - 0.4)^2 + 0.357947255999999992\, (y - 0.4)^3 & y < 0.5 \\
1.060016109 - 0.571699523799999998\, y + 0.0907085775882323086\, (y - 0.5)^2 + 0.191598404000000000\, (y - 0.5)^3 & y < 0.6 \\
1.046780993 - 0.547809856200000000\, y + 0.148188098822733788\, (y - 0.6)^2 + 0.0907974276700000000\, (y - 0.6)^3 & y < 0.7 \\
1.025700591 - 0.515448313599999986\, y + 0.175427327120832616\, (y - 0.7)^2 + 0.0307337853299999992\, (y - 0.7)^3 & y < 0.8 \\
0.9986796152 - 0.479440834599999976\, y + 0.184647462693935726\, (y - 0.8)^2 - 0.00512696866700000035\, (y - 0.8)^3 & y < 0.9 \\
0.9674228477 - 0.442665151099999987\, y + 0.183109372103424512\, (y - 0.9)^2 - 0.0235393106700000008\, (y - 0.9)^3 & y < 1.0 \\
0.9333147070 - 0.406749456000000010\, y + 0.176047578892366192\, (y - 1.0)^2 - 0.0380574443300000023\, (y - 1.0)^3 & y < 1.2 \\
0.8610295848 - 0.340897317799999988\, y + 0.153213112271189111\, (y - 1.2)^2 - 0.0417076171700000026\, (y - 1.2)^3 & y < 1.4 \\
0.7880319851 - 0.284616986899999980\, y + 0.128188542022877354\, (y - 1.4)^2 - 0.0375434748299999996\, (y - 1.4)^3 & y < 1.6 \\
0.7180268593 - 0.237846787100000012\, y + 0.105662457137301408\, (y - 1.6)^2 - 0.0313187711199999983\, (y - 1.6)^3 & y < 1.8 \\
0.6526906928 - 0.199340056799999998\, y + 0.0868711944279169646\, (y - 1.8)^2 - 0.0278347904699999990\, (y - 1.8)^3 & y < 2.0 \\
0.5931262563 - 0.167931753800000000\, y + 0.0701703201510306685\, (y - 2.0)^2 - 0.0183119992899999987\, (y - 2.0)^3 & y < 2.5 \\
0.4672890349 - 0.111495433199999994\, y + 0.0427023212059473578\, (y - 2.5)^2 - 0.0103688705200000002\, (y - 2.5)^3 & y < 3.0 \\
0.3718915014 - 0.0765697648600000004\, y + 0.0271490154251799315\, (y - 3.0)^2 - 0.00629743142700000050\, (y - 3.0)^3 & y < 3.5 \\
0.2994007798 - 0.0541438230000000006\, y + 0.0177028682933329240\, (y - 3.5)^2 - 0.00385927259300000020\, (y - 3.5)^3 & y < 4.0 \\
0.2441104324 - 0.0393354091500000003\, y + 0.0119139594014883772\, (y - 4.0)^2 - 0.00243172699899999986\, (y - 4.0)^3 & y < 4.5 \\
0.2013792177 - 0.0292452449999999996\, y + 0.00826636890071356240\, (y - 4.5)^2 - 0.00168130900299999998\, (y - 4.5)^3 & y < 5.0 \\
0.1682087105 - 0.0222398578499999993\, y + 0.00574440539565736989\, (y - 5.0)^2 - 0.000908385344300000020\, (y - 5.0)^3 & y < 6 \\
0.1204628020 - 0.0134762030899999996\, y + 0.00301924936267110571\, (y - 6)^2 - 0.000418975169700000018\, (y - 6)^3 & y < 7 \\
0.08959206374 - 0.00869462987699999926\, y + 0.00176232385365820782\, (y - 7)^2 - 0.000230386276999999990\, (y - 7)^3 & y < 8 \\
0.06845609031 - 0.00586114100099999984\, y + 0.00107116502269606294\, (y - 8)^2 - 0.000131156622500000009\, (y - 8)^3 & y < 9 \\
0.05365635710 - 0.00411228082199999959\, y + 0.000677695155557540776\, (y - 9)^2 - 0.0000660020334999999976\, (y - 9)^3 & y < 10 \\
0.04269420811 - 0.00295489661100000000\, y + 0.000479689055073773824\, (y - 10)^2 - 0.0000880813436699999958\, (y - 10)^3 & y < 11 \\
0.03543934095 - 0.00225976253199999984\, y + 0.000215445024147363806\, (y - 11)^2 - 0.00000726503989000000040\, (y - 11)^3 & y < 21 \\
0.005001644657 - 0.000130374017000000009\, y - 0.00000250617263157783885\, (y - 21)^2 + 2.236537405\, 10^{-7}\, (y - 21)^3 & y < 33 \\
0.003823710462 - 0.0000939037442999999952\, y + 0.00000554536202631556846\, (y - 33)^2 - 1.026918894\, 10^{-7}\, (y - 33)^3 & \text{otherwise}
\end{cases}
$$



Pav. 3 2 sąsūkos grafikai su interpoliavimo taškais(kairėje) ir be jų (dešinėje).

Trečiosios sąsūkos uodega ir grafikas:

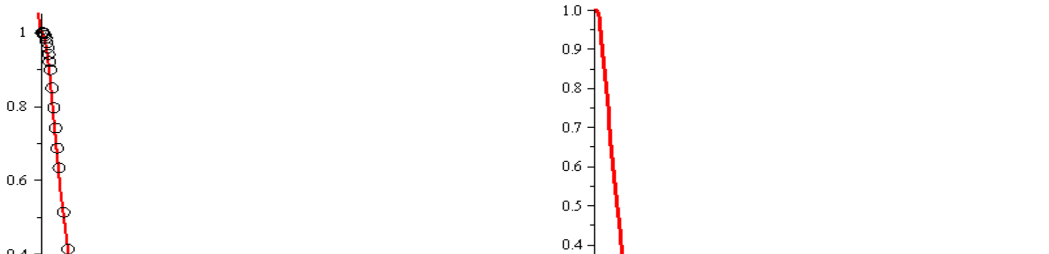
$$
F\_sas\_uod3 := \begin{cases}
1.000066408 - 0.00279454511599999982\,y - 2.73852471000000009\,(y - 0.02)^3 & y < 0.04 \\
1.000175949 - 0.00608077476699999970\,y - 0.164311482597310127\,(y - 0.04)^2 - 0.593126449999999972\,(y - 0.04)^3 & y < 0.06 \\
1.000542532 - 0.0133649858100000005\,y - 0.199899069610759648\,(y - 0.06)^2 - 0.731044489999999936\,(y - 0.06)^3 & y < 0.08 \\
1.001166581 - 0.0222382019800000004\,y - 0.243761738959651420\,(y - 0.08)^2 - 0.786870593299999976\,(y - 0.08)^3 & y < 0.1 \\
1.002132253 - 0.0329329162499999994\,y - 0.290973974550634729\,(y - 0.1)^2 - 0.249083829000000006\,(y - 0.1)^3 & y < 0.2 \\
1.012106891 - 0.0986002260300000018\,y - 0.365699123286546412\,(y - 0.2)^2 + 0.0783362366700000035\,(y - 0.2)^3 & y < 0.3 \\
1.029765158 - 0.169389963599999998\,y - 0.342198252303179295\,(y - 0.3)^2 + 0.190232482700000011\,(y - 0.3)^3 & y < 0.4 \\
1.051626478 - 0.232122639600000014\,y - 0.285128507500736262\,(y - 0.4)^2 + 0.224023832700000008\,(y - 0.4)^3 & y < 0.5 \\
1.074151710 - 0.282427626099999995\,y - 0.217921357693875496\,(y - 0.5)^2 + 0.213374686700000010\,(y - 0.5)^3 & y < 0.6 \\
1.094495690 - 0.319610657000000020\,y - 0.153908951723761845\,(y - 0.6)^2 + 0.186163120999999986\,(y - 0.6)^3 & y < 0.7 \\
1.110780591 - 0.344807553800000000\,y - 0.0980600154110771588\,(y - 0.7)^2 + 0.154278329299999989\,(y - 0.7)^3 & y < 0.8 \\
1.121941192 - 0.359791207000000000\,y - 0.0517765166319294132\,(y - 0.8)^2 + 0.121364161900000003\,(y - 0.8)^3 & y < 0.9 \\
1.127587731 - 0.366505585400000000\,y - 0.0153672680612051641\,(y - 0.9)^2 + 0.0992278231300000036\,(y - 0.9)^3 & y < 1.0 \\
1.127629906 - 0.366602204499999974\,y + 0.0144010788767500592\,(y - 1.0)^2 + 0.0617507308699999994\,(y - 1.0)^3 & y < 1.2 \\
1.112895331 - 0.353431685200000012\,y + 0.0514515174003523994\,(y - 1.2)^2 + 0.0287659068700000000\,(y - 1.2)^3 & y < 1.4 \\
1.081537997 - 0.329399169300000016\,y + 0.0687110615218403248\,(y - 1.4)^2 + 0.0101175749800000003\,(y - 1.4)^3 & y < 1.6 \\
1.038449726 - 0.300700635699999996\,y + 0.0747816065122863112\,(y - 1.6)^2 - 0.00102879013300000004\,(y - 1.6)^3 & y < 1.8 \\
0.9878122223 - 0.270911447899999991\,y + 0.0741643324290143791\,(y - 1.8)^2 - 0.00661275193300000022\,(y - 1.8)^3 & y < 2.0 \\
0.9329814882 - 0.242039245200000003\,y + 0.0701966812716561528\,(y - 2.0)^2 - 0.0103279130700000000\,(y - 2.0)^3 & y < 2.5 \\
0.7931128032 - 0.179588498699999986\,y + 0.0547048116677570224\,(y - 2.5)^2 - 0.00999956134000000094\,(y - 2.5)^3 & y < 3.0 \\
0.6639236388 - 0.132383358000000007\,y + 0.0397054696573157368\,(y - 3.0)^2 - 0.00741826397299999961\,(y - 3.0)^3 & y < 3.5 \\
0.5534265224 - 0.0982415863499999931\,y + 0.0285780737029800204\,(y - 3.5)^2 - 0.00538291877999999992\,(y - 3.5)^3 & y < 4.0 \\
0.4617346376 - 0.0737007017399999992\,y + 0.0205036955307641608\,(y - 4.0)^2 - 0.00372280730699999993\,(y - 4.0)^3 & y < 4.5 \\
0.3866930553 - 0.0559891116899999958\,y + 0.0149194845739633424\,(y - 4.5)^2 - 0.00279504800000000008\,(y - 4.5)^3 & y < 5.0 \\
0.3259575526 - 0.0431659131100000024\,y + 0.0107269125733824682\,(y - 5.0)^2 - 0.00160489995899999998\,(y - 5.0)^3 & y < 6 \\
0.2352448136 - 0.0265267878500000006\,y + 0.00591221269287092819\,(y - 6)^2 - 0.000809210845999999968\,(y - 6)^3 & y < 7 \\
0.1745702655 - 0.0171299949999999986\,y + 0.00348458015513381696\,(y - 7)^2 - 0.000446737855999999998\,(y - 7)^3 & y < 8 \\
0.1325765339 - 0.0115010482600000006\,y + 0.00214436658659380477\,(y - 8)^2 - 0.000265314929699999984\,(y - 8)^3 & y < 9 \\
0.1030204900 - 0.00800825987200000020\,y + 0.00134842179849096480\,(y - 9)^2 - 0.000128663026200000014\,(y - 9)^3 & y < 10 \\
0.08113170364 - 0.00569740535400000034\,y + 0.000962432719442335178\,(y - 10)^2 - 0.000181615665199999998\,(y - 10)^3 & y < 11 \\
0.06673231782 - 0.00431738691099999971\,y + 0.000417585723739694364\,(y - 11)^2 - 0.0000141126381600000006\,(y - 11)^3 & y < 21 \\
0.007901868493 - 0.000199463885399999992\,y - 0.0000057934211715611408\,(y - 21)^2 + 4.173455860\,10^{-7}\,(y - 21)^3 & y < 33 \\
0.006427499910 - 0.000158212700300000006\,y + 0.00000923101992931222904\,(y - 33)^2 - 1.709448135\,10^{-7}\,(y - 33)^3 & \text{otherwise}
\end{cases}
$$



Pav. 4. 3 sąsūkos grafikai su interpoliavimo taškais(kairėje) ir be jų (dešinėje).

Ketvirtosios sąsūkos uodega ir grafikas:

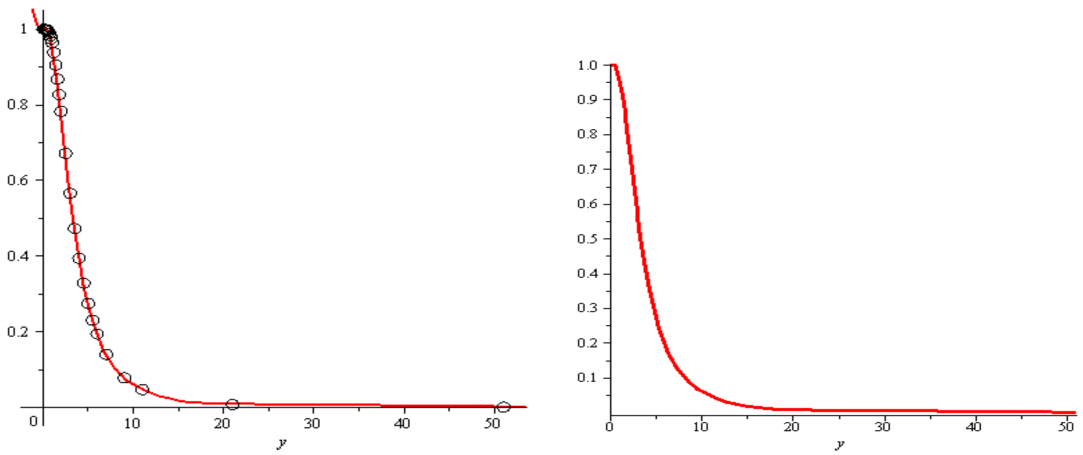
$$
F\_sas\_uod4 := \begin{cases}
1.000342059 - 0.00397800436500000012\, y - 0.303410263499999999\, (y - 0.1)^3 & y < 0.2 \\
1.001859111 - 0.0130803122700000000\, y - 0.0910230790587446409\, (y - 0.2)^2 - 0.114318682500000005\, (y - 0.2)^3 & y < 0.3 \\
1.007324814 - 0.0347144885499999988\, y - 0.125318683765021450\, (y - 0.3)^2 - 0.0974065070000000033\, (y - 0.3)^3 & y < 0.4 \\
1.017168594 - 0.0627004205199999942\, y - 0.154540635881169454\, (y - 0.4)^2 - 0.0311290893300000017\, (y - 0.4)^3 & y < 0.5 \\
1.031513058 - 0.0945424203800000058\, y - 0.163879362710300625\, (y - 0.5)^2 + 0.00925496466699999958\, (y - 0.5)^3 & y < 0.6 \\
1.049382454 - 0.127040644000000008\, y - 0.161102873277627984\, (y - 0.6)^2 + 0.0398222303299999996\, (y - 0.6)^3 & y < 0.7 \\
1.069529382 - 0.158066551700000002\, y - 0.149156204179187458\, (y - 0.7)^2 + 0.0579489139999999972\, (y - 0.7)^3 & y < 0.8 \\
1.090569988 - 0.186159325099999994\, y - 0.131771530005622139\, (y - 0.8)^2 + 0.0666551140000000016\, (y - 0.8)^3 & y < 0.9 \\
1.111238115 - 0.210513977699999993\, y - 0.111774995798323867\, (y - 0.9)^2 + 0.0707461300000000044\, (y - 0.9)^3 & y < 1.0 \\
1.130423727 - 0.230746593000000000\, y - 0.0905511568010824302\, (y - 1.0)^2 + 0.0658407334999999982\, (y - 1.0)^3 & y < 1.2 \\
1.161311896 - 0.259066167700000016\, y - 0.0510467166975908035\, (y - 1.2)^2 + 0.0540379879999999951\, (y - 1.2)^3 & y < 1.4 \\
1.179210110 - 0.273000295800000015\, y - 0.0186239239085543296\, (y - 1.4)^2 + 0.0403163145699999975\, (y - 1.4)^3 & y < 1.6 \\
1.182966263 - 0.275611907599999984\, y + 0.00556586483180812522\, (y - 1.6)^2 + 0.0271938287499999994\, (y - 1.6)^3 & y < 1.8 \\
1.173525158 - 0.270122302199999997\, y + 0.0218821620813218314\, (y - 1.8)^2 + 0.0201881079300000009\, (y - 1.8)^3 & y < 2.0 \\
1.152211074 - 0.258946864399999976\, y + 0.0339950268429045216\, (y - 2.0)^2 + 0.00632585211299999985\, (y - 2.0)^3 & y < 2.5 \\
1.064652023 - 0.220207448500000014\, y + 0.0434838050073386232\, (y - 2.5)^2 - 0.00227571112000000010\, (y - 2.5)^3 & y < 3.0 \\
0.9499074449 - 0.178430426800000014\, y + 0.0400702383277410021\, (y - 3.0)^2 - 0.00440762123299999996\, (y - 3.0)^3 & y < 3.5 \\
0.8306982234 - 0.141665904399999987\, y + 0.0334588064816973842\, (y - 3.5)^2 - 0.00455290235300000006\, (y - 3.5)^3 & y < 4.0 \\
0.7183172934 - 0.111621774699999996\, y + 0.0266294529454694576\, (y - 4.0)^2 - 0.00388614453999999982\, (y - 4.0)^3 & y < 4.5 \\
0.6177720883 - 0.0879069301999999970\, y + 0.0208002361364247984\, (y - 4.5)^2 - 0.00319162348700000000\, (y - 4.5)^3 & y < 5.0 \\
0.5305406018 - 0.0695004116699999980\, y + 0.0160128009088313372\, (y - 5.0)^2 - 0.00236401672000000020\, (y - 5.0)^3 & y < 5.5 \\
0.4559294639 - 0.0552606233099999997\, y + 0.0124667758282498518\, (y - 5.5)^2 - 0.00190961763500000002\, (y - 5.5)^3 & y < 6 \\
0.3926000800 - 0.0442260607000000000\, y + 0.00960234937816925073\, (y - 6)^2 - 0.00134821127599999998\, (y - 6)^3 & y < 7 \\
0.2947337636 - 0.0290659957699999985\, y + 0.00555771555136732114\, (y - 7)^2 - 0.000549187270000000032\, (y - 7)^3 & y < 9 \\
0.1718055930 - 0.0134253808100000000\, y + 0.00226259193181340900\, (y - 9)^2 - 0.000255281526799999996\, (y - 9)^3 & y < 11 \\
0.1129568250 - 0.00743839140000000007\, y + 0.000730902771379041009\, (y - 11)^2 - 0.0000244033268400000006\, (y - 11)^3 & y < 21 \\
0.008405570389 - 0.000141334023299999990\, y - 0.00000119703367238013388\, (y - 21)^2 + 1.330037413\, 10^{-8}\, (y - 21)^3 & \text{otherwise}
\end{cases}
$$



Pav. 5. 4 sąsūkos grafikai su interpoliavimo taškais(kairėje) ir be jų (dešinėje).

Penktosios sąsūkos uodega ir jos grafikas

$$
F\_sas\_uod5(y) := \begin{cases}
1.000069751 - 0.000334340072700000020\, y - 0.0372450927299999984\, (y - 0.1)^3 & y < 0.2 \\
1.000255976 - 0.00145169285499999994\, y - 0.0111735278192466887\, (y - 0.2)^2 - 0.0559355363300000006\, (y - 0.2)^3 & y < 0.3 \\
1.001262137 - 0.00536446450999999992\, y - 0.0279541887230132410\, (y - 0.3)^2 - 0.0624987619000000050\, (y - 0.3)^3 & y < 0.4 \\
1.003906417 - 0.0128302651100000008\, y - 0.0467038172887003362\, (y - 0.4)^2 - 0.0597875161000000002\, (y - 0.4)^3 & y < 0.5 \\
1.008946786 - 0.0239646540499999990\, y - 0.0646400721221854214\, (y - 0.5)^2 - 0.0482727736699999979\, (y - 0.5)^3 & y < 0.6 \\
1.016877831 - 0.0383408516899999969\, y - 0.0791219042225580482\, (y - 0.6)^2 - 0.0338523892300000018\, (y - 0.6)^3 & y < 0.7 \\
1.027840726 - 0.0551808042100000035\, y - 0.0892776209875822680\, (y - 0.7)^2 - 0.0188059694699999996\, (y - 0.7)^3 & y < 0.8 \\
1.041664906 - 0.0736005074899999946\, y - 0.0949194118271128178\, (y - 0.8)^2 - 0.00439043290000000042\, (y - 0.8)^3 & y < 0.9 \\
1.057915358 - 0.0927161028399999950\, y - 0.0962365417039664079\, (y - 0.9)^2 + 0.00540360113299999997\, (y - 0.9)^3 & y < 1.0 \\
1.076043596 - 0.111801303199999994\, y - 0.0946154613570214798\, (y - 1.0)^2 + 0.0196567729700000000\, (y - 1.0)^3 & y < 1.2 \\
1.115001078 - 0.147288674900000000\, y - 0.0828213975769524076\, (y - 1.2)^2 + 0.0296531487299999988\, (y - 1.2)^3 & y < 1.4 \\
1.153323701 - 0.176858856099999990\, y - 0.0650295083351689618\, (y - 1.4)^2 + 0.0320275821000000002\, (y - 1.4)^3 & y < 1.6 \\
1.186448331 - 0.199027349599999986\, y - 0.0458129590823717140\, (y - 1.6)^2 + 0.0293142729000000005\, (y - 1.6)^3 & y < 1.8 \\
1.211503774 - 0.213834820499999995\, y - 0.0282243953353441199\, (y - 1.8)^2 + 0.0281829637699999997\, (y - 1.8)^3 & y < 2.0 \\
1.226415867 - 0.221742623000000000\, y - 0.0113146170762517730\, (y - 2.0)^2 + 0.0175686828200000006\, (y - 2.0)^3 & y < 2.5 \\
1.221128561 - 0.219880727899999990\, y + 0.0150384071476426066\, (y - 2.5)^2 + 0.00746021102699999992\, (y - 2.5)^3 & y < 3.0 \\
1.163919992 - 0.199247162499999990\, y + 0.0262287236856813405\, (y - 3.0)^2 + 0.00158948187999999996\, (y - 3.0)^3 & y < 3.5 \\
1.074702936 - 0.171826327400000006\, y + 0.0286129465096320348\, (y - 3.5)^2 - 0.00122117535300000002\, (y - 3.5)^3 & y < 4.0 \\
0.9709152655 - 0.144129262400000013\, y + 0.0267811834757905182\, (y - 4.0)^2 - 0.00230364285999999988\, (y - 4.0)^3 & y < 4.5 \\
0.8645820752 - 0.119075811099999996\, y + 0.0233257191872058845\, (y - 4.5)^2 - 0.00253516120699999980\, (y - 4.5)^3 & y < 5.0 \\
0.7629748683 - 0.0976514628100000060\, y + 0.0195229773753859590\, (y - 5.0)^2 - 0.00233336431300000015\, (y - 5.0)^3 & y < 5.5 \\
0.6698126944 - 0.0798785086700000008\, y + 0.0160229309112502917\, (y - 5.5)^2 - 0.00199139835300000002\, (y - 5.5)^3 & y < 6 \\
0.5863932094 - 0.0653491265199999949\, y + 0.0130358333796128708\, (y - 6)^2 - 0.00165669445799999992\, (y - 6)^3 & y < 7 \\
0.4500612646 - 0.0442475431299999972\, y + 0.00806575000553624334\, (y - 7)^2 - 0.000748762143700000074\, (y - 7)^3 & y < 9 \\
0.2668334789 - 0.0209696888400000004\, y + 0.00357317714358483660\, (y - 9)^2 - 0.000406185200000000004\, (y - 9)^3 & y < 11 \\
0.1742733579 - 0.0115512026600000008\, y + 0.00113606594512441007\, (y - 11)^2 - 0.0000379029204000000004\, (y - 11)^3 & y < 21 \\
0.01161773357 - 0.000200759879699999999\, y - 0.0000010216670155512712 7\, (y - 21)^2 + 1.135185573\; 10^{-8}\, (y - 21)^3 & \textit{otherwise}
\end{cases}
$$



Pav. 6. 5 sąsūkos grafikai su interpoliavimo taškais(kairėje) ir be jų (dešinėje).

3.4 Rezultatai

Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos reikšmių lentelės:

1 lentelė. $\theta =$, $\delta =$, $\lambda =$.

	u=0.05	0.1	0.15	0.3	0.5	0.7	1
α=2	0.5358192165	0.5239182750	0.5126978226	0.4820706288	0.4467604508	0.4159239305	0.3758643888
3	0.5394903004	0.5179535539	0.4979914754	0.4455811648	0.3885278444	0.3417129226	0.2848908692
5	0.5226492968	0.4816807567	0.4433132319	0.3405946066	0.2332758878	0.1583527365	0.09001155251

	u=1.2	1.5	2	3.5	5	10	50
α=2	0.3524558294	0.3213795015	0.2782820608	0.1919202276	0.1416774496	0.06818459165	0.007062752413
3	0.2536712131	0.2144084861	0.1641199294	0.07978919394	0.04313570091	0.009674772255	0.0001629866194
5	0.06301291115	0.03819436871	0.01809068264	0.003168436668	0.0007466872574	0.0001003675899	$5.119812063 \cdot 10^{-8}$

2 lentelė. $\theta =$, $\delta =$, $\lambda =$.

	u=0.05	0.1	0.15	0.3	0.5	0.7	1
α=2	0.4552137936	0.4492681649	0.4435688735	0.4274064162	0.4074590831	0.3886740775	0.3622280823
3	0.4079654824	0.3979981135	0.3885210958	0.3623634469	0.3313736286	0.3035623762	0.2663508275
5	0.3827406544	0.3630791532	0.3429314059	0.2797587130	0.2011729175	0.1405244951	0.08193098527

	u=1.2	1.5	2	3.5	5	10	50
α=2	0.3457016304	0.3225735311	0.2883538328	0.2127498943	0.1645250865	0.08742659895	0.01193441497
3	0.2440695517	0.2139990378	0.1718693161	0.09112079793	0.05155299264	0.01238363988	0.0002536200603
5	0.05800658159	0.03561486973	0.01714631160	0.003115271700	0.0007548507912	0.0001058664939	$7.337331667 \cdot 10^{-8}$

3 lentelė. $\theta =$, $\delta =$, $\lambda =$.

	u=0.05	0.1	0.15	0.3	0.5	0.7	1
α=2	0.5650294034	0.5549547211	0.5453538133	0.5184737539	0.4860676335	0.4563585221	0.4158064465
3	0.5379381370	0.5213103402	0.5056477573	0.4632055431	0.4144782340	0.3722045236	0.3177569375
5	0.5089835091	0.4779017668	0.4470190045	0.3553886386	0.2485227546	0.1696353010	0.09602375198

	u=1.2	1.5	2	3.5	5	10	50
α=2	0.3911686343	0.3575313193	0.3094507082	0.2100045941	0.1516020206	0.06812152961	0.005657975001
3	0.2862734369	0.2450573034	0.1896917074	0.09145000522	0.04778402094	0.009436002623	0.0001296520429
5	0.06679358850	0.04001530575	0.01855646443	0.003062245530	0.0006611679253	0.00009482225160	$3.125982494 \cdot 10^{-8}$

4 lentelė. $\theta =$, $\delta =$, $\lambda =$.

	u=0.05	0.1	0.15	0.3	0.5	0.7	1
α=2	0.5650294034	0.5549547211	0.5453538133	0.5184737539	0.4860676335	0.4563585221	0.4158064465
3	0.5379381370	0.5213103402	0.5056477573	0.4632055431	0.4144782340	0.3722045236	0.3177569375
5	0.5089835091	0.4779017668	0.4470190045	0.3553886386	0.2485227546	0.1696353010	0.09602375198

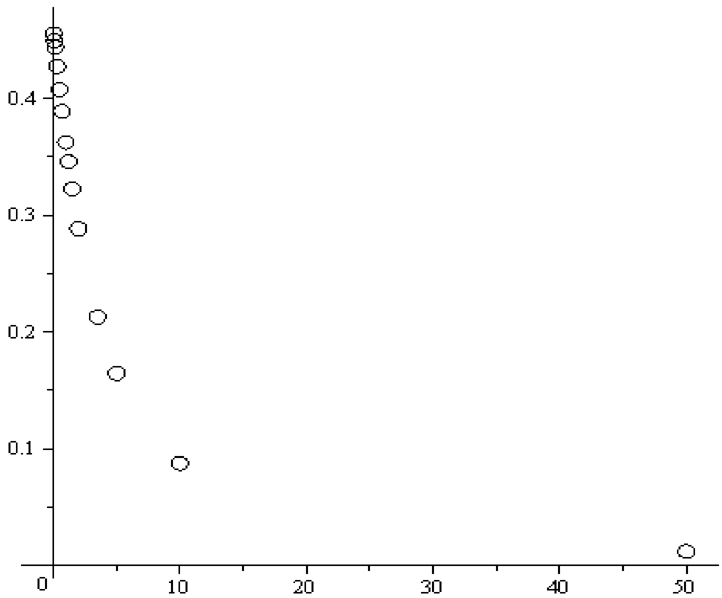
	u=1.2	1.5	2	3.5	5	10	50
α=2	0.3911686343	0.3575313193	0.3094507082	0.2100045941	0.1516020206	0.06812152961	0.005657975001
3	0.2862734369	0.2450573034	0.1896917074	0.09145000522	0.04778402094	0.009436002623	0.0001296520429
5	0.06679358850	0.04001530575	0.01855646443	0.003062245530	0.0006611679253	0.00009482225160	$3.125982494 \cdot 10^{-8}$

Tarpinių parametrų ρ ir ϕ priklausomybė nuo pradinių reikšmių:

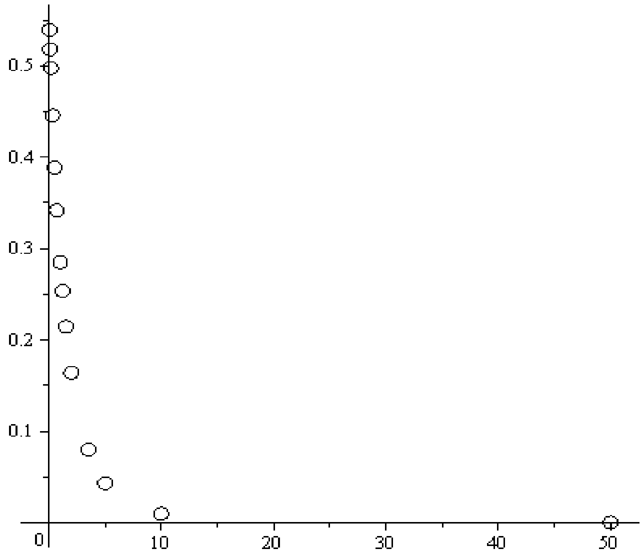
ρ	$\theta =$ = =	$\theta =$ = =	$\theta =$ = =	$\theta =$ = =
α=2	0.04077647838	0.01585223896	0.08750218087	0.08750218087
3	0.08752458274	0.03746313876	0.2055421169	0.2055421169
5	0.1800765492	0.07964319449	0.4465644449	0.4465644449

ϕ	$\theta =$ = =	$\theta =$ = =	$\theta =$ = =	$\theta =$ = =
α=2	0.5912676295	0.8566305190	0.7402662139	0.7402662139
3	0.6191546159	0.8786686142	0.7788553211	0.7788553211
5	0.6297870715	0.8858545396	0.7964255956	0.7964255956

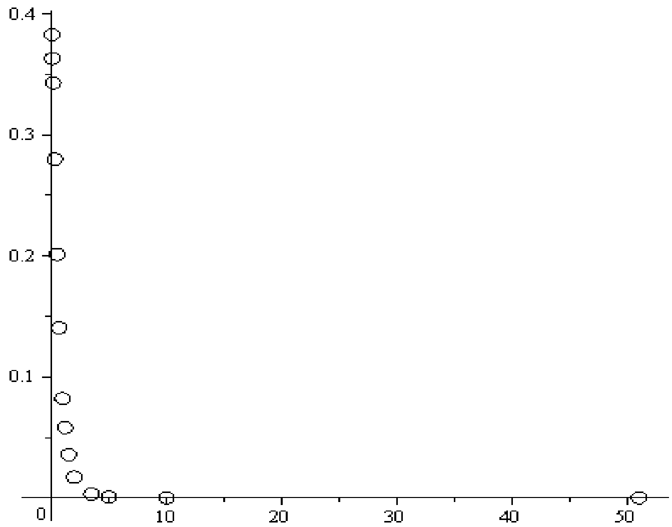
Pateiksime Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos reikšmių grafikus skaičiuojant iki penktosios sąsūkos.



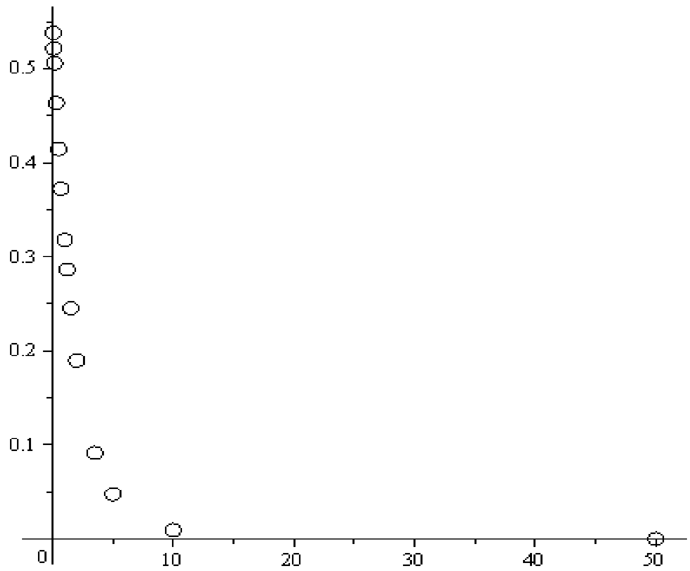
Pav. 7 $\alpha =$ 2 lentelės atvejis



Pav. 8 $\alpha =$ pirmos lentelės koeficientų atveju



Pav. 9 $\alpha =$ 2 lentelės koeficientų atveju



Pav. 10 $\alpha =$ 4 lentelės koeficientų atveju

Išvados

- Padarius nuodugnų bibliografinį tyrimą tapo aišku jog tyrimai iki šiol atlikti šioje srityje (turint omeny bendrai bankroto teoriją (angl. *ruin theory*)) yra daugiakrypčiai. Taip yra dėl to jog modeliai Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcijos turi pakankamai daug skirtingu variacijų. Dėl to trūksta sprendimų konkrečių sudėtingesnių skirstinių atvejams.
- Iš grafikų bei lentelių matome jog Gerber-Shiu diskontuotos baudos funkcija mažėja pradiniam kapitalui augant. Jos kitimo (mažėjimo) greitis auga pasiskirstymo funkcijos parametrui α didėjant.
- Pastebėjome jog santykiui $\frac{\lambda}{\delta}$ išliekant pastoviam diskontuotos baudos funkcijos reikšmės nesikeičia.
- Naudojami skaitiniai metodai šiam uždaviniui spręsti, nors ir duoda reikiama rezultatą, tačiau yra ganėtinai neefektyvus bei reikalaujantis didelių resursų. Parinkus parametrų reikšmes taip jog $\phi \to$, čia ϕ apibrėžtas (3.3) formule, susiduriama su tikslumo problemomis. Akivaizdu jog pradiniam kapitalui y artėjant prie 0 transformuoto Pareto skirstinio pasiskirstymo funkcijos sąsūkos artimoms 0 argumento reikšmėms $\overline{F}^{*n}(y)$ artėja prie 1 bet kuriam fiksuotam $n =$. Tokiu atveju mažoms pradinio kapitalo reikšmėms Gerber-Shiu diskontuota baudos funkcijos reikšmė bus tiksli tik skaičiuojant didelį sąsūkų kiekį. Antra vertus pradiniam draudiko kapitalo kiekiui augant apytikslės funkcijos reikšmės artėja prie tikslių reikšmių paskaičiuotų sąsūkų kiekiui nekintant.

  Be to sprendimas nepaslankus duomenų keitimo atveju. Suformuluotą uždavinį, sukonstruoti algoritmą, įvykdėme, tačiau optimaliu šio sprendimo pavadinti vargu ar galima.

The Calculation of Gerber-Shiu Penalty Function for Pareto Claims

By

Arūnas Janušauskas

In this paper we consider Gerber-Shiu discounted penalty function in the classical risk model for Pareto claims. Our main goal is to construct an algorithm for obtaining values of the discounted penalty function in the case of $\psi \quad \delta = \quad {}_{<\infty})$.

Due to the complicated form of the transformed Pareto distribution function we cannot obtain its convolutions analiticaly. We use numerical methods provided by Maple (cube spline) to find interpolating functions instead. Continuously applying recursive formulas we obtain first 5 interpolated convolutions. Then we calculate values of Gerber-Shiu discounted penalty function for certain arbitrary parameters: α – degree of Pareto distribution function, initial surplus u, security loading θ, discounting parameter δ and Poison process parameter λ.

We present data tables and graphs of the discounted penalty function for some variations of parameters in later sections.

Finally we state that the method that we use is quite complicated. For better accuracy of the discounted penalty function values one may require to get many convolutions of the transformed Pareto distribution function and that may require too great of the resources. However the quantity of the convolutions needed rapidly decreases for large values of the initial surplus u.

Literatūros sąrašas

1. J. Šiaulys, R. Asanavičiūtė, On the Gerber-Shiu discounted penalty function for subexponential claims, *Lithuanian Mathematical Journal* **46** (4), 487-493 (2006).
2. H. U. Gerber, E. S. W. Shiu, On the time value of ruin, *North American Actuarial Journal* **2** (1), 48-78 (1998).
3. M. Abramowitz, I. A. Stegun, *Handbook of Mathematical Functions, with Formulas, Graphs, and Mathematical Tables,* Dover, New York, (1972).
4. G. E. Willmot and X. S. Lin, *Approximations for Compound Distributions with Insurance Applications*, Springer, New York (2001).
5. T. Mikosch, *Non-Life Insurance Mathematics*, Springer, Berlin (2004).
6. B. C. Arnold, *Pareto Distributions*. International Cooperative Publishing House, Fairland, MD (1983).
7. Q. Tanga, L. Wei, Asymptotic aspects of the Gerber-Shiu function in the renewal risk model using Wiener-Hopf factorization and convolution equivalence, *Insurance: Mathematics and Economics,* **46,** 19-31 (2010).
8. C. Anderson, The Long Tail, *http://www.wired.com/wired/archive/12.10/tail.html.*
9. C. Shirky, Power Laws, Weblogs, and Inequality, *http://www.shirky.com/writings/powerlaw_weblog.html*
10. N. N. Kalitkin, I. A. Panin, On the Computation of the Exponential Integral, *Mathematical Models and Computer Simulations*, **1**(1), 88–90 (2009).
11. K. Plukas, *Skaitiniai metodai ir algoritmai*, Naujasis lankas, Kaunas (2001).
12. J. Šiaulys, J. Kočetova, On the Discounted Penalty Function for Claims Having Mixed Exponential Distribution, *Nonlinear Analysis: Modelling and Control* **11** (4), 413–426 (2006).
13. H. Albrecher, D. Kortschak, On the ruin probability and aggregate claim representations for Pareto claim size distributions, *Insurance: Mathematics and Economics* **45** (3), 362-373 (2009).
14. C. M. Ramsay, The distribution of sums of certain i.i.d. Pareto variates, *Communications in Statistics—Theory and Methods*, **35**, 395–405 (2006).
15. D. Landriault, G. Willmot, On the Gerber-Shiu discounted penalty function in the Sparre Andersen model with an arbitrary interclaim time distribution, *Insurance: Mathematics and Economics* **42** (2), 600-608 (2008).
16. B. Kvedaras, M. Sapagovas, *Skaičiavimo metodai*, Mintis, Vilnius (1974).

Priedas 1 Eksponentinis integralas

Funkcija:

$$Ei(x) = \int_{-}^{\infty} -$$

vadinama eksponentiniu integralu. Praktikoje dažniau sutinkama apibendrinta šios funkcijos forma:

$$E_n(x) = \int_{1}^{\infty} - \quad , \ E_1(x) = \quad - \quad .$$

Taikomųjų uždavinių sprendime dažniausiai laikoma jog $0 < \quad < \infty$.

Eksponentinis integralas pateiktas apibendrinta forma tenkina rekursiją:

$$E_{n+} = \frac{}{n} \ , \ E_{n+} = \frac{1}{n!} - \quad + \sum_{p=} \quad - \quad .$$

Įvairiems praktiniams uždaviniams spręsti, eksponentinio integralo reikšmes gauti ši funkcija yra skleidžiama įvairiom eilutėm pvz.:

$$E_1(x) = - \ - \quad - \sum_{n=} \quad , \ 0 < \quad < \ . \tag{1}$$

čia γ – Eulerio Gama funkcijos konstanta.

Šios eilutės tikslumas mažėja argumento reikšmėms viršijant 1. Argumento reikšmėms virš 1 sudaromos įvairios aproksimacinės formules dažniausiai pavidalo:

$$E_1(x) = \quad \frac{P(x)}{Q(x)},$$

čia $P(x)$ ir $Q(x)$ n-tojo laipsnio polinomai. Kuo didesnio laipsnio polinomas tuo tikslesnė aproksimacinė funkcija. Plačiau žr. [3].

Uždaviniams reikalaujantiems ypač didelio tikslumo eksponentinį integralą galima skleisti begaline trupmena:

$$E_n(x) = \left(\quad \right). \tag{2}$$

Literatūroje (žr. [10]) minima jog ypač didelio tikslumo reikalaujamuose uždaviniuose Eksponentinio integralo reikšmėms gauti naudojama (1) forma, skleidžiant suma iki 18 nario, mažoms argumento reikšmėms, ir (2) forma skleidžiant begalinę trupmeną iki 220 nario.

Priedas 2 Skaičiavimų kodas Maple matematiniame pakete

Dėl didelių skaičiavimo kodo apimčių pasikartojančio kodo nedėjome. Čia pateiktas kodas iki suskaičiuotos 2 sąsūkos. (atvejis $\alpha =$, $\lambda =$, $\theta =$, $\delta =$)

```
> restart;
> EY:=int((1+y)^(-alpha),y=0..+infinity) assuming alpha>1;
alpha:=3;
lambda:=4;
theta:=0.5;
delta:=0.1;
```

$$EY := \frac{1}{\alpha - 1}$$

$$\alpha := 3$$

$$\lambda := 4$$

$$\theta := 0.5$$

$$\delta := 0.1$$

```
> EY:=1/(alpha-1);
```

$$EY := \frac{1}{2}$$

```
> c:=lambda*EY*(1+theta);
```

$$c := 3.0$$

```
> INTEG:=int(alpha*exp(-r*y)*(1+y)^(-alpha-1),y=0..+infinity);
```

$$INTEG := \lim_{y \to \infty} \Big(-\frac{1}{2} \frac{1}{(1+y)^3} \big(-2 - 6\,y + r + 3\,r\,y + 2\,e^{-r\,y} - r^2 + e^r\,\mathrm{Ei}(1, r)\,r^3 - r\,e^{-r\,y}\,y + 2\,e^{-r\,y}\,r^2\,y + e^{-r\,y}\,r^2\,y^2 - e^r\,\mathrm{Ei}(1, r + r\,y)\,r^3 - 3\,e^r\,\mathrm{Ei}(1, r + r\,y)\,r^3\,y - 3\,e^r\,\mathrm{Ei}(1, r + r\,y)\,r^3\,y^2 - e^r\,\mathrm{Ei}(1, r + r\,y)\,r^3\,y^3 + 3\,e^r\,\mathrm{Ei}(1, r)\,r^3\,y + 3\,e^r\,\mathrm{Ei}(1, r)\,r^3\,y^2 + e^r\,\mathrm{Ei}(1, r)\,r^3\,y^3 - r\,e^{-r\,y} - 3\,r^2\,y - 3\,r^2\,y^2 + e^{-r\,y}\,r^2 + 3\,r\,y^2 + r\,y^3 - r^2\,y^3 - 6\,y^2 - 2\,y^3 \big) \Big)$$

```
> rho:=solve(lambda*INTEG=lambda+delta-c*r, r) assuming r>0;
```

$$\rho := 0.08752458274$$

```
> H_(y):=(1+y)^(-alpha);
```

$$H\_(y) := \frac{1}{(1+y)^3}$$

```
> phi:=(int(exp(-rho*y)*H_(y),y=0..+infinity))/(EY*(1+theta));
```

$$\phi := 0.6191546159$$

```
> INT1:=int(exp(-rho*y)*H_(y),y=0..+infinity);
```

$$INT1 := 0.4643659619$$

```
> INT2:=int(exp(-rho*y)*((1+y+x)^(-alpha)),y=0..+infinity)
assuming x>0;
```

$$INT2 := \frac{1}{(1.+x)^2}\left(e^{0.08752458274+0.08752458274\,x}\,\mathrm{Ei}(3.,\,0.08752458274+0.08752458274\,x)\right)$$

```
> F_(x):=INT2/INT1;
```

$$F\_(x) := \frac{1}{(1.+x)^2}\left(2.153473945\,e^{0.08752458274+0.08752458274\,x}\,\mathrm{Ei}(3.,\,0.08752458274+0.08752458274\,x)\right)$$

```
> F(x):=1-%;
```

$$F(x) := 1 - \frac{1}{(1.+x)^2}\left(2.153473945\,e^{0.08752458274+0.08752458274\,x}\,\mathrm{Ei}(3.,\,0.08752458274+0.08752458274\,x)\right)$$

```
> F_uod:=y-
>(1/INT1)*(exp(rho*(1+y))*Ei(alpha,rho*(1+y)))/(1+y)^(alpha-1);
```

$$F\_uod := y \to \frac{e^{\rho\,(y+1)}\,\mathrm{Ei}(\alpha,\,\rho\,(y+1))}{INT1\,(y+1)^{\alpha-1}}$$

```
> Fn:=y->1-(1/INT1)*(exp(rho*(1+y-x))*Ei(alpha,rho*(1+y-
x)))/(1+y-x)^(alpha-1);
```

$$Fn := y \to 1 - \frac{e^{\rho\,(1+y-x)}\,\mathrm{Ei}(\alpha, \rho\,(1+y-x))}{INT1\,(1+y-x)^{\alpha-1}}$$

```
> FFn:=diff(F(x),x);
```

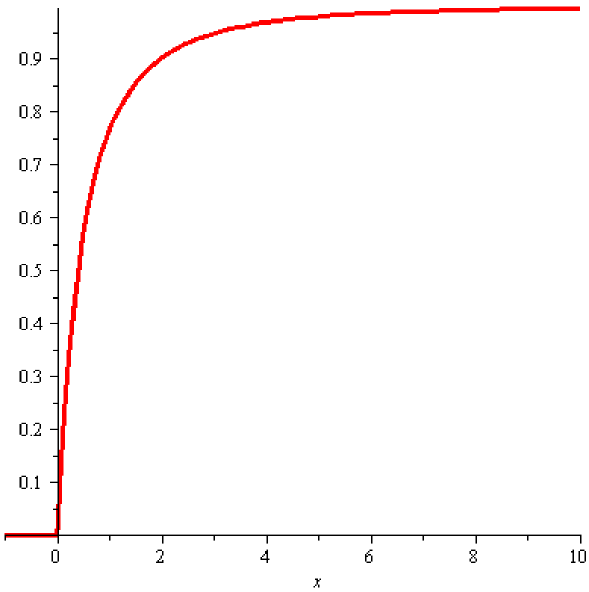
ž

$$FFn := -\frac{1}{(1.+x)^2}\Big(0.1884819085\, e^{0.08752458274 + 0.08752458274\,x}\,\mathrm{Ei}(3., 0.08752458274 + 0.08752458274\,x)\Big) + \frac{1}{(1.+x)^2}\Big(0.1884819085\, e^{0.08752458274 + 0.08752458274\,x}\,\mathrm{Ei}(2., 0.08752458274 + 0.08752458274\,x)\Big) + \frac{1}{(1.+x)^3}\Big(4.306947890\, e^{0.08752458274 + 0.08752458274\,x}\,\mathrm{Ei}(3., 0.08752458274 + 0.08752458274\,x)\Big)$$

```
> graf:=x->piecewise(x<0,0,F(x));
```

$$graf := x \to piecewise(x < 0, 0, F(x))$$

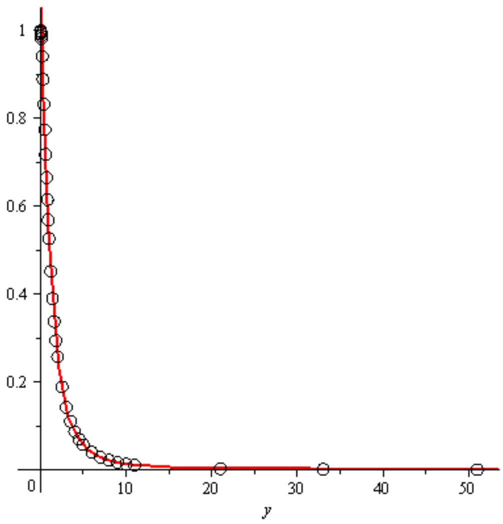
```
> plot(graf(x),x=-1..10, thickness=3);
```



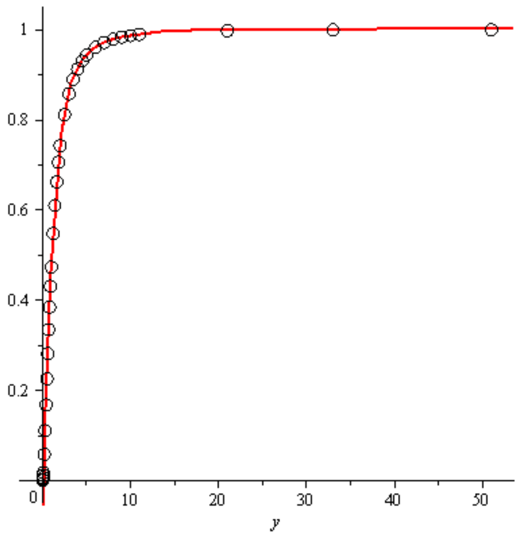

```
> L := Array([seq(0, i = 1 .. 34)]):
T := Array([seq(0,i = 1 .. 34)]):

> a:=1:
for i from 0.02 by 0.02 to 0.08 do
```

```
L[a]:=1-evalf(int(Fn(i)*FFn,x=0..i)):
a:=a+1:
end do:
> a:=5:
for i from 0.1 by 0.1 to 1 do
L[a]:=1-evalf(int(Fn(i)*FFn,x=0..i)):
a:=a+1:
end do:
> a:=15:
for i from 1.2 by 0.2 to 2 do
L[a]:=1-evalf(int(Fn(i)*FFn,x=0..i)):
a:=a+1:
end do:
> a:=20:
for i from 2.5 by 0.5 to 5 do
L[a]:=1-evalf(int(Fn(i)*FFn,x=0..i)):
a:=a+1:
end do:
> a:=26:
for i from 6 by 1 to 10 do
L[a]:=1-evalf(int(Fn(i)*FFn,x=0..i)):
a:=a+1:
end do:
> L[31]:=1-evalf(int(Fn(11)*FFn,x=0..11)):
L[32]:=1-evalf(int(Fn(21)*FFn,x=0..21)):
L[33]:=1-evalf(int(Fn(33)*FFn,x=0..33)):
L[34]:=1-evalf(int(Fn(51)*FFn,x=0..51)):
> for i from 1 by 1 to 4 do
T[i]:=i*0.02
end do:
> for i from 5 by 1 to 14 do
T[i]:=(i-4)*0.1
end do:
> for i from 15 by 1 to 19 do
T[i]:=1+(i-14)*0.2
```

```
end do:
> for i from 20 by 1 to 25 do
T[i]:=2+(i-19)*0.5
end do:
> for i from 26 by 1 to 30 do
T[i]:=5+(i-25)
end do:
> T[31]:=11:
T[32]:=21:
T[33]:=33:
T[34]:=51:
> with(CurveFitting):
> Interactive(T,L, y);
```




```
> Interactive(T,1-L, y);
```



Pastaroji funkcija *Interactive* iškviečia apleta, kuriame pasirenkamas gražinamosios reikšmės tipas: grafiko arba interpoliacinės funkcijos pavidalu. Gavę interpoliacinę funkciją ją vėl dauginom iš transformuoto Pareto skirstinio tankio ir ieškome šios naujos funkcijos reikšmių toje pačioje gardelėje. Kartodami tokį algoritmą gauname kiek norima daug transformuotos Pareto pasiskirstymo funkcijos sąsūkų.

```
> GerberShiu:=Array([0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0,0]):
for i from 1 by 1 to 14 do
GerberShiu[i]:=(1-phi)*phi*Sas1[i]+(1-phi)*(phi^2)*Sas2[i]+(1-
phi)*(phi^3)*Sas3[i]+(1-phi)*(phi^4)*Sas4[i]+(1-
phi)*(phi^5)*Sas5[i]
end do;
```

$$GerberShiu_{1} := 0.5358192165$$

$$GerberShiu_{2} := 0.5239182750$$

$$GerberShiu_{3} := 0.5126978226$$

$$GerberShiu_{4} := 0.4820706288$$

$$GerberShiu_{5} := 0.4467604508$$

$$GerberShiu_{6} := 0.4159239305$$

$$GerberShiu_{7} := 0.3758643888$$

$$GerberShiu_{8} := 0.3524558294$$

$$GerberShiu_{9} := 0.3213795015$$

$$GerberShiu_{10} := 0.2782820608$$

$$GerberShiu_{11} := 0.1919202276$$

$$GerberShiu_{12} := 0.1416774496$$

$$GerberShiu_{13} := 0.06818459165$$

$$GerberShiu_{14} := 0.007062752413$$