

Šiaulių universitetas

Fizikos ir matematikos fakultetas

Fizikos katedra

Andrius Jackūnas

SFERINĖS SVYRUOKLĖS KOMPIUTERINIS MODELIS

Mokslinis vadovas
doc. Mindaugas Stakvilevičius

Šiauliai, 2005

Turinys

1. Įvadas.....	3
2. Teorija.....	4
2.1 Sferinė svyruoklė.....	4
2.2 Sferinės svyruoklės pritvirtintos tampriu siūlu judėjimas. Diferencialinių lygčių išvedimas.....	8
2.3 Diferencialinės lygtys Dekarto koordinatėmis.....	9
2.4 Sferinės koordinatės.....	11
2.5 Vektorių, aprašančių svyruoklę, transformavimas iš cilindrinį į sferines koordinates.....	13
2.6 Vektorių, aprašančių svyruoklės, transformavimas iš Dekarto į sferines koordinates.....	17
3. Svyruoklės judėjimo tyrimas modeliuojant kompiuteriu.....	19
3.1 Dekarto koordinatėmis, kai jungiamoji dalis - tamprus siūlas.....	19
3.2 Dekarto koordinatėmis, kai jungiamoji dalis - tamprus strypas.....	24
3.3 Sferinėmis koordinatėmis, kai jungiamoji dalis - tamprus siūlas..	29
4. Išvados.....	35
5. Literatūra.....	36

1. Įvadas

Didėjanti modeliavimo žinių ir įgūdžių paklausa besiformuojančioje informacinėje visuomenėje, pažinimo ir modeliavimo procesų bendrumas ir kai kurie kiti faktoriai lemia tai, kad modeliavimas tampa vienu pagrindinių mokymo metodų. Sistemų analizės principais grindžiamas kompiuterinis modeliavimas derina savyje eksperimentinio ir teorinio metodo privalumus ir orientuoja besimokančiuosius ne į atskirus dalykinių žinių fragmentus, bet į sprendžiamą problemą. Besimokantieji orientuojami ne į atskirus dalykinių žinių fragmentus, bet į sprendžiamą problemą. Modeliuodami kompiuteriu žmonės išmoksta išskirti esminius tiriamosios sistemos bruožus, atpažinti konkrečiame kontekste nereikalingą informaciją, aktyviai ieškoti tinkamų abstrakcijų ir analogijų. Visa tai skatina vidinių mentaliųjų struktūrų susidarymą ir palengvina tolesnį mokymąsi. Naudojant kompiuterinius modelius mokomoji medžiaga įgauna vaizdumą, skatina kūrybingos asmenybės atsiskleidimą. Tai skatina vis platesnį modeliavimo metodo ir atitinkamų programinių priemonių taikymą įvairių dalykų dėstyme, ypač Vakarų Europos šalyse. Visuomenės raidos tendencijos lemia esminius švietimo sistemos bei išsilavinimo standartų pokyčius. Besikeičiančios informacinės visuomenės nariui keliami nauji reikalavimai: mokėti naudotis informacinėmis technologijomis, ieškoti, tvarkyti, pateikti, analizuoti, interpretuoti, kritiškai vertinti ir tinkamai panaudoti įvairios prigimties informaciją. Modeliavimo metodas vis intensyviau pradedamas taikyti ir Lietuvos mokyklose. Šiuolaikinių studijų patirtis rodo, kad naudojant kompiuterinį modeliavimą mokymo procesas intensyvėja, tampa patrauklesnis, dinamiškesnis – tai nėra vien tik nuolatinis standartų uždavinių kartojimas. Pavyzdžiui, vienas iš fizikos dalyko mokymo tikslų formuluojamas taip: “ugdyti gebėjimą modeliuoti nesudėtingus fizikinius reiškinius bei procesus, išskirti tai, kas svarbiausia fizikiniame reiškinyje”. Sprendžiant fizikinį uždavinį, ne visuomet realiai sudaromos sąlygos daryti natūrinį eksperimentą.

Mano darbo tikslas – išnagrinėti matematinį modelį svyruoklės su tampriu siūlu, kurią veikia sunkio jėga, tamprumo jėga, pasipriešinimo jėga ir Koriolio jėga. Matematinį modelį išnagrinėti įvairiose koordinačių sistemose, skirtingomis fizikinėmis sąlygomis, kurias nusakoma diferencialines fizikinių reiškinių lygtis parametrai ir pradinės sąlygos.

2. Teorija

2.1 Sferinė svyruoklė

Pakabinkime svyruoklę taip, kad masės materialus taškas galėtų laisvai judėti rutulio, spindulio l paviršiumi (l – tai svyruoklės ilgis). Šiuo atveju svyruoklės judėjimą aprašo ryšio lygtis:

$$F = \frac{1}{2} (x^2 + y^2 + z^2 - l^2) = 0, \quad (2.1,1)$$

$\frac{1}{2}$ yra įvestas patogumui).

Sutinka su Lagranžo pirmo laipsnio lygtimi (r – tai sąlyginis ryšio skaičius, kuris yra lygus 1, be to, $x_1=x_2=0$; $x_3 = -m$).
Gauname taip:

$$\begin{aligned} mx &= \lambda x, \\ my &= \lambda y, \\ mz &= -mg + \lambda z. \end{aligned} \tag{2.1,2}$$

Iš pirmų dviejų lygčių eliminavus λ , gauname impulso momento tvermės dėsnį ašies atžvilgiu z arba kitaip tariant vektorinio greičio tvermės dėsnis.

$$x \frac{dy}{dt} - y \frac{dx}{dt} = 2 \frac{dS}{dt} = C. \tag{2.1,3}$$

Iš kitos pusės, jei mes Lagranžo lygtį padauginsime iš x, y, z , tai gausime energijos tvermės dėsnį, jei ryšio lygtyje nėra priklausomybės nuo t (2.1,1). Iš pradžių gausime:

$$m(\dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z) = -mgz = \lambda(\dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z). \tag{2.1,4}$$

Tačiau iš (2.1,1) sąlygos gauname:

$$dF = \dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z = 0.$$

Iš kitos pusės:

$$\dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z = \frac{1}{2} \frac{d}{dt} (x^2 + y^2 + z^2) = \frac{1}{2} \frac{dv^2}{dt}.$$

Toliau integruodami pagal t gauname:

$$\frac{m}{2} v^2 = -mgz + const, \tag{2.1,5}$$

Tai mes užrašysime tokiu būdu:

$$T + V = W, \quad \text{kur } V = mgz. \tag{2.1,5a}$$

Prie to paragrafo pridėdame samprotavimus apie potencinę energiją V .

Jeigu mes pagaliau Lagranžo lygtis padauginsime iš x, y, z , tai naudojant sąlygą (2.1,1) galime sužinoti λ :

$$\lambda^2 - mgz = m(\dot{x}x + \dot{y}y + \dot{z}z),$$

arba

$$\lambda l^2 = mg \frac{z}{l} + m \left(\frac{x}{l} x + \frac{y}{l} y + \frac{z}{l} z \right) \quad (2.1,6)$$

Kadangi, normalė rutulio paviršių su koordinatėmis x, y, z turi nukreipiančius kosinusus $\frac{x}{l}, \frac{y}{l}, \frac{z}{l}$, tai antras narys iš dešinės atžymos lygus integraliniai jėgai F_n^* , statmeną rutulio paviršiui; pirmasis narys iš dešinės iki atžymos tikslumo taip pat yra lygus ir sur jėgai F_n , bet tik judant ta pačia kryptimi. Pagal D'alamberto principą šių dviejų jėgų suma, veikiant reakcijai R_n ant rutulio paviršiaus, susidaryti pusiausvyra (pagal fizikos principus įtempiant svyruoklę). Tokiu būdu lygtį (2.1,6) galima trumpai išreikšti tokia formule:

$$\lambda l = -(F_n + F_n^*) = R_n. \quad (2.1,7)$$

Iš viso to matome, kad su tikslumu iki daugiklio l , λ reiškia reakcijos jėgą susidarantią dėl ryšio (2.1,1) ir statmenai veikiančio judėjimo kryptčiai. Analogiškai atrodo ir panašūs atvejai, kada yra keletas ryšio atvejų ir atitinkamas skaičius lagranžinių dauginamųjų.

Kad tęstume integravimą reikia įvesti sferines koordinates:

$$\begin{aligned} x &= l \cos \varphi \sin \vartheta, \\ y &= l \sin \varphi \sin \vartheta, \\ z &= l \cos \vartheta. \end{aligned}$$

Diferencijuodami gausime:

$$\begin{aligned} x &= l \cos \varphi \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} - l \sin \varphi \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}, \\ y &= l \sin \varphi \cos \vartheta \cdot \dot{\vartheta} + l \cos \varphi \sin \vartheta \cdot \dot{\varphi}, \\ z &= -l \sin \vartheta \cdot \dot{\vartheta}. \end{aligned}$$

Tada sektorinio greičio(plotų) tvermės dėsnis (2.1,3) atrodys taip:

$$2 \frac{dS}{dt} = xy - yx = l^2 \sin^2 \vartheta \dot{\varphi} = C. \quad (2.1,8)$$

Energijos tvermės dėsnis (2.1,5a) atrodys taip:

$$\frac{ml^2}{2} (\dot{\vartheta}^2 + \sin^2 \vartheta \cdot \dot{\varphi}^2) + mgl \cos \vartheta = W. \quad (2.1,9)$$

Įvedus žymėjimą:

$$u = \cos\vartheta, \quad \vartheta = -\frac{1}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{du}{dt},$$

iš lygties (2.1,8) gausim:

$$\varphi = \frac{C}{l^2 \sqrt{1-u^2}} \quad (2.1,10)$$

o iš lygties (2.1,9) gausim:

$$\left(\frac{du}{dt}\right)^2 = U(u) = \frac{2}{ml^2} (W - mglu) \cdot (1-u^2) - \frac{C^2}{l^4}. \quad (2.1,11)$$

Iš šito t ir u sąryšio galima nustatyti t , priklausomybę nuo u :

$$t = \int \frac{du}{\sqrt{U}} \quad (2.1,12)$$

Dabar galime integruoti ir lygtį (2.1,10). Kadangi ji vienoda su lygtimis (2.1,10) ir (2.1,11),

$$\frac{d\varphi}{du} = \varphi \frac{dt}{du} = \frac{C}{l^2 \sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}},$$

tai gauname

$$\varphi = \frac{C}{l^2} \int \frac{du}{\sqrt{1-u^2}} \cdot \frac{1}{\sqrt{U}}. \quad (2.,113)$$

U yra trečio laipsnio funkcija iš $u = \cos\vartheta$. Dydis \sqrt{U} galioja tik tuo atveju, jei $U > 0$. Jei lygčių sprendimas turi atitikti fiziką, uždavinio sprendimą, tai intervale $-1 < u < +1$ turi būti dvi reikšmės $u = u_1$ ir $u = u_2 > u_1$, čia U turi būti teigiamas.

Reikšmių $u_1 = \cos\vartheta_1$ ir $u_2 = \cos\vartheta_2$ esmė yra dvi paralelės, tarp kurių svyruoja materialus taškas. Kada formulėse (2.1,12) ir (2.1,13) integralas pasiekia vieną iš šių ribų, jos kryptis turi būti pakeista į priešingą, kad rezultatas būtų veiksmingas. Momentai, kai metu vyksta judėjimo krypties pokyčiai, atskirti vienas nuo kito laiko tarpu:

$$\frac{T}{2} = \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{\sqrt{U}}. \quad (2.1,14)$$

Tačiau dabar virpesiai nėra periodiškai erdvėje, kaip buvo esant plokščiai svyruoklei, o yra lydimi lėtos precesijos. „Precesijos kampas“ $\Delta\varphi$ per pilną virpesių svyravimo laikotarpį τ išreiškiamas iš formulės (2.1,13), taigi:

$$2k\pi + \Delta\varphi = \frac{2C}{l^2} \int_{u_2}^{u_1} \frac{du}{(1-u^2)\sqrt{U}}, \quad (2.1,15)$$

Integralas (2.1,13) taip kaip ir integralas matematinės svyruoklės atveju yra elipsinis pirmo laipsnio integralas. Apskritai, vadinami visi integralai turintys vardiklyje išreikštą pointegralinę kvadratinę šaknį, susidedančia iš trečio ar ketvirto laipsnio daugianau skaičiaus atitinkamai pakaitinei integracijai. Panašiai yra ir su integralu, jei vietoj pakaitinės integracijos paimtume $u = \sin \frac{\varphi}{2}$, integralas atrodys taip:

$$\int \frac{du}{\sqrt{(a^2 - u^2)(1 - u^2)}},$$

kur $u = \sin \frac{\alpha}{2}$. Lygtyse (2.1,14) ir (2.1,12) yra išreikštas kaip „pirmo laipsnio integralas“. Atvirkščiai integralui (2.1,13), turinčiam vardiklyje be \sqrt{U} dar du dauginamuosius $(1 \pm u)$ kuris vadinamas „elipsiniu trečio laipsnio integralu“; lygtis (2.1,15) yra „pilnas trečio laipsnio integralas“.

2.2 Sferinės svyruoklės, pritvirtintos tampriu siūlu, judėjimas. Diferencialinių lygčių išvedimas

Užrašome veikiančias jėgas. Sunkio jėga:

$$\vec{F}_1 = m \vec{g}. \quad (2.2,1)$$

\vec{F}_2 - tamprumo jėga proporcinga siūlo pailgėjimui $(r-R)$, nukreipta priešingai pailgėjimui kryptimi ir veikianti tik tuomet, kai $r > R$. R - neištemto siūlo ilgis:

$$\vec{F}_2 = -k(r-R) \vec{e}_r (r > R). \quad (2.2,2)$$

Pasipriešinimo jėga \vec{F}_3 . Kol pasipriešinimas laminarus, jis yra proporcingas ir priešingas greičiui. Mes nenagrinėjame to atvejo, kai veikia turbulentinė, proporcinga greičio kvadratui:

$$\vec{F}_3 = -c \vec{v}. \quad (2.2,3)$$

Mes įvedame du pasipriešinimo koeficientus, c - mažesnis ir yra judėjimas statmenai siūlui, q - didesnis ir nukreiptas s pailgėjimo kryptimi tol, kol veikia tamprumo jėga \vec{F}_4 :

$$\vec{F}_4 = -qr'e_r (r > R). \quad (2.2,4)$$

\vec{F}_5 - dėl Žemės sukimosi svyruoklę veikia ir Koriolio inercijos jėga, priklausanti nuo Žemės sukimosi kampinio greičio $\vec{\omega}$ relatyvaus greitis \vec{v} Žemės atžvilgiu. Koriolio jėga statmena ir greičiui, ir Žemės sukimosi ašiai:

$$\vec{F}_5 = 2m \left[\vec{v} \vec{\omega} \right]. \quad (2.2,5)$$

2.3 Diferencialinės lygtys Dekarto koordinatėmis

Ašis z nukreipta vertikaliai aukštyn, svorio jėga yra priešinga ortui \vec{k} , tai svorio jėga Dekarto koordinatėmis bus;

$$\vec{F}_1 = -mg \vec{k}. \quad (2.3,1)$$

Siūlo ilgis per Dekarto koordinatas:

$$r = \sqrt{x^2 + y^2 + z^2}, \quad (2.3,2)$$

Norint suprojektuoti spindulio kryptimi užrašome spindulio ortą \vec{e}_r :

$$\vec{e}_r = \frac{\vec{r}}{r} = \frac{x \vec{i} + y \vec{j} + z \vec{k}}{r}, \quad (2.3,3)$$

Įrašius (2.3,2) ir (2.3,3) formules į (2.3,2) lygtį, gauname tamprumo jėgą Dekarto koordinatėmis:

$$\vec{F}_2 = k(R-r)(x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}). \quad (2.3,4)$$

Pasipriešinimo jėga Dekarto koordinatėmis:

$$\vec{F}_3 = -c(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k}). \quad (2.3,5)$$

\vec{F}_4 - Dekarto koordinatėmis:

$$\vec{F}_4 = -c(x'\vec{i} + y'\vec{j} + z'\vec{k} - \frac{x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}}{r}). \quad (2.3,6)$$

Suprojektavę kampinio greičio vektorių į koordinačių ašis, tariant, kad jis yra plokštumoje yz ir sudaro su y ašimi kampą β , gauname vektorinę sandaugą:

$$2m \begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix}$$

suprojektavę kampinio greičio vektorių į Dekarto koordinačių ašis:

$$\vec{w} = w(\cos\beta \vec{j} + \sin\beta \vec{k}),$$

$$\begin{bmatrix} \vec{v} \\ \vec{w} \end{bmatrix} = \begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ x' & y' & z' \\ 0 & \cos\beta & \sin\beta \end{vmatrix} w = w \left\{ \vec{i}(y' \sin\beta - r' \cos\beta) - \vec{j}x' \sin\beta + x' \cos\beta \right\}$$

Tokiu būdu, Koriolio inercijos jėga:

$$\vec{F}_5 = 2m \left\{ \vec{k} \cos\beta x' - \vec{j} \sin\beta x' + \vec{i} \sin\beta y' - \vec{i} \cos\beta z' \right\} \quad (2.3,7)$$

Irašę į II Niutono dėsnį Dekarto koordinatėmis, kur $\vec{a} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$, visų penkių jėgų vektorinę sumą ir sulyginę koeficientus

prie vienodų ortų, gauname skaliarines lygtis, kur $c=c_1$, $c_1-c_3=q$:

$$\begin{aligned}x'' &= \frac{k}{m} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) x - \frac{c_1}{m} x' + \frac{(c_1 - c_3)}{m} \cdot \frac{xx' + yy' + zz'}{r^2} x + 2w(y' \sin \beta - z' \cos \beta), \\y'' &= \frac{k}{m} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) y - \frac{c_1}{m} y' + \frac{(c_1 - c_3)}{m} \cdot \frac{xx' + yy' + zz'}{r^2} y - 2wx' \sin \beta, \\z'' &= -g + \frac{k}{m} \left(\frac{R}{r} - 1 \right) z - \frac{c_1}{m} z' + \frac{(c_3 - c_2)}{m} \cdot \frac{xx' + yy' + zz'}{r^2} z + 2wx' \cos \beta.\end{aligned}\tag{2.3,8}$$

Šios lygtys yra II eilės ir netiesinės. Į jas įeina išraiškos $xx' + yy' + zz'$, todėl šių lygčių analiziškai išspręsti negalime, belieku integruoti skaitiškai, pasitelkus standartines kompiuterines programas.

2.4 Sferinės koordinatės

Dekarto koordinačių išraiška per sferines koordinatas:

$$x = r \sin \theta \cos \varphi,$$

$$y = r \sin \theta \sin \varphi,$$

$$z = r \cos \theta.$$

Greitis sferinėmis koordinatėmis:

$$\vec{v} = r' \vec{e}_r + r\theta' \vec{e}_\theta + r \sin \theta \varphi' \vec{e}_\varphi,$$

$$v^2 = r'^2 + r^2 \theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2.$$

(2.4,1)

Lagranžianas yra kinetinės ir potencinės energijos skirtumas:

$$L = E_k - E_p,$$

$$E_k = \frac{mv^2}{2} = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2),$$

$$E_p = mgz + \frac{k}{2}(r - R)^2 (r > R).$$

Čia parašyta, kad potencinė energija susideda iš sunkio jėgos potencinės energijos ir tamprumo jėgos potencinės energijos papildoma sąlyga, kad siūlas ištemtas, tai yra, kad

$$(r > R) = 0, \text{ kai } r \leq R,$$

$$(r > R) = 1, \text{ kai } r > R.$$

Žinodami lagranžianą sferinėmis koordinatėmis:

$$L = \frac{m}{2}(r'^2 + r^2\theta'^2 + r^2 \sin^2 \theta \varphi'^2) - mgr \cos \theta - \frac{k}{2}(r - R)^2 (r > R)$$

taip pat išvestines pagal apibendrintas koordinates ir jų išvestines, gauname Lagranžo lygtis:

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial q_k'} \right) = \frac{\partial L}{\partial q_k} [q_1 = r, q_2 = \theta, q_3 = \varphi]$$

, q_k - apibendrintosios koordinatės

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial r'} \right) = \frac{\partial L}{\partial r}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \theta'} \right) = \frac{\partial L}{\partial \theta}; \quad \frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \varphi'} \right) = \frac{\partial L}{\partial \varphi}.$$

Jos konkrečiu sferiniu koordinatėju atveju bus trys:

$$\frac{\partial L}{\partial r'} = mr',$$

$$\frac{\partial L}{\partial r} = \frac{m}{2}(r\theta'^2 + r \sin^2 \theta \varphi'^2 - mg \cos \theta) - k(r - R)(r > R),$$

$$\frac{d}{dt}(r') = (r\theta'^2 + r \sin^2 \theta \varphi'^2 - \frac{g}{2} \cos \theta) + k(r - R)(r > R).$$

pagal koor r I-lygtis

$$\frac{\partial L}{\partial \theta'} = mr^2 \theta',$$

$$\frac{\partial L}{\partial \theta} = mr^2 \sin \theta \cos \theta \varphi'^2 + mgr \sin \theta,$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \theta') = r \sin \theta \cos \theta \varphi'^2 + mgr \sin \theta,$$

II lygtis

+

$$\frac{\partial L}{\partial \varphi'} = mr^2 \sin^2 \theta \varphi'; \quad \frac{\partial L}{\partial \varphi} = 0;$$

$$\frac{d}{dt}(r^2 \sin^2 \theta \varphi') = 0$$

III lygtis

Lagranžo lygtis galioja tik konservatyvioms sistemoms, tai yra tokioms, kurioms darbas $dA = -dU$ yra pilnasis diferencialas ir kurioms galioja energijos tvermės dėsnis. Jei yra pasipriešinimo jėgos, tada reikia pasipriešinimo jėgas prijungti prie šių lygčių kitu būdu, taip

Koriolio jėgomis $\vec{F}_k = 2m \left[\vec{v} \vec{\omega} \right]$, kurios atsiranda dėl kampinio greičio ω , nes šitų jėgų darbas lygus 0.

2.5 Vektorių, aprašančių svyruoklę, transformavimas iš cilindrinė į sferines koordinates

Pagreitis cilindrinėmis koordinatėmis iš (žr. lit.1):

$$\vec{a} = (\rho'' - \rho\varphi'^2) \vec{e}_\rho + (2\rho'\varphi' + \rho\varphi'') \vec{e}_\varphi + r'' \vec{k} \quad (2.5,1)$$

Užrašome iš cilindrinė koordinačių per sferines koordinates:

$$\begin{aligned} \rho &= r \sin \theta \\ z &= r \cos \theta \end{aligned} \quad (2.5,2)$$

Greitis iš cilindrinė koordinačių į sferines koordinates:

$$\rho' = r' \cos \theta + r \theta' \sin \theta \quad (2.5,3)$$

Pagreitis iš cilindrinė koordinačių į sferines koordinates:

$$\rho'' = r'' \sin \theta + 2r'\theta' \cos \theta + r\theta'' \cos \theta - r\theta'^2 \sin \theta \quad (2.5,4)$$

Greitis iš cilindrinų koordinačių į sferines koordinates:

$$\dot{z}' = r' \cos \theta - r \dot{\theta}' \sin \theta \quad (2.5,5)$$

Pagreitis iš cilindrinų koordinačių į sferines koordinates:

$$\ddot{z}'' = r'' \cos \theta - 2r' \dot{\theta}' \sin \theta - r \ddot{\theta}'' \sin \theta - r \dot{\theta}'^2 \cos \theta \quad (2.5,6)$$

Gautas pagreičio koordinates (2.5,4) ir (2.5,6) į pagreičio cilindrinėmis koordinatėmis formulę

$$\begin{aligned} \vec{a} = & (r'' \sin \theta + 2r' \dot{\theta}' \cos \theta + r \ddot{\theta}'' - r \dot{\theta}'^2 \sin \theta - r \sin \theta \dot{\varphi}''^2) (\vec{e}_\theta \cos \theta + \vec{e}_r \sin \theta) - \\ & (2r' \dot{\varphi}' \sin \theta + r \dot{\theta}' \dot{\varphi}' \cos \theta + r \sin \theta \dot{\varphi}''^2) \vec{e}_\varphi + (r'' \cos \theta - 2r' \dot{\theta}' \sin \theta - r \ddot{\theta}'' - r \dot{\theta}'^2 \sin \theta + r \dot{\theta}'^2 \cos \theta) * \\ & * (\vec{e}_r \cos \theta - \vec{e}_\theta \sin \theta). \end{aligned} \quad (2.5,7)$$

Sutraukiame narius prie vienodų ortų:

$$\begin{aligned} \vec{a} = & \vec{e}_r (r' \sin^2 \theta + 2r' \dot{\theta}' \sin \theta \cos \theta + r \ddot{\theta}'' \sin \theta \cos \theta - r \dot{\theta}'^2 \sin^2 \theta - r \dot{\varphi}'^2 \sin^2 \theta + \\ & + r'' \cos \theta - 2r \dot{\theta}'' \sin \theta \cos \theta - r \ddot{\theta}'' \sin \theta \cos \theta - r \dot{\theta}'^2 \cos^2 \theta) + \\ & + \vec{e}_\theta (r'' \sin \theta \cos \theta + 2r' \dot{\theta}' \cos^2 \theta + r \ddot{\theta}'' \cos^2 \theta - r \dot{\theta}'^2 \sin \theta \cos \theta - r \dot{\varphi}'^2 \sin \theta \cos \theta - \\ & - r'' \sin \theta \cos \theta + 2r' \dot{\theta}' \sin^2 \theta + r \ddot{\theta}'' \sin^2 \theta + r \dot{\theta}'^2 \sin \theta \cos \theta) + \\ & + \vec{e}_\varphi (2r' \dot{\varphi}' \sin \theta + r \dot{\theta}' \dot{\varphi}' \cos \theta + r \sin \theta \dot{\varphi}''^2). \end{aligned} \quad (2.5,8)$$

Pagreitis sferinėmis koordinatėmis:

$$\vec{a} = \vec{e}_r \{ r'' - r \dot{\theta}'^2 - r \dot{\varphi}'^2 \sin^2 \theta \} + \vec{e}_\theta \{ 2r' \dot{\theta}' + r \ddot{\theta}'' - r \dot{\theta}'^2 \sin \theta \cos \theta \} + \vec{e}_\varphi \{ r \dot{\varphi}''^2 \sin \theta + 2r' \dot{\varphi}' \sin \theta + 2r \dot{\theta}' \dot{\varphi}' \cos \theta \}$$

Užrašome svorio jėgą Dekarto koordinatėmis, kai ašis y nukreipta į viršų:

$$-mg \vec{j} \quad (2.5,9)$$

Paimam (žr.lit1) formulę

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_r \sin \theta + \vec{e}_\theta \cos \theta \quad (2.5,10)$$

paimam iš (žr.lit.1)

$$\vec{j} = \vec{e}_\rho \sin \theta + \vec{e}_\theta \cos \theta \quad (2.5,11)$$

(2.5,10) į (2.5,11)

$$\vec{j} = (\vec{e}_r \sin \theta + \vec{e}_\theta \cos \theta) \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \theta \quad (2.5,12)$$

Gauname \vec{j} ortą sferinėmis koordinatėmis:

$$\vec{j} = \vec{e}_r \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \theta \quad (2.5,13)$$

Svorio jėga sferinėmis koordinatėmis

$$-mg \vec{j} = -mg (\vec{e}_r \sin \theta \sin \varphi + \vec{e}_\theta \cos \theta \sin \varphi + \vec{e}_\varphi \cos \theta) \quad (2.5,14)$$

Pasipriešinimo jėga iš (2.2,3)

$$\vec{F}_p = -c \vec{v} \quad (2.5,15)$$

(2.5,15) formulę įrašome į (2.4,1) ir gauname pasipriešinimo jėga sferinėmis koordinatėmis:

$$\vec{F}_p = -c(r' \vec{e}_r + r\theta' \vec{e}_\theta + r\varphi' \sin \varphi \vec{e}_\varphi) \quad (2.5,16)$$

Tamprumo jėga:

$$\vec{F}_t = \vec{e}_r \{(R-r)(r > R)[k + q\Phi(r')]\} \quad (2.5,17)$$

\vec{F}_t - tamprumo jėga, veikianti, kai siūlas įsitemęs, ilgėjimo tamprumo koeficientas yra $k+q$, o siūlui atsistatant tamprumo koeficientas yra k .

(2.5,14) (2.5,16) (2.5,17) formules surašome į II Niutono dėsnį $\vec{F} = m\vec{a}$, gausime skaliarinę diferencialinę lygčių sistemą sferinėmis koordinatėmis:

$$\left\{ \begin{array}{l} mr'' - r\theta'^2 - r\varphi'^2 \sin^2 \theta = mg \sin \theta \sin \varphi - cr' + (R-r)(r > R)[k + q\Phi(r')] + 2mwr\varphi' \sin \theta \cos(\theta + \beta) \\ m(rr'\theta' + r\theta'' - r\varphi'^2 \sin \theta \cos \theta) = -mg \cos \theta \sin \varphi - cr\theta' + 2mwr \sin \theta \varphi' \sin(\theta + \beta) \\ m(r\varphi'' \sin \theta + 2r'\varphi' \sin \theta + 2r\theta'\varphi' \cos \theta) = -mg \cos \theta - cr\varphi' \sin \varphi + 2mw(r' \cos(\theta + \beta) - r\theta' \sin(\theta + \varphi)) \end{array} \right.$$

2.6 Vektorių, aprašančių svyruoklę, transformavimas iš Dekarto į sferines koordinates

Užrašome greitį sferinėmis koordinatėmis (iš žr. lit. 1):

$$\vec{v} = r \vec{e}_r + r\theta' \vec{e}_\theta + r \sin \theta \varphi' \vec{e}_\varphi. \quad (2.6,1)$$

Pagreitis Dekarto koordinatėmis:

$$\vec{a} = x'' \vec{i} + y'' \vec{j} + z'' \vec{k}. \quad (2.6,2)$$

Užrašome ortą \vec{i} cilindrinėmis koordinatėmis:

$$\vec{i} = \vec{e}_\rho \cos \varphi - \vec{e}_\varphi \sin \varphi. \quad (2.6,3)$$

Ortas \vec{j} iš Dekarto į sferines koordinates paimtas iš (2.5,11):

$$\vec{j} = \vec{e}_\varphi \cos \varphi + \vec{e}_\rho \sin \varphi. \quad (2.6,4)$$

Ortai iš cilindrių į sferines koordinates:

$$\vec{k} = \vec{e}_r \cos\theta - \vec{e}_\theta \sin\theta \quad (2.6,5)$$

$$\vec{e}_\rho = \vec{e}_\theta \cos\theta - \vec{e}_r \sin\theta$$

Užrašome Dekarto koordinates per sferines koordinates:

$$\begin{aligned} x &= r \sin\theta \cos\varphi \\ y &= r \sin\theta \sin\varphi \\ z &= r \cos\theta \end{aligned} \quad (2.6,6)$$

Greičio perėjimas iš Dekarto koordinačių į sferines koordinates:

$$x' = r' \sin\theta \sin\varphi + r\theta' \cos\theta \sin\varphi + r\varphi' \sin\theta \sin\varphi \quad (2.6,7)$$

Pagreičio perėjimas iš Dekarto koordinačių į sferines koordinates:

$$\begin{aligned} x'' &= r'' \sin\theta \sin\varphi + r'\theta' \cos\theta \sin\varphi + r'\varphi' \sin\theta \cos\varphi + \\ &+ r'\theta \cos\theta \sin\varphi - r \cos\theta \sin\varphi + r\theta'' \cos\theta \sin\varphi - \\ &- r\theta'^2 \sin\theta \sin\varphi + r\theta'\varphi' \cos\theta \sin\varphi + r'\varphi \sin\theta \sin\varphi + \\ &+ r\varphi'' \sin\theta \sin\varphi + r\varphi'\theta \cos\theta \sin\varphi + r\varphi'^2 \sin\theta \cos\varphi. \end{aligned} \quad (2.6,8)$$

Čia yra trys antros eilės netiesinės antrosios eilės diferencialinės lygtys, kurias galima transformuoti į šešias I-os eilės diferencialines lygtis. Norint modeliuoti reikia parinkti skaitines į lygtis įeinančius parametru reikšmes ir pradines sąlygas, pradinės koordinates, pradinius greičius. Parametrai yra šie: masė m , laisvojo kritimo pagreitis g , įtemto siūlo ilgis R , tamprumo koeficientas s , ištempus $k+q$, atsistačius siūlui tamprumo koeficientas k , pasipriešinimo koeficientas c , Žemės sukimosi kampinis greitis $\omega = \frac{2\pi}{24}$ Žemės ašies kampas su y ašimi β .

Turint šiuos parametrus ir lygtis bei pradines sąlygas, reikia pasirinkti skaitinius diferencialinių lygčių integravimo matematinius paketus. Aš naudosisiu kompiuterinę sistemą MATHCAD 2001. Universali kompiuterinė matematikos sistema turi galingas grafines

vaizdų kūrimo priemonės, sprendžia visų matematikos sričių matematinius uždavinius, taip pat galima atlikti animaciją. Ja nesunku dirbti turi daug patogių palečių.

3. Svyruoklės judėjimo tyrimas modeliuojant kompiuteriu

3.1 Dekarto koordinatėmis, kai jungiamoji dalis - tamprus siūlas

Žemiau naudojamų parametrų reikšmės turi tokias dimensijas

$$[g] = \frac{m}{s^2}, [m] = kg, [H] = \frac{1}{s^2}, [k] = \frac{kg}{s^2}, [c] = \frac{m}{s}, [x_0, y_0, z_0] = m, [R] = m, [v_0] = \frac{m}{s}, [w] = \frac{1}{s}.$$

$$\begin{array}{l}
 g := 10 \quad L(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad m := 40 \quad k := 8 \cdot 10^2 \quad c := 0.01 \quad q := 0.9 \\
 \begin{array}{l}
 \left(\begin{array}{l} x_0 \\ y_0 \\ z_0 \\ x_0' \\ y_0' \\ z_0' \end{array} \right) \\
 x :=
 \end{array}
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 x_0 := 0.0 \quad y_0 := 0.0 \quad z_0 := -30 \quad x_0' := 0.0 \quad y_0' := 0.0 \quad z_0' := 0.0 \\
 R := L(x_0, y_0, z_0) - \frac{m \cdot g}{k} \quad v_0 := L(x_0', y_0', z_0') \quad T_m := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \quad T_d := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\
 \beta := \frac{56 \cdot \pi}{180} \quad \omega := \frac{2 \cdot \pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \quad H(x, y, z) := \frac{k}{m} \cdot \left(\frac{R}{L(x, y, z)} - 1 \right) \cdot \left(\frac{R}{L(x, y, z)} < 1 \right)
 \end{array}$$

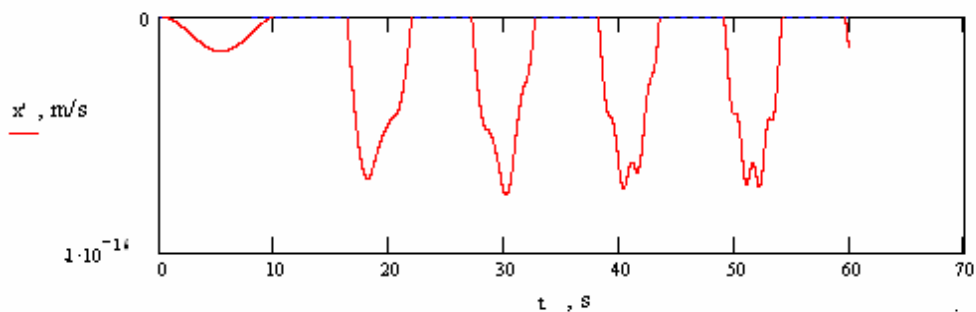
$$D(t, x) := \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ H(x_0, x_1, x_2) \cdot x_0 - \frac{x_3}{m} \cdot c - \frac{x_0 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5}{L(x_0, x_1, x_2)^2} \cdot \frac{q \cdot x_0}{m} + 2\omega \cdot (x_4 \cdot \sin(\beta) - x_5 \cdot \cos(\beta)) \\ H(x_0, x_1, x_2) \cdot x_1 - \frac{x_4}{m} \cdot c - \frac{x_0 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5}{L(x_0, x_1, x_2)^2} \cdot \frac{q}{m} \cdot x_1 - 2\omega \cdot x_3 \cdot \sin(\beta) \\ H(x_0, x_1, x_2) \cdot x_2 - \frac{x_5}{m} \cdot c - \frac{x_0 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5}{L(x_0, x_1, x_2)^2} \cdot \frac{q}{m} \cdot x_2 - g + 2\omega \cdot x_3 \cdot \cos(\beta) \end{bmatrix}$$

$$tg := 1 \cdot 60 \quad N := 10000 \quad n := 0..N$$

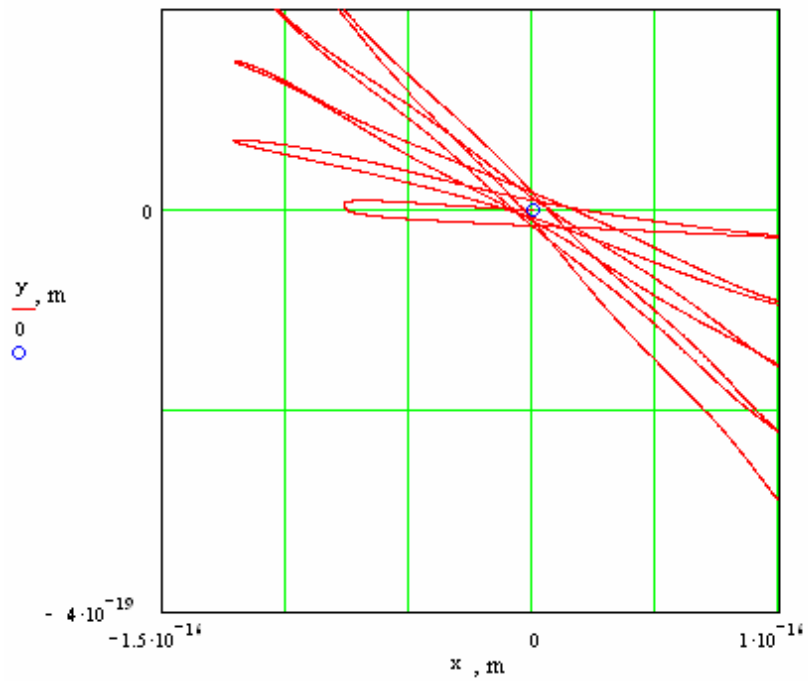
$$U := \text{rkfixed}(x, 0, tg, N, D) \quad t_n := U_{n,0} \quad x_n := U_{n,1} \quad y_n := U_{n,2} \quad z_n := U_{n,3}$$

$$x'_n := U_{n,4} \quad y'_n := U_{n,5} \quad z'_n := U_{n,6} \quad r_n := L(x_n, y_n, z_n) \quad v_n := L(x'_n, y'_n, z'_n)$$

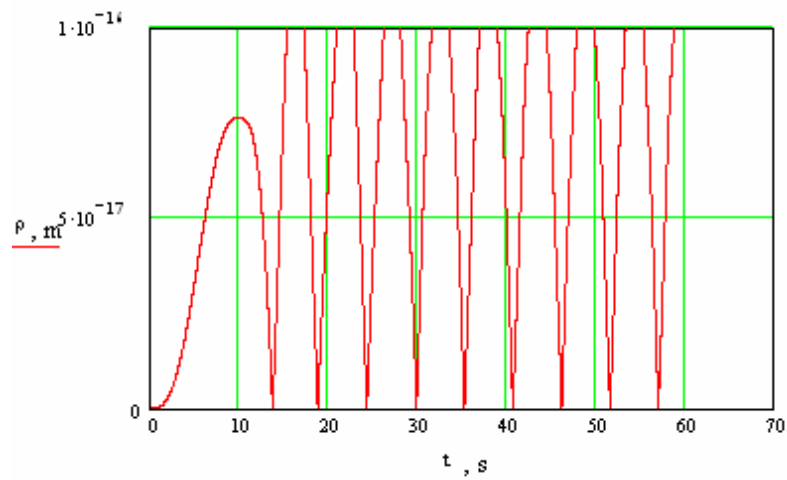
$$Ek := \frac{k}{2} \cdot (R - r)^2 \quad Eh := m \cdot g \cdot z \quad Ev := \frac{m}{2} \cdot (v)^2 \quad W := Ek + Eh + Ev$$



1 pav. Greičio v_x priklausomybė nuo laiko



2 pav. Trajektorijos projekcijos į x y (horizontale) plokštumą



3 pav. Atstumo nuo vertikalios pakelimo ašies priklausomybė nuo laiko

Žemiau naudojamų parametų reikšmės turi tokias dimensijas

$$[g] = \frac{m}{s^2}, [m] = kg, [H] = \frac{1}{s^2}, [k] = \frac{kg}{s^2}, [c] = \frac{m}{s}, [x_0 y_0 z_0] = m, [R] = m, [v_0] = \frac{m}{s}, [w] = \frac{1}{s}.$$

$$g := 10 \quad L(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad m := 4 \quad k := 4.0 \cdot 10^2 \quad c := 0.01 \quad q := 9.9$$

$$x := \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \\ x0' \\ y0' \\ z0' \end{pmatrix} \quad \begin{array}{l} x0 := 0.0 \quad y0 := 0.0 \quad z0 := -1 \quad x0' := 12.0 \quad y0' := 0.0 \quad z0' := 0.0 \\ R := L(x0, y0, z0) - \frac{m \cdot g}{k} \quad v0 := L(x0', y0', z0') \quad Tm := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \quad Td := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \\ \beta := \frac{56 \cdot \pi}{180} \quad \omega := \frac{2 \cdot \pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \quad H(x, y, z) := \frac{k}{m} \cdot \left(\frac{R}{L(x, y, z)} - 1 \right) \cdot \left(\frac{R}{L(x, y, z)} < 1 \right) \end{array}$$

$$D(t, x) := \begin{pmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ H(x_0, x_1, x_2) \cdot x_0 - \frac{x_3}{m} \cdot c - \frac{x_0 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5}{L(x_0, x_1, x_2)^2} \cdot \frac{q \cdot x_0}{m} + 2\omega \cdot (x_4 \cdot \sin(\beta) - x_5 \cdot \cos(\beta)) \\ H(x_0, x_1, x_2) \cdot x_1 - \frac{x_4}{m} \cdot c - \frac{x_0 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5}{L(x_0, x_1, x_2)^2} \cdot \frac{q}{m} \cdot x_1 - 2\omega \cdot x_3 \cdot \sin(\beta) \\ H(x_0, x_1, x_2) \cdot x_2 - \frac{x_5}{m} \cdot c - \frac{x_0 \cdot x_3 + x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_5}{L(x_0, x_1, x_2)^2} \cdot \frac{q}{m} \cdot x_2 - g + 2\omega \cdot x_3 \cdot \cos(\beta) \end{pmatrix}$$

$$tg := 0.5 \cdot 60$$

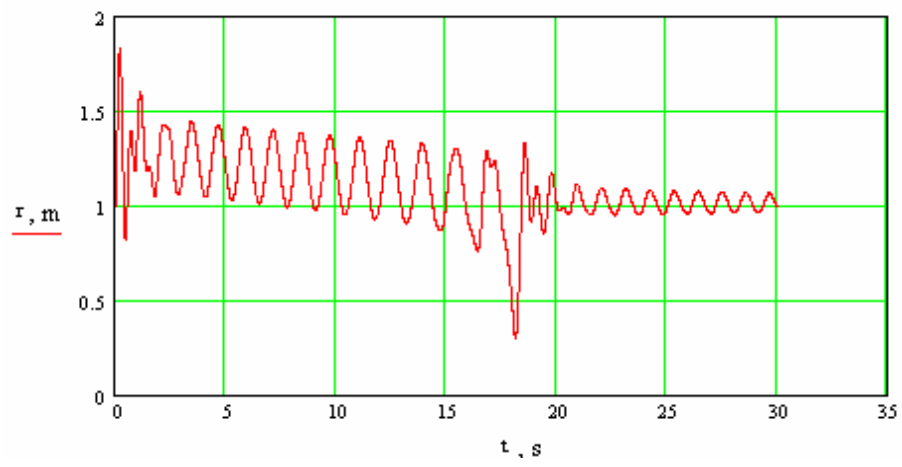
$$N := 10000$$

$$n := 0..N$$

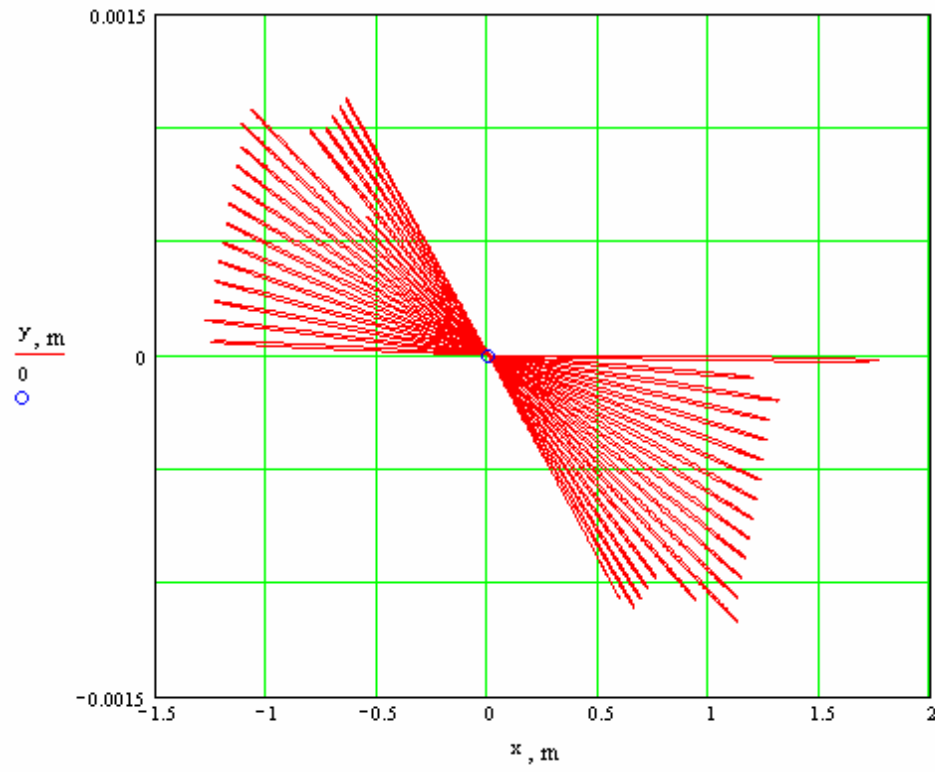
$$U := \text{rkfixed}(x, 0, tg, N, D) \quad t_n := U_{n,0} \quad x_n := U_{n,1} \quad y_n := U_{n,2} \quad z_n := U_{n,3}$$

$$x'_n := U_{n,4} \quad y'_n := U_{n,5} \quad z'_n := U_{n,6} \quad r_n := L(x_n, y_n, z_n) \quad v_n := L(x'_n, y'_n, z'_n)$$

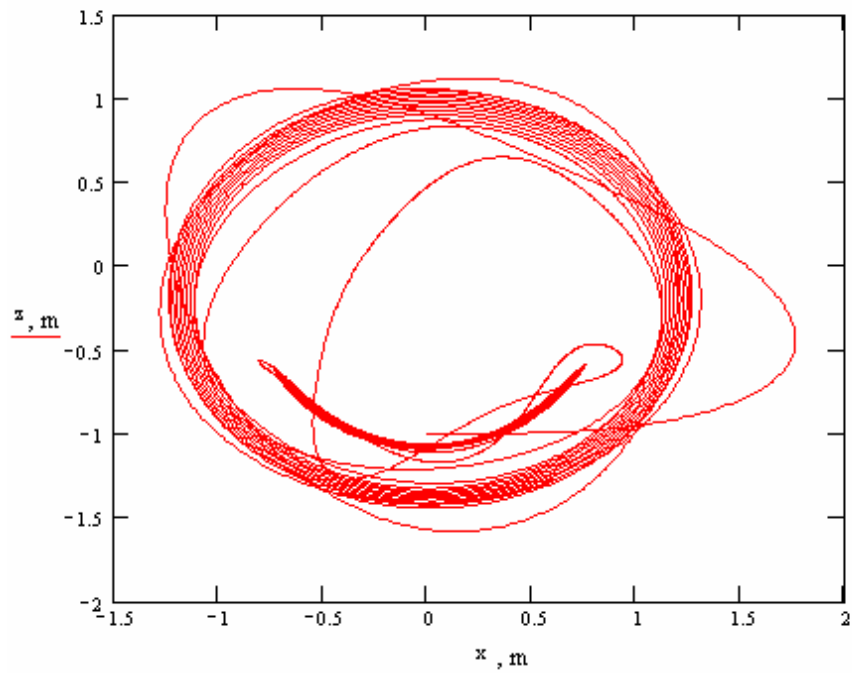
$$Ek := \left[\frac{k}{2} \cdot (R - r)^2 \cdot (R < r) \right] \quad Eh := m \cdot g \cdot z \quad Ev := \frac{m}{2} \cdot (v)^2 \quad W := Ek + Eh + Ev$$



4 pav. Siūlo ilgio priklausomybė nuo laiko



5 pav. Trajektorijos projekcijos į x y (horizontalę) plokštumą



6 pav. Trajektorijos projekcijos į xz (vertikalę) plokštumą

Duotas pradinis greitis, iš pusiausvyros padėties x ašies kryptimi, toks, kad svarelis pereina aukščiausią tašką. Po kelių apsisukimų, dėl energijos nuostolių, judėjimas pereina į svyruojamąjį, o svyravimo plokštuma dėl Koriolio jėgos sukasi (žr. 5 pav.). Gerai matyti, kad svarelis „nukrito“ 18 sekundę (žr.5 pav.).

3.2 Dekarto koordinatėmis, kai jungiamoji dalis - tamprus strypas

Žemiau naudojamų parametų reikšmės turi tokias dimensijas

$$[g] = \frac{m}{s^2}, [m] = kg, [H] = \frac{1}{s^2}, [k] = \frac{kg}{s^2}, [c] = \frac{m}{s}, [x_0 y_0 z_0] = m, [R] = m, [v_0] = \frac{m}{s}, [w] = \frac{1}{s}.$$

$$g := 10 \quad m := 0.4 \quad k := 1 \cdot 10^5 \quad c1 := 0.03 \quad c2 := 0.02$$

$$x0 := 0.6 \quad y0 := 0.5 \quad z0 := -0.5 \quad x0' := 0.50 \quad y0' := 0.7 \quad z0' := 0.4$$

$$R := \sqrt{x0^2 + y0^2 + z0^2} \quad v0 := \sqrt{z0^2 + x0^2 + y0^2} \quad R = 0.927 \quad v0 = 0.949$$

$$L(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad Tm := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \quad Td := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad tg := 29.9$$

$$N := 20000$$

$$n := 0..N$$

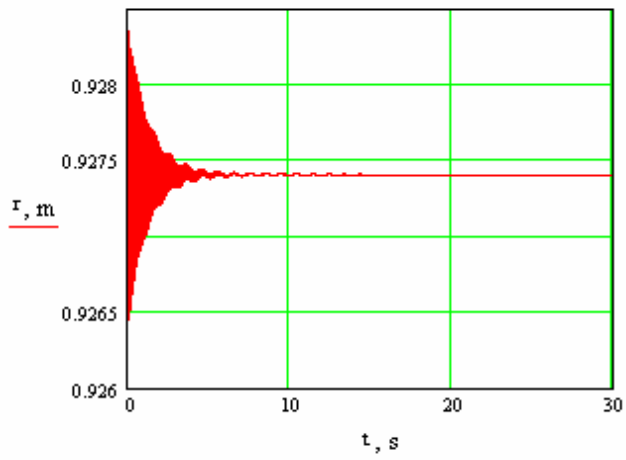
$$x := \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \\ x0' \\ y0' \\ z0' \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \frac{k}{m} \cdot x_0 \cdot \left(\frac{R}{L(x_0, x_1, x_2)} - 1 \right) - \frac{x_3}{m} \cdot [c1 + c2 \cdot \sqrt{(x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2}] \\ \frac{k}{m} \cdot x_1 \cdot \left(\frac{R}{L(x_0, x_1, x_2)} - 1 \right) - \frac{x_4}{m} \cdot [c1 + c2 \cdot \sqrt{(x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2}] \\ \frac{k}{m} \cdot x_2 \cdot \left(\frac{R}{L(x_0, x_1, x_2)} - 1 \right) - \frac{x_5}{m} \cdot [c1 + c2 \cdot \sqrt{(x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2}] - g \end{bmatrix}$$

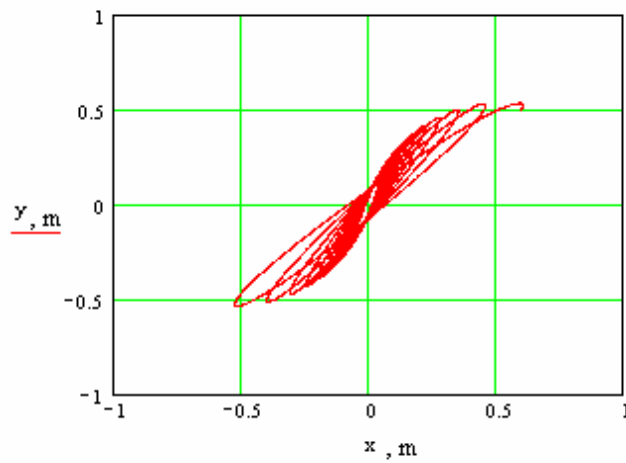
$$U := \text{rkfixed}(x, 0, tg, N, D) \quad t_n := U_{n,0} \quad x_n := U_{n,1} \quad y_n := U_{n,2} \quad z_n := U_{n,3}$$

$$x'_n := U_{n,4} \quad y'_n := U_{n,5} \quad z'_n := U_{n,6} \quad r_n := L(x_n, y_n, z_n) \quad v_n := L(x'_n, y'_n, z'_n)$$

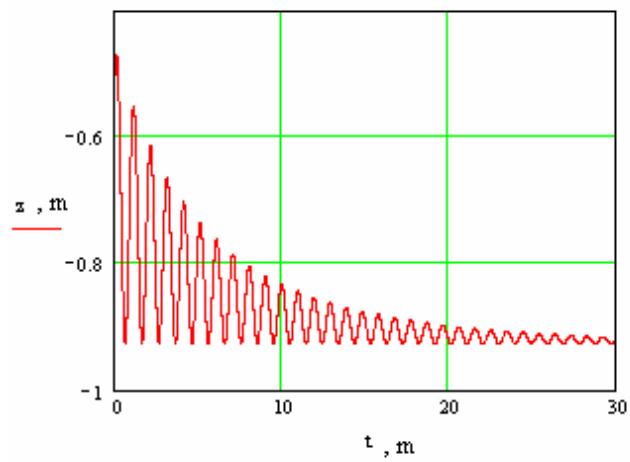
$$Ek := \frac{k}{2} \cdot (R - r)^2 \quad Eh := m \cdot g \cdot z \quad Ev := \frac{m}{2} \cdot (v)^2 \quad W := Ek + Eh + Ev$$



7 pav. Strypo ilgio priklausomybė nuo laiko



8 pav. Trajektorijos projekcijos į x y (horizontalę) plokštumą



9 pav. Aukščio priklausomybė nuo laiko

Žemiau naudojamų parametų reikšmės turi tokias dimensijas

$$[g] = \frac{m}{s^2}, [m] = kg, [H] = \frac{1}{s^2}, [k] = \frac{kg}{s^2}, [c] = \frac{m}{s}, [x_0, y_0, z_0] = m, [R] = m, [v_0] = \frac{m}{s}, [w] = \frac{1}{s}$$

$$g := 10 \quad m := 0.4 \quad k := 1 \cdot 10^5 \quad c1 := 0.01 \quad c2 := 0.02$$

$$x0 := 0.6 \quad y0 := 0.0 \quad z0 := -0.5 \quad x0' := 0.00 \quad y0' := 0.7 \quad z0' := 0.1$$

$$R := \sqrt{x0^2 + y0^2 + z0^2} \quad v0 := \sqrt{z0^2 + x0^2 + y0^2} \quad R = 0.781 \quad v0 = 0.707$$

$$L(x, y, z) := \sqrt{x^2 + y^2 + z^2} \quad Tm := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{R}{g}} \quad Td := 2\pi \cdot \sqrt{\frac{m}{k}} \quad tg := 29.9$$

$$N := 20000$$

$$n := 0.. N$$

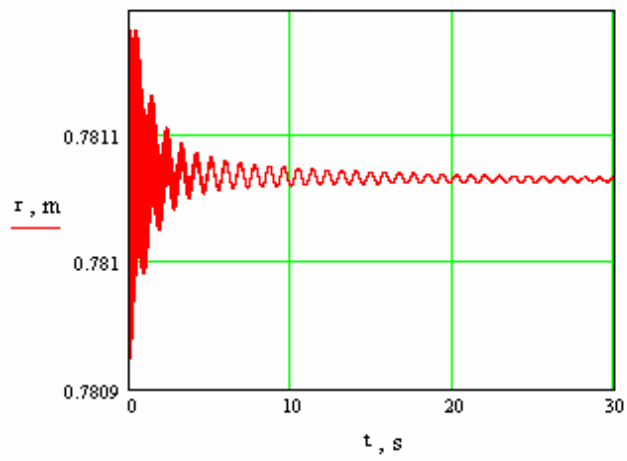
$$x := \begin{pmatrix} x0 \\ y0 \\ z0 \\ x0' \\ y0' \\ z0' \end{pmatrix}$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix} x_3 \\ x_4 \\ x_5 \\ \frac{k}{m} \cdot x_0 \cdot \left(\frac{R}{L(x_0, x_1, x_2)} - 1 \right) - \frac{x_3}{m} \cdot [c1 + c2 \cdot \sqrt{(x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2}] \\ \frac{k}{m} \cdot x_1 \cdot \left(\frac{R}{L(x_0, x_1, x_2)} - 1 \right) - \frac{x_4}{m} \cdot [c1 + c2 \cdot \sqrt{(x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2}] \\ \frac{k}{m} \cdot x_2 \cdot \left(\frac{R}{L(x_0, x_1, x_2)} - 1 \right) - \frac{x_5}{m} \cdot [c1 + c2 \cdot \sqrt{(x_3)^2 + (x_4)^2 + (x_5)^2}] - g \end{bmatrix}$$

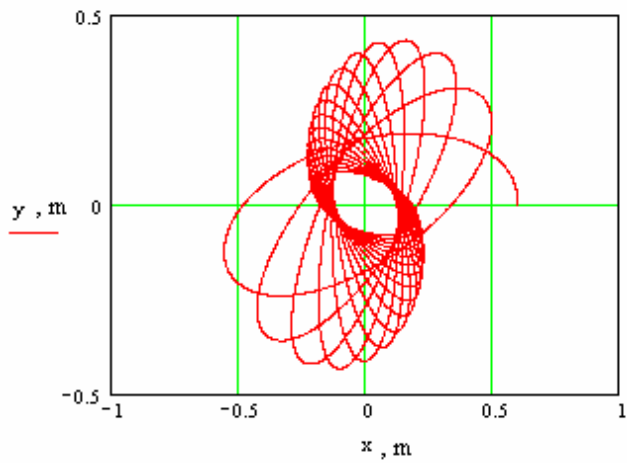
$$U := \text{rkfixed}(x, 0, tg, N, D) \quad t_n := U_{n,0} \quad x_n := U_{n,1} \quad y_n := U_{n,2} \quad z_n := U_{n,3}$$

$$x'_n := U_{n,4} \quad y'_n := U_{n,5} \quad z'_n := U_{n,6} \quad r_n := L(x_n, y_n, z_n) \quad v_n := L(x'_n, y'_n, z'_n)$$

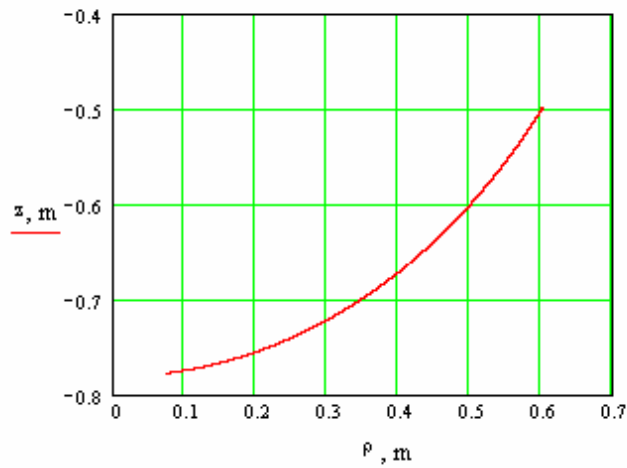
$$Ek := \frac{k}{2} \cdot (R - r)^2 \quad Eh := m \cdot g \cdot z \quad Ev := \frac{m}{2} \cdot (v)^2 \quad W := Ek + Eh + Ev$$



10 pav. Strypo ilgio priklausomybė nuo laiko



11 pav. Trajektorijos projekcijos į x y (horizontalę) plokštumą



12 pav. Plokštumų ρ z atstumas iki pusiausvyros ašies (nuo vertikalės nubrėžtas per pakabinimo tašką)

Jeigu atlenksim į šoną svyruoklę, su tampriu strypu, suteiksime greitį ne centro kryptimi, tai svarelis juda gana įmantria trajektorija. Svyravimo plokštumoje sukasi (žr. 11 pav.). Amplitudė mažėja, strypas leidžiasi (žr. 10 pav.).

3.3 Sferinėmis koordinatėmis, kai jungiamoji dalis - tamprus siūlas

Žemiau naudojamų parametrų reikšmės turi tokias dimensijas

$$[g] = \frac{m}{s^2}, [m] = kg, [H] = \frac{1}{s^2}, [k] = \frac{kg}{s^2}, [c] = \frac{m}{s}, [x_0 y_0 z_0] = m, [R] = m, [v_0] = \frac{m}{s}, [\omega] = \frac{1}{s}$$

$$\begin{array}{l}
 \begin{array}{l}
 x := \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \\ \phi_0 \\ v_{r0} \\ v_{\theta 0} \\ \frac{v_{\theta 0}}{r_0} \\ v_{\phi 0} \\ \overrightarrow{r_0 \sin(\theta_0)} \end{pmatrix}
 \end{array} \\
 \begin{array}{l}
 g := 10 \quad m := 16 \quad k := 16.010^3 \quad c := 0.2 \quad q := 0.05k \quad R := 20 \\
 r_0 := 1 \quad \theta_0 := 90 \frac{\pi}{180} \quad \phi_0 := -90 \frac{\pi}{180} \quad v_{r0} := 0.0 \quad v_{\theta 0} := 0.0 \quad v_{\phi 0} := 0.0 \\
 v_0 := \sqrt{v_{r0}^2 + v_{\theta 0}^2 + v_{\phi 0}^2} \quad T_m := 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad T_d := 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad s(x) := \sin(x) \\
 \beta := \frac{56\pi}{180} \quad \omega := \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \quad H(r, r') := (r - R) \cdot (r > R) \cdot \frac{(k + q \cdot \Phi(r'))}{m}
 \end{array}
 \end{array}$$

$$D(t, x) := \begin{bmatrix}
 x_3 \\
 x_4 \\
 x_5 \\
 x_0 \cdot [(x_4)^2 + (x_5)^2 \cdot s(x_1)^2 - 2 \cdot \omega \cdot x_5 \cdot s(x_1) \cdot \cos(\beta + x_1)] - g \cdot s(x_1) \cdot s(x_2) - \frac{c}{m} \cdot x_3 - H(x_0, x_3) \\
 (x_5)^2 \cdot s(x_1) \cdot \cos(x_1) - \frac{2}{x_0} \cdot x_3 \cdot x_4 - \frac{g}{x_0} \cdot \cos(x_1) \cdot s(x_2) - \frac{c}{m} \cdot x_4 + 2 \cdot \omega \cdot (x_5 \cdot s(x_1) - x_4) \cdot s(\beta + x_1) \\
 \frac{-2}{x_0} \cdot x_3 \cdot x_5 - \frac{2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \cos(x_1)}{s(x_1)} - \frac{g \cdot \cos(x_2)}{x_0 \cdot s(x_1)} - \frac{c}{m} \cdot x_5 + \frac{2 \cdot \omega \cdot x_3 \cdot \cos(\beta + x_1)}{x_0 \cdot s(x_1)}
 \end{bmatrix}$$

$$tg := 3.060$$

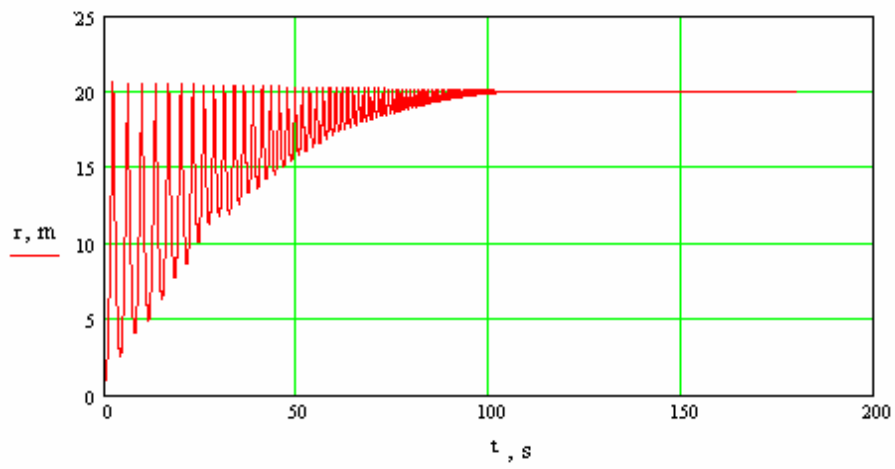
$$N := 10000$$

$$n := 0..N$$

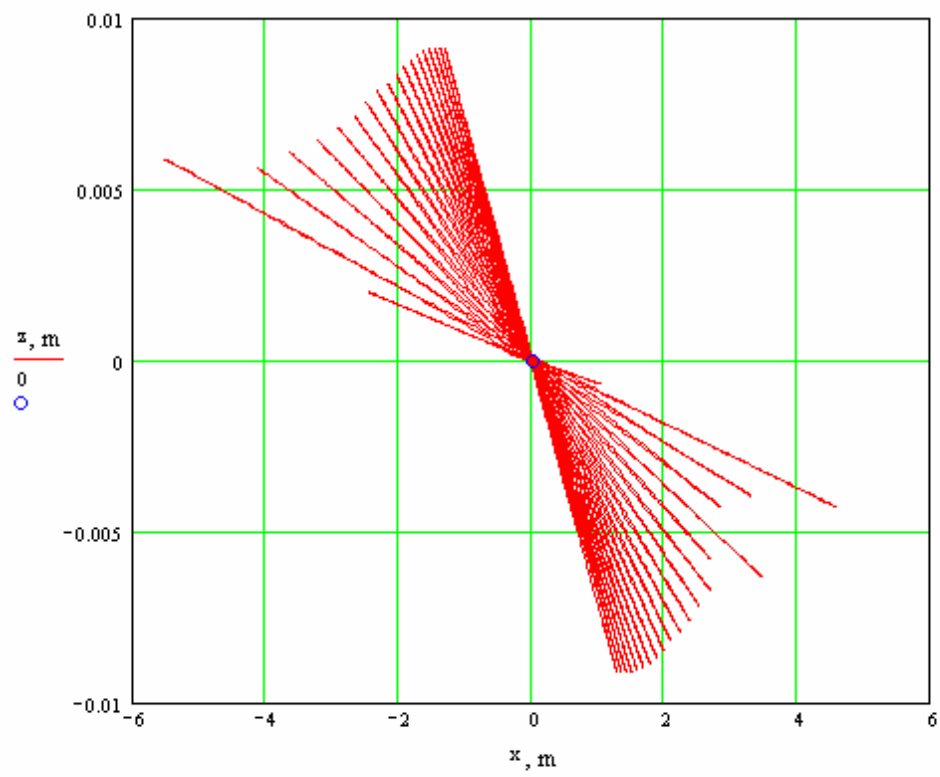
$$U := \text{rkfixed}(x, 0, tg, N, D) \quad t_n := U_{n,0} \quad r_n := U_{n,1} \quad \theta_n := U_{n,2} \quad \phi_n := U_{n,3}$$

$$r'_n := U_{n,4} \quad \theta'_n := U_{n,5} \quad \phi'_n := U_{n,6} \quad v_{\theta n} := r_n \cdot \theta'_n \quad v_{\phi n} := r_n \cdot \phi'_n \cdot \sin(\theta_n)$$

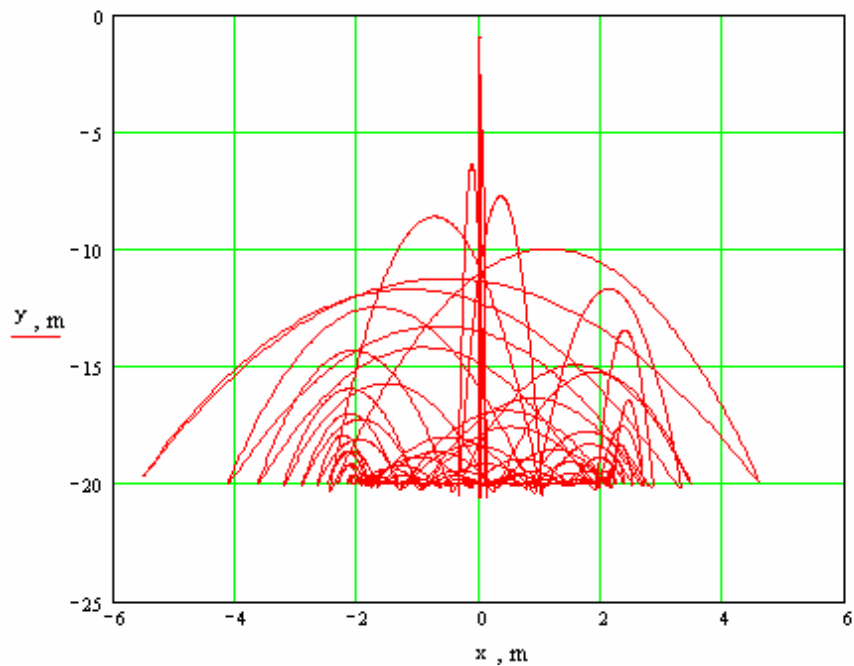
$$x := (\overline{r} \sin(\theta) \cos(\phi)) \quad y_n := r_n \cdot \sin(\theta_n) \cdot \sin(\phi_n) \quad z := (\overline{r} \cos(\theta)) \quad v_n := \sqrt{(r'_n)^2 + (v_{\theta n})^2 + (v_{\phi n})^2}$$



13 pav. Siūlo ilgio priklausomybė nuo laiko



14 pav. Trajektorijos projekcijos į xz (horizontalę) plokštumą



15 pav. Trajektorijos projekcijos į x y (vertikalia) plokštumą

Esant labai ilgam tampriam siūlui dėl Koriolio jėgos, net po vertikalaus pakelimo po pakabinimo tašku, svarelis ne tik šokinėja dėl siūlo tamprumo, bet ir pereina po kurio laiko į svyravimą vertikaloje plokštumoje (žr. 15 pav.). O pati svyravimo plokštuma Žemės sukimosi taip pat sukasi.

Žemiau naudojamų parametrų reikšmės turi tokias dimensijas

$$[g] = \frac{m}{s^2}, [m] = kg, [H] = \frac{1}{s^2}, [k] = \frac{kg}{s^2}, [c] = \frac{m}{s}, [x_0 y_0 z_0] = m, [R] = m, [v_0] = \frac{m}{s}, [w] = \frac{1}{s}.$$

$$\begin{array}{l}
\mathbf{x} := \begin{pmatrix} r_0 \\ \theta_0 \\ \phi_0 \\ vr_0 \\ v\theta_0 \\ \frac{vr_0}{r_0} \\ v\phi_0 \\ \frac{v\phi_0}{r_0 \sin(\theta_0)} \end{pmatrix}
\end{array}
\quad
\begin{array}{l}
g := 10 \quad m := 16 \quad k := 16.010^3 \quad c := 0.2 \quad q := 0.05k \quad R := 20 \\
r_0 := 20 \quad \theta_0 := 90 \frac{\pi}{180} \quad \phi_0 := -30 \frac{\pi}{180} \quad vr_0 := 0.0 \quad v\theta_0 := 18.0 \quad v\phi_0 := 0.0 \\
v_0 := \sqrt{vr_0^2 + v\theta_0^2 + v\phi_0^2} \quad T_m := 2\pi \sqrt{\frac{R}{g}} \quad T_d := 2\pi \sqrt{\frac{m}{k}} \quad s(x) := \sin(x) \\
\beta := \frac{56\pi}{180} \quad \omega := \frac{2\pi}{24 \cdot 60 \cdot 60} \quad H(r, r') := (r - R) \cdot (r > R) \cdot \frac{(k + q \cdot \Phi(r'))}{m}
\end{array}$$

$$D(t, \mathbf{x}) := \begin{bmatrix}
x_3 \\
x_4 \\
x_5 \\
x_0 \cdot [(x_4)^2 + (x_5)^2 \cdot s(x_1)^2 - 2 \cdot \omega \cdot x_5 \cdot s(x_1) \cdot \cos(\beta + x_1)] - g \cdot s(x_1) \cdot s(x_2) - \frac{c}{m} \cdot x_3 - H(x_0, x_3) \\
(x_5)^2 \cdot s(x_1) \cdot \cos(x_1) - \frac{2}{x_0} \cdot x_3 \cdot x_4 - \frac{g}{x_0} \cdot \cos(x_1) \cdot s(x_2) - \frac{c}{m} \cdot x_4 + 2 \cdot \omega \cdot (x_5 \cdot s(x_1) - x_4) \cdot s(\beta + x_1) \\
-\frac{2}{x_0} \cdot x_3 \cdot x_5 - \frac{2 \cdot x_4 \cdot x_5 \cdot \cos(x_1)}{s(x_1)} - \frac{g \cdot \cos(x_2)}{x_0 \cdot s(x_1)} - \frac{c}{m} \cdot x_5 + \frac{2 \cdot \omega \cdot x_3 \cdot \cos(\beta + x_1)}{x_0 \cdot s(x_1)}
\end{bmatrix}$$

$$tg := 3.060$$

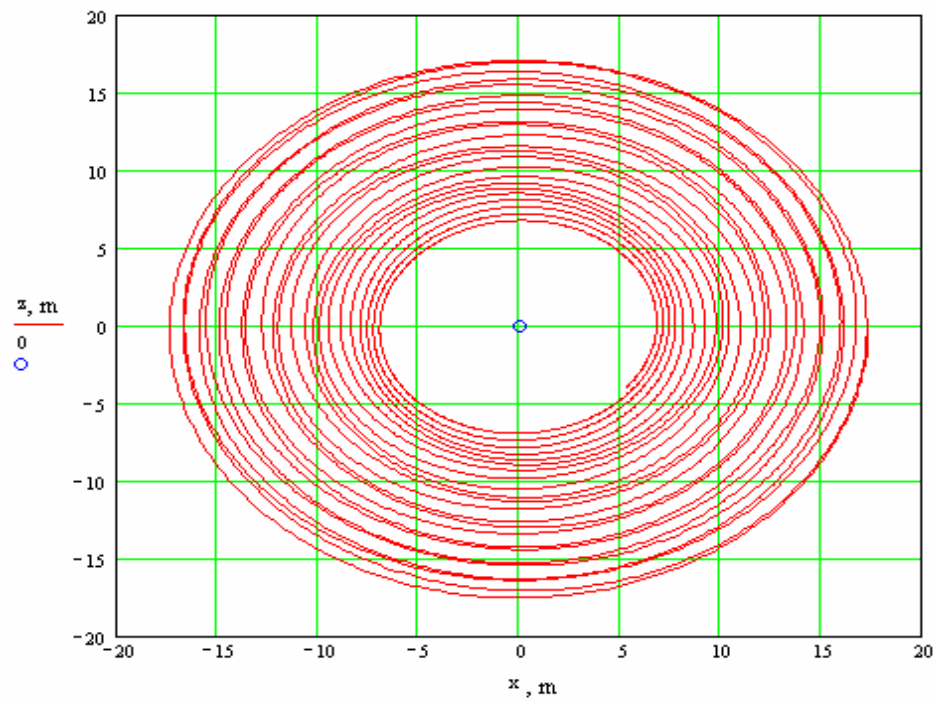
$$N := 10000$$

$$n := 0..N$$

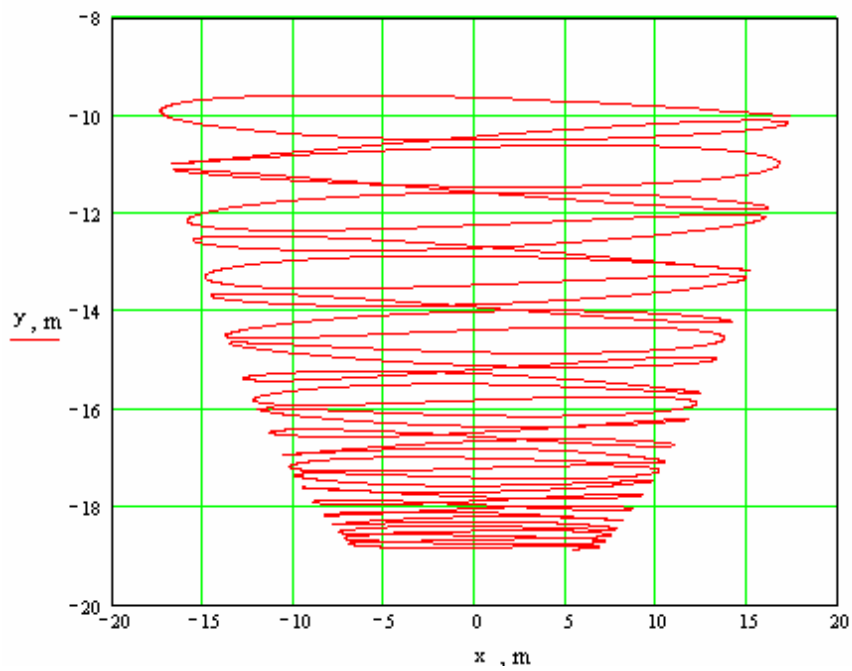
$$U := \text{rkfixed}(\mathbf{x}, 0, tg, N, D) \quad t_n := U_{n,0} \quad r_n := U_{n,1} \quad \theta_n := U_{n,2} \quad \phi_n := U_{n,3}$$

$$r'_n := U_{n,4} \quad \theta'_n := U_{n,5} \quad \phi'_n := U_{n,6} \quad v\theta_n := r_n \cdot \theta'_n \quad v\phi_n := r_n \cdot \phi'_n \cdot \sin(\theta_n)$$

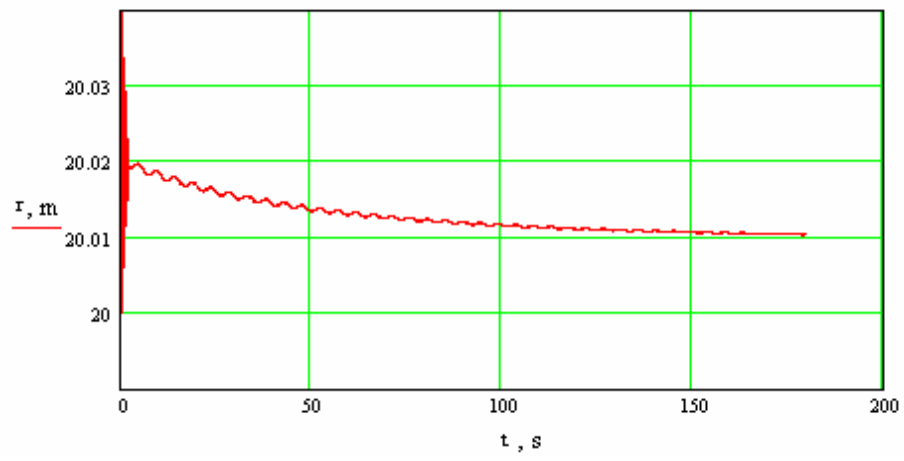
$$\mathbf{x} := \begin{pmatrix} r \cdot \sin(\theta) \cdot \cos(\phi) \\ y_n := r_n \cdot \sin(\theta_n) \cdot \sin(\phi_n) \\ z := r \cdot \cos(\theta) \end{pmatrix} \quad v_n := \sqrt{(r'_n)^2 + (v\theta_n)^2 + (v\phi_n)^2}$$



16 pav. Trajektorijos projekcijos į xz (horizontalę) plokštumą



17 pav. Trajektorijos projekcijos į xy (vertikalę) plokštumą



18 pav. greičio priklausomybė nuo laiko

4. Išvados

Sprendžiant diferencialines lygtis ir modeliuojant Mathcad matematine programa, galima pavaizduoti jas grafiškai ir animuoti. Sutaupyti laiko, nes eksperimentą atlikti reikia daugiau priemonių ir laiko. Iš gautų rezultatų matome, kad esant labai ilgam tamprumui dėl Koriolio jėgos, net po vertikalios pakėlimo po pakabinimo tašku, svarelis ne tik šokinėja dėl siūlo tamprumo, bet ir pereina po kurio laiko į svyravimą vertikaloje plokštumoje. O pati svyravimo plokštuma dėl Žemės sukimosi taip pat sukasi. Suteikus pradžios greitį svareliui su tampriu siūlu, taip, kad svarelis pereina aukščiausią tašką, matome, kad po kelių apsisukimų dėl energijos nuostolio judėjimas pereina į svyruojamąjį, o svyravimo plokštuma dėl Koriolio jėgos sukasi. Šiuos modeliavimus galima pateikti kaip laboratorinį darbą.

5. Literatūra

1. M. Stakvilevičiaus Teorinė mechanika Kaunas, 1973m
2. Аппель П. Теоретическая механика. - М.: Физматгиз, 1960. - 2т 7

3. Арнольд В.И. Математические методы классической механики. М.: Наука, 9
4. Бать М.И., Джанелидзе Г.Ю., Кельзон А.С. Теоретическая механика 14
5. Бухгольц Н. Н., Основной курс теоретической механики, ч. 1, М., 1967 4
6. Бухгольц Н.Н. Основной курс теоретической механики. 6-е изд. - М.: Наука, 13
7. Зоммерфельд А. Механика, 2001.. 368 с
8. Кильчевский Н.А. Курс теоретической механики. - М.: Наука, 1972-1977 8
9. Суслов Г.К. Теоретическая механика. 3-е изд. - М.:Л.: Гостехиздат, 1964 10
10. Т. Леви-Чивита, У. Амальди. Курс теоретической механики, Том I, Часть 1,2
11. Тарг С. М., Краткий курс теоретической механики, 7 изд., М., 1970 5
12. Петкевич В.В. Теоретическая механика. - М.: Наука, 1981. 11
13. Четаев Н.Г. Теоретическая механика. - М.: Наука, 1987 12
14. Хайкин С. Э., Физические основы механики, 2 изд., М., 1971 6
15. <http://www.emomi.com/download/sommerfeld/117-157>