Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 179–183

Характеристическое сингулярное интегральное уравнение с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка

Пятрас АЛЕКНА (ŠU)
e-mail: mat.kat@fm.su.lt

Рассмотрим характеристическое сингулярное интегральное уравнение

$$(\boldsymbol{K}^0\phi)(t) = a(t)\phi(t) + b(t)\frac{t+i}{\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\tau)\,d\tau}{(\tau+i)(\tau-t)} = f(t), \quad t \in L = (-\infty, +\infty) \quad (1)$$

в предположениях:
1) $a(t) - b(t) = g_1(t)\exp\Big\{ih(-t)\alpha_1\big(\ln^{\rho_1}|t| + \phi_{\rho_1}(|t|)\big) + ih(t)\alpha_2\big(\ln^{\rho_2}|t| + \phi_{\rho_2}(|t|)\big)\Big\}$;
2) $a(t) + b(t) = g_2(t)\exp\Big\{ih(-t)\beta_1\big(\ln^{\rho_1}|t| + \phi_{\rho_1}(|t|)\big) + ih(t)\beta_2\big(\ln^{\rho_2}|t| + \phi_{\rho_2}(|t|)\big)\Big\}$, где $h(\pm t) = 0$ при $|t| \leqslant R$; $h(t) = \begin{cases} 0, & \text{при} \quad t < -R, \\ 1, & \text{при} \quad t > R, \end{cases}$ $R > e^{2\pi}$;
3) $0 < \rho_k < \infty$ $(k = 1, 2)$, $\phi_{\rho_k}(|t|) \in \boldsymbol{H}_{[|t|>R]}$ и $\phi_{\rho_k}(\infty) = 0$; α_k, β_k – вещественные числа, $(\alpha_2 - \beta_2)^2 + (\alpha_1 - \beta_1)^2 \neq 0$;
4) $g_k(t) \in \boldsymbol{H}_{[L]}(\eta_k)$, $\quad 0 < \eta_k \leqslant 1$, $g_k(t) \neq 0$, $t \in L$;
5) $f(t) \in \boldsymbol{H}_{[L]}(\eta)$, $\quad 0 < \eta \leqslant 1$.

Классы функций $\boldsymbol{H}_{[L]}(\eta)$ и $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ определены в статье [1]. Как в [1], вводя функцию, заданную интегралом типа Коши

$$\Phi^{\pm}(z) = \frac{z+i}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\phi(\tau)\,d\tau}{(\tau+i)(\tau-z)}, \quad z \in D^{\pm} = \{z : \pm \operatorname{Im} z > 0\}, \quad (2)$$

плотностью которого служит искомое решение $\phi \in \widetilde{\boldsymbol{H}}$ интегрального уравнения (1), и используя формулы Сохоцкого-Племели, получим соответствующую интегральному уравнению (1) краевую задачу Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad t \in L, \quad (3)$$

где

$$G(t)=\frac{a(t)-b(t)}{a(t)+b(t)}=G_0(t)G_1(t),\quad G_0(t)=\frac{g_1(t)}{g_2(t)},\quad \kappa=\operatorname{In} d_L G_0(t),\qquad (4)$$

$$G_1(t)=\exp\Big\{ih(-t)\lambda_1\big(\ln^{\rho_1}|t|+\phi_{\rho_1}(|t|)\big)+ih(t)\lambda_2\big(\ln^{\rho_2}|t|+\phi_{\rho_2}(|t|)\big)\Big\},\qquad (5)$$

$$\lambda_1=\alpha_1-\beta_1<0,\quad \lambda_2=\alpha_2-\beta_2>0;$$

$$g(t)=\frac{f(t)}{g_2(t)\exp\{ih(-t)\beta_1(\ln^{\rho_1}|t|+\phi_{\rho_1}(|t|))+ih(t)\beta_2(\ln^{\rho_2}(|t|)+\phi_{\rho_2}(|t|)\}}\qquad (6)$$

Краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости в классе $\boldsymbol{B}$ исследована автором [2]–[4].

Основная цель исследования – установить равносильность интегрального уравнения (1) в классе $\widetilde{\boldsymbol{H}}$ и краевой задачи Римана (3)–(6) в классе $\boldsymbol{B}$.

Применяя известную схему исследования неоднородной задачи ([5], с. 111), преобразуем краевое условие (3) с помощью специального ограниченного частного решения $\Psi_0^{\pm}(z)$ вспомогательной однородной задачи ($g(t)\equiv 0$) с коэффициентом $G_0(t)G_1(t)$, где $G_0(t)$ и $G_1(t)$ имеет вид (4) и (5) соответственно. Получим

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Psi_0^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{\Psi_0^-(t)}$$
$$=\frac{f(t)}{\Psi_0^+(t)\exp\{ih(-t)\beta_1(\ln^{\rho_1}|t|+\phi_{\rho_1}(|t|))+ih(t)\beta_2(\ln^{\rho_2}|t|+\phi_{\rho_2}(|t|))\}}.\qquad (7)$$

Тогда интегралы

$$\Omega^{\pm}(z)=\frac{z+i}{2\pi i}$$
$$\times\int_{-\infty}^{\infty}\frac{f(\tau)\,\mathrm{d}\tau}{(\tau+i)\Psi_0^+(\tau)\exp\{ih(-\tau)\beta_1(\ln^{\rho_1}|\tau|+\phi_{\rho_1}(|\tau|))+ih(\tau)\beta_2(\ln^{\rho_2}|\tau|+\phi_{\rho_2}(|\tau|))\}(\tau-z)}.\qquad (8)$$

представляют аналитические и ограниченные в соответствующих полуплоскостях $D^{\pm}$ функции, для предельных значений которых имеют место формулы Сохоцкого-Племели:

$$\Omega^+(t)-\Omega^-(t)$$
$$=\frac{f(t)}{\Psi_0^+(t)\exp\{ih(-t)\beta_1(\ln^{\rho_1}(|t|)+\phi_{\rho_1}(|t|))+ih(t)\beta_2(\ln^{\rho_2}|t|+\phi_{\rho_2}(|t|)\}}.\qquad (9)$$

Преобразуя краевое условие (7) с помощью соотношения (9) и используя теорему об аналитическом продолжении, получим частное решение неоднородной задачи в виде:

$$\Phi_0^{\pm}(z)=\Psi_0^{\pm}(z)\Omega^{\pm}(z).\qquad (10)$$

Известно [4], что общее решение неоднородной задачи (3) в классе B дается формулой

$$\Phi^{\pm}(z) = \Phi_0^{\pm}(z) + \Psi^{\pm}(z), \tag{11}$$

где $\Psi^{\pm}(z)$ – общее решение в классе B соответствующей однородной задачи. Как показано в [1],

$$\Psi^{\pm}(z) = X_0^{\pm}(z)X_1^{\pm}(z)F(z), \tag{12}$$

где

$$X_0^{\pm}(z) = \exp\left\{\frac{z+i}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{\ln G_0(\tau)}{(\tau+i)(\tau-z)}\,\mathrm{d}\tau\right\}, \tag{13}$$

$$X_1^{\pm}(z) = \exp\left\{i\lambda_1\Psi_1^{\pm}(z) + i\lambda_2\Psi_2^{\pm}(z)\right\}. \tag{14}$$

Здесь $\Psi_k^{\pm}(z)$ $(k=1,2)$ – аналитические в $D^{\pm}$ функции, такие что

$$\begin{aligned} &h(-t)\left(\ln^{\rho_1}|t| + \phi_{\rho_1}(|t|)\right) = \Psi_1^{+}(t) - \Psi_1^{-}(t),\\ &h(t)\left(\ln^{\rho_2}|t| + \phi_{\rho_2}(|t|)\right) = \Psi_2^{+}(t) - \Psi_2^{-}(t), \quad t\in L. \end{aligned} \tag{15}$$

В качестве $\Psi_k^{\pm}(z)$ можно выбрать многочлены Бернулли:

$$\Psi_1(z) = \frac{(2\pi i)^{\rho_1}}{\rho_1+1}B_{\rho_1+1}\left(\frac{\ln z + \pi i}{2\pi i}\right), \quad \Psi_2(z) = \frac{(2\pi i)^{\rho_2}}{\rho_2+1}B_{\rho_2+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right), \tag{16}$$

где

$$B_{\rho_k+1}(w) = \sum_{l=0}^{[\rho_k]+2} C_{\rho_k+1}^{l} B_l w^{\rho_k+1-l}, \tag{17}$$

$C_{\rho_k+1}^{l}$ – биномиальные коэффициенты, B_l – числа Бернули, а ветви $(\ln z+\pi i)^{\rho_1}$ и $\ln z+\pi i$ непрерывны в области $(|z|>R)\cap(-\pi<\arg z<\pi)$, $(\ln x+\pi i)^{\rho_1} > 0$ и $\ln x+\pi i > 0$ на нижнем берегу разреза по лучу $\arg z = \pi$ при $x < -R$, а ветви $\ln^{\rho_2} z$ и $\ln z$ непрерывны в области $(|z|>R)\cap(0<\arg z<2\pi)$, $\ln^{\rho_2} x > 0$ и $\ln x > 0$ на верхнем берегу разреза по лучу $\arg z = 0$ при $x > R$.

Тогда при указанном выборе ветвей логарифмов имеем при $r > R$:

$$X_1^{+}(re^{i\theta}) = \exp\left\{i\lambda_1\frac{(2\pi i)^{\rho_1}}{\rho_1+1}B_{\rho_1+1}\left(\frac{\ln r + i(\theta+\pi)}{2\pi i}\right)\right.$$

$$\left.+i\lambda_2\frac{(2\pi i)^{\rho_2}}{\rho_2+1}B_{\rho_2+1}\left(\frac{\ln r + i\theta}{2\pi i}\right)\right\}, \quad 0<\theta<\pi,$$

$$X_1^-(re^{i\theta}) = \exp\left\{ i\lambda_1 \frac{(2\pi i)^{\rho_1}}{\rho_1+1} \boldsymbol{B}_{\rho_1+1}\left(\frac{\ln r + i(\theta-\pi)}{2\pi i}\right)\right.$$

$$\left. + i\lambda_2 \frac{(2\pi i)^{\rho_2}}{\rho_2+1} \boldsymbol{B}_{\rho_2+1}\left(\frac{\ln r + i\theta}{2\pi i}\right)\right\}, \quad \pi < \theta < 2\pi. \tag{18}$$

Применяя формулу (17) определения многочлена Бернулли и вычисляя старшие члены в формулах (18), получаем при $|z| > R$

$$X_1^{\pm}(z) = \exp\left\{ \frac{\lambda_1}{2\pi(\rho_1+1)} \ln^{\rho_1+1}|z| - \frac{\lambda_2}{2\pi(\rho_2+1)} \ln^{\rho_2+1}|z| + O(\ln^{\gamma}|z|)\right\}, \tag{19}$$

где $\gamma = \max(\rho_1, \rho_2)$.

Используя характеристические свойства многочлена Бернули [6]

$$\frac{(2\pi i)^{\rho_k}}{\rho_k+1}\left\{ \boldsymbol{B}_{\rho_k+1}\left(\frac{\ln|t|}{2\pi i}+1\right) - \boldsymbol{B}_{\rho_k+1}\left(\frac{\ln|t|}{2\pi i}\right)\right\} = \ln^{\rho_k}|t| + \phi_{\rho_k}(|t|),$$

где

$$\phi_{\rho_k}(|t|) = \frac{(2\pi i)^{\rho_k}}{\rho_k+1} \sum_{m=[\rho_k]+2+l_0}^{\infty} \left(\sum_{n=0}^{[\rho_k]+2} C^n_{\rho_k+1} B_n C^{m-n}_{\rho_k+1-n}\right)\left(\frac{2\pi i}{\ln|t|}\right)^{m-\rho_k-1}, \tag{20}$$

$l_0 = \begin{cases} 3, & \text{если} \quad [\rho_k] = 2l, \\ 2, & \text{если} \quad [\rho_k] = 2l+1, \end{cases}$ а ряд (20) сходится абсолютно и равномерно при $|t| > R > e^{2\pi}$, $\phi_{\rho_k}(\infty) = 0$, получаем, что (16) формулами определены функции $\Psi_k(z)$ удавлетворяют соотношениям (15).

Целая функция $F(z)$ имеет нулевой порядок роста [1], а при специальном уточненом порядке $\rho_k(r) = \frac{(\rho_k+1)\ln\ln r}{\ln r}$ $\left(r^{\rho_k(r)} = \ln^{\rho_k+1} r\right)$ тип целой функции $F(z)$ удовлетворяет неравенство $0 < \sigma_F < \omega$, где

$$\omega = \begin{cases} \dfrac{-\lambda_1}{2\pi(\rho_1+1)}, & \text{если} \quad \rho_1 > \rho_2, \\ \dfrac{\lambda_2}{2\pi(\rho_2+1)}, & \text{если} \quad \rho_2 > \rho_1, \\ \dfrac{\lambda_2-\lambda_1}{2\pi(\gamma+1)}, & \text{если} \quad \rho_1 = \rho_2 = \gamma. \end{cases}$$

Специальное частное решение

$$\Psi_0^{\pm}(z) = X_0^{\pm}(z) X_1^{\pm}(z) F_0(z) \in \boldsymbol{B}, \tag{21}$$

когда целая функция $F_0(z)$ удовлетворяет таким же условиям, как и целая функция $F(z)$, только для сходимости (8) интеграла требуется, чтобы $F_0(z)$ не имела нулей на вещественной оси.

Сформулируем основной результат.

Теорема. *Характеристическое сингулярное интегральное уравнение* (1) *в предложениях* 1)–4) *при* $\lambda_1 < 0$, $\lambda_2 > 0$ *в классе* $\widetilde{H}$ *равносильно неоднородной краевой задаче Римана с плюс-бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости* (3)–(6) *в классе* $\boldsymbol{B}$. *Оно имеет бесконечно много решений вида*

$$\phi(t) = \Phi^{+}(t) - \Phi^{-}(t),$$

где $\Phi^{\pm}(t)$ – *предельные значения кусочно-аналитической функции* $\Phi^{\pm}(z)$, *заданной равенствами* (10)–(14), (16), (21).

Доказательство теоремы аналогично доказательству, данному в [1].

Литература

[1] П. Алекна, Однородное характеристическое сингулярное интегральное уравнение с бесконечным индексом логарифмического порядка, *Liet. matem. rink.*, **40** (spec.nr.), 119–125 (2000).

[2] П. Алекна, Об однородной краевой задаче Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка для полуплоскости, *Liet. matem. rink.* **13**(3), 5–13 (1973).

[3] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $0 < \gamma < 1$ для полуплоскости, *Liet. matem. rink.* **14**(3), 5–18 (1974).

[4] П. Алекна, Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка $\gamma > 1$ для полуплоскости, *Liet. matem. rink.* **15**(1), 5–22 (1975).

[5] Ф.Д. Гахов, *Краевые задачи*, Наука, Москва (1977).

[6] П.Г. Юров, Интегралы типа Коши и уравнения в конечных разностях, *ВАН БССР, сер. физ.-мат.*, **3**, 67–74 (1967).

Logaritminės eilės begalinio indekso charakteristinė integralinė singuliarioji lygtis

P. Alekna

Specialiai apibrėžus integralinės singuliariosios lygties koeficientų $a(t)$, $b(t)$ skirtumą ir sumą, gauti šios lygties aprėžti sprendiniai.