Liet. matem. rink., T. 41, spec. nr., 196–199

Apie pirmos eilės dalinių išvestinių lygčių sistemos sprendimo supaprastinimą

Donatas JURGAITIS (ŠU)
el. paštas: pletra@cr.su.lt

Paprastųjų diferencialinių lygčių ar sistemų su stipriu eilės išsigimimu sprendimas dažniausiai pradedamas nuo galimybių supaprastinti uždavinį. Tuo tikslu ieškoma keitinių, kurių pagalba uždavinys skaidomas į paprastesnius uždavinius. Vieną tokių klasikinės analizės procedūrų apibendrinsime pirmos eilės dalinių išvestinių lygčių sistemai su kintamais koeficientais.

Nagrinėkime pirmos eilės dalinių išvestinių diferencialinių lygčių sistemą

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial u}{\partial x}+I_1\frac{\partial u}{\partial y}+I_2\frac{\partial u}{\partial z}\right)+\sum_{k=0}^{\infty}x^kA_k(y,z)u=0, \tag{1}$$

čia $p\in\mathbb{N}$, x,y,z – nepriklausomi apskritai kompleksiniai kintamieji, $u(x,y,z)$ – ieškomoji vektorfunkcija, $A_k(y,z)$ – holomorfinės funkcijos, E – vienetinė, I_1, I_2 – pastovios kvadratinės matricos. Į (1) įeinanti laipsninė eilutė konverguoja $x=0$ aplinkoje ir akivaizdu, kad šiame taške išsigimsta (1) sistemos eilė.

Iš analizinės išsigimusių paprastųjų diferencialinių lygčių teorijos [1, 2] žinoma, kad sistemos išsigimimo eilę galima pažeminti ieškomosios funkcijos keitiniais. Keitiniu

$$\begin{aligned}&u(x,y,z)=S(x)v(x,y,z),\\&S(x)=\operatorname{diag}(1,x^{\lambda},x^{2\lambda},x^{3\lambda}),\end{aligned} \tag{2}$$

λ – neapibrėžta teigiama konstanta, $v(x,y,z)$ – nauja ieškomoji vektorfunkcija, (1) sistemą suvedame į

$$x^{p+1}\left(E\frac{\partial v}{\partial x}+S_1(x)\frac{\partial v}{\partial y}+S_2(x)\frac{\partial v}{\partial z}\right)+B(x,y,z)v=0, \tag{3}$$

$$B(x,y,z)=x^{p+1}S^{-1}(x)S'(x)+S^{-1}(x)\left(\sum_{k=0}^{\infty}x^kA_k(y,z)\right)S(x), \tag{4}$$

$$S_1(x)=\begin{pmatrix}0&0&0&x^{3\lambda}\\0&0&x^{\lambda}&0\\0&-x^{-\lambda}&0&0\\-x^{-3\lambda}&0&0&0\end{pmatrix},\quad S_2(x)=\begin{pmatrix}0&0&-x^{-2\lambda}&0\\0&0&0&x^{2\lambda}\\x^{-2\lambda}&0&0&0\\0&-x^{-3\lambda}&0&0\end{pmatrix}.$$

Sistemos (1) koeficientų dėstinio laipsnine eilute narys $A_0(y,z) \neq O$, čia O – nulinė matrica, todėl sistemos (1) koeficientus, kurie nėra tapatingai lygūs nuliui užrašykime taip:

$$a_{ij}(x,y,z) = x^{\alpha_{ij}} a_{ij}^*(x,y,z), \quad \text{čia} \quad a_{ij}^*(0,y,z) \neq 0, \quad a_{ij} \geqslant 0,$$

ir bent vienas $a_{ij} = 0$, o visi kiti yra teigiami.

Matricos $B(x,y,z)$ struktūra bus aiškesnė, jeigu jos elementus užrašysime tokiu pavidalu:

$$\begin{gathered} b_{ij}(x,y,z) = a_{ij}^*(x,y,z) x^{\alpha_{ij}-(i-j)\lambda} + (i-1)\lambda x^p \delta_{ij}, \\ \delta_{ij} = \begin{cases} 1, & i = 1, \\ 0, & i \neq j, \end{cases} \quad i,j = 1,2,3,4. \end{gathered} \tag{5}$$

Akivaizdu, kad jeigu $a_{ij}(x,y,z) \to 0$, kai $x \to 0$, tai $b_{ij}(x,y,z) \to 0$, kai $x \to 0$. Apskritai $b_{ij}(x,y,z) \to 0$, kurie nėra tapatingi nuliai, galima užrašyti tokiu būdu:

$$b_{ij}(x,y,z) = x^{\beta_{ij}(\lambda)} b_{ij}^*(x,y,z), \quad b_{ij}^*(0,y,z) \neq 0.$$

Konkretizuokime $\beta_{ij}(\lambda)$ priklausomybę nuo parametro λ. Galimi tokie atvejai:

1. $i > j$ ir $\beta_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij} - (i-j)\lambda, \quad \alpha_{ij} \geqslant 0$;
2. $i = j$, $\beta_{ij}(\lambda) = \beta_{ij} \geqslant 0$, t.y. β_{ij} nepriklauso nuo λ;
3. $j = i+1$ ir $\beta_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij} + \lambda$;
4. $j > i+1$ ir $\beta_{ij}(\lambda) = \alpha_{ij}(j-i)(\lambda)$.

Tikslas apibrėžti parametrą λ taip, kad po (3) lygčių sistemos kiekvienos lygties padauginimo iš atitinkamo x laipsnio gautume sistemą, kurios pagrindinė matrica nesutaptų su matrica $A_0(y,z)$. Todėl fiksuokime parametrą λ, tegul $\lambda = \lambda_0$ ir (3) lygčių sistemos visas lygtis padauginkime iš $x^{-\lambda_0}$. Gauname sistemą

$$x^{p+1-\lambda_0}\left(E\frac{\partial v}{\partial x} + S_1(x)\frac{\partial v}{\partial y} + S_2(x)\frac{\partial v}{\partial z}\right) + x^{-\lambda_0}B(x,y,z)v = 0. \tag{6}$$

λ_0 parinkime taip, kad (6) lygčių sistemos pagrindinė matrica skirtųsi nuo $A_0(y,z)$. Iš (5) išraiškos matyti, kad $x^{\lambda_0}B(x,y,z) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} B_0(y,z) \neq A_0(y,z)$.

Matricos $B_0(y,z)$ bent vienas pagrindinės įstrižainės arba žemiau jos esantis elementas yra nenulinis, o virš pagrindinės įstrižainės matrica $B_0(y,z)$ sutampa su matrica $A_0(y,z)$. Pastebėkime, kad λ_0 racionalusis skaičius, bet apskritai nebūtinai sveikasis skaičius, ir situacijos supaprastinimui (6) sistemoje pakeiskime nepriklausomą kintamąjį x pagal formulę

$$x = \alpha t^q, \quad \alpha = q^{\frac{1}{p+1-\lambda_0}}, \tag{7}$$

čia q – mažiausias teigiamas skaičius, toks, kad $\lambda_0 q$ sveikasis skaičius. Po šio pakeitimo gausime tokią diferencialinių lygčių sistemą:

$$t^{r+1} E \frac{\partial v}{\partial t} + t^{r+q(1-3\lambda_0)} q^{\frac{-3\lambda_0}{p-\lambda_0}} \left(S_1(\alpha t^q) \frac{\partial v}{\partial y} + S_2(\alpha t^q) \frac{\partial v}{\partial z} \right)$$
$$+ \sum_{k=0}^{\infty} q^{\frac{(p-\lambda_0)(k-\lambda_0)-\lambda_0}{(p+1-\lambda_0)(p-\lambda_0)}} t^{q(k-\lambda_0)} B_k(y,z) = 0. \tag{8}$$

(8) sistemoje $r = q(p - \lambda_0)$. Iš pastarosios sistemos struktūros matome, kad naujasis nepriklausomas kintamasis t į sistemą įeina sveikais laipsniais.

Jeigu $r = 0$, tai (8) sistemos eilės išsigimimas reguliarus ir jos atskirų sprendinių šeimos randamos apibendrintų laipsninių eilučių metodu.

Atveju $r > 0$ (8) sistemos struktūra skiriasi nuo (1) sistemos struktūros tuo, kad pastarojoje koeficientų pagrindinės matricos struktūra patogi tolimesniems sistemos tyrimams.

Gautą rezultatą suformuluokime kaip teoremą.

Teorema. (1) *sistema keitinio* (2) *pagalba suvedama į sistemą*

$$t^{r+1} \left(E \frac{\partial v}{\partial t} + S_1^*(t) \frac{\partial v}{\partial y} + S_2^*(t) \frac{\partial v}{\partial z} \right) + \sum_{k=0}^{\infty} t^{q(k-\lambda_0)} C_k(y,z) v = 0,$$

čia

$$S_1^*(t) = t^{q-1-3\lambda_0 q} q^{\frac{-3\lambda_0 q}{r}} S_1(at^q), \quad S_2^*(t) = t^{q-1-3\lambda_0 q} q^{\frac{-3\lambda_0 q}{r}} S_2(at^q),$$
$$C_k(y,z) = q^{\frac{r(k-\lambda_0)-\lambda_0 q}{r(p+1-\lambda 0)}} B_k(y,z), \quad k = 0, 1, \ldots,$$

ir matrica $C_0(y,z)$ virš pagrindinės įstrižainės sutampa su matrica $A_0(y,z)$, o pagrindinėje įstrižainėje ir žemiau jos yra bent vienas nenulinis elementas.

Šiame bei darbuose [3] ir [4] parodyta, kad (1) sistemos sprendimas supaprastinamas naudojant keitinius, kurie yra šių tipų:

1. tiesinės transformacijos, kurių koeficientai dėstomi apibendrintomis laipsninėmis eilutėmis;
2. ieškomosios funkcijos dauginimas iš skaliarinės eksponentinės funkcijos;
3. nepriklausomo kintamojo, kuris yra trupmeninis x laipsnis naudojimas;

Kartotinis čia minėtų keitinių kombinacijų taikymas duotąją diferencialinių lygčių sistemą redukuoja į sistemą su žemesne išsigimimo eile arba žemesniu sistemos rangu.

Literatūra

[1] H.I. Turrittin, Convergent solutions of ordinary linear homogeneous differential equations in the neighborhood of an irregular singular point, *Acta Mathematica*, **93**, 27–66 (1955).

[2] В. Вазов, *Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений*, Москва, Мир (1968).
[3] D. Jurgaitis, A.-J. Janavičius, Dalinių išvestinių sistemos su nilpotenčiąja matrica supaprastinimas, *Lietuvos matem. rink.*, **40**, 132–135 (2000).
[4] D. Jurgaitis, Analizinis dalinių išvestinių sistemos supaprastinimas, *LMD mokslo darbai*, III t., 117–122, Vilnius, Technika (1998).

On simplification of first line partial derivatives equation system solution

D. Jurgaitis

In this paper it has been analyzed first line partial derivatives system, the line of which strongly degenerates. Transformation has been determined, which simplifies the system, i.e., the main matrix of a new system coefficients distinguish characteristics, that all matrix elements over or under main diagonal (except one) asymptotically equal zero.