ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Inga Makaravičienė

Apie vieną nespūdaus skysčio tekėjimo uždavinį

Magistro darbas

Darbo vadovas
prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas

Šiauliai, 2009

Turinys

ĮVADAS

Aktualumas. Hidrodinamika yra hidromechanikos šaka, tirianti nespūdžiųjų skysčių tekėjimą ir jų sąveiką su kietuoju kūnu arba dviejų skirtingų skysčių sąveiką skiriamuoju paviršiumi. Hidrodinamikos metodais nustatomas skysčio greitis ir slėgis bei kiti parametrai bet kuriame tėkmės taške, bet kuriuo laiko momentu. Taip pat galima nustatyti slėgio ir trinties jėgas, veikiančias skystyje judantį kūną.

Skysčių dinamika arba hidrodinamika – tai skysčių mechanikos šaka, kurioje nagrinėjamas skysčio judėjimas, įvertinant jį veikiančias jėgas. Teorinius hidrodinamikos pagrindus sudaro Oilerio idealiojo skysčio lygtys bei Navjė – Stokso klampiojo skysčio lygtys. Hidrodinamikos metodai padeda spręsti hidrologijos, hidrotechnikos, meteorologijos, šiluminės fizikos uždavinius, atlikti hidraulinių turbinų, siurblių, vamzdynų skaičiavimus.

Viena hidrodinamikos sričių yra skysčio tekėjimo nagrinėjimas laminariniame paviršiuje. I. Mendelejevas 1880 m. pirmasis pastebėjo skysčio klampumo pokyčius šalia aptekamų paviršių.

Jeigu skysčiui tekant vamzdžiuose klampumas pasireiškia visame skerspjūvyje, tai kūnų aptekėjime (ypač pailgų) klampumas pasireiškia tik labai ploname sluoksnyje prie pat kieto paviršiaus (pasienio sluoksnyje). Jei neklampiajame sraute skystis slysta sienos paviršiumi, tai realiame sraute jis prilimpa prie sienos ir dėl klampumo ploname sluoksnyje pristabdomas. Šį sluoksnį L. Prandtlis pavadino laminariniu sluoksniu. Pasienio sluoksnis yra labai svarbi sąvoka ir aerodinamikoje. Tai plonas sluoksnis prie aptekamo kūno paviršiaus, kuriame pasireiškia oro klampumas. Srauto tipas pasienio sluoksnyje turi didelę įtaką aptekamo kūno pasipriešinimui. Esant tam tikroms sąlygoms, pasienio sluoksnis atitrūksta nuo kūno paviršiaus, padidindamas pasipriešinimą.

Šiame darbe nagrinėjame klampaus skysčio tekėjimą laminariniame pasienio sluoksnyje. Šią temą Lietuvoje plačiausiai nagrinėjo prof. A. Žukauskas [10], [11].

Problemos.

1. Skysčio tekėjimo greičio aprašymas laminariniame pasienio sluoksnyje.
2. Tekėjimo sistemos sprendimas laminariniame pasienio sluoksnyje.

Tyrimo objektai. Klampaus skysčio tekėjimo laminariniame pasienio sluoksnyje lygtys.

Tikslas. Skaitiniais metodais išspręsti skysčio tekėjimo laminariniame pasienio sluoksnyje sistemą.

Uždaviniai:

1. Išanalizuoti skysčio tekėjimą laminariniame pasienio sluoksnyje.

2. Aprašyti skysčio tekėjimą apibrėžiančią sistemą.
3. Išspręsti sistemą skaitiniais metodais, matematiniu paketu *MathCAD 13*, Rungės – Kuto metodu.

Tyrimo metodai. Literatūros studijavimas, naudojamu metodų panašiems uždaviniams spręsti analizė, skaitiniai metodai.

Tyrimo etapai.

Pirmame etape (2007 m.) buvo analizuojama literatūra, interneto duomenų bazės. Išnagrinėta literatūra leido suformuluoti tyrimo problemas, tikslą ir uždavinius.

Antrame etape (2007 – 2008 m.) skysčio tekėjimas buvo tiriamas įvairiais metodais, atliktas žvalgomasis tyrimas. Išnagrinėjus įvairius metodus nuspręsta skysčio tekėjimą laminariniame sluoksnyje nagrinėti skaitiniais metodais.

Trečiame etape (2008 – 2009 m.) skysčio tekėjimo lygtys išspręsti skaitiniais metodais matematiniu paketu *MathCAD 13*.

Ketvirtame etape (2009 m.) išanalizuoti rezultatai ir suformuluotos išvados.

Darbo struktūra. Magistro darbą sudaro įvadas, trys skyriai, santrauka. Pirmame skyriuje išnagrinėta teorinė dalis. Antrame skyriuje suformuluotas uždavinys. Trečiame skyriuje pateikti skaičiavimai matematiniu paketu *MathCAD 13*.

1. TEORINĖ DALIS

1.1. TOLYDUMO LYGTIS

Hidrodinamika nagrinėja skysčio judėjimo dėsningumus ir jų taikymą technikai. Kadangi hidrodinamikos nagrinėjami reiškiniai yra mikroskopinio pobūdžio, tai hidrodinamika nagrinėja skystį kaip tolygią terpę. Matematinis judančio skysčio aprašymas realizuojamas skysčio greičio pasiskirstymo funkcija $\mathbf{v} = \mathbf{v}(x_1, x_2, x_3, t)$ ir kuriais nors dviem jos termodinaminiais dydžiais, pavyzdžiui, slėgio p(x_1, x_2, x_3, t) ir tankio ρ(x_1, x_2, x_3, t). Visi šie dydžiai iš esmės yra koordinačių x_1, x_2, x_3 ir laiko t funkcijos. Pabrėšime, kad bendru atveju skysčio greitis **v** priklauso nuo taško (x_1, x_2, x_3) trimatėje erdvėje ir nuo laiko *t*; tas pats liečia dydžius ρ, ir p [1], [2], [3].

Išvesime pagrindines hidrodinamines lygtis. Nagrinėkime tam tikrą erdvės tūrį V_0. Skysčio kiekis (masė) šiame tūryje yra $\int \rho dV$, čia ρ yra skysčio tankis, o integravimas vykdomas pagal tūrį V_0. Per paviršiaus, ribojančio nagrinėjamą tūrį, elementą d**f** per laiko vienetą nutekamo skysčio kiekis lygus $\rho \mathbf{v} d\mathbf{f}$. Čia vektorius d**f** nukreiptas pagal paviršiaus išorinę normalę, t.y $\rho \mathbf{v} d\mathbf{f}$ yra teigiamas, jeigu skystis išteka iš tūrio, ir neigiamas, jeigu skystis įteka į jį. Taigi pilnas kiekis skysčio, ištekančio per laiko vienetą iš tūrio V_0, yra

$$\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f},$$

čia integravimas vykdomas uždaru paviršiumi, kuris apima nagrinėjamą tūrį.

Iš kitos pusės, skysčio kiekio sumažėjimą tūryje V_0 galima užrašyti taip:

$$-\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV.$$

Sulyginę abi išraiškas, gausime:

$$\frac{\partial}{\partial t} \int \rho dV = -\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f}. \tag{1.1.1}$$

Pasinaudoję Ostrogradskio formule paviršiaus integralą pakeisime tūrio integralu [7]:

$$\oint \rho \mathbf{v} d\mathbf{f} = \int \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) dV .$$

Iš (1.1.1) ir paskutinės formulės išplaukia, kad

$$\int \left(\frac{\partial \rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) \right) dV = 0.$$

Kadangi ši lygybė teisinga kiekvienam tūriui, tai pointegralinė išraiška turi būti lygi nuliui, t.y.

$$\frac{\partial \rho}{dt} + \nabla \cdot (\rho \mathbf{v}) = 0 \qquad (1.1.2)$$

(1.1.2) lygtis yra vadinama tolydumo lygtimi.

Išraišką $\nabla \cdot (\rho \mathbf{v})$, (1.1.2) formulė galima užrašyti tokiu pavidalu

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \rho \nabla \cdot \mathbf{v} + \mathbf{v} \nabla \rho = 0. \qquad (1.1.3)$$

Vektorius

$$\mathbf{j} = \rho \mathbf{v}$$

yra vadinamas skysčio srovės tankiu. Jo kryptis sutampa su skysčio judėjimo kryptimi, o jo absoliutus dydis nustato skysčio kiekį, pratekantį per laiko vienetą per ploto vienetą, išsidėsčiusį statmenai greičiui.

1.2. OILERIO LYGTIS

Panagrinėkime skysčio judėjimą, kuriame šilumos laidumo ir klampumo procesai nėra esminiai, t.y manysime, kad nėra šilumos perdavimo ir trinties tarp įvairių skysčio dalelių, taip pat tarp skysčio dalelių ir įvairių sąveikaujančių su jomis išorinių kūnų. Toks skysčio judėjimas vadinamas idealiuoju [8].

Pilna jėga, veikianti išskirtą skysčio tūrį, yra lygi slėgio integralui, pagal nagrinėjamo tūrio paviršių:

$$-\oint p d\mathbf{f} .$$

Pagal Ostrogradskio formulę šį integralą galima pertvarkyti į integralą pagal tūrį:

$$-\oint p d\mathbf{f} = -\int \nabla p \, dV.$$

Iš čia matome, kad skysčio tūrio kiekvieną elementą dV veikia jėga $\nabla p dV$. Kitaip tariant, galima pasakyti, kad skysčio tūrio vienetą veikia jėga ∇ p.

Skysčio tūrio judėjimo lygtis išreiškiama taip:

$$\rho \frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\nabla p. \qquad (1.2.1)$$

Čia esanti išvestinė $\frac{d\mathbf{v}}{dt}$ apibūdina apibrėžtos erdvėje judančios skysčio dalelės greičio pasikeitimą. Skysčio dalelės greičio pokytis $d\mathbf{v}$ erdvės taške per laiką dt susideda iš dviejų dalių: iš greičio pokyčio duotajame taške per laiką dt ir iš greičių skirtumo (tuo pačiu laiko momentu) dvejuose taškuose, atskirtuose atstumu $d\mathbf{r}$, kurį nuėjo skysčio dalelė per laiką dt. Pirma dalį galima užrašyti taip:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt.$$

Antroji dalis yra lygi

$$dx \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_1} + dx_2 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_2} + dx_3 \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial x_3} = (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v}.$$

Todėl skysčio dalelės greičio pokytį galime išreikšti taip:

$$d\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} dt + (d\mathbf{r} \cdot \nabla)\mathbf{v} .$$

Padalinę pastarosios lygybės abi puses iš dt gausime:

$$\frac{d\mathbf{v}}{dt} = \frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v}\,. \tag{1.2.2}$$

Gautą santykį įrašius į (1.2.1) formulę turime:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{1}{\rho}\nabla \mathrm{p}\,. \tag{1.2.3}$$

Šią formulę pirmą kartą išvedė L. Oileris 1755 m. Tai yra standartinė skysčio judėjimo lygtis, kuri vadinama Oilerio lygtimi.

Jeigu skystis yra gravitacijos lauke, tai kiekvienas jo tūrio vienetas yra veikiamas jėgos $\rho\mathbf{g}$, čia $\mathbf{g}$ **-** gravitacijos pagreitis. Ši jėga turi būti pridėta prie dešinės (1.2.1) lygties pusės. Taigi lygtis (1.2.3) įgauna pavidalą:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\frac{\nabla \mathrm{p}}{\rho} + \mathbf{g}. \tag{1.2.4}$$

Jeigu idealusis skystis yra nespūdus, tai jo tankis ρ yra pastovus dydis, kurį galima laikyti žinomu. Šiuo atveju (1.1.2) tolydumo lygtis turi pavidalą:

$$\nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \tag{1.2.5}$$

Tolydumo (1.1.2) ir (1.2.4) Oilerio lygtys sudaro idealiojo skysčio hidrodinamikos lygčių sistemą:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\dfrac{\nabla \mathrm{p}}{\rho} + \mathbf{g}, \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. \end{cases}$$

Taškuose, kuriuose skystis liečiasi su nejudamu paviršiumi, turi būti patenkinta kraštinė sąlyga:

$$\mathrm{v}_n = 0, \tag{1.2.6}$$

čia $\mathrm{v}_n = \mathbf{v} \cdot \mathbf{n}$, $\mathbf{n}$ – vienetinis išorinės paviršiaus normalės vektorius.

1.3. IMPULSO SRAUTAS

Skysčio tūrio vieneto impulsas yra lygus $\rho\mathbf{v}$. Jo pasikeitimo greitis yra:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho\mathbf{v}.$$

Turime, kad

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = \rho\frac{\partial v_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho}{\partial t} v_i, \ \mathrm{i} = 1,2,3.$$

Pasinaudosime tolydumo lygtimi (1.1.2)

$$\frac{\partial \rho}{\partial t} + \nabla \cdot (\rho\mathbf{v}) = \frac{\partial \rho}{\partial t} + \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_k) = 0$$

ir (1.2.3) Oilerio lygtimi

$$\frac{\partial v_i}{\partial t} = -\sum_{k=1}^{3} v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_i}, \ \mathrm{i} = 1,2,3.$$

Tada gausime:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\sum_{k=1}^{3}\rho v_k \frac{\partial v_i}{\partial x_k} - \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_i} - v_i\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial(\rho v_k)}{\partial x_k} = -\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_i} - \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}(\rho v_i v_k).$$

Pirmąjį narį dešinėje pusėje užrašysime taip:

$$\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_i} = \sum_{k=1}^{3}\delta_{ik}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_k},$$

čia δ_{ik} - Kronekerio simbolis [1], t.y $\delta_{ik} = \begin{cases} 1, \text{kai } i = k \\ 0, \text{kai } i \neq k. \end{cases}$,

ir galutinai randame:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho v_i = -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \prod_{ik}}{\partial x_k}, \tag{1.3.1}$$

čia tenzorius $\prod_{ik}$ apibrėžiamas formule

$$\prod_{ik} = \mathrm{p}\delta_{ik} + \rho v_i v_k . \tag{1.3.2}$$

Lygtį (1.3.1) suintegruokime pagal tūrį:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i d\mathrm{V} = -\int\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \prod_{ik}}{\partial x_k} d\mathrm{V} .$$

Dešinėje esanti tūrinį integralą pakeisime pagal Ostrogradskio formulę paviršiaus integralu:

$$\frac{\partial}{\partial t}\int \rho v_i d\mathrm{V} = -\oint\sum_{k=1}^{3}\prod_{ik} n_k df \quad . \tag{1.3.3}$$

Pastebėsime, kad iš (1.3.2) formulės išplaukia lygtis:

$$\sum_{k=1}^{3}\prod_{ik} n_k = \mathrm{p}n_i + \rho v_i \sum_{k=1}^{3} v_k n_k$$

Šią išraišką galima perrašyti vektoriniu pavidalu:

$$\mathrm{p}\mathbf{n} + \rho\mathbf{v}(\mathbf{v}\cdot\mathbf{n}) . \tag{1.3.4}$$

Tenzorius $\prod_{ik}$ vadinamas impulso srauto tankio tenzoriumi. Vektorius (1.3.4) apibrėžia impulso vektoriaus srautą kryptimi **n** , t.y. per paviršių statmeną **n**.

1.4. KLAMPAUS SKYSČIO JUDĖJIMO LYGTIS

Panagrinėsime įtaką, kurią daro skysčio tekėjimui judėjimo metu vykstantys energijos disipacijos procesai. Norint išvesti lygtis, apibūdinančias klampaus skysčio judėjimą, būtina pridėti papildomus narius prie idealaus skysčio judėjimo lygties. Tolydumo lygtis galioja bet kokio skysčio judėjimui, taip pat ir klampaus. Tačiau Oilerio lygtys turi būti pakeistos. Oilerio lygtys gali būti parašytos taip:

$$\frac{\partial}{\partial t}\rho \mathrm{v}_i = -\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \Pi_{ik}}{\partial x_k}, \qquad \mathrm{i} = 1,2,3.$$

čia Π_{ik} – impulso srauto tankio tenzorius. Impulso srautas, aprašytas (1.3.2) formule susijęs su skysčio dalelių pernešimu iš vienos vietos į kitą ir skystyje veikiančiomis slėgio jėgomis. Skysčio klampumas išryškėja pernešant impulsą iš vietų su mažesniu, į vietas su didesniu greičiu [8].

Todėl klampaus skysčio judėjimo lygtis galima gauti, pridėjus prie „idealaus“ impulso srauto lygčių papildomą narį σ'_{ik}, apibūdinantį negrįžtamą („klampų“) impulso perkėlimą skystyje:

$$\Pi_{ik} = \mathrm{p}\delta_{ik} + \rho \mathrm{v}_i \mathrm{v}_k - \sigma'_{ik} = -\sigma_{ik} + \rho \mathrm{v}_i \mathrm{v}_k, \tag{1.4.1}$$

čia

$$\sigma_{ik} = -\mathrm{p}\delta_{ik} + \sigma'_{ik} \tag{1.4.2}$$

vadinamas tamprumo tenzoriumi, o σ'_{ik} – klampiu tamprumo tenzoriumi. σ_{ik} apibūdina tą impulso srovės dalį, kuri nėra susijusi su tiesioginiu impulso perkėlimu kartu su judančio skysčio mase.

Nustatyti bendrą tenzoriaus σ'_{ik} išraišką galima remiantis sekančiais samprotavimais. Vidinės trinties skystyje procesai atsiranda tik tais atvejais, kai skirtingos skysčio dalys juda su skirtingu greičiu, taigi kai yra skysčio dalių judėjimas viena kitos atžvilgiu. Todėl σ'_{ik} turi priklausyti nuo greičio išvestinės pagal kintamuosius x_i. Jeigu greičio gradientai nėra labai dideli, tai galima manyti, kad impulso pernešimas, sąlygotas klampumo, priklauso tik nuo pirmųjų greičio išvestinių. Pačią σ'_{ik} priklausomybę nuo išvestinių $\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}$ galima laikyti tiesine.

Kadangi σ'_{ik} turi virsti nuliu kai $\mathbf{v} = const$, tai nepriklausančių nuo $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ narių σ'_{ik} išraiškoje negali būti. Tarkime, kad skystis tolygiai sukasi kaip vientisas kūnas su pastoviu sukimosi greičių $\mathbf{\Omega}$. Aišku, kad šiuo atveju jokios vidinės trinties skystyje neatsiranda. Esant tolygiam sukimuisi su kampiniu greičiu **Ω** skysčio greitis **v** yra lygus vektorinei sandaugai **Ω** × **r**. Išvestinių $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ kombinacijos, virstančios nuliu, kai **v = Ω** × **r**, yra tokios sumos

$$\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial x_i}.$$

Dėl šios priežasties σ'_{ik} priklausys nuo šių simetriškų išvestinių $\frac{\partial v_i}{\partial x_k}$ kombinacijų.

Antrojo rango tenzorius, tenkinantis šias sąlygas, turi pavidalą:

$$\sigma'_{ik} = a\left(\frac{\partial v_i}{\partial x_k} + \frac{\partial v_k}{\partial v_i}\right) + b\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\delta_{ik},$$

čia *a, b* nepriklauso nuo greičio. Šią išraišką galima perrašyti pavidalu:

$$\sigma'_{ik} = \eta\left(\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial \mathrm{x_k}} + \frac{\partial \mathrm{v_k}}{\partial \mathrm{x_i}} - \frac{2}{3}\delta_{ik}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial x_j}\right) + \zeta\delta_{ik}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial v_j}{\partial \mathrm{x}_j}. \tag{1.4.3}$$

Pabrėžkime, jog esantis skliausteliuose reiškinys pasižymi savybe, kad sumuojant komponentes su indeksu i = k gaunamas nulis. Dydžiai η ir ζ vadinami klampumo koeficientais, jie abu yra teigiami dydžiai:

$$\eta > 0, \zeta > 0. \tag{1.4.4}$$

Klampaus skysčio judėjimo lygtis dabar galima gauti tiesiogiai pridedant išraišką $\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}$ prie dešiniosios Oilerio lygties pusės:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\mathrm{v}_k\frac{\partial \mathrm{v_i}}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_i}.$$

Tokiu būdu, gauname:

$$\rho\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial t}+\sum_{k=1}^{3}\mathrm{v}_k\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}\right)=-\frac{\partial p}{\partial x_i}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_k}\left\{\eta\left(\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}+\frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial x_i}-\frac{2}{3}\delta_{ik}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_j}\right)\right\}+\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\varsigma\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_j}\right),\ \mathrm{i=1,2,3.}$$

(1.4.5)

Tai yra bendriausia klampaus skysčio judėjimo lygčių sistema. Dydžiai η, ζ yra slėgio ir temperatūros funkcijos. Jei klampumo koeficientai yra pastovūs tai:

$$\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial \sigma'_{ik}}{\partial x_k}=\eta\left(\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial x_k^2}+\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\frac{\partial \mathrm{v}_k}{\partial x_k}-\frac{2}{3}\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_j}\right)+\varsigma\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_j}=\eta\sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial x_k^2}+\left(\varsigma+\frac{\eta}{3}\right)\frac{\partial}{\partial x_i}\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathrm{v_j}}{\partial \mathrm{x_j}}$$

Tačiau

$$\sum_{j=1}^{3}\frac{\partial \mathrm{v}_j}{\partial x_j}\equiv \mathrm{div}\,\mathbf{v},\ \sum_{k=1}^{3}\frac{\partial^2 \mathrm{v}_i}{\partial x_k^2}\equiv \Delta \mathrm{v}_i,\ \sum_{k=1}^{3}\mathrm{v}_k\frac{\partial \mathrm{v}_i}{\partial x_k}=(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v},$$

todėl klampaus skysčio judėjimo lygtis galime parašyti vektoriniu pavidalu:

$$\rho\left[\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}\right]=-\nabla \mathrm{p}+\eta\nabla\mathbf{v}+\left(\xi+\frac{\eta}{3}\right)\nabla(\nabla\cdot\mathbf{v}). \quad (1.4.6)$$

Jeigu skystis yra nespūdus, tai $\nabla\cdot\mathbf{v}=0$ ir paskutinis narys dešinėje (1.4.6) formulės pusėje lygus nuliui. Todėl klampaus nespūdaus skysčio judėjimo lygtis yra užrašoma:

$$\frac{\partial \mathbf{v}}{\partial t}+(\mathbf{v}\cdot\nabla)\mathbf{v}=-\frac{1}{\rho}\nabla \mathrm{p}+\frac{\eta}{\rho}\nabla\mathbf{v}. \quad (1.4.7)$$

Pažymėkime $\frac{\eta}{\rho}=\nu$ ir pridėkime prie (1.4.7) sistemos (1.1.2) tolydumo lygtis:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial \mathbf{v}}{\partial t} + (\mathbf{v} \cdot \nabla)\mathbf{v} = -\dfrac{1}{\rho}\nabla \mathrm{p} + \nu \Delta \mathbf{v}, & (1.4.8) \\ \nabla \cdot \mathbf{v} = 0. & (1.4.9) \end{cases}$$

(1.4.8), (1.4.9) sistema vadinama Navjė – Stokso lygčių sistema [8], [9].

Tarp kietojo kūno paviršiaus ir realaus skysčio visada egzistuoja molekulinės sankabos jėgos, kas tiesiogiai įtakoja skysčio sulaikymą sąlytyje su sienele. Taigi prie klampaus skysčio judėjimo lygčių reikia pridėti „prilipimo“ kraštinę sąlygą:

$$\mathbf{v}=0. \qquad (1.4.10)$$

Pabrėžkime, kad čia reikalaujamas išnykimas tiek normalios, tiek tangentinės greičio komponentės, tuo tarpu kraštinės idealaus skysčio lygčių sąlygos reikalauja, kad nuliu virstų tik normalinė komponentė v_n. Bendruoju judančio paviršiaus atveju greitis **v** turi būti lygus šio paviršiaus greičiui:

$$\mathbf{v}=\mathbf{a},$$

čia **a** yra paviršiaus judėjimo greitis.

1.5. LAMINARINIS PASIENIO SLUOKSNIS

Nagrinėsime plokščia tekėjimą (t.y. funkcijos nepriklauso nuo x_3 koordinatės ir nėra greičio v_3 komponentės). Tarkime, kad x_1 ašis yra nukreipta aptekėjimo kryptimi. Tada Navjė-Stokso lygtys gali būti parašytos pavidalu:

$$\mathrm{v}_1 \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_1} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_1}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_1}{\partial x_2^2}\right), \qquad (1.5.1)$$

$$\mathrm{v}_1 \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_2} + \nu\left(\frac{\partial^2 \mathrm{v}_2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 \mathrm{v}_2}{\partial x_2^2}\right), \qquad (1.5.2)$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} = 0. \qquad (1.5.3)$$

(Nagrinėjamas stacionarus tekėjimas, todėl išvestinės laiko atžvilgiu lygios nuliui.)

Dėl pasienio sluoksnio plonumo aišku, kad judėjimas jame vyks daugiausia lygiagrečiai aptekamam paviršiui, t.y. greitis v_2 bus mažas palyginus su v_1 (tai išplaukia tiesiogiai iš tolydumo lygties).

x_2 - ašies kryptimi greitis keičiasi greitai, jo esminis kitimas vyksta pasienio sluoksnio δ eilės storio atstumuose; x_1 - ašies kryptimi greitis keičiasi lėtai, esminis jo kitimas čia vyksta uždavinio charakteringojo ilgio *l* eilės atstumuose (*l* yra kūno ilgis). Todėl išvestinė x_2 atžvilgiu yra pakankamai didelė lyginant su išvestine x_1 atžvilgiu. Paliksime (1.5.1) – (1.5.3) lygtyse tik pagrindinius narius. Kadangi $\frac{\partial^2 \mathrm{v}_1}{\partial x_1^2}$ yra maža lyginant su $\frac{\partial^2 \mathrm{v}_1}{\partial x_2^2}$, o v_2 - mažas lyginant su v_1, tai suprastintą lygčių sistemą galima parašyti taip:

$$\mathrm{v}_1 \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2} - \nu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_1}{\partial x_2^2} = \frac{1}{\rho} \frac{d\mathrm{p}}{dx_1} \quad \text{ir} \quad \frac{\partial \mathrm{p}}{\partial x_2} = 0 \qquad (1.5.4)$$

Iš (1.5.4) išplaukia, kad slėgis p pasienio sluoksnyje priklauso nuo x_1, t. y. p = p(x). Išreiškiame slėgį p skysčio pagrindinės srovės greičiu U(x_1). Už pasienio sluoksnio ribų judėjimas yra potencialus, todėl yra teisinga Bernulio lygtis:

$$\mathrm{p} + \frac{\rho U^2}{2} = const\,.$$

Diferencijuojant šią lygtį gausime, kad:

$$\frac{1}{\rho} \frac{d\mathrm{p}}{dx_1} = -U \frac{dU}{dx_1}.$$

Įrašant paskutinę išraiška į (1.5.4) formulę gauname lygčių sistemą aprašančią skysčio greitį pasienio sluoksnyje:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_1 \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2} - \nu \dfrac{\partial^2 \mathrm{v}_1}{\partial x_2^2} = U \dfrac{dU}{dx_1}, \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} = 0. \end{cases} \qquad (1.5.5)$$

Tegul U_0 yra charakteristinis šio uždavinio greitis (pavyzdžiui, kūno aptekančio skysčio srovės greitis begalybėje). Įvesime vietoje koordinačių x_1, x_2 ir greičių v_1, v_2 bedimencines koordinates x', y' ir greičio komponentes v_1', v_2':

$$\mathrm{x}_1 = lx',\ x_2 = \frac{ly'}{\sqrt{R}},$$
$$\mathrm{v}_1 = U_0\mathrm{v}_1',\ \mathrm{v}_2 = \frac{U_0\mathrm{v}_2'}{\sqrt{R}}, \tag{1.5.6}$$

kur $R = \dfrac{U_0'}{\nu}$. Tuomet (1.5.5) lygčių sistema įgauna pavidalą:

$$\begin{cases} \mathrm{v}_1' \dfrac{\partial \mathrm{v}_1'}{\partial x'} + \mathrm{v}_2' \dfrac{\partial \mathrm{v}_1'}{\partial y'} - \dfrac{\partial^2 \mathrm{v}_1'}{\partial y'^2} = U' \dfrac{dU'}{dx'} \\ \dfrac{\partial \mathrm{v}_1'}{\partial x'} + \dfrac{\partial \mathrm{v}_2'}{\partial y'} = 0, \end{cases} \tag{1.5.7}$$

čia $\mathrm{U}' = \dfrac{\mathrm{U}}{\mathrm{U}_0}$.

(1.5.7) sistema, o taip pat atitinkamos kraštinės sąlygos, nepriklauso nuo klampumo koeficiento. Tai reiškia, kad jos sprendinys nepriklauso nuo Reinoldso skaičiaus. Tokiu būdu, besikeičiant Reinoldso skaičiui judėjimas paribio sluoksnyje keičiasi nežymiai, t. y. išilginiai atstumai ir greičiai lieka nepakitę, o skersiniai keičiasi atvirkščiai proporcingai šakniai iš R.

Kadangi (1.5.7) lygčių sistema yra bedimensinė, tai bedimensiniai greičiai v_1', v_2' nepriklauso nuo R ir yra vieneto eilės, tas pats liečia pasienio sluoksnio storį δ koordinatėse x' ir y'. Taigi, iš formulių (1.5.6) galima daryti išvadą, kad

$$\mathrm{v}_2 \sim \frac{U_0}{\sqrt{R}}, \tag{1.5.8}$$

$$\delta \sim \frac{l}{\sqrt{R}}, \tag{1.5.9}$$

t. y. pasienio sluoksnio storis δ mažėja kaip $R^{-\frac{1}{2}}$ didėjant Reinoldso skaičiui R [8].

2. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS

Pirmame skyriuje nagrinėtą teoriją pritaikysime dvimatės plokštelės aptekėjimo uždavinio sprendimui. Tarkime, kad srauto greitis yra pastovus, tada srauto greičio vektoriaus išvestinė lygi nuliui ir (1.5.7) lygtis galima užrašyti pavidalu:

$$\mathrm{v}_1 \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \mathrm{v}_2 \frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2} = \nu \frac{\partial^2 \mathrm{v}_1}{\partial x_2^2}, \tag{2.1}$$

$$\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_1} + \frac{\partial \mathrm{v}_2}{\partial x_2} = 0. \tag{2.2}$$

Plokštelės paviršiuje turi būti patenkintos kraštinės sąlygos:

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = 0 \text{, kai } x_1 \geq 0,\ x_2 = 0. \tag{2.3}$$

Begalybėje skysčio greitis turi asimptotiškai artėti prie srauto greičio U, t. y $\lim \mathrm{v}_1 = U$, kai $\mathrm{v}_2 \to \infty, \lim \mathrm{v}_2 = 0.$

$$\mathrm{v}_1 = U \text{ kai } x_2 \to \pm\infty. \tag{2.4}$$

Skysčio greičio laminariniame pasienio sluoksnyje ieškome pavidalu:

$$\mathrm{v}_1 = Uf(y\sqrt{\frac{U}{x_1\nu}}),\ \ \mathrm{v}_2 = \sqrt{\frac{U\nu}{x_1}} f_1(y\sqrt{\frac{U}{x_1\nu}}). \tag{2.5}$$

Naudojant (2.2) lygtį funkciją f_1 galima išreikšti funkcija f. Tuomet uždavinys, (2.1), (2.2), (2.3), (2.4) suvedamas į paprastą diferencialinę lygtį. Funkciją f, kuri priklauso nuo kintamojo

$$\xi = y\sqrt{\frac{U}{x_1\nu}},$$

lengva rasti, jei įvesime funkciją $\varphi(\xi)$ tokią, kad $f(\xi) = \varphi'(\xi)$. Tada $f_1(\xi) = \frac{1}{2}(\xi\varphi' - \varphi)$, o φ tenkina lygtį:

$$\varphi\varphi'' + 2\varphi'' = 0\,,$$

su sąlyga :

$$\varphi = 0,\ \ \varphi' = 0\,,\ \text{kai}\ \ \xi = 0$$

$$\varphi' = 1,\ \text{kai}\ \ \xi = \infty.$$

Trinties jėga, veikianti plokštelės paviršiaus ploto vienetą, yra lygi

$$\sigma_{x_1 x_2} = \eta\frac{\partial \mathrm{v}_1}{\partial x_2},\ \text{kai}\ \ x_2 = 0.$$

3. UŽDAVINIO SPRENDIMAS SKAITINIAIS METODAIS

(2.1) - (2.5) sistemą sprendžiame matematiniu paketu *MathCAD 13*.

Kadangi $\varphi(\xi) = 0$, kai $\xi = 0$ $\varphi'(\xi) = 0$, todėl taško $\xi = 0$ aplinkoje išdėsčius φ funkciją Tailoro eilute gauname:

$$\varphi(\xi) = \varphi(0) + \frac{\varphi'(\xi)}{1!} + \frac{\varphi''(\xi)}{2!}\xi^2 + \ldots + \frac{\varphi'''(\xi)}{3!}\xi^3 \ldots$$

čia parametras $a := 2.0$,

b parinktas taip, kad sprendinio asimptotė $f = \varphi'$ būtų lygi 1: $b := 0.16602$

$\xi 1$ parenkame arti nulinio taško, kad paklaida būtu kuo mažesnė:

$\zeta 1 := 0.000$ $\zeta 2 := 10$

Sprendžiant naudojame Rungės – Kuto metodą. Norint pasiekti reikiamą tikslumą naudojame taškų skaičių:

$N := 1000$

Apibrėžiame pradines sąlygas:

$$u0 := \begin{bmatrix} b\cdot\zeta 1^{a} \\ b\cdot a\cdot\zeta 1^{a-1} \\ b\cdot a\cdot(a-1)\cdot\zeta 1^{a-2} \end{bmatrix}$$

čia $b \cdot \xi 1^{a}$ - pati funkcija,

$b \cdot a \cdot \xi 1^{a-1}$ - pirmoji išvestinė pradiniame taške,

$b \cdot a(a-1) \cdot \xi 1^{a-2}$ - antroji išvestinė pradiniame taške.

(1) sistemą suvedame į diferencialinę lygtį ir užrašome jos dešiniąją pusę:

$$D(\zeta, u) := \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \dfrac{-u_0\cdot u_2}{2} \end{pmatrix}$$

čia $u_1 = \varphi'$ pirmoji išvestinė,

$u_2 = \varphi''$ antroji išvestinė,

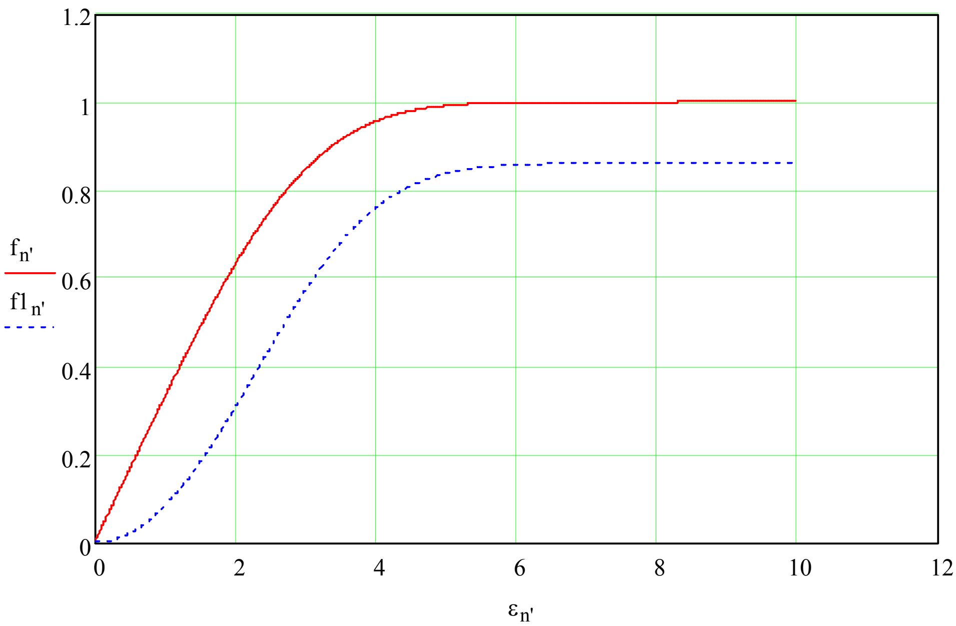
$u_0 = \varphi$ pati išvestinė.

Nagrinėjamą lygtį matematiniu paketu *MahtCAD 13* sprendžiame tokią komanda:

$z := \mathrm{rkfixed}(u0, \zeta 1, \zeta 2, N, D)$.

Skaitiškai išsprendus galima pavaizduoti funkcijų f_1 ir f reikšmes

$f1_n := 0.5 \cdot \left(\zeta_n \cdot f_n - \phi_n\right)$



Kaip ir teorijoje iš grafiko galima pasakyti, kad funkcijos f_1 ir f yra viena per kitą išreiškiamos.

Panagrinėkime skysčio tekėjimo greičio vektoriaus lauką laminariniame paviršiaus sluoksnyje. Pagal (2.5) formules užrašome greičio vektoriaus funkcijas:

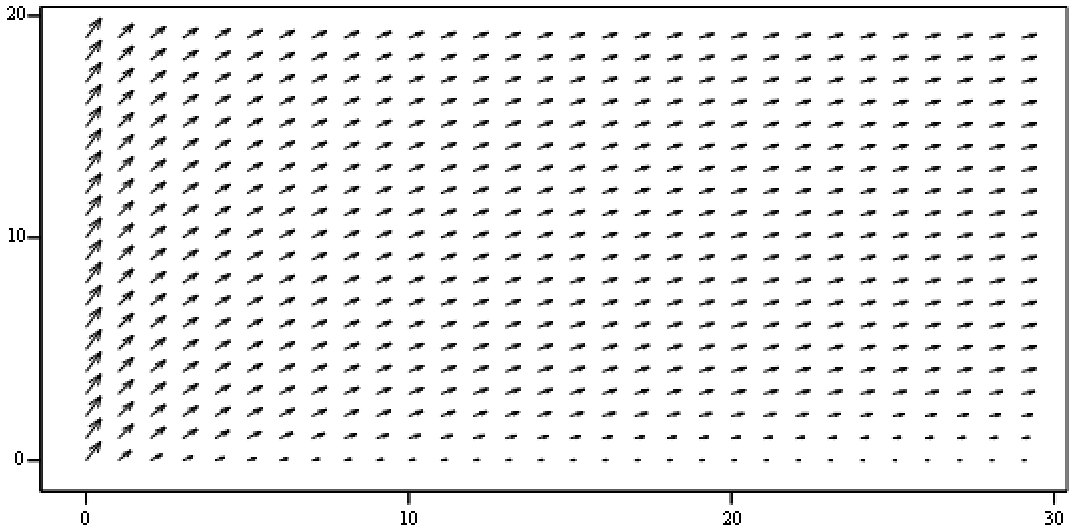
$$Vx_{m,m'} := f_{\mathrm{floor}\left(\frac{1000\,y'_{m'}}{\sqrt{x'_m}}\right)} \qquad Vy_{m,m'} := f1_{\mathrm{floor}\left(\frac{1000\,y'_{m'}}{\sqrt{x'_m}}\right)} \cdot \left(x'_m\right)^{-0.5}$$

Sujungiame v_x ir v_y į bendrą funkciją:

$V_{m,m'} := Vx_{m,m'} + \sqrt{-1} \cdot Vy_{m,m'}$

čia $x'_m := 0.2\cdot(m+1)$ $y'_{m'} := 0.2\cdot(m'+1)$

Nubrėžkime greičio vektoriaus lauką:



V

Iš grafiko matome, jog skysčio tekėjimo greičio vektoriai laminariniame pasienio sluoksnyje yra išsidėstę vienas šalia kito. Tai įtakoja padidėjęs skysčio klampumas šioje srityje.

SANTRAUKA

Darbe nagrinėtas skysčio tekėjimas laminariniame pasienio sluoksnyje. Skysčio tekėjimo greičio vektoriaus komponentės yra išreiškiamos tokiomis lygtimis:

$$v_1 = Uf(y\sqrt{\frac{U}{x_1\nu}}),\ v_2 = \sqrt{\frac{U\upsilon}{x_1}}f_1(y\sqrt{\frac{U}{x_1\nu}}).$$

Atsižvelgiant į hidrodinamikos dėsnius, prie šių lygčių yra pridedamos kraštinės sąlygos:

$$v_1 = v_2 = 0\text{, kai } x_1 \geq 0,\ x_2 = 0,$$

$$v_1 = U\text{, kai } x_2 \to \pm\infty.$$

Gautas uždavinys buvo nagrinėtas matematiniu paketu MathCAD 13. Skaitiškai gauti rezultatai patvirtina teorines žinias apie skysčio tekėjimą laminariniame pasienio sluoksnyje. Iš darbe gautų grafikų galime daryti konkrečias išvadas apie sprendinio elgesį.

SUMMARY

The laminar boundary layer flow of the incompressible liquid over semi – infinite flat plate is discussed. Components of the velocity vector are expressed in the form:

$$\mathrm{v}_1 = Uf\left(y\sqrt{\frac{U}{x_1 \nu}}\right),\ \mathrm{v}_2 = \sqrt{\frac{U\upsilon}{x_1}} f_1\left(y\sqrt{\frac{U}{x_1 \nu}}\right).$$

In accordance with hydrodynamic laws the following boundary conditions are prescribed

$$\mathrm{v}_1 = \mathrm{v}_2 = 0 \ \text{when}\ x_1 \geq 0,\ x_2 = 0,$$

$$\mathrm{v}_1 = U \quad \text{as}\ x_2 \to \pm\infty.$$

The problem was analyzed numerically using MathCAD 13. The obtained numerical results confirm the theoretical results about in laminar boundary layer flow of a viscous incompressible liquid. From the diagrams that are shown in the diploma work one can make certain specific conclusions about the behavior of the flow.

LITERATŪRA

1. Ambrazevičius. A., *Matematinės fizikos lygtys 1 dalis.* Vilnius, 1996.
2. Ambrazevičius. A., Domarkas. A., *Matematinės fizikos lygtys 2 dalis.* Vilnius, 1999.
3. Burtimaitė. J., *Fizika biomedicinos ir fizinių mokslų studentams.* Vilnius , 2003.
4. Fichtengolcas, G. *Matematinės analizės pagrindai II tomas.* Vilnius, 1967.
5. Pileckas. K., *Navjė – Stokso lygčių matematinė teorija.* Vilnius, 2007.
6. Пухначев. В. В., *Движение вязкой жидкости со свободными границами.* Новосибирск, 1989.
7. Žukauskas. A., *Šilumos atidavimas laminariniame skysčio sraute.* 1969.
8. Žukauskas. A., *Hidrodinamika ir vibracijos aptekamuose vamzdžių pluoštuose.* 1984.
9. Л. Д. Ландау, Е. М. Лифшиц. *Механика сплошных средств*. Москва, 1954.