ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Lijana Stancevičiūtė

Periodinės Hurvico dzeta funkcijos universalumas

Magistro darbas

Magistro darbo vadovas
Prof. habil. dr. A. Laurinčikas

Šiauliai
2009

Turinys

1. Įvadas

Tegu $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $\mathfrak{a} = \{a_m : a_m \in \mathbb{N}_0\}$ yra periodinė su periodu $k \in \mathbb{N}$ kompleksinių skaičių seka. Čia $\mathbb{N}$ yra visų sveikųjų teigiamų skaičių aibę, o $\mathbb{N}_0$ yra visų sveikųjų neneigiamų skaičių aibė. Periodinė Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$, $0 < \alpha \leq 1$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}.$$

Jeigu $a_m \equiv 1$, tai gauname klasikinę Hurvico dzeta funkciją

$$\zeta(s, \alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m+\alpha)^s}, \quad \sigma > 1.$$

Kadangi seka $\mathfrak{a}$ yra periodinė, tai pusplokštumėje $\sigma > 1$ turime, kad

$$\begin{aligned} \zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) &= \sum_{r=0}^{k-1} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_r}{(mk + r + \alpha)^s} = \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} a_r \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{\left(m + \left(\frac{r+\alpha}{k}\right)\right)^s} \\ &= \frac{1}{k^s} \sum_{r=0}^{k-1} a_r \zeta\left(s; \frac{r+\alpha}{k}\right). \end{aligned} \tag{1}$$

Gerai žinoma, kad Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha)$ yra analiziškai pratęsiama į visą s-plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Todėl iš (1) lygybės išplaukia, kad periodinė Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ yra analizinė visoje s-plokštumoje, išskyrus, galbūt, paprastąjį polių $s = 1$ su reziduumu

$$a = \frac{1}{k} \sum_{k=0}^{k-1} a_r.$$

Jeigu skaičius a yra lygus nuliui, tai tuomet funkcija $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ yra analizinė visoje baigtinėje s-plokštumoje, taigi ji yra sveikoji funkcija.

Magistro darbe yra nagrinėjamas funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ universalumas, t.y. savybė tam tikroje srityje norimu tikslumu aproksimuoti bet kokią analizinę funkciją.

Primename, kad pirmąjį rezultatą apie dzeta funkcijų universalumą gavo

S. M. Voroninas (Voronin), kuris [5] straipsnyje įrodė Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ universalumą. Funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Ji yra analiziškai pratęsiama į visą s-plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu, lygiu 1. Taigi matome, kad Rymano dzeta funkcija yra atskiras Hurvico dzeta funkcijos atvejis, kai parametras $\alpha = 1$.

Pradinis Voronino teoremos variantas yra toks tvirtinimas [5].

1 teorema. *Tegul* $0 < r < \frac{1}{4}$. *Tarkime, kad funkcija* $f(s)$ *tolydi ir nevirstanti nuliu skritulyje* $|s| \leq r$ *ir analizinė to skritulio viduje. Tuomet kiekvienam* $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks realusis skaičius* $\tau = \tau(\varepsilon, f)$, *kad*

$$\max_{|s| \leq r} \left| \zeta\left(s + \frac{3}{4} + i\tau\right) - f(s) \right| < \varepsilon.$$

1 teorema buvo įrodyta daugiau negu prieš 30 metų. Pastaruoju metu yra žinomas stipresnis jos variantas, kurio formulavimui bus reikalingi kai kurie žymenys. Simboliu $meas\{A\}$ žymėsime mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą ir teigiamiems T naudosime žymenį

$$\nu_T(...) = \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0, T] : ...\};$$

čia vietoje daugtaškio rašysime sąlygą, kurią tenkina kintamasis τ. Tegul $\mathbb{C}$ yra kompleksinė plokštuma, o $\mathbf{D} = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$.

Paskutinis Voronino teoremos variantas atrodo taip [2].

2 teorema. *Tegul* K *yra kompaktinė juostos* $\mathbf{D}$ *aibė, turinti jungųjį papildinį. Tarkime, kad funkcija* $f(s)$ *tolydi ir nevirstanti nuliui aibėje* K *ir analizinė aibės* K *viduje. Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

2 teorema yra stipresnė už 1 teoremą dviem aspektais. Pirma, funkcija

$f(s)$ yra aproksimuojama Rymano dzeta funkcijos postūmiais bendresnėje aibėje negu skritulys, antra, 2 teorema rodo, kad aproksimuojančių dzeta funkcijos postūmiais aibė yra gana turtinga - jos apatinis tankis yra griežtai teigiamas.

Periodinės Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ universalumas buvo pradėtas nagrinėti [1] darbe, kur buvo reikalaujama, kad koeficientai a_m nevirstų nuliumi. Primename, kad skaičius α yra vadinamas trancendenčiuoju, jeigu jis nėra jokio polinomo su racionaliaisiais koeficientais šaknis. Minėtame [1] darbe buvo įrodytas toks tvirtinimas.

3 teorema. *Tegul α yra trancendentusis skaičius ir*

$$\min_{1 \le m \le k} |a_m| > 0.$$

Tarkime, kad K yra kompaktiška juostos $\mathbf{D}$ aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{T \to \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Magistro darbo tikslas yra atsisakyti 3 teoremoje reikalavimo, kad skaičiai $a_m \neq 0$.

Pagrindinis darbo rezultatas yra tokia teorema.

4 teorema. *Tegul α yra trancendentusis skaičius. Tarkime, kad K yra kompaktinė juostos $\mathbf{D}$ aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \nu_T \left(\sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right) > 0.$$

Pastebime, kad 3 ir 4 teoremose, skirtingai nuo 2 teoremos, funkcija $f(s)$ gali virsti nuliumi aibėje K. Taip yra todėl, kad periodinė Hurvico dzeta funkcija su trancendenčiuoju parametru α neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius, o Rymano dzeta funkcijai pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra teisinga Oilerio tapatybė

$$\zeta(s) = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

2. Ribinė teorema

Tegul $\mathbf{D} = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, o $H(\mathbf{D})$ yra analizinių juostoje $\mathbf{D}$ funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija. Simboliu $\mathfrak{B}(S)$ žymėsime erdvės S Borelio aibių klasę, t.y. σ-kūną, generuotą erdvės S atvirų aibių sistemos. Šis σ-kūnas yra mažiausias iš visų σ-kūnų, kuriems priklauso atvirųjų aibių sistema.

Tegul

$$\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$$

yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžiame begaliniamatį torą

$$\Omega = \prod_{m=0}^{\infty} \gamma_m,$$

kur $\gamma_m = \gamma$ su visais $m \in \mathbb{N}_0$. Yra žinoma [2], kad su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl [4] erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro (Haar) matą m_H. Primename, kad Haro matas m_H pasižymi invariantiškumo savybe, t.y., bet kuriai aibei $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ ir bet kuriam elementui $\omega \in \Omega$ yra teisingos lygybės

$$m_H(\omega A) = m_H(A\omega) = m_H(A).$$

Ši konstrukcija duoda tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(m)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_m, $m \in \mathbb{N}_0$. Erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame $H(\mathbf{D})$-reikšmį atsitiktinį elementą $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a})$ formule

$$\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega(m)}{(m+\alpha)^s}.$$

Pastebime, kad pastaroji eilutė beveik visiems $\omega \in \Omega$ Haro mato atžvilgiu konverguoja tolygiai [1] juostos $\mathbf{D}$ kompaktinėse aibėse. Tegul P_ζ yra atsitiktinio elemento $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a})$ skirstinys, t.y., tikimybinis matas, apibrėžiamas formule

$$P_\zeta(A) = m_H(\omega \in \Omega : \zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a}) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(H(\mathbf{D})).$$

2.1 teorema. *Tarkime, kad α yra trancendentusis skaičius. Tuomet tikimybinis matas P_T, kai $T \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P_ζ.*

Teoremos įrodymas yra duotas [1] straipsnyje.

Pagrindinės teoremos įrodymui yra reikalinga 2.1 teoremos ribinio mato P_ζ atrama. Primename, kad ši atrama yra tokia minimali uždara aibė $S_{P_\zeta} \subseteq H(\mathbf{D})$, kad $P_\zeta(S_{P_\zeta}) = 1$. Atramą S_{P_ζ} sudaro visos tokios funkcijos $g \in H(\mathbf{D})$, kurių kiekvienai aplinkai G yra teisinga nelygybė

$$P_\zeta(G) > 0.$$

Atsitiktinio elemento X atrama yra vadinama jo skirstinio P_X atrama ir žymima S_X.

3. Keletas pagalbinių lemų

Tikimybinio mato P_ζ atramos apskaičiavimui bus reikalinga visa eilė lemų.

3.1 lema. *Tegul* μ *yra kompleksines reikšmes įgyjantis matas erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ *su atrama, gulinčia pusplokštumėje* $\sigma > \sigma_0$, *ir*

$$g(z) = \int\limits_{\mathbb{C}} \mathrm{e}^{sz} \mathrm{d}\mu(s), z \in \mathbb{C}.$$

Jeigu $g(z) \not\equiv 0$, *tai tuomet teisinga nelygybė*

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log |g(r)|}{r} > \sigma_0.$$

Lemos įrodymas yra [2] monografijoje, 6.4.10 lema.

3.2 lema. *Tarkime, kad* $X_m, \quad m \in \mathbb{N}$, *yra tokia nepriklausomų* $H(\mathbf{D})$*-reikšmių atsitiktinių elementų seka, kad eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m \tag{3.1}$$

konverguoja beveik tikrai. Tuomet (3.1) eilutės sumos atrama yra aibės visų tokių funkcijų $g \in H(\mathbf{D})$, *kurios gali būti užrašytos konverguojančia eilute*

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} g_m, \quad g_m \in S_{X_m},$$

uždarinys.

Lema yra įrodyta [2] monografijoje, 1.7.10 teorema.

Bene svarbiausia yra žemiau formuluojama 3.3 lema.

3.3 lema. *Tarkime, kad seka* $\{g_m : m \in \mathbb{N}\} \subset H(\mathbf{D})$ *tenkina reikalavimus:*

1^0 *Jeigu μ yra toks kompleksines reikšmes įgyjantis matas erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ *su kompaktine atrama, gulinčia juostoje* $\mathbf{D}$*, kad*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \left| \int\limits_{\mathbb{C}} g_m \mathrm{d}\mu \right| < \infty,$$

tai tuomet

$$\int\limits_{\mathbb{C}} s^r \mathrm{d}\mu(s) = 0$$

su visais $r \in \mathbb{N}_0$.

2^0 *Kiekvienai kompaktiškai aibei* $K \subseteq \mathbf{D}$ *eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{S \in K} |g_m(s)|$$

konverguoja.

3^0 *Eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m$$

konverguoja erdvėje $H(\mathbf{D})$*. Tuomet visų konverguojančių eilučių*

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_m g_m$$

aibė su $|b_m| = 1$*,* $m \in \mathbb{N}$*, yra tiršta erdvėje* $H(\mathbf{D})$.

Lemos įrodymas yra pateiktas [2] monografijoje, 6.3.10 teoremoje.

Tikimybinio mato P_ζ atramos tyrimui naudosime ir kai kuriuos eksponentinio tipo sveikųjų funkcijų teorijos elementus. Primename, kad funkcija $g(s)$ yra vadinama sveikąją, jeigu ji yra analizinė kiekvienoje baigtinėje s-plokštumos srityje. Sveikoji funkcija $g(s)$ yra eksponentinio tipo, jeigu

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log |g(r\mathrm{e}^{i\Theta})|}{r} < \infty$$

tolygiai pagal $\Theta, |\Theta| \leq \Theta_0 < \pi$.

3.4 lema. *Tarkime, kad $g(s)$ yra eksponentinio tipo sveikoji funkcija, $\{\lambda_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra kompleksinių skaičių seka, o teigiami skaičiai α_1, α_2 ir α_3 tenkina salygas:*

1^0 $\limsup\limits_{x\to\infty} \frac{\log|g(\pm ix)|}{x} \le \alpha_1$;

2^0 $|\lambda_m - \lambda_n| \ge \alpha_2 |m-n|$;

3^0 $\lim\limits_{m\to\infty} \frac{\lambda_m}{m} = \alpha_3$;

4^0 $\alpha_1\alpha_3 < \pi$.

Tuomet teisinga lygybė

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\log|g(\lambda_m)|}{|\lambda_m|} = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|g(r)|}{r}.$$

Lema yra vadinama Bernšteino teorema, jos įrodymas yra duotas [2] monografijoje, 6.4.12 teorema.

3.5 lema. *Tegul $\lambda_1 \le \lambda_2 \le \ldots$ yra realiųjų skaičių seka, o funkcija $g(u)$ turi tolydžią išvestinę intervale $[\alpha_1, x]$. Tuomet yra teisinga lygybė*

$$\sum_{\lambda_1 \le \lambda_2 \le x} a_m g(\lambda_m) = A(x)g(x) - \int_{\lambda_1}^{x} A(u)g'(u)\mathrm{d}u;$$

čia

$$A(u) = \sum_{\lambda_1 \le \lambda_2 \le u} a_m,$$

o a_m yra bet kokie kompleksiniai skaičiai.

Lema yra viena iš dalinio sumavimo formulės variantų. Jos įrodymą galima rasti, pavyzdžiui [3], monografijoje.

Primename vieną klasikinę asimtotinę formulę.

3.6 lema. *Egzistuoja absoliuti konstanta* $\mathbb{C}$, *su kuria*

$$\sum_{m \leq x} \frac{1}{m} = \log x + C + O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Lemos įrodymą taip pat galima rasti [3] monografijoje.

Mums dar bus reikalinga Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais.

3.7 lema. *Tarkime, kad* K *yra kompaktinė kompleksinės plokštumos aibė, turinti jungųjį papildinį. Tada kiekviena analizinė aibės* K *viduje funkcija yra tolygiai aproksimuojama aibėje* K *kintamojo* s *polinomais.*

Įrodymas yra duotas [6] monografijoje.

4. Tirštumo teorema

3 skyrelyje suformuluotas lemas panaudosime vienos konverguojančių eilučių aibės tirštumo erdvėje $H(\mathbf{D})$ įrodymui.

Tegul

$$g_m(s) = g_m(s; b_m) = \frac{a_m b_m}{(m+\alpha)^s}, \quad s \in \mathbf{D},$$

su $|b_m| = 1, \quad m \in \mathbb{N}_0$.

4.1 teorema. *Visų konverguojančių eilučių*

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m(s; b_m)$$

aibė yra tiršta erdvėje $H(\mathbf{D})$.

Įrodymas. Straipsnyje [1] įrodinėjant, kad $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a})$ yra $H(\mathbf{D})$-reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$, yra gauta, kad eilutė

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m \omega_m}{(m+\alpha)^s}$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$ konverguoja tolygiai kompaktinėse juostos $\mathbf{D}$ aibėse. Todėl iš čia ir sekos $\{g_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ apibrėžimo turime, jog egzistuoja tokia seka $\{c_m : |c_m| = 1, \quad m \in \mathbb{N}_0\}$, kad eilutė

$$\sum_{m=0}^{\infty} g_m(s; c_m) \tag{4.1}$$

konverguoja tolygiai juostos $\mathbf{D}$ kompaktinėse aibėse. Tegul, trumpumo dėlei, $\hat{g_m}(s) = g_m(s; c_m)$. Įrodysime, kad visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{g_m}(s) b_m$$

aibė su $|b_m| = 1$ yra tiršta erdvėje $H(\mathbf{D})$. Šiam tikslui naudosime 3.3 lemą.

Tikriname 3.3 lemos sąlygas. Iš funkcijų $\hat{g_m}(s)$ apibrėžimo ir (4.1) eilutės konvergavimo išplaukia, kad eilutė

$$\sum_{m=0}^{\infty} \hat{g_m}(s)$$

konverguoja tolygiai juostos $\mathbf{D}$ kompaktinėse aibėse, taigi ji konverguoja erdvėje $H(\mathbf{D})$. Vadinasi 3.3 lemos 3^0 salyga yra išpildyta.

Kadangi juostoje $\mathbf{D}$ galioja nelygybė $\sigma > \frac{1}{2}$, tai kiekvienai juostos $\mathbf{D}$ kompaktinei aibei turime, kad

$$\sum_{m=0}^{\infty} \sup_{s\in K} \left|\hat{g_m}(s)\right|^2 < \infty.$$

Taigi, 3.3 lemos 2^0 salyga yra taip pat išpildyta. Lieka patikrinti lemos 3.3 sudėtingiausią salygą 1^0.

Tegul μ yra toks kompleksines rekšmes įgyjantis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktine atrama, gulinčia juostoje $\mathbf{D}$, kad

$$\sum_{m=0}^{\infty} \left|\hat{g_m}(s)\mathrm{d}\mu(s)\right| < \infty.$$

Iš čia ir funkcijos $\hat{g_m}(s)$ apibrėžimo randame, kad

$$\sum_{m=0}^{\infty} |a_m| \left| \int_{\mathbb{C}} (m+\alpha)^{-s} \mathrm{d}\mu(s)\right| < \infty. \tag{4.2}$$

Iš skleidinio

$$\mathrm{e}^s = 1 + \frac{s}{1!} + \frac{s^2}{2!} + \dots,$$

teisingo visiems kompleksiniams s, išplaukia įvertis

$$\mathrm{e}^s = 1 + O(|s|)\mathrm{e}^{|s|}.$$

Todėl visiems $m \geq 2$ turime, kad

$$\begin{aligned}
(m+\alpha)^{-s} &= m^{-s}\left(1+\frac{\alpha}{m}\right)^{-s} = m^{-s}\mathrm{e}^{-s\log(1+\frac{\alpha}{m})} \\
&= m^{-s}\mathrm{e}^{O(\frac{|s|}{m})} = m^{-s}\left(1+O\left(\frac{|s|}{m}\right)\mathrm{e}^{O(|s|)}\right) \\
&= m^{-s} + O\left(\frac{|s|}{m^{1+\sigma}}\right)\mathrm{e}^{o(|s|)}.
\end{aligned}$$

Kadangi eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{1+\sigma}}$$

konverguoja ir mato $\mu(s)$ atrama yra kompaktinė, todėl aprėžta, tai pastarasis įvertis kartu su (4.2) leidžia tvirtinti, kad

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m| \left| \int\limits_{\mathbb{C}} m^{-s} \mathrm{d}\mu(s) \right| < \infty. \tag{4.3}$$

Apibrėžiame naują funkciją

$$\rho(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} \mathrm{d}\mu(s), z \in \mathbb{C}.$$

Tuomet (4.3) saryšį galima užrašyti pavidalu

$$\sum_{m=1}^{\infty} |a_m||\rho(\log m)| < \infty. \tag{4.4}$$

Kadangi mato μ atrama yra aprėžta, tai egzistuoja toks skaičius $V > 0$, kad su visais $x > 0$ yra teisinga nelygybė

$$|\rho(\pm ix)| \le \mathrm{e}^{Vx} \int\limits_{\mathbb{C}} |\mathrm{d}\mu(s)|.$$

Iš čia gauname, kad

$$\begin{aligned} \limsup_{x\to\infty} \frac{\log|\rho(\pm ix)|}{x} &\le \limsup_{x\to\infty} \frac{\log \mathrm{e}^{Vx} \int\limits_{\mathbb{C}} |\mathrm{d}\mu(s)|}{x} \\ &= V + \limsup_{x\to\infty} \frac{\log \int\limits_{\mathbb{C}} |\mathrm{d}\mu(s)|}{x} = V. \end{aligned}$$

Todėl 3.4 lemos 1^0 salyga funkcijai $\rho(s)$ yra išpildyta su $\alpha_1 = V$. Parenkame teigiamą α_3, tenkinantį nelygybę

$$\alpha_3 < \frac{\pi}{V}.$$

Dabar nagrinėsime aibę

$$A = \left\{ k \in \mathbb{N} : \exists r \in \left(\left(k - \frac{1}{4}\right)\alpha_3, \quad \left(k + \frac{1}{4}\right)\alpha_3 \right], |\rho(r)| \le \mathrm{e}^{-r} \right\}.$$

Trumpumo dėlei, tegul

$$M = M(k) = \sum_{m=1}^{k} |a_m|^2.$$

Kadangi seka $\{a_m\}$ yra periodinė su periodu k, tai nesunku matyti, kad

$$\sum_{m\le x} |a_m|^2 = M\left[\frac{x}{k}\right]+O(M) = \frac{M}{k}x+O(M) = \hat{M}x(1+o(1)), \quad x\to\infty, \tag{4.5}$$

kur $[u]$ yra skaičiaus u sveikoji dalis ir $\hat{M} = Mk^{-1}$.

Dabar fiksuojame skaičių β, $0<\beta<\sqrt{\hat{M}}$ ir apibrėžiame aibę

$$\mathbb{N}_\beta = \{m : m\in\mathbb{N}, |a_m|>\beta\}.$$

Tuomet iš (4.4) sąryšio matome, kad

$$\sum_{m\in\mathbb{N}_\beta} |\rho(\log m)| < \infty. \tag{4.6}$$

Aišku, kad

$$\sum_{m\in\mathbb{N}_\beta} |\rho(\log m)| \ge \sum_{k\notin A}\sum_{k}{}' |\rho(\log(m))| \ge \sum_{k\notin A}\sum_{k}{}' \frac{1}{m}, \tag{4.7}$$

kur $\sum_k'$ reiškia sumą pagal visus $m\in\mathbb{N}_\beta$, kuriems galioja nelygybė

$$\left(k-\frac{1}{2}\right)\alpha_3 < \log m \le \left(k+\frac{1}{4}\right)\alpha_3.$$

Trumpumo dėlei pažymėkime

$$a = \exp\left\{\left(k-\frac{1}{4}\right)\alpha_3\right\}$$

ir

$$b = \exp\left\{\left(k+\frac{1}{4}\right)\alpha_3\right\}.$$

Tuomet iš (4.6) sąryšio ir (4.7) nelygybės turime, kad

$$\sum_{k\notin A}\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_\beta\\ a<m\le b}} \frac{1}{m} < \infty. \tag{4.8}$$

Tegul $[x]_\beta$ yra sveikųjų skaičių iš aibės $\mathbb{N}_\beta$, neviršijančių x, skaičius, t.y.,

$$[x]_\beta = \sum_{\substack{m\le x\\ m\in\mathbb{N}_\beta}} 1.$$

Be to, tegul $\max\limits_{1\le m\le k}|a_m| = \hat{a}$. Panaudoję šiuos žymenis randame, kad visiems u, $a < u \le b$,

$$\begin{aligned}\sum_{a<m\le u}|a_m|^2 &\le \hat{a}^2\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_\beta\\ a<m\le u}}1+\beta^2\sum_{\substack{m\notin\mathbb{N}_\beta\\ a<m\le u}}1\\ &= \hat{a}^2([u_\beta]-[a]_\beta)+\beta^2(([u]-[u]_\beta)-([a]-[a]_\beta))\\ &= (\hat{a}^2-\beta^2)([u]_\beta-[a]_\beta)+\beta^2([u]-[a]). \qquad (4.9)\end{aligned}$$

Iš (4.5) asimtotinės lygybės turime, kad kai $k\to\infty$,

$$\sum_{a<m\le u}|a_m|^2 = \hat{M}[u](1+o(1))-\hat{M}[a](1+o(1)). \qquad (4.10)$$

Fiksuojame tokį teigiamą skaičių δ, kad

$$1+\delta < \mathrm{e}^{\frac{\alpha_3}{2}},$$

ir tegul $0<\varepsilon<\frac{\delta}{40}$. Tuomet pakankamai dideliems skaičiams k, tarkime $k>k_0(\varepsilon)$, ir visiems $u>a$ galime parašyti, kad

$$\hat{M}[u](1+o(1)) \ge \hat{M}[u](1-\varepsilon)$$

ir

$$\hat{M}[a](1+o(1)) \le \hat{M}[a](1+\varepsilon).$$

Vadinasi,

$$\hat{M}[u](1+o(1))-\hat{M}[a](1+o(1)) \ge \hat{M}([u]-[a])-\hat{M}\varepsilon([u]+[a]). \qquad (4.11)$$

Be to, kai $u\ge a(1+\delta)$ ir $k>k_0(\varepsilon)$, tai

$$\begin{aligned}[u]-[a] &\ge u(1-\varepsilon)-a \ge a(1+\delta)(1-\varepsilon)-a\\ &= a((1+\delta)(1-\varepsilon)-1)\\ &= a(\delta-(1+\delta)\varepsilon) > a\frac{\delta}{2}. \qquad (4.12)\end{aligned}$$

Dabar tegul $u\le b = a\mathrm{e}^{\frac{\alpha_3}{2}}$. Tuomet, kai $k>k_0(\varepsilon)$,

$$[u]+[a] \le u+a \le b+a \le a\mathrm{e}^{\frac{\alpha_3}{2}}+a = a(\mathrm{e}^{\frac{\alpha_3}{2}}+1).$$

Iš čia ir (4.12) nelygybės išplaukia, kad

$$[u]+[a]\leq\frac{2(\mathrm{e}^{\frac{\alpha_3}{2}}+1)}{\delta}([u]-[a]).$$

Pastaroji nelygybė kartu su (4.11), kai $k\to\infty$, duoda įvertį

$$\begin{aligned}\hat{M}[u](1+o(1))-\hat{M}[a](1+o(1)) &\geq \hat{M}([u]-[a])-\hat{M}\varepsilon\frac{2(\mathrm{e}^{\frac{\alpha_3}{2}}+1)}{\delta}([u]-[a])\\ &= \hat{M}([u]-[a])(1+o(1)).\end{aligned}$$

Iš čia bei (4.9) nelygybės ir (4.10) gauname

$$\hat{M}([u]-[a])(1+o(1))\leq(\hat{a}^2-\beta^2)([u]_\beta-[a]_\beta)+\beta^2([u]-[a]),$$

ir išsprendę šią nelygybę $[u]_\beta-[a]_\beta$ atžvilgiu, kai $u\geq(1+\delta)$ ir $k\to\infty$, turime, kad

$$[u]_\beta-[a]_\beta\geq\frac{\hat{M}-\beta^2}{\hat{a}^2-\beta^2}([u]-[a])(1+o(1)),$$

Remdamiesi pastarąja nelygybe ir naudodami 3.5 lemą, kai $k\to\infty$, randame

$$\begin{aligned}\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_\beta\\ a<m\leq b}}\frac{1}{m} &= \frac{1}{b}\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_\beta\\ a<m\leq b}}1+\int\limits_a^b\Bigg(\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_\beta\\ a<m\leq u}}1\Bigg)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\ &= \frac{1}{b}([b]_\beta-[a]_\beta)+\int\limits_a^b([u]_\beta-[a]_\beta)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\ &\geq \frac{1}{b}([b]_\beta-[a]_\beta)+\int\limits_{a(1+\delta)}^b([u]_\beta-[a]_\beta)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\\ &\geq \frac{\hat{M}-\beta^2}{\hat{a}-\beta^2}\Bigg(([b]-[a])\frac{1}{b}+\int\limits_{a(1+\delta)}^b([u]_\beta-[a]_\beta)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Bigg)(1+o(1))\\ &\geq \frac{\hat{M}-\beta^2}{\hat{a}-\beta^2}\Bigg(([b]-[a(1+\delta)])\frac{1}{b}+\int\limits_{a(1+\delta)}^b([u]_\beta-[a(1+\delta)]_\beta)\frac{\mathrm{d}u}{u^2}\Bigg)(1+o(1))\\ &= \frac{\hat{M}-\beta^2}{\hat{a}-\beta^2}\sum_{a(1+\delta)<m\leq b}\frac{1}{m}(1+o(1)).\end{aligned}\tag{4.13}$$

Pritaikę 3.6 lemą, gauname

$$\begin{aligned}\sum_{a(1+\delta)<m\le b}\frac{1}{m} &= \left(k+\frac{1}{4}\right)\alpha_3-\left(k-\frac{1}{4}\right)\alpha_3-\log(1+\delta)+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\\ &= \frac{\alpha_3}{2}-\log(1+\delta)+O\left(\frac{1}{k^2}\right).\end{aligned}$$

Šis įvertis kartu su (4.13) leidžia tvirtinti, kad

$$\sum_{\substack{m\in\mathbb{N}_\beta\\ a<m\le b}}\frac{1}{m}\ge\frac{\hat{M}-\beta^2}{\hat{a}-\beta^2}\left(\frac{\alpha_3}{2}-\log(1-\delta)\right)(1+o(1))+O\left(\frac{1}{k^2}\right). \qquad (4.14)$$

Kadangi $1+\delta<e^{\frac{\alpha^3}{2}}$, tai pastarąją nelygybę išlogaritmavę, turime, kad

$$\frac{\alpha^3}{2}-\log(1+\delta)>0.$$

Be to, kadangi $a_m\ne Const$, tai $\hat{M}<\hat{a}^2$, ir pagal β parinkimą $\hat{M}-\beta^2>0$. Gerai žinoma, kad eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k^2}$$

konverguoja. Todėl iš (4.14) ir (4.6), (4.7) išplaukia, kad

$$\sum_{k\notin A}1<\infty. \qquad (4.15)$$

Užrašome aibę A didėjančios sekos pavidalu:

$$A=\{v_m : m\in\mathbb{N}\},\quad v_1<v_2<\dots.$$

Tuomet iš (4.15) turime, kad

$$\lim_{m\to\infty}\frac{v_m}{m}=1. \qquad (4.16)$$

Be to, iš aibės A apibrėžimo išplaukia, kad egzistuoja tokia seka $\{\alpha_m : m\in\mathbb{N}\}$, su kuria

$$\left(v_m-\frac{1}{4}\right)\alpha_3<\lambda_m\le\left(v_m+\frac{1}{4}\right)\alpha_3$$

ir

$$|\rho(\lambda_m)|\le \mathrm{e}^{-\lambda_m}.$$

Iš čia ir (4.16) gauname, kad

$$\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda_m}{m}=\alpha_3$$

ir

$$\limsup_{m\to\infty}\frac{\log|\rho(\lambda_m)|}{\lambda_m}\leq\frac{\log \mathrm{e}^{-\lambda_m}}{\lambda_m}=-1.$$

Taigi, gavome, kad visos 3.4 lemos salygos yra išpildytos, todėl

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log|\rho(r)|}{r}\leq-1. \tag{4.17}$$

Tegul $\nu(A)=\mu(-A),\quad A\in\mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Tuomet ν yra kompleksines reikšmes įgyjantis matas su atrama, priklausančia juostai $\{s\in\mathbb{C}:-1<\sigma<-\frac{1}{2}\}$. Iš funkcijos $\rho(z)$ ir matų μ ir ν apibrėžimo gauname, kad

$$\rho(z)=\int\limits_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{sz}\mathrm{d}\nu(s).$$

Jeigu $\rho(z)\not\equiv 0$ tai, tuomet iš 3.1 lemos gauname, kad

$$\limsup_{r\to\infty}\frac{\log|\rho(r)|}{r}>-1,$$

kas prieštarauja (4.17) nelygybei. Vadinasi, turi būti $\rho(z)\equiv 0$. Diferencijuodami lygybę

$$\int\limits_{\mathbb{C}}\mathrm{e}^{-sz}\mathrm{d}\mu(s)$$

ir imdami $z=0$, randame, kad visiems $r\in\mathbb{N}_0$ yra teisinga lygybė

$$\int\limits_{\mathbb{C}}s^r\mathrm{d}\mu(s)=0.$$

Taigi gavome, kad seka $\{\hat{g}_m:m\in\mathbb{N}\}$ tenkina ir 3.3 lemos 1^0 salygą. Tokiu būdu, visos šios lemos salygos yra išpildytos, todėl visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{m=0}^{\infty}\hat{g}_m(s)b_m,\quad |b_m|=1,$$

aibė yra visur tiršta erdvėje $H(\mathbf{D})$. Iš čia išplaukia 4.1 teoremos tvirtinimas.

5. Mato P_ζ atrama

Universalumo teoremos įrodymui mums yra reikalinga žinoti 2.1 teoremos ribinio mato P_ζ atramą.

5.1 teorema. *Mato P_ζ atrama yra visa erdvė $H(\mathbf{D})$.*

Įrodymas. Iš toro Ω apibrėžimo turime, kad $\{\omega(m) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra seka nepriklausomų atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$. Vadinasi, $\{g_m(s; \omega(m)) : m \in \mathbb{N}_0\}$ yra nepriklausomų $H(\mathbf{D})$-reikšmių atsitiktinių elementų seka. Aišku, kad kiekvieno atsitiktinio dydžio $\omega(m)$ atrama yra vienintelis apskritimas γ. Todėl atsitiktinio elemento $g_m(s; \omega(m))$ atrama yra aibė $\{g_m(s, a) : |a| = 1\}$. Iš čia ir 3.2 lemos turime, kad atsitiktinio elemento $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a})$ atrama yra visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{m=0}^{\infty} g(s; b_m), \quad |b_m| = 1,$$

aibės uždarinys. Kadangi pagal 4.1 teoremą ši eilučių aibė visur tiršta erdvėje $H(\mathbf{D})$, tai jos uždarinys sutampa su visa erdve $H(\mathbf{D})$. Iš čia išplaukia teoremos tvirtinimas, nes atsitiktinio elemento $\zeta(s, \alpha, \omega; \mathfrak{a})$ atrama sutampa su mato P_ζ atrama.

6. Universalumo teorema

Šiame skyriuje įrodysime pagrindinį magistro darbo rezultatą apie funkcijos $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{a})$ universalumą.

6.1 teorema. *Tegul α yra trancendentusis skaičius. Tarkime, kad K yra kompaktinė juostos $\mathbf{D}$ aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra tolydi aibėje K ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra*

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left(\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right) > 0.$$

Įrodymas. Iš pradžių tarkime, kad funkcija $f(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą juostą $\mathbf{D}$. Apibrėžiame aibę

$$G = \left\{g(s) \in H(\mathbf{D}) : \sup_{s\in K}|g(s) - f(s)| < \varepsilon\right\}.$$

Čia K yra kompaktinė aibė iš teoremos formulavimo. Aišku, kad aibė G yra atvira. Todėl iš 2.1 teoremos silpnojo tikimybinio mato konvergavimo ekvivalento atviroms aibėms iš 5.1 teoremos gauname, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left(\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right) \geq P_\zeta(G) > 0. \tag{6.1}$$

Dabar tegul funkcija $f(s)$ yra tokia pat kaip ir teoremos formulavime. Tuomet iš 3.7 teoremos išplaukia, kad egzistuoja toks polinomas $p(s)$, kad

$$\sup_{s\in K}|f(s) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{6.2}$$

Aišku, kad kiekvienas polinomas yra analizinė funkcija juostoje $\mathbf{D}$. Todėl iš (6.1) nelygybės turime, kad

$$\liminf_{T\to\infty} \nu_T\left(\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0. \tag{6.3}$$

Kadangi

$$\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| \leq \sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - p(s)| + \sup_{s\in K}|f(s) - p(s)|,$$

tai iš (6.2) nelygybės turime, kad yra teisingas sąryšis

$$\left\{\tau : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} \supseteq \left\{\tau : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right\}.$$

Todėl iš čia ir (6.3) gauname, kad

$$\begin{aligned}
&\liminf_{T\to\infty} \quad \nu_T\left(\sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right) \geq \\
&\liminf_{T\to\infty} \quad \nu_T\left(\sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{a}) - p(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\right) > 0.
\end{aligned}$$

Teorema įrodyta.

Summary

Universality of the periodic Hurwitz zeta-function

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and $\mathfrak{a} = \{a_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ be a periodic sequence of complex numbers. The periodic Hurwitz zeta-function $\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a})$ is defined, for $\sigma > 1$, by

$$\zeta(s, \alpha; \mathfrak{a}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{a_m}{(m + \alpha)^s},$$

and by analytic continuation elsewhere. We prove that the function is universal in the following sense. Let K be a compact subset of the strip $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ with connected complement, and let the function $f(s)$ be continuous on K and analytic in the interior of K. Than, for every $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\left\{\tau \in [0, T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s + i\tau, \alpha; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Here $meas\{A\}$ denotes the Lebesgue measure of a measurable set $A \subset \mathbb{R}$.

Literatūra

1. Javtokas A. and Laurinčikas A., *On the periodic Hurwitz zeta-function*, Hardy-Ramanujan Journal, **29**, 18-36, 2006.

2. Laurinčikas A., *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

3. K. Prachar, *Raspredelenie prostych čisel*, "Mir", Moskva, 1967 (rusų kalba).

4. V. Rudinas, *Funkcinė analizė*, Mokslas, Vilnius, 1983.

5. Voronin S. M., *Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function*, Izv. AN SSSR, Ser. Matem., **39**, 475-486 (in Russian), 1975.

6. Walsh J. L., *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain*, American Mathematical Society Colloquium Publications, Vol. 20, 1960.