ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Sandra Lukošiūtė

Modifikuota ribinė teorema Matsumoto dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje

Magistro darbas

Magistro darbo vadovė:

doc. dr. R. Kačinskaitė

Šiauliai

2009

Turinys

1. Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, $\{a_m\}$ yra kompleksinių skaičių seka, o $\{\lambda_m\}$ - didėjanti teigiamų skaičių seka. Eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m e^{-\lambda_m s}$$

vadinama Dirichlė eilute. Jei $\lambda_m = \log m$, pastaroji eilutė tampa paprastąja Dirichlė eilute

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Analizinėje skaičių teorijoje ir apskritai matematikoje svarbus vaidmuo tenka dzeta funkcijoms. Tai kompleksinio kintamojo s funkcijos, tam tikroje pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilutėmis. Žinomiausia dzeta funkcija yra Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$. Kai $\sigma > 1$, ji apibrėžiama eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. $\zeta(s)$ yra meromorfinė funkcija. Ji turi paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Be to, funkcija, kai $\sigma > 1$, yra išreiškiama Oilerio sandauga

$$\zeta(s) = \prod_{p} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymas yra labai sudėtingas, sunku ką nors pasakyti apie jų konkrečias reikšmes. Dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimui gali būti taikomi tikimybiniai metodai. Problema formuluojama taip: duota tam tikra aibė, kaip dažnai dzeta funkcijų reikšmės papuola į šią aibę? Pastaroji idėja kilo H. Borui. Pirmuosius rezultatus gauvo H. Boras ir B. Jesenas 1930 metais.

Tegul R yra uždaras stačiakampis kompleksinėje plokštumoje, su kraštinėmis lygiagrečiomis koordinačių ašims, o *L(T,R)* žymi aibės $\{t \in [0,T] : \log\varsigma(\sigma + it) \in R\}$ Žordano matą.

1.1 teorema ([2]). *Kai $\sigma > 1$, egzistuoja riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L(T,R)}{T} = W(R,\sigma),$$

kuri priklauso tik nuo σ ir R.

1932 metais H. Boras ir B. Jesenas gavo panašų rezultatą, kai $\sigma > \frac{1}{2}$. Minėtų teoremų įrodymai remiasi iškilųjų kreivių sumų teorija, kurią sukūrė H. Boras ir B. Jesenas.

Galima paminėti šiuos matematikus, kurie užsiima(-ė) dzeta funkcijų tyrimu. Tai B. Bagči, P.D.T.A. Eliotas, A. Gošas, D. Džoineris, K. Matsumoto, A. Selbergas, J. Steudingas, A. Ivičius, S. Voroninas, J. Kačorovskis, T. Hatori ir kt. Lietuvoje šioje srityje dirba A. Laurinčikas, E. Stankus, R. Garunkštis, R. Kačinskaitė, J. Genys, D. Šiaučiūnas, S. Zamarys ir kt.

Mūsų darbo tikslas - gauti naujo tipo ribines teoremas Matsumoto dzeta funkcijai silpno tikimybinių matų konvergavimo prasme. Prisiminsime silpno konvergavimo apibrėžimą. $\mathcal{B}(S)$ pažymėkime erdvės S Borelio aibių klasę. Tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Sakome, kad matas P_n silpnai konverguoja į matą P, jei

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP$$

kiekvienai aprėžtai tolydžiai funkcijai $f : S \to \mathbb{R}$.

Bet kokiam $m \in \mathbb{N}$ apibrėžkime teigiamą sveikąjį skaičių $g(m)$. Be to, tegul $a_m^{(j)} \in \mathbb{C}$ ir $f(j, m)$, $1 \le j \le g(m)$, yra natūralieji skaičiai. Apibrėžkime daugianarį

$$A_m(x) = \prod_{j=1}^{g(m)} (1 - a_m^{(j)} x^{f(j,m)}),$$

kurio laipsnis $f(1, m) + \ldots + f(g(m), m)$. Tegul p_m žymi m-ąjį pirminį skaičių. [7] K. Matsumoto nagrinėja tokią dzetą funkciją

$$\varphi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} A_m^{-1}(p_m^s)^{-1}. \tag{1}$$

Jis pareikalavo, kad galiotų sąlygos

$$g(m) = Bp_m^\alpha, \quad |a_m^{(j)}| \le p_m^\beta, \tag{2}$$

kur α ir β yra neneigiamos konstantos, o B - dydis aprėžtas konstanta (ne visada tas pats). (1) begalinė sandauga konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \alpha + \beta + 1$, ir apibrėžia čia holomorfinę funkciją $\varphi(s)$ neturinčią nulių.

Matsumoto dzeta funkcija yra viena iš funkcijų, pusplokštumėje $\sigma > \alpha +$

$\beta + 1$ apibrėžiamų absoliučiai konverguojančiomis Dirichlė eilutėmis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b_m}{m^s},$$

kai koeficientams b_m galioja įvertis $b_m = Bm^{\alpha+\beta+\varepsilon}$ bet kokiam $\varepsilon > 0$.

Funkcija $\varphi(s)$ apibendrina klasikines dzeta funkcijas, išreiškiamas Oilerio sandauga. Pvz.: Dirichlė L-funkcijos $L(s, \chi)$, Dedekindo dzeta funkcija virš algebrinių skaičių kūno, parabolinių formų dzeta funkcija.

K. Matsumoto [7] įrodė dvi ribines teoremas funkcijai $\varphi(s)$.

Tegul R yra uždaras stačiakampis kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$ su kraštinėmis lygiagrečiomis koordinačių ašims. Pirmoji teorema nagrinėja atvejį, kai $\sigma > \alpha + \beta + 1$. Kai $\sigma_0 > \alpha + \beta + 1$, $\log \varphi(\sigma_0 + it)$ apibrėžkime pagrindinių logaritmo reikšmių sumą

$$\log \varphi(\sigma_0 + it) = \sum_{m=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{g(m)} Log(1 - a_m^{(j)} p_m^{-f(j,m)s});$$

meas$\{A\}$ pažymėkime $A \subset \mathbb{R}$ aibės Lebego matą.

1.2 teorema ([7]). *Tegul $\sigma_0 > \alpha + \beta + 1$ bei yra tenkinamos (2) sąlygos. Tada egzistuoja riba*

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{t \in [0, T] : \log \varphi(\sigma_0 + it) \in R\}.$$

Antroji teorema [7], nagrinėja $\log \varphi(\sigma_0 + it)$ pusplokštumėje $\sigma_0 < \alpha + \beta + 1$.

Mes magistro darbe nagrinėsime sudėtingesnį reikšmių pasiskirstymą. Tegul $T > 0$. Pažymėkime

$$\nu_T^2(\ldots) = \frac{1}{T^2}\text{meas}_2\big\{(t_1, t_2) \in [0, T]^2 : \ldots\big\},$$

kur daugtaškio vietoje įrašomos sąlygos, kurias tenkina (t_1, t_2), o $\text{meas}_2\{A\}$ žymi išmatuojamos aibės $A \subset \mathbb{R}^2$ Lebego matą. Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_T(A) = \nu_T^2\big(\varphi(\sigma + it_1 + it_2) \in A\big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}).$$

1.3 teorema. *Tegul $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$. Tada erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P_σ toks, kad P_T konverguoja silpnai į P_σ, kai $T \to \infty$.*

Nepakanka tik įrodyti mato egzistavimą. Įdomu jį yra identifikuoti.

Pirmiausia reikalinga tam tikra topologinė struktūra. Pažymėkime γ vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje, t.y., $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, ir tegul

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktiška topologinė Abelio grupė. Tegul $\Omega^2 = \Omega \times \Omega$. Tada Ω^2 taip pat yra kompaktiška topologinė grupė. Todėl erdvėje $(\Omega^2, \mathcal{B}(\Omega^2))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_{H2}. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega^2, \mathcal{B}(\Omega^2), m_{H2})$. $\omega(p) \in \Omega_j$ pažymėkime $\omega_j \in \Omega_j$

projekciją į koordinatinę erdvę γ_p, $j = 1, 2$. Tada formulės

$$\omega_j(k) = \prod_{p^\alpha \| k} \omega_j^\alpha(p)$$

pagalba funkciją $\omega_j(p)$ pratęsiame į visą natūraliųjų skaičių aibę kaip pilnai multiplikatyviąją unimoduliariąją funkciją, $j = 1, 2$ ($p^\alpha \| k$ reiškia, kad $p^\alpha | k$, bet $p^{\alpha+1} \nmid k$).

Pusplokštumėje $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ ir $\underline{\omega} = (\omega_1, \omega_2) \in \Omega^2$ tikimybinėje erdvėje $(\Omega^2, \mathcal{B}(\Omega^2), m_{H2})$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $\varphi(s, \underline{\omega})$ formule

$$\varphi(\sigma, \underline{\omega}) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{a_m^{(j)} \omega_1^{f(j,m)}(p_m) \omega_2^{f(j,m)}(p_m)}{p_m^{\sigma f(j,m)}} \right)^{-1}.$$

Jis taip pat gali būti apibrėžiamas eilute

$$\varphi(\sigma, \underline{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega_1(m)\omega_2(m)}{m^\sigma},$$

kur koeficientams $b(m)$ galioja įvertis $b(m) = Bm^{\alpha+\beta+\varepsilon}$ bet kokiam $\varepsilon > 0$.

1.4 teorema. *Tegul $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$. Tada tikimybinis matas P_T silpnai konverguoja į tikimybinį matą*

$$P_\sigma(A) = m_{H2}(\underline{\omega} \in \Omega^2 : \varphi(\sigma, \underline{\omega}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

kai $T \to \infty$.

2. Ribinė teorema Matsumoto dzeta funkcijai. I

Šiame skyriuje įrodysime 1.3 teoremą, t.y., kad egzistuoja tikimybinis matas P_σ į kurį silpnai konverguoja tikimybinis matas $P_T(A) = \nu_T^2\big(\varphi(\sigma + it_1 + it_2) \in A\big)$, kai $T \to \infty$.

2.1. Pagalbiniai rezultatai

1.3 teoremos įrodymui mums reikia gerai žinomos tikimybinių matų tolydumo teoremos erdvėje $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$.

2.1.1 lema. *Tegul* $\{P_n\}$ *yra tikimybinių matų seka* $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ *erdvėje, o* $\{f_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)\}$ *yra atitinkamų charakteristinių funkcijų seka* $n \in \mathbb{N}$. *Tarkime, kad*

$$\lim_{n\to\infty} f_n(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) = f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k),$$

visiems $(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k) \in \mathbb{R}^k$, *ir funkcija* $f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ *yra tolydi taške* $(0, 0, \dots, 0)$. *Tada egzistuoja tikimybinis matas* P *erdvėje* $(\mathbb{R}^k, \mathcal{B}(\mathbb{R}^k))$ *toks, kad* P_n *konverguoja silpnai į* P *kai* $n \to \infty$. *Šiuo atveju,* $f(\tau_1, \tau_2, \dots, \tau_k)$ *yra* P *charakteristinė funkcija.*

Įrodymas. Lemos įrodymą galima rasti, pvz., [1]. Mūsų atveju $k = 2$.

Tikimybinio mato P_T silpno kpnvergavimo įrodymui galime sudaryti matą

$$Q_T(A) = \nu_T^2\big((\Re\varphi(\sigma + it_1 + it_2), \Im\varphi(\sigma + it_1 + it_2)) \in A\big),$$

$A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2)$.

Tegul tokiems $N \in \mathbb{N}$,

$$p_N(\sigma + it) = \sum_{j=1}^{N} a_j e^{it\lambda_j}, \quad a_j \in \mathbb{C}, \quad \lambda_j \in \mathbb{R}, \tag{3}$$

yra Dirichlė polinomas. Tegul $J_k(x)$ yra Beselio funkcija, bet kokiam fiksuotam realiajam k apibrėžiama eilute

$$J_k(x) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{(-1)^m \left(\frac{x}{2}\right)^{2m+k}}{m!\Gamma(k+m+1)};$$

čia $\Gamma(k)$ yra gama funkcija. Apibrėžkime charakteristinę funkciją

$$\begin{aligned} f_{p_N}(\tau_1, \tau_2) &= \sum{}^{*} \prod_{j=1}^{N} J_{k_j}(|a_j|\tau_1) J_{l_j}(|a_j|\tau_2) \\ &\quad \times \exp\left\{ i\left(\frac{\pi}{2} \sum_{j=1}^{N} k_j + \sum_{j=1}^{N} (k_j + l_j)\lambda_j \right) \right\}, \end{aligned} \tag{4}$$

kur žvaigždutė reiškia sumavimą pagal visus sveikuosius skaičius k_j ir l_j, $j = 1, \dots, N$, kai eksponentės λ_j tenkina sąlygą

$$\sum_{j=1}^{N} (k_j + l_j)\lambda_j = 0.$$

2.1.2 lema. *Tikimybinis matas*

$$P_{T,p_N}(A) = \nu_T^2\big((\Re p_N(\sigma + it_1 + it_2), \Im p_N(\sigma + it_1 + it_2)) \in A\big), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^2),$$

silpnai konverguoja į matą erdvėje $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, *apibrėžtą charakteristine funkcija* $f_{p_N}(\tau_1, \tau_2)$, *kai* $T \to \infty$.

Įrodymas. Tikimybinio mato P_{T,p_N} silpno konvergavimo įrodymui tirsime jo charakteristinės funkcijos f_{T,p_N} asimptotinį elgesį. Ji apibrėžiama tokiu būdu

$$\begin{aligned} f_{T,p_N}(\tau_1,\tau_2) &= \int_{\mathbb{R}^2} \exp\big\{i(\tau_1 x_1+\tau_2 x_2)\big\} \mathrm{d}P_{T,p_N} \\ &= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \exp\big\{i\tau_1 \Re p_N(\sigma+it_1+it_2) \\ &\quad +i\tau_2 \Im p_N(\sigma+it_1+it_2)\big\}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2. \end{aligned} \tag{5}$$

Nesunku matyti, kad

$$\begin{aligned} \Re p_N(\sigma+it) &= \sum_{\substack{j=1\\ a_j\neq 0}}^N |a_j|\cos(\lambda_j t+\eta_j), \\ \Im p_N(\sigma+it) &= \sum_{\substack{j=1\\ a_j\neq 0}}^N |a_j|\sin(\lambda_j t+\eta_j), \end{aligned}$$

kur $\eta_j = \arg a_j$.

Pagal 2.4.1 teoremą iš [6] realiems x ir θ

$$\begin{aligned} e^{ix\sin\theta} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} J_k(x)e^{ik\theta}, \\ e^{ix\cos\theta} &= \sum_{k=-\infty}^{\infty} i^k J_k(x)e^{ik\theta}. \end{aligned}$$

Tada turime

$$\begin{aligned} &\exp\{i\tau_1\Re p_N(\sigma+it_1+it_2)\} \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_N=-\infty}^{\infty} J_{k_1}(|a_1|\tau_1)\dots J_{k_N}(|a_n|\tau_1) \\ &\quad \times\exp\Big\{i\Big(\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^N k_j+(t_1+t_2)\sum_{j=1}^N k_j\lambda_j+\sum_{j=1}^N k_j\eta_j\Big)\Big\} \\ &= \sum_{k_1,\dots,k_N=-\infty}^{\infty} J_{k_1}(|a_1|\tau_1)\dots J_{k_N}(|a_n|\tau_1) \end{aligned}$$

$$\times \exp\big\{i\big(\sum_{j=1}^{N}\big(\frac{\pi}{2}+\eta_j\big)k_j+(t_1+t_2)\sum_{j=1}^{N}k_j\lambda_j\big)\big\} \tag{6}$$

ir

$$\begin{aligned}
&\exp\{i\tau_2\Im p_N(\sigma+it_1+it_2)\}\\
&=\sum_{k_1,\dots,k_N=-\infty}^{\infty} J_{l_1}(|a_1|\tau_2)\dots J_{l_N}(|a_n|\tau_2)\\
&\quad\times \exp\big\{i\big(\sum_{j=1}^{N}l_j\eta_j+(t_1+t_2)\sum_{j=1}^{N}l_j\lambda_j\big)\big\}.
\end{aligned} \tag{7}$$

Remiantis (4) ir (6)-(7) iš (5) randame, kad

$$\begin{aligned}
f_{T,p_N}(\tau_1,\tau_2) &= f_{p_N}(\tau_1,\tau_2)+\sum\nolimits^{**}\prod_{j=1}^{N}J_{k_j}(|a_j|\tau_1)J_{l_j}(|a_j|\tau_2)\\
&\quad\times \exp\big\{i\big(\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{N}k_j+\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\eta_j\big)\big\}\\
&\quad\times\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \exp\big\{i(t_1+t_2)\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\big\}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2,
\end{aligned} \tag{8}$$

kur $**$ reiškia sumavimą pagal visus sveikuosius k_j ir l_j, $j=1,\dots,N$, tenkinančius sąlygą

$$\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\neq 0.$$

Akivaizdu, jei $\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\neq 0$, tada

$$\int_0^T\int_0^T \exp\big\{i(t_1+t_2)\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\big\}\mathrm{d}t_1\mathrm{d}t_2=\left(\frac{1-\exp\{iT\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\}}{1-\exp\{i\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\}}\right)^2.$$

Yra žinoma, kad Beselio funkcijoms teisingas įvertis

$$J_k(x)=\frac{Bc_1^{|k|}}{|k|!},\quad |x|\leq c_1,$$

čia c_1 yra laisvai pasirinkta konstanta [4]. Vadinasi, imdami bet kokį $\varepsilon > 0$, randame $K = K(\varepsilon)$ tokį, kad

$$\Big| \sum_{|k_1|+|l_1|+\ldots+|k_N|+|l_N|>K(\varepsilon)}^{**} \prod_{j=1}^{N} J_{k_j}(|a_j|\tau_1) J_{l_j}(|a_j|\tau_2) \times \exp\big\{i\big(\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{N} k_j + \sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\eta_j\big)\big\} \times \frac{1}{T^2}\Big(\frac{1-\exp\{iT\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\}}{1-\exp\{i\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\}}\Big)^2 \Big| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{9}$$

visiems $|\tau_1| \le c_2$, $|\tau_2| \le c_3$ (c_2 ir c_3 yra teigiamos konstantos). Dabar parinkime $N_0 = N_0(\varepsilon)$ tokį, kad, (8) nelygybės sumos liekanai, kai $N \ge N_0$, galiotų įvertis

$$\Big| \sum_{|k_1|+|l_1|+\ldots+|k_N|+|l_N|\le K(\varepsilon)}^{*} \prod_{j=1}^{N} J_{k_j}(|a_j|\tau_1) J_{l_j}(|a_j|\tau_2) \times \exp\big\{i\big(\frac{\pi}{2}\sum_{j=1}^{N} k_j + \sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\eta_j\big)\big\} \times \frac{1}{T^2}\Big(\frac{1-\exp\{iT\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\}}{1-\exp\{i\sum_{j=1}^{N}(k_j+l_j)\lambda_j\}}\Big)^2 \Big| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{10}$$

Vadinasi, iš (8)-(9) seka, kad

$$\lim_{T\to\infty} f_{T,p_N}(\tau_1,\tau_2) = f_{p_N}(\tau_1,\tau_2),$$

t.y., $f_{T,p_N}(\tau_1,\tau_2)$ konverguoja į $f_{p_n}(\tau_1,\tau_2)$, kai $T \to \infty$, tolygiai pagal τ_1 ir τ_2 kiekviename baigtiniame intervale. Remiantis 2.1.1 lema, mes gauname tikimybinio mato P_{T,p_N} silpną konvergavimą į matą erdvėje $(\mathbb{R}^2, \mathcal{B}(\mathbb{R}^2))$, apibrėžtą charakteristine funkcija f_{p_N}. Lema įrodyta.

2.2. 1.3 teoremos įrodymas

Tegul $f_T(\tau_1, \tau_2)$ yra mato P_T charakteristinė funkcija. Tada

$$\begin{aligned}
&|f_T(\tau_1, \tau_2) - f_{T,p_N}(\tau_1, \tau_2)| \\
&\ll \frac{|\tau_1|}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\Re\varphi(\sigma + it_1 + it_2) - p_N(\sigma + it_1 + it_2)| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \\
&\quad + \frac{|\tau_2|}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\Im\varphi(\sigma + it_1 + it_2) - p_N(\sigma + it_1 + it_2)| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2 \\
&\le \frac{|\tau_1| + |\tau_2|}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\varphi(\sigma + it_1 + it_2) - p_N(\sigma + it_1 + it_2)| \mathrm{d}t_1 \mathrm{d}t_2. \quad (11)
\end{aligned}$$

Remiantis 2.1.2 lema, egzistuoja teigiamas skaičius $T_0^1 = T_0^1(\sigma, c_2, c_3, \varepsilon)$ toks, kad, kai $T > T_0^1$,

$$|f_{T,p_N}(\tau_1, \tau_2) - f_{p_N}(\tau_1, \tau_2)| < \frac{\varepsilon}{4} \tag{12}$$

yra teisinga tolygiai pagal $|\tau_1| \le c_2$, $|\tau_2| \le c_3$. Iš (11) išplaukia, kad egzistuoja teigiami skaičiai $N = N(\sigma, \varepsilon)$ ir $T_0^2 = T_0^2(\sigma, c_2, c_3, \varepsilon)$ tokie, kad, kai $T \ge T_0^2$,

$$|f_T(\tau_1, \tau_2) - f_{T,p_N}(\tau_1, \tau_2)| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{13}$$

tenkinama tolygiai pagal $|\tau_1| \le c_2$, $|\tau_2| \le c_3$. Tegul N yra fiksuotas skaičius ir $T_0 = \max(T_0^1, T_0^2)$. Iš (12) ir (13), tokiems $T_1, T_2 > T_0$, randame, kad

$$|f_{T_1}(\tau_1, \tau_2) - f_{T_2}(\tau_1, \tau_2)| < \varepsilon$$

tolygiai pagal $|\tau_1| \le c_2$, $|\tau_2| \le c_3$. Iš čia darome išvadą, kad funkcija $f_T(\tau_1, \tau_2)$ konverguoja tolygiai pagal τ_1 ir τ_2 kiekviename baigtiniame intervale į tam tikrą funkciją $f(\tau_1, \tau_2)$. Bet pagal 2.1.1 lemą, funkcija $f(\tau_1, \tau_2)$ bus tolydi taške $(0, 0)$. Taigi, 1.3 teorema yra įrodyta.

3. Ribinė teorema Matsumoto dzeta funkcijai. II

Kadangi 1.3 teoremoje yra įrodomas tik tikimybinio mato egzistavimas, šiame skyriuje gausime išreikštinį jo pavidalą.

3.1. Ribinė teorema erdvėje Ω^2

Pradėsime nuo silpno tikimybinių matų konvergavimo savybių.

Erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ tikimybinio mato Q Furje transformacija $g(k_1, ...k_m)$ yra apibrėžiama lygybe

$$g(k_1, ...k_m) = \int_{\gamma^m} x_1^k ... x_m^{k_m} dQ,$$

kur k_j yra sveikieji skaičiai, $x_j \in \gamma, \quad j = 1, ..., m$.

3.1.1 lema. *Tegul $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų seka erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$, o $\{g_n(k_1, ...k_m)\}$ yra atitinkamų Furje transformacijų seka. Tarkime, kad kiekvienai sveikųjų skaičių aibei $(k_1, ..., k_m)$ egzistuoja riba*

$$g(k_1, ...k_m) = \lim_{n\to\infty} g_n(k_1, ..., k_m).$$

Tada egzistuoja tikimybinis matas Q *erdvėje $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ toks, kad Q_n silpnai konverguoja į* Q*, kai $n \to \infty$. Be to, $g(k_1, ...k_m)$ yra mato* Q *Furje transformacija.*

Erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ tikimybinio mato Q Furje transformacija $g(\underline{k})$ yra apibrėžta formule

$$g(\underline{k}) = \int_{\Omega} \prod_{p} x_p^{k_p} dQ,$$

kur $\underline{k} = (k_2, k_3, ...)$ ir tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p yra nenuliai bei $x_p \in \gamma, p \in \mathbb{P}$.

3.1.2 lema. *Tegul* $\{Q_n\}$ *yra tikimybinių matų seka erdvėje* $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, *o* $\{g_n(k)\}$ *yra atitinkama Furje transformacijų seka. Tarkime, kad kiekvienam vektoriui* $\underline{k}$ *egzistuoja riba*

$$g(\underline{k}) = \lim_{n \to \infty} g_n(\underline{k}).$$

Tada erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ *egzistuoja tikimybinis matas* Q *toks, kad* Q_n *silpnai konverguoja į* Q, *kai* $n \to \infty$. *Be to,* $g(\underline{k})$ *yra* Q *Furje transformacija.*

Įrodymas. 3.1.1 ir 3.1.2 lemos yra tolydumo teoremų apie tikimybinius matus kompaktiškoje Abelio grupėje atvejis, žr. pvz. [6].

Invariantiškas Borelio matas kompaktiškoje topologinėje grupėje yra vadinamas Haro matu.

3.1.3 lema. *Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis tikimybinis Haro matas.*

Įrodymas. Tai 5.14 teorema iš [1].

Sudarome tikimybinį matą

$$Q_T(A) = \nu_T^2(((p^{it_1}, p^{it_2}) : p \in \mathbb{P}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega^2).$$

3.1.4 teorema. *Tikimybinis matas $Q_T(A)$ silpnai konverguoja į Haro matą m_{H2}, kai $T \to \infty$.*

Įrodymas. Ω^2 dualioji grupė yra

$$\bigoplus_{j=1}^{2} \bigoplus_{p} \mathbb{Z}_{jp},$$

kur $\mathbb{Z}_{jp} = \mathbb{Z}$ visiems $p \in \mathbb{P}, j = 1, 2$. Elementas $\underline{k} = (k_{1p}, k_{2p} : p \in \mathbb{P}) \in \bigoplus_{j=1}^{2} \bigoplus_{p} \mathbb{Z}_{jp}$, kur tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_{jp} yra nenuliai, erdvėje Ω^2 atvaizduojamas

$$\underline{\omega} \to \underline{\omega}^{\underline{k}} = \prod_{j=1}^{2} \prod_{p} \omega_j^{k_{jp}}(p).$$

Vadinasi, mato Q Furje transformacija $g_T(\underline{k})$ yra

$$\begin{aligned}
g_T(\underline{k}) &= \int_{\Omega^2} \prod_{j=1}^{2} \prod_{p} \omega_j^{k_{jp}}(p) dQ_T \\
&= \frac{1}{T} \int_0^T \int_0^T \prod_{j=1}^{2} \prod_{p} p^{it_j k_{jp}} dt_1 dt_2 \\
&= \left(\frac{1}{T} \int_0^T \exp\left\{ it_1 \sum_p k_{1p} \log p \right\} dt_1 \right) \\
&\quad \times \left(\frac{1}{T} \int_0^T \exp\left\{ it_2 \sum_p k_{2p} \log p \right\} dt_2 \right),
\end{aligned}$$

kur tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_{1p} ir k_{2p} yra nenuliai. Pirminių skaičių logaritmai yra tiesiškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių lauko. Be to

$$\prod_p p^{k_{jp}} = \exp\left(\sum_p k_{jp} \log p \right), \quad j = 1, 2,$$

yra racionalus skačius. Taigi randame, kad

$$g_N(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad k_{1p} = 0, \\ \frac{1}{T}\frac{1-\exp\{iT\sum_p k_{1p}\log p\}}{1-\exp\{i\sum_p k_{1p}\log p\}}, & \text{jei} \quad k_{1p} \neq 0, \end{cases}$$

$$\times \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad k_{2p} = 0, \\ \frac{1}{T}\frac{1-\exp\{iT\sum_p k_{2p}\log p\}}{1-\exp\{i\sum_p k_{2p}\log p\}}, & \text{jei} \quad k_{2p} \neq 0, \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \underline{k} = 0, \\ \frac{1}{T}\frac{1-\exp\{iT\sum_p k_{1p}\log p\}}{1-\exp\{i\sum_p k_{1p}\log p\}}, & \text{jei} \quad k_{1p} \neq 0, \quad k_{2p} = 0, \\ \frac{1}{T}\frac{1-\exp\{iT\sum_p k_{2p}\log p\}}{1-\exp\{i\sum_p k_{2p}\log p\}}, & \text{jei} \quad k_{1p} = 0, \quad k_{2p} \neq 0, \\ \frac{1}{T}\frac{1-\exp\{iT\sum_p k_{1p}\log p\}}{1-\exp\{i\sum_p k_{1p}\log p\}} \cdot \frac{1}{T}\frac{1-\exp\{iT\sum_p k_{2p}\log p\}}{1-\exp\{i\sum_p k_{2p}\log p\}}, & \text{jei} \quad k_{1p} \neq 0, \quad k_{2p} \neq 0. \end{cases}$$

Iš čia randame, kad

$$\lim_{T\to\infty} g_T(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jei} \quad \underline{k} \neq 0. \end{cases}$$

Tai kartu su 3.1.2 lema duoda tikimybinio mato Q_T silpną konvergavimą į matą apibrėžtą Furje transformacija

$$g(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jei} \quad \underline{k} \neq 0. \end{cases}$$

Bet pagal 3.1.3 lemą tai yra Haro matas m_{H2} erdvėje $(\Omega^2, \mathcal{B}(\Omega^2))$. Teorema įrodyta.

3.2. Ribinės teoremos absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms

Tegul $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas ir

$$\varphi_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}$$

bei

$$\varphi_n(s, \underline{\widetilde{\omega}}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\widetilde{\omega}_1(m)\widetilde{\omega}_2(m)}{m^s} \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}, \quad \underline{\widetilde{\omega}} = (\widetilde{\omega}_1, \widetilde{\omega}_2) \in \Omega^2.$$

Galima įrodyti, kad eilutės $\varphi_n(s)$ ir $\varphi_n(s, \widetilde{\omega})$ abi silpnai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$ (žr. pvz. [3]).

Kai $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})$ apibrėžkime du tikimybinius matus

$$P_{T,n} = \nu_T^2(\varphi_n(\sigma + it_1 + it_2) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

ir

$$\widetilde{P}_{T,n} = \nu_T^2(\varphi_n(\sigma + it_1 + it_2, \widetilde{\omega}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

3.2.1 teorema. *Tegul $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$. Tada egzistuoja tikimybinis matas P_n erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C})$ toks, kad abu matai $P_{T,n}$ ir $\widetilde{P}_{T,n}$ silpnai konverguoja į P_n, kai $T \to \infty$.*

Įrodymas. Apibrėžkime funkciją $u_n : \Omega^2 \to \mathbb{C}$ eilute

$$u_n(\underline{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega_1(m)\omega_2(m) \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}}{m^{\sigma}}.$$

Kadangi eilutės konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, funkcija $u_n(\underline{\omega})$ yra tolydi ir

$$u_n((p^{-it_1}, p^{-it_2}) : p \in \mathbb{P}) = \varphi_n(\sigma + it_1 + it_2).$$

Pastarasis faktas kartu su 3.1.4 teorema bei 5.1 teorema iš [1], parodo, kad matas $P_{T,n}$ silpnai konverguoja į matą $m_{H2}u_n^{-1}$, kai $T \to \infty$.

Dabar apibrėžkime funkciją $\widetilde{u}_n : \Omega^2 \to \mathbb{C}$ eilute

$$\widetilde{u}_n(\underline{\omega}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega_1(m)\omega_2(m)\widetilde{\omega}_1(m)\widetilde{\omega}_2(m)\exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}}{m^{\sigma}}.$$

Pakartojant tą pačią argumentaciją, kaip ir u_n atveju, gauname, kad matas $\widetilde{P}_{T,n}$ konverguoja į $m_{H2}\widetilde{u}_n^{-1}$, kai $T \to \infty$.

Tegul funkcija $u : \Omega^2 \to \Omega^2$ yra apibrėžta formule

$$u(\underline{\omega}) = \underline{\widetilde{\omega}} \cdot \underline{\omega}.$$

Tada gauname

$$\widetilde{u}_n(\underline{\omega}) = u_n(u(\underline{\omega})).$$

Kadangi Haro matas m_{H2} yra invariantiškas taškų erdvėje Ω^2 postūmių atžvilgiu, turime

$$m_{H2}\widetilde{u}_n^{-1} = m_{H2}(u_n u)^{-1} = (m_{H2}u^{-1})u_n^{-1} = m_{H2}u_n^{-1}.$$

Teorema įrodyta.

3.3. Aproksimavimas pagal vidurkį

Šiame skyriuje aproksimuosime funkcijas $\varphi(\sigma + it_1 + it_2)$ ir $\varphi(\sigma + it_1 + it_2, \underline{\omega})$ pagal vidurkį.

3.3.1 teorema. *Tegul* $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$. *Tada*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\varphi(\sigma + it_1 + it_2) - \varphi_n(\sigma + it_1 + it_2)| dt_1 dt_2 = 0,$$

ir, beveik visiems $\underline{\omega} \in \Omega^2$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\varphi(\sigma + it_1 + it_2, \underline{\omega}) - \varphi_n(\sigma + it_1 + it_2, \underline{\omega})| dt_1 dt_2 = 0.$$

Įrodymas. [5] yra įrodyta, kad pusplokštumėje $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \int_0^T |\varphi(\sigma + it) - \varphi_n(\sigma + it)| dt = 0. \tag{14}$$

Vadinasi,

$$\begin{aligned}
& \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\varphi(\sigma + it_1 + it_2) - \varphi_n(\sigma + it_1 + it_2)| dt_1 dt_2 \\
= & \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_{t_2}^{T+t_2} |\varphi(\sigma + it) - \varphi_n(\sigma + it)| dt \right) dt_2 \\
\leq & \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \left(\frac{1}{T} \int_0^{2T} |\varphi(\sigma + it) - \varphi_n(\sigma + it)| dt \right) dt_2 \\
= & \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^{2T} |\varphi(\sigma + it) - \varphi_n(\sigma + it)| dt.
\end{aligned}$$

Tai, drauge su (14) įrodo pirmąjį teoremos tvirtinimą.

Tuo pačiu būdu kaip ir aproksimuojant $\varphi(\sigma + it_1 + it_2)$ eilute $\varphi_n(\sigma + it_1 + it_2)$, gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2} \int_0^T \int_0^T |\varphi(\sigma + it_1 + it_2, \underline{\omega}) - \varphi_n(\sigma + it_1 + it_2, \underline{\omega})| dt_1 dt_2$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{2T} |\varphi(\sigma+it,\underline{\omega}) - \varphi_n(\sigma+it,\underline{\omega})|dt. \tag{15}$$

Beveik visiems $\omega' \in \Omega$ [4],

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^{T} |\varphi(\sigma+it,\omega') - \varphi_n(\sigma+it,\omega')|dt = 0, \tag{16}$$

kur

$$\varphi_n(s,\omega') = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}.$$

Tegul $\Omega' \subset \Omega$ toks, kad elementai iš Ω tenkina (16) sąryšį. Tada $m_H(\Omega') = 1$. Ir, kai $\omega \in \Omega$,

$$m_{H2}((\omega_1,\omega_2) \in \Omega^2 : \omega_1 = \omega, \omega_2 = \omega' \cdot \omega^{-1}) \geq m_H(\Omega) \cdot m_H(\Omega') = 1.$$

Iš kitos pusės $\omega' = \omega_1 \cdot \omega_2$. Tai reiškia, kad (15) nelygybė galioja visiems $\underline{\omega} \in \Omega^2$. Ir antrasis teoremos tvirtinimas yra įrodytas.

3.4. $\varphi(s)$ ir $\varphi(s,\underline{\omega})$ ribinės teoremos

Apibrėžkime dar vieną tikimybinį matą

$$\widetilde{P}_T(A) = \nu_T^2(\varphi(\sigma+it_1+it_2,\underline{\omega})\in A), \quad A\in\mathcal{B}(\mathbb{C}), \quad \underline{\omega}\in\Omega^2.$$

3.4.1 teorema. *Tegul $\sigma>\alpha+\beta+\frac{1}{2}$. Tada abu tikimybiniai matai P_T ir $\widetilde{P}_T$ silpnai konverguoja į tą patį matą erdvėje $(\mathbb{C},\mathcal{B}(\mathbb{C})$, kai $T\to\infty$.*

Remiantis 3.2.1 teorema, abu tikimybiniai matai $P_{T,n}$ ir $\widetilde{P}_{T,n}$ silpnai konverguoja į tą patį matą P_n, kai $T\to\infty$. Įrodysime, kad tikimybinių matų $\{P_n\}$ šeima yra tiršta.

Tegul (Q_1,Q_2) yra atsitiktinis vektorius tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\widetilde{\Omega},\mathcal{B}(\widetilde{\Omega}),\mathsf{P})$ ir tolygiai pasiskirstęs $[0,1]^2$. Apibrėžkime elementą

$$X_{T,n}(\sigma)=\varphi_n(\sigma+iTQ_1+iTQ_2).$$

Tada, pagal 3.2.1 teoremą turime

$$X_{T,n}(\sigma)\xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_n(\sigma), \tag{17}$$

kur X_n yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis kintamasis, turintis pasiskirstymą P_n ($\xrightarrow{\mathcal{D}}$ reiškia konvergavimą pagal pasiskirstymą). $\varphi_n(s)$ eilutė konverguoja absoliučiai, pusplokštumėje $\sigma>\alpha+\beta+\frac{1}{2}$, todėl

$$\begin{aligned}
&\sup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T|\varphi_n(\sigma+it_1+it_2)|dt_1dt_2\\
&\le\sup_{n\in\mathbb{N}}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{T}\int_0^T|\varphi_n(\sigma+it_1+it_2)|^2dt_1\right)^{\frac{1}{2}}dt_2
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{T}\int_{t_2}^{T+t_2} |\varphi_n(\sigma+it)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} dt_2\\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \left(\frac{1}{T}\int_{0}^{2T} |\varphi_n(\sigma+it)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}} dt_2\\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \left(\frac{1}{T}\int_{0}^{2T} |\varphi_n(\sigma+it)|^2 dt\right)^{\frac{1}{2}}\\
&= \sup_{n\in\mathbb{N}} \left(2\sum_{m=1}^{\infty}\left(\frac{|b(m)|\exp(-(\frac{m}{n})^{\sigma_1})}{m^\sigma}\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\\
&\le \left(2\sum_{m=1}^{\infty}\frac{|b(m)|^2}{m^{2\sigma}}\right)^{\frac{1}{2}} \le R < \infty.
\end{aligned}
$$

Tegul $\varepsilon > 0$ ir $K = \frac{R}{\varepsilon}$. Tada iš čia padarome išvadą, kad

$$
\begin{aligned}
&\limsup_{T\to\infty} \mathsf{P}(|X_{T,n}(\sigma)| > K)\\
&\le \sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T^2K}\int_0^T\int_0^T |\varphi_n(\sigma+it_1+it_2)|dt_1dt_2 \le \varepsilon.
\end{aligned}
$$

Tai ir (17) parodo, kad

$$
\mathsf{P}(|X_n(\sigma)| > K) \le \varepsilon. \tag{18}
$$

Tegul $K_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} : |s| \le K\}$. Tada K_ε yra kompaktiška aibė ir iš (18) bei $X_n(\sigma)$ apibrėžimo

$$
P_n(K_\varepsilon) \ge 1 - \varepsilon.
$$

Tai reiškia, kad tikimybinių matų $\{P_n\}$ šeima yra tiršta. Tada pagal Procharovo teoremą, ji yra reliatyviai kompaktiška (žr. pvz. [1]).

Dabar tegul

$$
X_T(\sigma) = \varphi(\sigma + iTQ_1 + iTQ_2).
$$

Tada pagal 3.3.1 teoremą, kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$\begin{aligned}
&\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} P(|X_T(\sigma) - X_{T,n}(\sigma)| \geq \varepsilon\} \\
&\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T^2} \int_0^T \int_0^T |\varphi(\sigma + it_1 + it_2) \\
&\quad -\varphi(\sigma + it_1 + it_2)| dt_1 dt_2 = 0 \qquad (19)
\end{aligned}$$

Iš šeimos $\{P_n\}$ reliatyvaus kompaktiškumo išplaukia, kad egzistuoja posekis $\{P_{n_1}\} \subset \{P_n\}$ toks, kad $\{P_{n_1}\}$ konverguoja silpnai į P_σ, kai $n_1 \to \infty$. Vadinasi,

$$X_{n_1}(\sigma) \xrightarrow[n_1\to\infty]{\mathcal{D}} P_\sigma. \qquad (20)$$

Erdvė $\mathbb{C}$ yra separabili. Taigi, iš (20), (17), (19) ir 1.2.4 teoremos iš [6] seka

$$X_T \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P_\sigma. \qquad (21)$$

Tai reiškia, kad egzistuoja matas P_σ toks, kad matas P_T konverguoja silpnai į P_σ, kai $T \to \infty$. (21) sąryšis parodo, kad matas P_σ yra nepriklausomas nuo posekio $\{P_{n_1}\}$ pasirinkimo. Be to,

$$X_n(\sigma) \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P_\sigma. \qquad (22)$$

Dabar tegul

$$\widetilde{X}_{T,n}(\sigma, \underline{\omega}) = \varphi_n(\sigma + iTQ_1 + iTQ_2, \underline{\omega})$$

ir

$$\widetilde{X}_T(\sigma, \underline{\omega}) = \varphi(\sigma + iTQ_1 + iTQ_2, \underline{\omega}).$$

Pritaikius dydžiams $\widetilde{X}_{T,n}$ ir $\widetilde{X}_T$ argumentus kaip ir $X_{T,n}$ bei X_T ir pagal 3.3.1 teoremą, bei (22), gauname, kad matas $\widetilde{P}_T$ taip pat konverguoja į P_σ, kai $T \to \infty$. Teorema įrodyta.

3.5. 1.4 teoremos įrodymas

Iš 3.4.1 teoremos išplaukia, kad lieka įrodyti, jog matas P_σ 3.4.1 teoremoje sutampa su $\varphi(\sigma, \underline{\omega})$ reikšmių pasiskirstymu.

Tegul $a = \{p^{-it}, p \in \mathbb{P}\}$. Apibrėžkime $\phi_t, t \in \mathbb{R}$, transformaciją erdvėje Ω^2 tokiu būdu $\phi_t(\underline{\omega}) = (a\omega_1, a\omega_2), \quad \underline{\omega} \in \Omega^2$. Tada $\{\phi_t\}$ yra išmatuojama matą išlaikanti transformacijų aibė erdvėje Ω^2. Taip pat, kaip 5.3.6 teoremos iš [7] įrodyme, galima įrodyti, kad $\{\phi_t\}$ grupė yra ergodinė.

Tegul $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ ir apibrėžkime tikimybinėje erdvėje $(\Omega^2, \mathcal{B}(\Omega^2), m_{H2})$ atsitiktinį kintamąjį $\eta(\underline{\omega})$ taip

$$\eta(\underline{\omega}) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad \varphi(\sigma, \underline{\omega}) \in A, \\ \\ 0, & \text{jei} \quad \varphi(\sigma, \underline{\omega}) \notin A. \end{cases} \tag{23}$$

Dar daugiau, turime, kad procesas $\eta(\phi_t(\underline{\omega}))$ yra ergodinis. Naudojant gerai žinomą Birkhofo-Kinčaino teoremą iš [8], gauname, kad

$$\frac{1}{T}\int_0^T \eta(\phi_t(\underline{\omega}))dt = \mathbb{E}\eta + o(1), \quad T \to \infty,$$

kur $\mathbb{E}\eta$ yra atsitiktinio kintamojo η vidurkis. Tada, tolygiai pagal τ, $0 < \tau \leq T$,

$$\frac{1}{T}\int_\tau^{T+\tau} \eta(\phi_t(\underline{\omega}))dt = \mathbb{E}\eta + o(1), \quad T \to \infty,$$

ir η ir ϕ_t apibrėžimus randame

$$\frac{1}{T}\int_\tau^{T+\tau} I_{\{t:\varphi(\sigma+it,\underline{\omega})\}}dt = \mathbb{E}\eta + o(1). \tag{24}$$

Fiksuokime aibę $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$ tokią, kad ji būtų mato P_σ tolydumo aibė ir tegul $\phi_{t_1,t_2}(\underline{\omega}) = (a_{t_1}w_1, a_{t_2}\omega_2), \underline{\omega} \in \Omega^2$. Tada iš (23) ir (24) išplaukia

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \eta(\phi_{t_1,t_2}(\underline{\omega}))dt_1dt_2 \\
&= \frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \eta(\phi_{t_1+t_2}, o(\underline{\omega})\Big)dt_1dt_2 \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{T}\int_{t_2}^{T+t_2} \eta(\phi_{t,o}(\underline{\omega}))dt\right)dt_2 \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T\left(\frac{1}{T}\int_{t_2}^{T+t_2} \eta(\phi_{t}(\underline{\omega}))dt\right)dt_2 \\
&= \frac{1}{T}\int_0^T(\mathbb{E}\eta + o(1))dt_2 = \mathbb{E}X + o(1) = P_\sigma(A) + o(1), T \to \infty. \quad (25)
\end{aligned}
$$

Iš kitos pusės, mes randame, kad

$$\frac{1}{T^2}\int_0^T\int_0^T \eta(\phi_{t_1,t_2}(\underline{\omega}))dt_1dt_2 = \nu_T^2(\varphi(\sigma + it_1 + it_2, \underline{\omega}) \in A).$$

Tačiau, pagal 3.4.1 teoremą

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T^2(\varphi(\sigma + it_1 + it_2, \underline{\omega}) \in A) = P_\sigma(A).$$

Iš čia ir (25), gauname, kad $P_\sigma(A) = P_?(A)$ visoms mato P_σ tolydumo aibėms. Kadangi tokios aibės sudaro apibrėžiančią klasę, išplaukia, kad $P_\sigma(A) = P_?(A)$ visiems $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Teorema įrodyta.

Santrauka

Modifikuota ribinė teorema Matsumoto dzeta funkcijai kompleksinėje plokštumoje

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $\varphi(s)$ yra Matsumoto dzeta funkcija apibrėžta formule

$$\varphi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{a_m^{(j)}}{p_m^{sf(j,m)}}\right)^{-1},$$

čia $m \in \mathbb{N}$, $a_m^{(j)} \in \mathbb{C}$, $f(j,m) \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq g(m)$ ir p_m yra m-asis pirminis skaičius. Šiame darbe įrodyta ribinė teorema funkcijai $\varphi(s)$ kompleksinėje plokštumoje.

Tegul $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$. Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_T(A) = \frac{1}{T^2} meas_2\{\varphi(\sigma + it_1 + it_2) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

čia $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ yra kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ Borelio aibių klasė, $meas_2\{A\}$ - mačiosios aibės $A \in \mathbb{R}^2$ Lebego matas, $T > 0$, $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$, bei α ir β yra neneigiamos konstantos. Tada ribinis matas $P_T(A)$ silpnai konverguoja į matą P_σ kai $T \to \infty$. Taip pat gautas išreikštinis mato P_σ pavidalas.

Summary

A modified limit theorem for the Matsumoto zeta-function on the complex plane

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and $\varphi(s)$ is the Matsumoto zeta-function defined by

$$\varphi(s) = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{g(m)} \left(1 - \frac{a_m^{(j)}}{p_m^{sf(j,m)}}\right)^{-1}$$

with $m \in \mathbb{N}$, $a_m^{(j)} \in \mathbb{C}$, $f(j,m) \in \mathbb{N}$, $1 \leq j \leq g(m)$ and m-th prime number p_m. In this work, it is proved that a limit theorem on the complex plane is valid for the function $\varphi(s)$. The exact statemet of the result is following.

Let $\sigma > \alpha + \beta + \frac{1}{2}$, and on $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ define a probability measure

$$P_T(A) = \frac{1}{T^2} meas_2\{\varphi(\sigma + it_1 + it_2) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(\mathbb{C}),$$

where $\mathcal{B}(\mathbb{C})$ is the class of Borel sets of the complex plane $\mathbb{C}$, $meas_2\{A\}$ is the Lebesgue measure of a measurable set $A \in \mathbb{R}^2$, and, for $T > 0$, $(t_1, t_2) \in [0, T]^2$, and α and β are non-negative constants. Then the limit measure $P_T(A)$ converges weakly to the probability measure P_σ as $T \to \infty$. Also the explicit form of a measure P_σ is obtained.

Literatūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, John Willey, New York (1968).

[2] H. Bohr, B. Jessen, Über die Wertverteilung der Riemannscher Zeta-function, *Erste Mitteilung*, Acta Math., **54**, 1–35 (1930).

[3] R. Kačinskaitė, A discrete limit teorem for the Matsumoto zeta-function on the complex plane, *Liet. Matem. Rink.*, **40(4)**, 475–492 (2000) (rusų kalba) = Lith. Math. J., **40(4)**, 364–378 (2000).

[4] R. Kačinskaitė, A. Laurinčikas, *Pirminių skaičių pasiskirstymas*, Šiaulių universiteto leidykla, Šiauliai (2003).

[5] A. Laurinčikas, Limit theorems for the Matsumoto zeta-function, *J. Théor. Nombres Bordeaux*, **8**, 143–158 (1996).

[6] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht (1996).

[7] K. Matsumoto, Value-distribution of zeta-functions, *Lecture Notes in Math.*, Springer, **1434**, 178–187 (1990).

[8] A.A. Tempelman, *Ergodic Theorems on Grups*, Mokslas, Vilnius (1986).

Žymėjimai

k, l, m, n, j	– natūralieji skaičiai
p	– pirminis skaičius
$\mathbb{N}$	– natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{Z}$	– sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	– realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{C}$	– kompleksinių skaičių aibė
$s = \sigma + it$	– kompleksinis kintamasis
i	– menamasis vienetas: $i = \sqrt{-1}$
$\mathrm{Re} s = \sigma$	– kompleksinio kintamojo s realioji dalis
$\mathrm{Im} s = t$	– kompleksinio kintamojo s menamoji dalis
$A \times B$	– aibių A ir B Dekarto sandauga
$\mathrm{meas}\{A\}$	– aibės A Lebego matas
$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \sharp\{0 \le m \le N : ...\}$	– kur taškų vietoje įrašomos sąlygos, kurias tenkina m
$\mathcal{B}(S)$	– erdvės S Borelio aibių klasė
$\Gamma(s)$	– Oilerio gama funkcija pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama integralu $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-x} x^{s-1} dx$
B	– dydis aprėžtas konstanta (O didysis atitikmuo).