ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Jurga Spetylaitė

Logaritminės eilės begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys sričiai, apribotai begaliniu Dini – Lipšico kontūru

Magistro darbas

Darbo vadovas
doc. dr. Petras Alekna

Šiauliai, 2009

Turinys

Įvadas

[2] darbe išnagrinėtas logaritminės eilės begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys begalinei sričiai *D*, kurios kontūras $\widetilde{L} = \{1 < t < \infty\}$ yra realiosios ašies teigiamosios pusašės dalis.

Šiame darbe formuluojamas ir nagrinėjamas logaritminės eilės $\alpha \geq 1$ analogiškas kraštinis Rymano uždavinys sričiai, apribotai begaliniu Dini – Lipšico kontūru.

Darbe naudojamasi Koši tipo integralo su logaritminiu tankiu asimptotika. Iš esmės skiriasi funkcijos

$$\Phi_\alpha(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_{L'} \frac{(\ln t)^\alpha}{t(t-z)}dt \qquad \text{ir} \qquad \Phi_\alpha^*(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_{L'} \frac{(\ln|t|)^\alpha}{t(t-z)}dt .$$

Pirmajame integrale $\ln^\alpha t$ yra analizinės funkcijos $\ln^\alpha z$ kontūrinė reikšmė ir Koši tipo integralui $\Phi_\alpha(z)$ yra gauta daugianarė asimptotinė formulė

$$\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln^\alpha \tau}{\tau(\tau-z)}d\tau = -\frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) - \frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi_{\alpha+1}(\tau)}{\tau(\tau-z)}d\tau + P_\alpha(z),$$

čia $B_{\alpha+1}(w)$ – Bernulio daugianaris, $\ln^\alpha z$ parenkama vienareikšmė šaka, kurios kontūrinė reikšmė ant kontūro L kairiojo krašto sutampa su $\ln^\alpha \tau$, $\tau \in L$, funkcija $\varphi_{\alpha+1}(\tau) \equiv \sum\limits_{m=p+2+k_0}^{\infty} A_m \left(\frac{2\pi i}{\ln \tau}\right)^{m-\alpha-1}$, o $P_\alpha(z)$ – analizinė funkcija taško $z = \infty$ aplinkoje.

Su kanonine funkcija $X(z)$ siejamai funkcijai $\Phi_\alpha^*(z)$ gautoje asimptotinėje formulėje

$$\Phi_\alpha^*(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln^\alpha|\tau|}{\tau(\tau-z)}d\tau = -\frac{\ln^{\alpha+1}|z|}{2\pi i(\alpha+1)} + O(\ln^\alpha|z|),\ z \to \infty,$$

yra tik vienas, greičiausiai augantis narys, kai $z \to \infty$. Šios informacijos apie $\Phi_\alpha^*(z)$ kitimą nepakanka, nagrinėjant nehomogeninį uždavinį. Todėl buvo būtina panaudoti Dini – Lipšico kontūrą. Tik pareikalavus, kad L' būtų eilės $q > \alpha$ Dini – Lipšico kontūras, įrodyta, kad funkcija $\eta_\alpha(t) = \ln F_0(t) - \ln F_0(|t|)$ yra tolydi ir aprėžta kontūro L' taškuose (3 teorema), o sveikosios funkcijos $F_0(z)$ nuliai išdėstyti ant realiosios ašies neigiamos pusašės. Esant tokiam kontūrui, pavyko įrodyti, jog atskirasis nehomogeninio uždavinio sprendinys

$$\Phi_0(z) = \frac{F_0(z)X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{F_0(t)X^+(t)(t-z)}$$

yra aprėžtas.

Gautas suformuluoto uždavinio bendrasis sprendinys aprėžtų funkcijų klasėje B_L (10 teorema).

§ 1. Srities *D* ir kontūro *L* nusakymas ir jo savybės

Šiame darbe kontūras L yra paprastas glodus begalinis kontūras, esantis srityje $|z| \geq 1+\delta > 1$. Kontūro L pradžia yra kompleksinės plokštumos baigtinis taškas $z = a$, o galas yra taškas $z = \infty$. Kontūrą L be jo pradžios ir galo taškų žymėsime $\widetilde{L}$.

Sakykime, $\Theta(\tau)$ yra kampas, esantis tarp Ox ašies ir liestinės kontūrui L taške τ. Kontūro L glodumas reiškia, kad $\Theta(\tau)$ yra tolydžioji funkcija argumento $\tau \in L$ atžvilgiu, įskaitant tašką $\tau = \infty$, t. y. egzistuoja šios funkcijos baigtinė riba, kai $\tau \to \infty$, $\tau \in L$. Patogumo dėlei, laikome, kad

$$\lim_{\tau \to \infty, \tau \in L} \Theta(\tau) = 0. \tag{1}$$

Sritis D yra kompleksinės plokštumos atviroji sritis, kurios kontūras yra L ([5]).

Tolydžioji $\arg \tau$ šaka ant kontūro L yra parinkta taip, kad

$$\lim_{\tau \to \infty, \tau \in L} \arg \tau = 0, \tag{2}$$

tai yra

$$|\arg \tau| \leq A_0 < \infty. \tag{3}$$

1 apibrėžimas. *Paprastas glodus begalinis kontūras L, kai* $|\tau| > 1$ *bet kuriam* $\tau \in L$, *vadinamas* $q > 0$ *eilės Dini – Lipšico kontūru, jeigu* $\forall\, \tau_1, \tau_2 \in L$ *teisinga nelygybė*

$$|\Theta(\tau_2) - \Theta(\tau_1)| \leq A \ln^{-q} \frac{2}{\left|\dfrac{1}{\tau_2} - \dfrac{1}{\tau_1}\right|}, \quad A = const. \tag{4}$$

Iš (1) ir (4) lygybių, kai $\tau_1 = \tau$ ir $\tau_2 = \infty$, gauname

$$|\Theta(\tau)| \leq \frac{A}{\ln^q |2\tau|}, \ \tau \in L. \tag{5}$$

Klasės D_q funkcijos ant begalinio kontūro yra išnagrinėtos darbe [1].

Sakysime, jog $\Theta(\tau) \in D_q$ taške $\tau = \infty$, jeigu $\forall \tau \in L$

$$\left|\Theta(\tau) - \Theta(\infty)\right| < \frac{A}{\ln^q |2\tau|}, \ \tau \in L. \qquad (5^*)$$

Pastaba. Nagrinėjant nehomogeninį kraštinį Rymano uždavinį, laikysime, kad begalinis kontūras L tenkina Dini – Lipšico sąlygą tik taško $z = \infty$ aplinkoje, tada kai visa kita kontūro L dalis yra tik glodi.

Tarkime, kad kontūras L tenkina (4) sąlygą ir apibrėžtas lygtimi

$$\tau(s) = x(s) + iy(s), \ 0 \le s \le \infty,$$

čia s – kontūro ilgis, $x(s)$, $y(s)$ – tolydžiai diferencijuojamos funkcijos $(s \ne \infty)$. Iš (2) lygybės turime, jog $x(s) \to +\infty$, kai $s \to \infty$, o $y(s)$ gali būti aprėžtas ir neaprėžtas.

Pažymėkime L', $L' \subset L$ kontūrą

$$\tau(s) = x(s) + iy(s), \ 0 \le s_0 \le s \le \infty, \qquad (6)$$

čia skaičius s_0 parinktas taip, kad esant $s \ge s_0$

$$\operatorname{Re} \tau(s) \ge \max\{e^{3\pi}, r_1\}, \qquad (7)$$

$$\left|\arg \tau(s)\right| \le \frac{\pi}{4}, \qquad (8)$$

$$\left|\Theta(\tau(s))\right| \le \frac{\pi}{4}. \qquad (9)$$

Visur šiame darbe kontūru L' suprasime, jog tai yra ką tik aprašyto kontūro L dalis.

1 lema. *Jeigu L' yra eilės $q > 0$ Dini – Lipšico kontūras, tai kiekvienam $\tau \in L'$ teisingi įverčiai*

$$\left|\arg \tau\right| \le \frac{A_q}{\ln^q |2\tau|} \ \text{ ir } \left|\frac{d \arg \tau}{d\tau}\right| \le \frac{A_q'}{|\tau| \ln^q |2\tau|}, \qquad (10)$$

čia A_q, A_q' – yra teigiamos konstantos.

2 lema. *Jei* $\varphi(t) \in D_p(L)$, $\varphi(\infty) = 0$ *ir* $p > 1$, *tai funkcija*

$$\Phi(t) = \frac{t}{2\pi i} \int_L \frac{\varphi(\tau)}{\tau(\tau - t)} d\tau \in D_{p-1}(\widetilde{L}).$$

3 lema. *Jei* $\varphi(t) \in D_p(L)$ *ir* $p > \alpha > 0$, *tai*

$$[\varphi(\tau) - \varphi(\infty)] \ln^\alpha |\tau| \equiv \psi(\tau) \in D_{p-\alpha}(L),$$

o Koši tipo integralas $\frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{\psi(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)}$ *konverguoja ir yra aprėžtas taško* $z = \infty$ *aplinkoje.*

4 lema. *Jei funkcija* $\varphi(t)$ *yra tolydi taške* $t = \infty$ *ir egzistuoja* $\forall t \in L,\ t \neq \infty$, *išvestinė, tenkinanti nelygybę*

$$\left| \frac{d\varphi(t)}{dt} \right| \leq \frac{A}{|t| \ln^p |t|}, \ p > 1, \ A = const.,$$

tai $\varphi(t) \in D_{p-1}(L)$.

5 lema. *Jei funkcija* $\varphi(t) \in D_p(L)$, $\varphi(\infty) = 0$ *ir* $p > 0$, *o funkcija* $\omega(t)$ *yra aprėžta kreivės L taškuose ir jos išvestinė*

$$\left| \frac{d\omega(t)}{dt} \right| \leq \frac{A^*}{|t|}, \ t \in L, \ t \neq \infty, \ A^* = const,$$

tai $\omega(t)\varphi(t) \equiv \phi(t) \in D_p(L)$.

Visos šios lemos suformuluotos [2] darbe (94 – 95 p.).

§ 2. Uždavinio formulavimas

Tarkime, kad L ir L' – § 1 aprašyti kontūrai. Tuomet logaritminės eilės begalinio indekso nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys formuluojamas taip:

aprėžtų srityje D funkcijų klasėje B_L *reikia rasti analizinę funkciją* $\Phi(z)$*, tenkinančią kraštinę sąlygą*

$$\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t) + g(t), \quad \left(t \in \widetilde{L}\right) \tag{11}$$

kai

$$\arg G(t) = \varphi(t)\ln^{\alpha}|t|, \quad \alpha \geq 1, \tag{12}$$

$$\varphi(t) \in D_{\beta}(L), \ \beta > \alpha + 2, \ \varphi(\infty) = \lambda > 0, \tag{13}$$

$$\ln|G(t)| \in D_{p}(L), \quad p > 2 \tag{14}$$

$$-2\pi < \arg G(a) \leq 0, \tag{15}$$

$$g(t) \in D_{r}(L), \ r > \alpha, \ g(\infty) = 0, \ g(a) = 0, \text{ kai } G(a) = 1, \tag{16}$$

L' – Dini – Lipšico eilės $q > \alpha + 2$ kontūras.

Kartu su (11) – (16) uždaviniu nagrinėjame atitinkamą homogeninį uždavinį

$$\Psi^{+}(t) = G(t)\Psi^{-}(t), \ \left(t \in \widetilde{L}\right). \tag{17}$$

Iš (11) tiesinės lygybės seka, kad klasėje B_L nehomogeninio uždavinio bendrasis sprendinys išreiškiamas formule ([2], 107 p.)

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + F(z)X(z), \tag{18}$$

čia $\Phi_0(z)$ – nehomogeninio uždavinio (11) atskirasis sprendinys klasėje B_L, o

$$F(z)X(z) = \Psi(z)$$

– (17) homogeninio uždavinio šios klasės bendrasis sprendinys.

§ 3. Nehomogeninio uždavinio atskirojo sprendinio išraiška

Išsiaiškinsime atskirojo sprendinio $\Phi_0(z)$ išraišką.

Tarkime $\Psi_0(z) \in B_L$ – (17) homogeninio uždavinio atskirasis sprendinys toks, kad $\Psi_0(t) \neq 0$, kai $t \in \widetilde{L}$.

Tuomet iš (17) lygybės randame

$$G(t) = \frac{\Psi_0^+(t)}{\Psi_0^-(t)}.$$

Tada (11) kraštinę sąlygą galima pertvarkyti taip:

$$\frac{\Phi^+(t)}{\Psi_0^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\Psi_0^-(t)} = \frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)}, \quad \left(t \in \widetilde{L}\right).$$

Spręsdami gautąjį šuolio uždavinį, gauname nehomogeninio uždavinio atskirąjį sprendinį

$$\Phi_0(z) = \frac{\Psi_0(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)dt}{\Psi_0^+(t)(t-z)}. \tag{19}$$

Žinoma ([2], 108 p.), kad kiekvienas (17) homogeninio uždavinio sprendinys klasėje B_L išreiškiamas formule

$$\Psi_0(z) = F_0(z)X(z),$$

čia $F_0(z)$ – nulinės eilės sveikoji funkcija, o $X(z)$ – homogeninio uždavinio kanoninė funkcija nusakoma formule ([2], 101 p.)

$$X(z) = \exp\left\{\frac{z}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau - z)} d\tau\right\}, \quad z \notin L.$$

Todėl (19) išraišką galima perrašyti

$$\Phi_0(z) = \frac{F_0(z)X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{F_0(t)X^+(t)(t-z)}. \tag{20}$$

Tam, kad gauti (11) – (16) uždavinio aprėžtą atskirąjį sprendinį $\Phi_0(z)$, reikia parinkti nulinės eilės sveikąją funkciją $F_0(z)$, tenkinančią sąlygas:

1) $F_0(z)$ neturi nulių ant kontūro L;

2) netiesioginis integralas (20) lygybėje konverguoja;

3) funkcija $\Phi_0(z)$, nusakyta (20) formule, priklauso klasei B_L.

Kadangi sveikoji funkcija $F_0(z)$ yra nulinės eilės, tai jos išraiška yra daug paprastesnė ([2], 16 p.):

$$F_0(z) = Cz^m \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 - \frac{z}{z_n}\right),$$

čia z_n yra funkcijos nuliai.

Paprastumo dėlei nuliai išdėstyti realiosios ašies neigiamojoje pusašyje $z_n = -r_n$, t.y.

$$1 < r_1 < r_2 < ... < r_n < ..., \quad r_n \to \infty \quad (n \to \infty) \tag{21}$$

todėl

$$(-r_n) \overline{\in} L, \quad n \in 1,2,... .$$

Tada sveikoji funkcija yra nusakyta išraiška

$$F_0(z) = \prod_{n=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{r_n}\right), \tag{22}$$

kurioje dar reikia apibrėžti nulių seką $\{r_n\}$.

(22) sveikąją funkciją užrašome Rymano – Styltjeso integralu

$$\ln F_0(z) = z\int_{r_1}^{\infty} \frac{n(u)du}{u(u+z)}, \tag{23}$$

čia $n(u)$ – nulius $\{-r_n\}$ skaičiuojanti funkcija.

Imdami $z = t \in L$, gauname

$$\ln F_0(t) = t\int_{r_1}^{\infty} \frac{n(u)du}{u(u+t)} = t\int_{r_1}^{\infty} \frac{n(u) - w_\alpha(u)}{u(u+t)} du + t\int_{r_1}^{\infty} \frac{w_\alpha(u)}{u(u+t)} du \equiv K_\alpha(t) + I_\alpha(t). \tag{24}$$

Sakykime, kad $w_\alpha(u)$ galima parinkti taip, kad funkcija $\left|X^{\pm}(t)\exp\{I_\alpha(t)\}\right|$ yra aprėžta, kai $t \to \infty$. Toliau įsitikinsime, kad

$$w_\alpha(u) = \frac{\lambda}{2\pi} \operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^\alpha, \ \alpha \geq 1. \tag{25}$$

Nulius skaičiuojančią funkciją $n(u)$ parenkame taip, kad $K_\alpha(t) = O(1)$, $t \to \infty$.

Funkcijos $\ln F_0(t)$ nagrinėjimą pradėsime nuo funkcijų

$$\ln F_0(x) = x\int_{r_1}^{\infty} \frac{n(u)du}{u(u+x)}, \ x \geq 1, \tag{26}$$

$$K_\alpha(x) \equiv x\int_{r_1}^{\infty} \frac{n(u) - \lambda_0 \operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^\alpha}{u(u+x)} du, \qquad I_\alpha(x) = \lambda_0 x\int_{r_1}^{\infty} \frac{\operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^\alpha}{u(u+x)} du \tag{27}$$

nagrinėjimo, čia $\lambda = \varphi(\infty)$, $\lambda_0 = \dfrac{\lambda}{2\pi}$.

Žinome ([4], 53 p.), kad bet kuriam z

$$\ln|F_0(z)| \leq x\int_{r_1}^{\infty} \frac{n(u)du}{u(u+x)} \equiv \ln F_0(x), \ x \equiv |z|. \tag{28}$$

Kai išsiaiškinsime funkcijos $\ln F_0(x)$ kitimą, tada galėsime įvertinti skirtumą $\ln F_0(t) - \ln F_0(|t|)$, kai $t \in L$.

Kadangi funkcijų $K_\alpha(x)$ ir $I_\alpha(x)$ savybės išnagrinėtos darbe ([2], 109 – 120 p.), tai jas pateikiame be įrodymo.

1 teorema. *Jei* $\alpha > 1$ *ir nulius skaičiuojanti funkcija nusakyta lygybe*

$$n(u) = \begin{cases} E\left[\dfrac{1}{2} + \dfrac{\lambda}{2\pi}\operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^{\alpha}\right], \; kai \; u \geq u_0 = \exp\left\{\pi ctg \dfrac{\pi}{2\alpha}\right\}, \\ 0, \; kai \; 0 < u < u_0, \end{cases} \tag{29}$$

tai

1) funkcija $K_\alpha(x)$ *yra tolydi ir aprėžta intervale* $1 \leq x \leq \infty$*;*

2) funkcijos $K_\alpha(x)$ *išvestinė, kai* $x \geq r_1$, $x \neq \infty$*, tenkina nelygybę*

$$\left|\frac{dK_\alpha(x)}{dx}\right| \leq \frac{M_\alpha}{x(\ln x)^{\alpha-1}}, \; 0 < M_\alpha = const,$$

čia $E[w]$ *– sveikoji dalis w.*

2 teorema. *Jei* $\alpha \geq 1$ *ir* $x \geq e^{3\pi}$*, tai teisinga asimptotinė lygybė,* $(x \to \infty)$

$$I_\alpha(x) = \frac{\lambda x}{2\pi}\int_{r_1}^{\infty}\frac{\operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^{\alpha}}{u(u+x)}du = \frac{\lambda(\ln x)^{\alpha+1}}{2\pi(\alpha+1)} - \frac{\lambda}{\alpha+1}\sum_{k=2}^{[\alpha]+2} C_{\alpha+1}^{k}|B_k|(2\pi)^{k-1}(\ln x)^{\alpha+1-k} + R_\alpha(x), \tag{30}$$

čia $R_\alpha(x) \in D_{k_0 - \{\alpha\}}(\exp(3\pi + \sigma) \leq x \leq \infty)$, o B_k – Bernulio skaičiai, $[\alpha]$ – sveikoji dalis α.

Sveikosios funkcijos $F_0(z)$ nulius skaičiuojančiąją funkciją $n(u)$ apibrėžėme (29) lygybe.

Tada sveikosios funkcijos $F_0(z)$ nulius $\{-r_n\}$ rasime iš lygčių sekos

$$\operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^{\alpha} = \frac{(2n-1)\pi}{\lambda}, \; n = 1,2,3,\ldots, \tag{31}$$

imdami $r_n \equiv u_n$ – didžiausiąją realiąją šaknį. Pastebėsime, kad dėl funkcijos $\operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^{\alpha}$ monotoniškumo, kai $u \geq u_0$, išplaukia nelygybė $1 \leq u_0 < r_1$. Nagrinėti funkciją

$$K_\alpha(x) \equiv x\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u) - \lambda_0 \operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^{\alpha}}{u(u+x)}du, \; x \geq 1, \; \alpha \geq 1, \; \lambda_0 = \frac{\lambda}{2\pi}$$

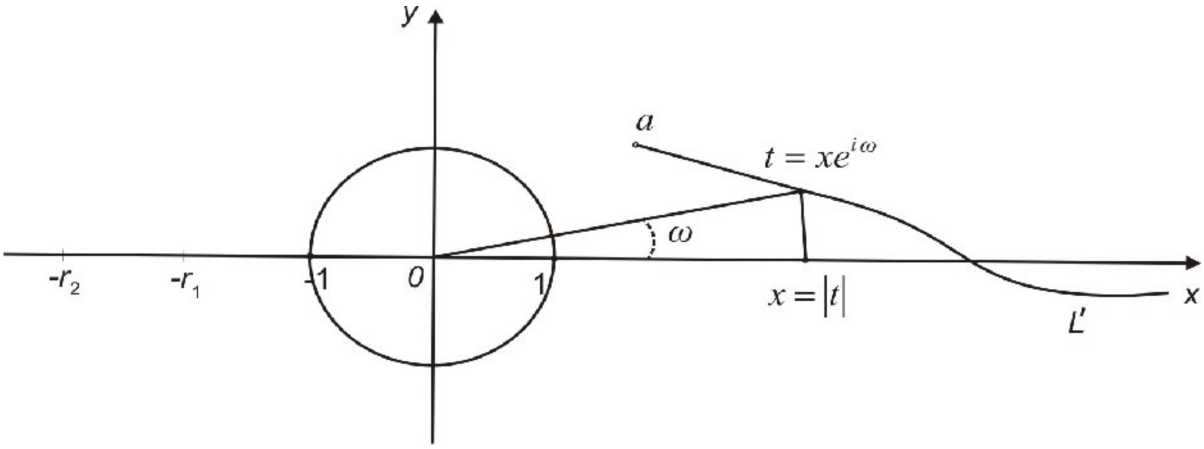
sunku todėl, kad jos tankis $n(u)-\lambda_0 \operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^{\alpha}$ turi skaičiąją pirmosios rūšies trūkio taškų aibę ir nėra monotoninis.

Kadangi $\forall u \geq u_0$ $\left|n(u)-\lambda_0 \operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^{\alpha}\right| \leq \frac{1}{2}$, tai integralas absoliučiai konverguoja, kai $t \in L$, be to,

$$|K_\alpha(t)| \leq \frac{1}{2}\int_{r_1}^{\infty}\frac{tdu}{u(u+t)} = \frac{1}{2}\int_{r_1}^{\infty} d\left(\ln\frac{u}{u+t}\right) = \frac{1}{2}\ln t + \frac{1}{2}\ln\left(\frac{1}{t}+\frac{1}{r_1}\right).$$

§ 4. Funkcijos $F_0(t)$ išraiška kontūro L' taškuose

Tarkime, $t=|t|e^{i\omega}$ – kontūro L' bet kuris taškas, o $x=|t|$ – sutampa su spindulio $\arg z=0$ tašku. Pakankamai dideliems $x\in\{\arg z=0\}$ taškas t yra vienintelis dėl kontūro L' glodumo iki $z=\infty$.



Funkcijos

$$\ln F_0(x)=x\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u)du}{u(u+x)}=K_\alpha(|t|)+I_\alpha(|t|),\ |t|=x \tag{32}$$

savybės suformuluotos 1 ir 2 teoremose.

Nagrinėsime skirtumą

$$\eta_\alpha(t)\equiv\ln F_0(t)-\ln F_0(|t|),\ t\in L', \tag{33}$$

$$\eta_\alpha(t)=t\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u)du}{u(u+t)}-x\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u)du}{u(u+x)}=\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u)}{u}\left[\frac{t}{u+t}-\frac{x}{u+x}\right]du=\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u)}{u}\frac{ut+xt-ux-tx}{(u+t)(u+x)}du=$$
$$=(t-x)\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u)du}{(u+t)(u+x)}=\left(|t|e^{i\arg t}-|t|\right)\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u)du}{(u+t)(u+|t|)}=\left(e^{i\arg t}-1\right)|t|\int_{r_1}^{\infty}\frac{n(u)du}{(u+t)(u+|t|)},\quad x=|t|, \tag{34}$$

čia

$$\ln F_0(t)=t\int_{r_1}^{\infty}\frac{E\left[\frac{1}{2}+\lambda_0\operatorname{Re}(\ln u-\pi i)^\alpha\right]}{u(u+t)}du,\ t\in L,\ \alpha\geq 1. \tag{35}$$

3 teorema. *Jeigu* $\alpha > 1$ *ir* L' *– eilės* $q > \alpha$ *Dini – Lipšico kontūras, tai*

1) funkcija $\eta_\alpha(t)$ *tolydi ir aprėžta, kai* $t \in L'$, *ir*

$$\lim_{t \in L', t \to \infty} \eta_\alpha(t) = 0\,; \tag{36}$$

2) visiems $t \in L'$, $(t \neq \infty)$

$$\left|\frac{d\eta_\alpha(t)}{dt}\right| \leq \frac{A_\alpha}{|t|(\ln|2t|)^{q-\alpha}},\ A_\alpha = const. \tag{37}$$

Įrodymas. Pasinaudoję nelygybe $|\arg t(s)| \leq \dfrac{\pi}{4}$, kai $t \in L'$, gauname

$$\frac{u+|t|}{|u+t|} = \frac{u+|t|}{\sqrt{u^2 + 2u|t|\cos\omega + |t|^2}} \leq \frac{u+|t|}{\sqrt{u^2 + \sqrt{2}u|t| + |t|^2}} \leq \frac{\sqrt{2\left(u^2+|t|^2\right)}}{\sqrt{u^2+|t|^2}} \leq \sqrt{2}\,. \tag{38}$$

Įvertiname (34) lygybę, atsižvelgdami į (38) įvertį ir nelygybę $\left|E\left(\dfrac{1}{2}+\sigma\right)-\sigma\right| \leq \dfrac{1}{2}$, ir gauname

$$|\eta_\alpha(t)| \leq \sqrt{2}|\arg t|\left\{\frac{|t|}{2}\int_{r_1}^{\infty}\frac{du}{(u+|t|)^2} + \lambda_0|t|\left|\int_{r_1}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(\ln u - \pi i)^\alpha}{(u+|t|)^2}du\right|\right\},\ t \in L'. \tag{39}$$

Kai $|t| = x > 0$, tai antrąjį integralą integruodami dalimis, gauname

$$\left|x\int_{r_1}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(\ln u - \pi i)^\alpha}{(u+x)^2}du\right| \leq \frac{x\left|\mathrm{Re}(\ln r_1 - \pi i)^\alpha\right|}{u+x} + \alpha x\left|\int_{r_1}^{\infty}\frac{\mathrm{Re}(\ln u - \pi i)^{\alpha-1}}{u(u+x)}du\right|, \tag{40}$$

Pasinaudoję (30) asimptotine lygybe, iš (39) ir (40) nelygybių, gauname įvertį, kai $t \in L'$

$$|\eta_\alpha(t)| \leq A'_\alpha|\arg t|\ln^\alpha|t|,\ A'_\alpha = const,$$

Iš gautojo įverčio ir (10) nelygybės, kuri galioja $q > \alpha$ eilės Dini – Lipšico kontūrui, gauname, kad

$$|\eta_\alpha(t)| \le A_q \frac{\ln^\alpha |t|}{\ln^q |2t|}$$

ir iš šios nelygybės matyti, kad funkcija $\eta_\alpha(t)$ yra aprėžta ir $\lim\limits_{t\to\infty,\, t\in L'} \eta_\alpha(t) = 0$.

Diferencijuodami integralą pagal parametrą *t*, gausime

$$\frac{d\eta_\alpha(t)}{dt} = \lambda_0 \frac{d}{dt}\left\{\int_{r_1}^{\infty} \frac{t - te^{-i\arg t}}{(u+t)\left(u + te^{-i\arg t}\right)} E\left[\frac{1}{2} + \lambda_0 \operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^\alpha\right] du\right\} =$$

$$= \left(1 - e^{-i\arg t}\right) \int_{r_1}^{\infty} \frac{\left(u^2 - xt\right) E\left[\frac{1}{2} + \lambda_0 \operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^\alpha\right]}{(u+x)^2 (u+t)^2} du + ix \frac{d \arg t}{dt} \int_{r_1}^{\infty} \frac{E\left[\frac{1}{2} + \lambda_0 \operatorname{Re}(\ln u - \pi i)^\alpha\right]}{(u+x)^2} du, \ \mathrm{x} \equiv |\mathrm{t}|.$$

Panaudodami 1 lemos įverčius, (40) nelygybę bei (30) išraišką, gauname (37) įvertį. Teorema įrodyta.

Iš (33) lygybės turime

$$F_0(t) = F_0(|t|) e^{\eta_\alpha(t)}, \ t \in L',$$

Iš čia, atsižvelgiant į (32) lygybę, gauname

$$F_0(t) = \exp\{K_\alpha(|t|) + I_\alpha(|t|) + \eta_\alpha(t)\}, \ t \in L. \tag{41}$$

Kadangi funkcijų $K_\alpha(|t|)$, $I_\alpha(|t|)$ ir $\eta_\alpha(t)$ savybės nusakytos 1 – 3 teoremose, tai suformuluosime teoremą, nusakančią sveikosios funkcijos $F_0(z)$ išraišką kontūro L' taškuose.

4 teorema. *Jeigu* $\alpha \geq 1$, L' *– eilės* $q > \alpha$ *Dini – Lipšico kontūras, o* $F_0(t)$ *– funkcija, nusakyta (35) lygybe, tai aplinkoje* $t = \infty$ *teisinga išraiška*

$$F_0(t) = \exp\left\{ \frac{\lambda_0 (\ln|t|)^{\alpha+1}}{\alpha+1} - \frac{\lambda}{\alpha+1} \sum_{k=2}^{\lfloor \alpha \rfloor + 2} C_{\alpha+1}^k |B_k| (2\pi)^{k+1} (\ln|t|)^{\alpha+1-k} + R_\alpha(|t|) + U_\alpha(t) \right\}, \tag{42}$$

čia $U_\alpha(t) \equiv \eta_\alpha(t) + K_\alpha(|t|)$ *– funkcija aprėžta kontūro* L' *taškuose, o jos išvestinė tenkina nelygybę*

$$\left| U_\alpha{}'(t) \right| \leq A_\alpha^* |t|^{-1}, \; t \in L'', \; t \neq \infty, \; A_\alpha^* = const. \tag{43}$$

$$R_\alpha(|t|) \in D_{k_0 - \{\alpha\}}(L''). \tag{44}$$

§ 5. Funkcijų $X^{+}(t)$ ir $\Psi_0^{+}(t)$ kraštinių reikšmių asimptotika kontūro L' taškuose

Nagrinėsime kanoninės funkcijos $X(z)$ savybes, kai kontūras L tenkina Dini – Lipšico sąlygas.

Iš pat pradžių atkreipsime dėmesį, kad labai skiriasi funkcijos

$$\Phi_\alpha(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_{L'}\frac{(\ln t)^\alpha\,dt}{t(t-z)}, \qquad \Phi_\alpha^*(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_{L'}\frac{(\ln|t|)^\alpha\,dt}{t(t-z)}. \tag{45}$$

Pirmajame integrale $\ln^\alpha t$ yra analizinės funkcijos $\ln^\alpha z$ kontūrinė reikšmė ir Koši tipo integralui $\Phi_\alpha(z)$ yra teisinga asimptotinė formulė ([2], 90 p.)

$$\frac{z}{2\pi i}\int_L\frac{\ln^\alpha \tau}{\tau(\tau-z)}d\tau = -\frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln z}{2\pi i}\right) - \frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}\frac{z}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi_{\alpha+1}(\tau)}{\tau(\tau-z)}d\tau + P_\alpha(z), \tag{46}$$

čia $B_{\alpha+1}(w)$ – Bernulio daugianaris, $\ln^\alpha z$ parenkama vienareikšmė šaka, kurios kontūrinė reikšmė ant kontūro L kairiojo krašto sutampa su $\ln^\alpha \tau$, $\tau \in L$, funkcija $\varphi_{\alpha+1}(\tau) \equiv \sum_{m=p+2+k_0}^{\infty} A_m\left(\frac{2\pi i}{\ln \tau}\right)^{m-\alpha-1}$, o $P_\alpha(z)$ – analizinė funkcija taško $z=\infty$ aplinkoje.

Visai kita padėtis su funkcija $\Phi_\alpha^*(z)$, kuri glaudžiai susieta su kanonine funkcija $X(z)$. Po daugybės įvertinimų jai yra nurodyta išraiška ([2], 99 p.)

$$\Phi_\alpha^*(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_L\frac{\ln^\alpha|\tau|}{\tau(\tau-z)}d\tau = -\frac{\ln^{\alpha+1}|z|}{2\pi i(\alpha+1)} + O\left(\ln^\alpha|z|\right),\ z\to\infty,$$

kurioje ryškiai matome tik vieną, greičiausiai augantį narį, kai $z\to\infty$. Šios informacijos apie $\Phi_\alpha^*(z)$ kitimą nepakanka sprendžiant nehomogeninį uždavinį. Todėl buvo būtina pereiti prie Dini – Lipšico kontūro. Tik pareikalavus, kad L' būtų eilės $q>\alpha$ Dini – Lipšico kontūras, garantuojame funkcijos $\eta_\alpha(t)$ aprėžtumą, o to pakanka nehomogeninio uždavinio sprendimui.

6 lema. J*eigu* $\alpha > 1$ *ir* L' *– eilės* $q > \alpha + 1$ *Dini – Lipšico kontūras, tai dėl* $t \in L'$*,* $t \to \infty$*,*

$$\Phi_\alpha^{**}(t) = -\frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1} B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln|t|}{2\pi i}\right) + r_\alpha^{*+}(t), \tag{47}$$

$$r_\alpha^{*+}(t) \in D_\rho(L'), \quad \rho = \min\{q-\alpha-1; k_0 - \{\alpha\}\}, \tag{48}$$

o skaičius $k_0 = \begin{cases} 3, & jei\ [\alpha] = 2k, \\ 2, & jei\ [\alpha] = 2k+1. \end{cases}$

Įrodymas. Sakykime $\omega(t) \equiv \arg t$, $t \in L'$ ir

$$\lim_{t \in L,\, t \to \infty} \arg t = 0, \ \arg t \in D_q(L').$$

Tuomet

$$\varphi(t) \equiv \frac{\omega(t)}{\ln|t|} \in D_q(L'), \ \varphi(\infty) = 0.$$

Remiantis funkcijos $(1+iz)^\alpha - 1$ analiziškumu vienetiniame skritulyje $|z| < 1$, gauname

$$\left[1 + i\frac{\omega(t)}{\ln|t|}\right]^\alpha - 1 \equiv \tilde{\psi}(t) \in D_q(L'), \ \tilde{\psi}(\infty) = 0,$$

Todėl, remiantis 3 lema, gauname

$$\ln^\alpha t - \ln^\alpha|t| \equiv \tilde{\psi}(t)\ln^\alpha|t| \in D_{q-\alpha}(L'). \tag{49}$$

Kadangi

$$\Phi_\alpha^*(z) = \frac{z}{2\pi i}\int_{L'} \frac{(\ln t)^\alpha\, dt}{t(t-z)} - \frac{z}{2\pi i}\int_{L'} \frac{\ln^\alpha t - \ln^\alpha|t|}{t(t-z)} dt \equiv \Phi_\alpha(z) - r_\alpha(z)$$

ir pagal sąlygą $q > \alpha + 1$, o $\tilde{\psi}(\infty) = 0$, tai Koši tipo integralas $r_\alpha(z)$ konverguoja ir yra aprėžtas taško $z = \infty$ aplinkoje, be to,

$$r_\alpha^{\pm}(t) \in D_{q-\alpha-1}(L').$$

Pasinaudoję funkcijos $\Phi_\alpha(z)$ asimptotine formule, jos kraštinėms reikšmėms, gauname

$$\Phi_\alpha^{*+}(t) = -\frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1} B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) + \widetilde{r}_\alpha^{+}(t),\ t \in L', \tag{50}$$

čia $\widetilde{r}_\alpha^{\pm}(t) \equiv \widetilde{s}_{\alpha+1}^{\pm}(t) - r_\alpha^{\pm}(t)$, taip pat

$$\widetilde{r}_\alpha^{\pm}(t) \in D_\rho(L'),\ \rho = \min\{q-\alpha-1; k_0 - \{\alpha\}\}. \tag{51}$$

Pasinaudoję Bernulio daugianario apibrėžimu ([2], 85 p.), išskleidžiame (50) asimptotinę formulę

$$-\frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1} B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln t}{2\pi i}\right) = -\frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}\sum_{k=0}^{[\alpha]+2} C_{\alpha+1}^k B_k \left(\frac{\ln|t|}{2\pi i}\right)^{\alpha+1-k} - \frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1}\sum_{k=0}^{[\alpha]+2} C_{\alpha+1}^k B_k \frac{(\ln t)^{\alpha+1-k} - (\ln|t|)^{\alpha+1-k}}{(2\pi i)^{\alpha+1-k}}.$$

Panaudoję (49), (50), (51) sąryšius, gauname

$$\Phi_\alpha^{*+}(t) = -\frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1} B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln|t|}{2\pi i}\right) + r_\alpha^{*+}(t),$$

čia $r_\alpha^{*\pm}(t)$ – funkcija, tenkinanti (48) sąryšius.

Lema įrodyta.

5 teorema. *Esant* (12) – (14) *sąlygoms ir* $t \in L'$ *teisinga išraiška*

$$\ln X^+(t) = -i\lambda \frac{(2\pi i)^\alpha}{\alpha+1} B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln|t|}{2\pi i}\right) + i\mu_0 \ln|t| + q_\alpha(t), \tag{52}$$

čia $\mu_0 = (2\pi)^{-1} \ln|G(\infty)|$,

$$q_\alpha(t) \in D_{\rho_0}(L'),\ \rho_0 = \min\{p-1; \beta-\alpha-1; q-\alpha-1; k_0 - \{\alpha\}\}. \tag{53}$$

Įrodymas. Funkciją $\ln X(z)$ užrašome integralų suma

$$\ln X(z) = \frac{z}{2\pi i}\int_{L\setminus L'} \frac{\ln G(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} + \frac{z}{2\pi i}\int_{L'} \frac{\ln|G(\tau)| - \ln|G(\infty)|}{\tau(\tau - z)}d\tau + \frac{z\ln|G(\infty)|}{2\pi i}\int_{L'} \frac{d\tau}{\tau(\tau - z)} +$$

$$+ \frac{z}{2\pi}\int_{L'} \frac{\varphi(\tau) - \varphi(\infty)}{\tau(\tau - z)}\ln^{\alpha}|\tau|d\tau + \frac{z\lambda}{2\pi}\int_{L'} \frac{\ln^{\alpha}|\tau|d\tau}{\tau(\tau - z)} \equiv Q_0(z) + Q_1(z) + Q_2(z) + Q_3(z) + \lambda i\Phi_{\alpha}^{*}(z),$$

čia $\lambda = \varphi(\infty)$, o $\Phi_{\alpha}^{*}(z)$ apibrėžta (45) lygybėje.

Remiantis Dini – Lipšico klasės D_p funkcijų savybėmis ([2], 94 p.), gauname

$$Q_1^{+}(t) \in D_{\rho-1}(L'),\ Q_3^{+}(t) \in D_{\beta-\alpha-1}(L').$$

$$Q_2(z) = \frac{z\ln|G(\infty)|}{2\pi i}\int_{L'} \frac{d\tau}{\tau(\tau - z)} = \frac{\ln|G(\infty)|}{2\pi}\left(i\ln|z| - \arg z\right) + \widetilde{q}_0(z),$$

čia

$$\widetilde{q}_0(z) = \frac{i\ln|G(\infty)|}{2\pi}\ln\left(\frac{1}{z} - \frac{1}{c_0}\right).$$

Funkcijos $Q_0(z)$ ir $\widetilde{q}_0(z)$ yra analizinės taško aplinkoje $z = \infty$, o funkcijai $\Phi_{\alpha}^{*}(z)$ pritaikę 6 lemą, gauname

$$i\lambda\Phi_{\alpha}^{*+}(t) = -\lambda i\frac{(2\pi i)^{\alpha}}{\alpha + 1}B_{\alpha+1}\left(\frac{\ln|t|}{2\pi i}\right) + \lambda i r_{\alpha}^{*+}(t),\ r_{\alpha}^{*+}(t) \in D_{\rho}(L').$$

čia ρ – skaičius, nusakytas (48) sąryšiais.

Pasižymėjus

$$\mu_0 = (2\pi)^{-1}\ln|G(\infty)|,$$

$$q_{\alpha}(t) \equiv Q_0(t) + Q_1^{+}(t) + Q_3^{+}(t) + \widetilde{q}_0(t) - \mu_0(\arg t)^{+} + \lambda i r_{\alpha}^{*+}(t),$$

Gauname teoremos tvirtinimą.

Dabar išsiaiškinsime funkcijos

$$\Psi_0^{+}(t) = F_0(t)X^{+}(t),\ t \in L' \tag{54}$$

kitimą, kai $t \to \infty$. Čia $F_0(t)$ – funkcija, nusakyta (35) lygybe.

6 teorema. *Sakykime,* $F_0(t)$ *– funkcija, apibrėžta (35) lygybe. Esant (12) – (16) sąlygoms teisinga išraiška*

$$\Psi_0^+(t) = \exp\left\{i\left(\mu_0 \ln|t| + \frac{\lambda}{2}\ln^\alpha|t|\right) + q_\alpha^*(t) + U_\alpha(t)\right\},\ t \in L', \tag{55}$$

čia $U_\alpha(t)$ *– funkcija, nurodyta 4 teoremoje, o*

$$q_\alpha^*(t) \in D_{\rho_0}(L'),\ \rho_0 = \min\{p-1; \beta - \alpha - 1; \mathrm{q} - \alpha - 1; \mathrm{k}_0 - \{\alpha\}\}. \tag{56}$$

Įrodymas. Esant 6 teoremos sąlygoms yra teisingos (42) ir (52) formulės, kai $t \in L'$. Pažymėsime $q_\alpha^*(t) \equiv R_\alpha(|t|) + q_\alpha(t)$; Iš (44) ir (53) sąryšių gausime (56). Pertvarkę (50) formulės dešiniąją pusę ir pasinaudoję Bernulio daugianario apibrėžimu, matysime, kad (54) lygybės dešinėje pusėje nebeliks funkcijų $F_0(t)$ ir $X^+(t)$ visų pagrindinių narių, išskyrus $i\mu_0 \ln|t|$ ir $\frac{\lambda i}{2}\ln^\alpha|t|$.

Teorema įrodyta.

Išvada. Kadangi funkcija $q_\alpha^+(t) + U_\alpha(t)$ aprėžta kontūro L' taškuose, tai iš (55) lygybės išplaukia, kad ant kontūro L'

$$\left|\ln\left|\Psi_0^+(t)\right|\right| = \left|\ln\left|F_0(t)X^+(t)\right|\right| \le A_\alpha,\ \ A_\alpha = const. \tag{57}$$

Gausime (19) formulėje esančio integralo išraišką integravimo kontūro galinių taškų aplinkose.

Sakykime, kad $\Psi_0^+(t)$ ir $F_0(t)$ – funkcijos, nusakytos (54) ir (35) formulėmis.

7 teorema. *Esant* (12) – (16) *sąlygoms , teisinga išraiška*

$$g_1(t) \equiv \frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)} \in D_{\rho'}(L'),\ \ g_1(\infty) = 0, \tag{58}$$

čia

$$\rho' = \min\{p-1; \beta - \alpha - 1; \mathrm{q} - \alpha - 1; \mathrm{k}_0 - \{\alpha\}; r - \alpha + 1\} > 1. \tag{59}$$

Įrodymas. Pagal 6 teoremą, kai $t \in L'$

$$g_1(t) = g(t)\exp\left\{-i\left(\mu_0 \ln|t| + \frac{\lambda}{2}\ln^\alpha|t|\right) - q^*_\alpha(t) - U_\alpha(t)\right\}.$$

Užrašysime $g_1(t)$ kita išraiška

$$g_1(t) = g^*(t)g^{**}(t)\exp\{-q^*_\alpha(t)\},$$

čia

$$g^*(t) = g(t)\ln^{\alpha-1}|t|;\;\; g^{**}(t) = (\ln|t|)^{1-\alpha}\exp\left\{-U_\alpha(t) - i\left(\mu_0 \ln|t| + \frac{\lambda}{2}\ln^\alpha|t|\right)\right\}.$$

Remiantis 3 lema, gauname

$$g^*(t) \in D_{r-\alpha+1}(L'),\; g^*(\infty) = 0. \tag{60}$$

Atsižvelgiant į funkcijos $U_\alpha(t)$ savybes, lengva pastebėti, kai $\alpha \ge 1$

$$\left|g^{**}(t)\right| \le M'_\alpha = const.;\; \left|\frac{d}{dt}g^{**}(t)\right| \le \frac{M''_\alpha}{|t|},\;\; t \in L',\; \mathrm{M}''_\alpha = const.$$

Tada iš (60) priklausomybės ir 3 lemos, išplaukia

$$g_0(t) \equiv g^*(t)g^{**}(t) \in D_{r-\alpha+1}(L'),\; g_0(\infty) = 0. \tag{61}$$

Iš (56) priklausomybių ir

$$\exp\{-q^*_\alpha(t)\} \in D_{\rho_0}(L'),$$

gauname

$$g_1(t) \in D_{\rho'}(L'),\; g_1(\infty) = 0,\; \rho' = \min\{\rho_0, \mathrm{r} - \alpha + 1\}.$$

Teorema įrodyta.

Suskaidysime kontūrą L taške $b \ne a, \infty$ į dalis ab ir $L \backslash ab$.

8 teorema. *Esant (12) – (16) sąlygoms taško* $z = a$ *aplinkoje gauname išraišką*

$$\frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)} \equiv g_1(t) = \frac{\widetilde{g}(t)}{(t-a)^{\mu+i\nu}}\,, \tag{62}$$

čia $0 \le \mu < 1$,

$$\widetilde{g}(t) \in D_{\gamma_0}(ab),\ \gamma_0 = \min\{p-1;\,\beta\text{ -}1;\,\mathrm{r}\} > 1\,. \tag{63}$$

Įrodymas. Funkciją $\ln X(z)$ išreiškiame suma integralų

$$\ln X(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab'} \frac{\ln G(\tau) - \ln G(a)}{\tau - z} d\tau + \frac{\ln G(a)}{2\pi i}\int_{ab'} \frac{d\tau}{\tau - z} - \frac{1}{2\pi i}\int_{ab'} \frac{\ln G(\tau)}{\tau} d\tau +$$
$$+ \frac{z}{2\pi i}\int_{L\setminus ab'} \frac{\ln G(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)} \equiv Q_1(z) + Q_2(z) + Q_3(z) + Q_4(z),$$

čia $Q_1^+(t) \in D_{\gamma'}(ab)$, $\gamma' = \min\{p-1;\,\beta\text{ -}1\}$.

Iš Koši integralo kitimo integravimo kontūro galuose ([3], 25 p.), gauname

$$Q_2^+(t) = -\frac{\ln G(a)}{2\pi i}\ln(t-a) + Q_2^*(t),\ Q_2^*(t) \in H(ab).$$

Kadangi funkcija $\widetilde{Q}(z) \equiv Q_3(z) + Q_4(z)$ analizinė taško $z = a$ aplinkoje, tai pažymėję $f(t) \equiv Q_1^+(t) + Q_2^*(t) + \widetilde{Q}(t)$, gauname

$$X^+(t) = (t-a)^{\mu+i\nu}\exp\{f(t)\};\ f(t) \in D_{\gamma'}(ab),\ \gamma' > 1\,. \tag{64}$$

Atsižvelgę į (15) sąlygą, turime $0 \le \mu < 1$.

Pasižymėję $\widetilde{g}(t) \equiv g(t)[F_0(t)]^{-1}\exp\{-f(t)\}$ ir naudodamiesi (64) sąryšiais, turime

$$\frac{g(t)}{\Psi_0^+(t)} \equiv \frac{g(t)}{F_0(t)X^+(t)} = \frac{\widetilde{g}(t)}{(t-a)^{\mu+i\nu}}\,.$$

Kadangi $F_0(t) \neq 0$ ant kontūro L, tai

$$\widetilde{g}(t) \in D_{\gamma_0}(ab), \qquad \gamma_0 = \min\{p-1; \beta - 1; \mathrm{r}\} > 1.$$

Teorema įrodyta.

Išvada. Kanoninę funkciją $X(z)$ taško $z = a$ aplinkoje galime užrašyti

$$X(z) = (z-a)^{\mu + i\nu} \exp\{\widetilde{Q}(z)\}, \tag{65}$$

čia $\widetilde{Q}(z)$ – funkcija, turinti baigtinę ribą, kai $z \to a$, o μ, ν – anksčiau minėti skaičiai.

§ 6. Koši tipo integralo įvertis taško $z = a$ aplinkoje

7 lema. *Jeigu ab – paprastas glodus lankas,* $\psi(t) \in D_\sigma(ab)$, $\sigma > 1$, $\psi(a) = 0$, $0 < \mu < 1$, ν *– bet kuris natūralusis skaičius, tai taško* $z = a$ *aplinkoje*

$$W(z) \equiv \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\psi(t)dt}{(t-a)^{\mu + i\nu}(t-z)} = \underline{\underline{O}}\left(\frac{1}{|z-a|^{\mu} \ln^{\sigma - 1} \frac{1}{|z-a|}} \right). \tag{66}$$

Įrodymas. Sakykime, kad lanko *ab* ilgis mažesnis už 1, kai *ab* – standartinis lankas. Pasižymėję

$$\frac{\psi(t)}{(t-a)^{\mu + i\nu}} = \frac{\psi(t) e^{-i\mu \arg(t-a)} (t-a)^{-i\nu}}{|t-a|^{\mu}} \equiv \frac{\psi^*(t)}{|t-a|^{\mu}} \tag{67}$$

Atsižvelgdami į $\arg(t-a)$ ir $(t-a)^{-i\nu}$ savybes lanko *ab* taškuose, iš 5 lemos gauname

$$\psi^*(t) \in D_\sigma(ab),\ \psi^*(a) = 0. \tag{68}$$

Nagrinėsime funkciją

$$W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\psi^*(t)dt}{|t-a|^{\mu}(t-z)}.$$

Laikydami, kad $z \overline{\in} ab$, pasižymėkime

$$|t-a| = r,\ |z-a| = \delta,\ |b-a| = r_0,\ 0 < \delta < \frac{1}{4} r_0,\ r_0 < 1.$$

Sakykime, $c \in ab$ ir $|c-a| = 2\delta$, tada

$$|z-a|^{\mu} W(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{ac} \frac{|z-a|^{\mu} - |t-a|^{\mu}}{|t-a|^{\mu}(t-z)} \psi^*(t)dt + \frac{1}{2\pi i} \int_{ac} \frac{\psi^*(t)dt}{t-z} + \frac{|z-a|^{\mu}}{2\pi i} \int_{cb} \frac{\psi^*(t)dt}{|t-a|^{\mu}(t-z)} =$$
$$= \Psi_1(z) + \Psi_2(z) + \Psi_3(z). \tag{69}$$

Panaudodami nelygybes ([3], 28 p.)

$$\left||z = a|^{\mu} - |t-a|^{\mu}\right| \le |z-t|^{\mu},\ |z-t| \ge |r-\delta|,$$

gauname įvertį

$$|\Psi_1(z)| \le \frac{K_1}{2\pi}\int_0^{2\delta}\frac{|\psi^*(t)-\psi^*(a)|}{r^{\mu}|r-\delta|^{1-\mu}}dr \le K_2\int_0^{2\delta}\frac{dr}{r^{\mu}|r-\delta|^{1-\mu}\ln^{\sigma}\frac{1}{r}} \le \frac{K_3}{\ln^{\sigma}\frac{1}{2\delta}}, \tag{70}$$

čia

$$K_3 = \int_0^2 \frac{du}{u^{\mu}|u-1|^{\mu}}.$$

Atkreipdami dėmesį, kad $\psi^*(a)=0$ ir $t \in \overset{\cup}{ac} \subset \overset{\cup}{ab}$, $|z-t| \ge K_4|t-t_0|$, čia $t_0 \in ab$, $|t_0-a|=\delta$, gauname funkcijos $\Psi_2(z)$ įvertį

$$|\Psi_2(z)| = \left|\frac{1}{2\pi i}\int_{ac}\frac{\psi^*(t)-\psi^*(t_0)}{t-z}dt + \frac{\psi^*(t_0)-\psi^*(a)}{2\pi i}\int_{ac}\frac{dt}{t-z}\right| \le K_5\int_{ac}\frac{d|t-t_0|}{|t-t_0|\ln^{\sigma}\frac{1}{|t-t_0|}} + K_6\frac{1}{\ln^{\sigma}\frac{1}{\delta}}\left|\ln\frac{z-c}{z-a}\right| \le$$

$$\le K_7\frac{1}{\ln^{\sigma-1}\frac{1}{|z-a|}}. \tag{71}$$

Tuomet

$$|\Psi_3(z)| \le \frac{|z-a|^{\mu}K_8}{2\pi}\int_{2\delta}^{r_0}\frac{dr}{r^{\mu}|r-\delta|\ln^{\sigma}\frac{1}{r}} = \frac{K_8\delta^{\mu}}{2\pi}\int_{2\delta}^{r_0}\frac{r}{r-\delta}\frac{dr}{r^{\mu+1}\ln^{\sigma}\frac{1}{r}}.$$

Kadangi $1 < r(r-\delta)^{-1} \le 2$, kai $2\delta \le r \le r_0$, tai

$$|\Psi_3(z)| \le K_9\delta^{\mu}\left[\frac{\mu^{-1}}{(2\delta)^{\mu}\ln^{\sigma}\frac{1}{2\delta}} + \frac{\mu^{-1}}{r_0^{\mu}\ln^{\sigma}\frac{1}{r_0}} + \frac{\sigma}{\mu}\int_{2\delta}^{r_0}\frac{dr}{r^{\mu+1}\ln^{\sigma+1}\frac{1}{r}}\right] \le \frac{K_{10}}{\ln^{\sigma}\frac{1}{|z-a|}}. \tag{72}$$

Gautus (70) – (72) įverčius įrašę į (69) lygybę, gauname (66) įvertį taško $z = a$ aplinkoje. Lema įrodyta.

Išvada. Sakykime, kad tenkinamos 7 lemos sąlygos, tada funkcija

$$\widetilde{W}(z) \equiv (z-a)^{\mu+i\nu} W(z) = \frac{(z-a)^{\mu+i\nu}}{2\pi i} \int_{ab} \frac{\psi(t)dt}{(t-a)^{\mu+i\nu}(t-z)} \tag{73}$$

yra tolydi taško $z = a$ aplinkoje ir

$$\lim_{z \to a} \widetilde{W}(z) = 0 . \tag{74}$$

Analogiškai įrodoma

8 lema. *Jeigu tenkinamos 7 lemos sąlygos, bet* $\psi(a) \neq 0$, *tai funkcija* $\widetilde{W}(z)$ *yra aprėžta taško* $z = a$ *aplinkoje.*

§ 7. Nehomogeninio uždavinio sprendinys

Įrodysime, kad anksčiau nusakyta sveikoji funkcija $F_0(z)$ tenkina § 3 pradžioje išvardintas sąlygas.

9 teorema. *Esant* (12) – (16) *sąlygoms, sveikajai funkcijai*

$$F_0(z) = \exp\left\{ z\int_{r_1}^{\infty} \frac{E\left[\frac{1}{2} + \lambda_0 \operatorname{Re}(\ln x - \pi i)^{\alpha}\right]}{x(x+z)} dx \right\}, \ \lambda_0 = \frac{\varphi(\infty)}{2\pi}, \tag{75}$$

kanoninei funkcijai

$$X(z) = \exp\left\{ \frac{z}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(\tau)}{\tau(\tau - z)} d\tau \right\},$$

funkcija

$$\Phi_0(z) = \frac{F_0(z)X(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)dt}{F_0(t)X^+(t)(t-z)} \tag{76}$$

yra nehomogeninio uždavinio sprendinys klasėje B_L.

Įrodymas. (76) lygybėje esančio netiesioginio integralo konvergavimas išplaukia iš (16) sąlygos, kai $\alpha \geq 1$ ir (57) įverčio. Todėl $\Phi_0(z)$ yra analizinė srityje *D*.

Tarkime *ac* – bet kuri baigtinė *L* dalis, tada iš uždavinio sąlygų gauname

$$\ln G(t) \in D_\gamma(ac), \ \gamma = \min\{p, \beta\} > 2.$$

Todėl pagal 2 lemą

$$X^+(t) \in D_{\gamma-1}(ac).$$

Kadangi $F_0(t)X^+(t) \neq 0$ kontūro *L* taškuose ir $F_0(t) \in H(ac)$, tai

$$\frac{1}{F_0(t)X^+(t)} \in D_{\gamma-1}(ac). \tag{77}$$

Iš 8 teoremos išplaukia, kad

$$\frac{g(t)}{F_0(t)X^+(t)} \in D_{\gamma_0}(a'c'),\ \gamma_0 = \min\{p-1; \beta -1; \mathrm{r}\} > 1. \tag{78}$$

Iš (78) sąryšio ir 2 lemos turime

$$\Phi_0^{\pm}(t) \in D_{\gamma_0 - 1}(ac),\ \gamma_0 - 1 > 0. \tag{79}$$

Lieka išnagrinėti sprendinio $\Phi_0(z)$ kitimą kontūro L galinių taškų aplinkose. Norėdami gauti jo kitimą kontūro L pradžios taško $z=a$ aplinkoje, pasinaudosime 8 teoremos išvadoje gauta (65) lygybe. Funkciją $\Phi_0(z)$ pertvarkome

$$\begin{aligned}\Phi_0(z) &= \frac{F_0(z)X(z)}{2\pi i}\left\{\int_{ab}\frac{g(t)dt}{F_0(t)X^+(t)(t-z)} + \int_{L\backslash ab}\frac{g(t)dt}{F_0(t)X^+(t)(t-z)}\right\} = \\ &= \frac{F_0(z)(z-a)^{\mu - i\nu}e^{\widetilde{Q}(z)}}{2\pi i}\left\{\int_{ab}\frac{\widetilde{g}(t)dt}{(t-a)^{\mu+i\nu}(t-z)} + P_0(z)\right\},\end{aligned} \tag{80}$$

čia $P_0(z)$ – analizinė funkcija taško $z=a$ aplinkoje. Jeigu $\mu + i\nu \neq 0$, tai pagal 8 lemą, $\Phi_0(z)$ aprėžta, kai $z \to a$. Ši išvada teisinga ir tuo atveju, kai $\mu + i\nu = 0$, nes tada $g(a)=0$.

Nagrinėsime sprendinio $\Phi_0(z)$ kitimą taško $z=\infty$ aplinkoje. Funkciją $\Phi_0(z)$ išreikšime suma

$$\Phi_0(z) = \frac{F_0(z)X(z)}{2\pi i}\left\{\int_{ac}\frac{g(t)dt}{F_0(t)X^+(t)(t-z)} + \int_{L\backslash ac}\frac{g(t)dt}{tF_0(t)X^+(t)} + z\int_{L\backslash ac}\frac{g(t)dt}{tF_0(t)X^+(t)(t-z)}\right\}. \tag{81}$$

Kadangi $\{L \backslash ac\} \in L'$, tai pagal 7 teoremą, funkcija

$$\frac{z}{2\pi i}\int_{L\backslash ac}\frac{g(t)}{F_0(t)X^+(t)}\cdot\frac{dt}{t(t-z)}$$

aprėžta, kai $z \to \infty$. Funkcijos $\Psi_0(z) = F_0(z)X(z)$ aprėžtumas taško $z=\infty$ aplinkoje įrodytas ([2], 147 p.).

9 teorema įrodyta.

Suformuluosime galutinį rezultatą.

10 teorema. *Logaritminės eilės* $\alpha \geq 1$ *plius begalinio indekso* $(\lambda > 0)$ *nehomogeninis kraštinis Rymano uždavinys* (11) – (16) *aprėžtų funkcijų klasėje* B_L *turi be galo daug sprendinių, kurių bendroji formulė*

$$\Phi(z) = X(z)\left\{\frac{F_0(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)dt}{F_0(t)X^+(t)(t-z)} + F(z)\right\},$$

čia $F_0(z)$ *– sveikoji funkcija, nusakyta* (22), (31), (35) *formulėmis,* $X(z)$ *– kanoninė funkcija,* $F(z)$ *– bet kuri sveikoji funkcija, kurios reikšmėms kontūro L taškuose teisinga nelygybė*

$$\ln|F(t)| < \frac{\lambda(\ln|t|)^{\alpha+1}}{2\pi(\alpha+1)} - \frac{\lambda}{\alpha+1}\sum_{k=2}^{[\alpha]+1} C_{\alpha+1}^k |B_k| (2\pi)^{k-1} (\ln|t|)^{\alpha+1-k} + C_F^* .$$

Summary

In [2] was studied boundary Riemann problem with an infinite index of logarithmic order for infinite space D which contour $\widetilde{L} = \{1 < t < \infty\}$ is the positive semi-axis part of real axis.

In this work is formulated and studied analogical boundary Riemann problem of logarithmic order $\alpha \geq 1$ for the space bounded by the infinite Dini – Lipschitz contour.

In this paper is used asymptotics of Cauchy type integrals with a logarithmic density.

Basically differ functions

$$\Phi_\alpha(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_{L'}\frac{(\ln t)^\alpha}{t(t-z)}dt \text{ and } \Phi_\alpha^*(z) \equiv \frac{z}{2\pi i}\int_{L'}\frac{(\ln|t|)^\alpha}{t(t-z)}dt .$$

In the first integral $\ln^\alpha t$ is contour value of the analytical function $\ln^\alpha z$ and for Cauchy-type integral $\Phi_\alpha(z)$ is obtained polynomial asymptotic formula (46). Function $\Phi_\alpha^*(z)$ associated with the canonical function $X(z)$ obtained in asymptotic formula is the only one, the fastest growing member, when $z \to \infty$. The information about the change of the $\Phi_\alpha^*(z)$ is insufficient considering inhomogeneous problem. It is necessary to use the Dini – Lipschitz contour. Let L' be Dini – Lipschitz contour of $q > \alpha$ order, it is proved that the function $\eta_\alpha(t) = \ln F_0(t) - \ln F_0(|t|)$ is continuous and bounded in contour L' points (Theorem 3), and zeros of entire function $F_0(z)$ are arranged on the negative semi-axis of the real axis. Being the before mentioned contour, it was proved that a separate inhomogeneous target solution (76) is bounded.

In this work is obtained the general solution of formulated task (11) - (16) of bounded functions in class B_L (Theorem 10).

Literatūra

1. GREIČIŪTĖ, I. *Dini – Lipšico klasės funkcijos. Bakalauro darbas*. Šiauliai, 2001.
2. ALEKNA, P. *Begalinio indekso kraštinis Rymano uždavinys*. Šiauliai, 2004. 170 p. ISBN 9986-38-509-1.
3. ALEKNA, P. *Analizinių funkcijų kraštiniai uždaviniai*. Šiauliai, 2003. 128 p. ISBN 9986-38-452-4.
4. ХЕЙМАН, У. К. *Мероморфные функции*. Москва, 1966.
5. ЮРОВ, П. Г. *Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического порядка* $\alpha \geq 1$. Материалы всесоюзной конференции по краевым задачамб, Казань, 1970. 279 – 284 д.