VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATINĖS STATISTIKOS KATEDRA

J. HAJEKO LOKALINĖ TEOREMA

BAIGIAMASIS DARBAS

NADEŽDA FURSOVA
INA SINKEVIČIŪTĖ

Darbo vadovas: prof. A.Bikelis

Vilnius, 2006

TURINYS

1. ĮVADAS

1.1 Apibrėžimai

1 Apibrėžimas. Baigtinė arba skaičiuojama realių skaičių aibė $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...)$ vadinama tiesiškai nepriklausoma (virš racionalių skaičių lauko $\mathbf{Q}$), jeigu kiekvienam n = 1, 2, …, iš lygybės

$$r_1 \beta_1 + r_2 \beta_2 + \ldots + r_n \beta_n = 0,$$

kur $r_1, r_2, \ldots, r_n$ - racionalieji skaičiai, išplaukia, kad $r_1 = r_2 = \ldots = r_n = 0$.

1 Pastaba. Tarp skaičių $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...$ nėra lygiu nuliui.

2 Pastaba. Bazę β vadinsime baigtine, jei aibę β sudaro baigtinis skaičių skaičius, priešingu atveju – begaline.

2 Apibrėžimas. Baigtinė arba skaičiuojama tiesiškai nepriklausomų realių skaičių aibė $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_n, ...)$ vadinama skaičiuojamos realių skaičių aibės $\Lambda_1, \Lambda_2, ..., \Lambda_n, ...$ racionalia baze, jei kiekvienas skaičius Λ_n išreiškiamas tiesine kombinacija

$$\Lambda_n = r_{i_1}^{(n)} \beta_{i_1} + r_{i_2}^{(n)} \beta_{i_2} + \ldots + r_{i_m}^{(n)} \beta_{i_m}, \tag{1.1.1}$$

kur $r_j^{(n)} \in \mathbf{Q}$ **–** racionalūs skaičiai ir $i_1, i_2, \ldots, i_m$ - skirtingi skaičiai.

3 Pastaba. Tai pačiai skaičių aibei egzistuoja daug racionalių bazių, bet tam tikroje bazėje išraiška (1.1.1) yra vienintelė.

4 Pastaba. Jeigu išraiškoje (1.1.1) visi $r_j = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$- sveiki skaičiai, tai bazė vadinama sveikąja.

1 Teorema. *Kiekviena skaičiuojama realių skaičių aibė turi savyje bazę.*

Tikslinga bazės elementus $\beta = (...,\beta_m^-,...,\beta_2^-,\beta_1^-,\beta_1^+,\beta_2^+,...,\beta_n^+,...)$ išrikiuoti didėjimo tvarka, tai yra $... < \beta_m^- < ... < \beta_2^- < \beta_1^- < 0 < \beta_1^+ < \beta_2^+ < ...\beta_n^+ ...$. Tegul $\beta^m = \beta \times ... \times \beta$ - yra *m* aibių β Dekarto sandauga.

Aibę $\Lambda = \{\Lambda_1, \Lambda_2 ... \}$ galima išskaidyti į *M (M* $\leq \infty$ *)* nesikertančių aibių taip, kad išskaidyme (1.1.1) visi skaičiai $r_{i_1}^{(n)}, r_{i_2}^{(n)}, \dots, r_{i_m}^{(n)}$ būtų nelygūs nuliui (išskyrus atvejį, kai *m* = 1) visoms Λ_n, kurios įeina į poaibį *m*. Tegul iš jų *s = s (m)* – neigiami ir *(m–s)* – teigiami, tai yra lygybė (1) užrašoma taip:

$$\Lambda_n = (\vec{\beta}_m^{(s)}, \vec{r}(m)), \tag{1.1.2}$$

kur $\vec{\beta}_m^{(s)} = (\beta_{i_1}^-,...,\beta_{i_s}^-,\beta_{i_{s+1}}^+,...,\beta_{i_m}^+)$, $\vec{r}(m) = (r_{i_1}^{(n)}, r_{i_2}^{(n)}, \dots, r_{i_m}^{(n)}) \in Q^m, 0 \leq s \leq m$ ir *m = 1,2,…,M.*

Pastebėsim, kad $\vec{\beta}_m^{(s)} \in \beta^m$, ne visos vektoriaus $\vec{\beta}_m^{(s)}$ koordinatės yra skirtingos.

Tegul į aibę W_1 įeina visi skaičiai pavidalo (1.1.2), kur *m* = 1, tai yra

$$W_1 = \{ \beta_i r_i : \beta_i \in \beta, r_i \in Q;\ i = 1,2,\ldots\}.$$

Aibė W_2 turi pavidalą:

$$W_2 = \left\{ \begin{matrix} \beta_i r_i + \beta_k r_k : (\beta_i, \beta_k) \in \beta^2, \beta_i \neq \beta_k; i,k = 1,2,...; \\ (r_i, r_k) \in Q^2; r_i \neq 0; i,k = 1,2,... \end{matrix} \right\}$$

Toliau, W_3 turi pavidalą:

$$W_3 = \left\{ \begin{matrix} \beta_{i_1} r_{i_1} + \beta_{i_2} r_{i_2} + \beta_{i_3} r_{i_3} : (\beta_{i_1}, \beta_{i_2}, \beta_{i_3}) \in \beta^3, \beta_{i_1} \neq \beta_{i_2} \neq \beta_{i_3}; \\ (r_{i_1}, r_{i_2}, r_{i_3}) \in Q^3; r_{i_1} \neq 0, r_{i_{12}} \neq 0, r_{i_3} \neq 0 \end{matrix} \right\}$$

Sudarykim seką aibių W_1, W_2, … tokią, kad

$$\Lambda = \sum_{m=1}^{M} W_m$$

ir $W_i \cap W_j = \varnothing$, kai $i \neq j$. Čia $M \leq \infty$.

Iš to išplaukia, kad

$$W_m = \sum_{\substack{\vec{r}(m) \in Q^m \\ \vec{\beta}_m^{(s)} \in \beta^m}}^{*} \left\{ (\vec{\beta}_m^{(s)}, \vec{r}(m)) \right\}.$$

Čia, kai m = 2, 3, …, simbolis $\sum^{*}$ reiškia sumavimą pagal $\vec{r}(m)$ su koordinatėmis nelygiomis 0, ir pagal $\vec{\beta}_m^{(s)}$ su koordinatėmis nelygiomis tarpusavyje.

Aibė

$$\left\{ (\vec{\beta}_m^{(s)}, \vec{r}(m)) \right\}$$

turi vieną elementą, tai yra skaliarinę vektorių $\vec{\beta}_m^{(s)}$ ir $\vec{r}(m)$ sandaugą:

$$(\vec{\beta}_m^{(s)}, \vec{r}(m)) = \beta_{i_1}^{-} r_{i_1} + \ldots + \beta_{i_s}^{-} r_{i_s} + \beta_{i_{s+1}}^{+} r_{i_{s+1}} + \ldots + \beta_{i_m}^{+} r_{i_m}.$$

Be to, jei $\vec{r}(m_1) \neq \vec{r}(m_2)$, tai $(\vec{\beta}_{m_1}^{(s)}, \vec{r}(m_1)) \neq (\vec{\beta}_{m_2}^{(s)}, \vec{r}(m_2))$.

Viskas, kas ankščiau parašyta, reziumuojama sekančioje teoremoje.

2 Teorema. Baigtinio diskretaus mato μ_d nešėjas Λ turi bazę β tokią, kad

$$\Lambda = \sum_{m=1}^{M} \sum_{\substack{\vec{r}(m)\in Q^m \\ \vec{\beta}_m^{(s)}\in\beta^m}}^{*} \left\{ (\vec{\beta}_m^{(s)}, \vec{r}(m)) \right\} = W(\beta) \qquad (1.1.3)$$

Čia $M \le \infty$.

Toliau, β vadinsime mato μ_d baze.

Tegul

$$e(x) = \begin{cases} 0, x < 0, \\ 1, x \ge 0. \end{cases}$$

Išvada:

Tegul bendras baigtinis diskretus matas μ_d turi bazę β, tada

$$\mu_d((-\infty, x)) = \sum_{(\vec{\beta}_m^{(s)}, \vec{r}(m))\in W(\beta)} \mu_d(\{(\vec{\beta}_m^{(s)}, \vec{r}(m))\}) e(x - (\vec{\beta}_m^{(s)}, \vec{r}(m))).$$

Tyrimuose dažnai yra nagrinėjami elementai iš bendrų baigtinių matų *M* poklasių.

3 Apibrėžimas. Bendrą baigtinį diskretų matą μ_d vadinsime *M-kvazigardeliniu*, jeigu jis turi *M* elementų baigtinę bazę β.

Tegul bazė β baigtinė, tai yra $\beta = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_M)$. Skleidinio (1.1.3)

$$(\vec{\beta}, \vec{t}\,) = \beta_1 r_1 + ... + \beta_M r_M$$

koeficientai $r_1, r_2, ..., r_M$, bendrai tariant yra racionalūs skaičiai. Jeigu bazė $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_m$ sveikoji, tai $r_1, r_2, ..., r_M = 0, \pm 1, \pm 2, ...$.

Bendru atveju skaliarinė sandauga skleidinyje (1.1.3) yra pavidalo

$$(\vec{\beta},\vec{r}) = \beta_1 \nu_1 + ...\beta_m \nu_m + \beta_{m+1} r_{m+1} + ... + \beta_M r_M \ ,$$

kur $\nu_1,...,\nu_m = 0,\pm1,\pm2,...$ .Tai yra bazė $\beta = (\beta_1, \beta_2,...., \beta_M)$ susideda iš dviejų pobazių – sveikosios $\beta_1, \beta_2,...., \beta_m$ ir ne $\beta_{m+1},...., \beta_M$.

4 Apibrėžimas. Apibendrintą baigtinį diskretų matą μ_d vadinsime *M* – diskrečiu *m*-kvazigardeliniu, jeigu jo bazė $\beta = \beta_1,...., \beta_m \beta_{m+1},...., \beta_M$ turi sveikąjį pobazį $\beta_1, \beta_2,...., \beta_m$, kur *m* – didžiausias skaičius su tokia savybe. Priminsime, kad $M < \infty$.

Pastaba: M – diskretus *M*-kvazigardelinis matas μ_d turi nešėją $W(\beta)$ pavidalo (1.1.3), kur $M < \infty$ ir vektoriaus $\vec{r}(m)$ koordinatės yra tik sveikieji skaičiai $0,\pm1,\pm2,...$.

Pastebėsime, kad egzistuoja matai su pilna begaline baze, tai yra $M = \infty$.

1.2 Žymėjimai

Beveik periodinių funkcijų teorijoje yra žinoma, kad kiekviena baigtinė skaičių seka

$$y_{\nu 1}, y_{\nu 2},....., y_{\nu N \nu} \tag{1.2.1}$$

turi savyje baigtinę sveikąją bazę $\vec{\beta}_\nu$:

$$y_{\nu j} = (\vec{a}_\nu, \vec{E}) + (\vec{\beta}_\nu, \vec{m}_j), \ \ j = 1,2,..., N_\nu , \tag{1.2.2}$$

kur $\vec{E} = \underbrace{(1,1,...,1)}_{k_\nu}$, $\quad \vec{a}_\nu = (a_{1\nu},..., a_{k_\nu \nu}) \in R^{k_\nu}$,

$\vec{\beta}_\nu = (\beta_{1\nu},..., \beta_{k_\nu \nu})$,

$\vec{m}_{j\nu} = (m_{1j\nu},..., m_{k_\nu j\nu})$, kur $m_{ij\nu} = 0,\pm1,\pm2,\pm3,.....$,

ν - serijos numeris, $\nu = 1,2,...$,

j – nurodo generalinės visumos elemento numerį,

k_ν - vektoriaus koordinatės, $k_\nu = 1,2,...$.

Nagrinėdami imtis iš baigtinių visumų ([1]) mes skaičius (1.2.1) išreiškime pavidalų (1.2.2). Uždavinys yra paprastesnis, kai $\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k$ yra tiesiškai nepriklausomi, t.y. bazė $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2, ..., \beta_k)$ yra sveikoji. Tuomet pastebėkime, kad $\beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 + ... + \beta_k m_k = 0$, tada ir tik tada, kai $m_1 = m_2 = ... = m_k = 0$.

1.3 Generalinės visumos struktūra

Tarkime, kad turime visumą susidedančią iš nuliukų ir vienetukų

$$\overbrace{1,1,...,1}^{M_1}, \overbrace{0,0,...,0}^{M_0}, \text{ kur } M_1 + M_0 = N. \qquad (1.3.1)$$

Parinkus imtį tūrio *n*, vienetuku skaičius imtyje, yra atsitiktinis dydis turintis hipergeometrinį pasiskirstymą.

$$P\{\xi_n = m_1\} = \frac{C_{M_1}^{m_1} C_{N-M_1}^{n-m_1}}{C_N^n}, \text{ kur } m_1 = 0,1,...,M_1,$$

$C_{M_1}^{m_1} = 0$, kai $m_1 > M_1$.

Nagrinėjant visumą tokio pavidalo

$$\overbrace{\beta_1, \beta_1, ..., \beta_1}^{M_1}, \overbrace{\beta_2, \beta_2, ..., \beta_2}^{M_0}, \qquad (1.3.2)$$

kur $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ – tiesiškai nepriklausoma sveikoji bazė, t.y. $\beta_1 m_1 + \beta_2 m_2 = 0$ tada ir tik tada, kai $m_1 = m_2 = 0$, mes šią generalinę visumą visada galime suvesti į visumą susidedančią iš nuliukų ir vienetukų.

Iš kiekvieno generalinės visumos elemento atimame β_2, t.y.

$$\overbrace{\beta_1, \beta_1, ..., \beta_1}^{M_1}, \overbrace{\beta_2, \beta_2, ..., \beta_2}^{M_0}$$

$$-\beta_2$$

$$\overbrace{\beta_1 - \beta_2, \beta_1 - \beta_2, ..., \beta_1 - \beta_2}^{M_1}, \overbrace{0,0,...,0}^{M_0}$$

Dabar padaliname iš $\beta_1 - \beta_2$ ir gauname

$$\overbrace{1,1,...,1}^{M_1}, \overbrace{0,0,...,0}^{M_0}$$

Dabar po centravimo ir normavimo atrinkdami paprastą atsitiktinę imtį mes galime pereiti prie imties turinčios hipergeometrinį pasiskirstymą.

Bet nagrinėjant visumą tokio pavidalo:

$$\overbrace{\beta_1, \beta_1, ..., \beta_1}^{M_1} \quad \overbrace{\beta_2, \beta_2, ..., \beta_2}^{M_0} \quad \overbrace{\beta_1 + \beta_2, ..., \beta_1 + \beta_2}^{M_{10}}, \text{ kur } M_1 + M_0 + M_{10} = N. \qquad (1.3.3)$$

Atlikus centravimą ir normavimą:

$$\overbrace{\frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}, ..., \frac{\beta_1 - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2}}^{M_1}, \quad \overbrace{0,...,0}^{\mathrm{M}_0}, \quad \overbrace{\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}, ..., \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}}^{M_{10}},$$

$$\overbrace{1,...,1}^{M_1}, \quad \overbrace{0,...,0}^{\mathrm{M}_0}, \quad \overbrace{\frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}, ..., \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}}^{M_{10}},$$

mes negalime jos suvesti į visumą susidedančią iš nuliukų ir vienetukų.

Dabar patikrinsime ar 1 ir $\dfrac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2}$ sudaro bazę sveikųjų skaičių aibėje.

$$1 \cdot m_1 + \frac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} m_2 = 0,$$

$$\beta_1 m_1 - \beta_2 m_1 + \beta_1 m_2 = 0.$$

Iš lygybės

$$\beta_1(m_1 + m_2) + \beta_2(-m_1) = 0,$$

seka, kad ji galioja, tada ir tik tada, kai $m_1 = m_2 = 0$.

Taigi gavome, kad 1 ir $\dfrac{\beta_1}{\beta_1 - \beta_2} = \beta_3$ – tiesiškai nesurišti sveikųjų skaičių aibėje.

1.4 Imtys

Baigtinę populiaciją galime stebėti įvairiais būdais, pavyzdžiui:

I. Paprasta atsitiktinė imtis

Tarkime turime skaičių generalinę visumą $y_1, y_2, ..., y_N$, parenkame imtį tūrio *n*,

$y_{i_1}, y_{i_2}, ... y_{i_n}$, kai $i_1 \neq i_2 \neq ... \neq i_n$ ir nagrinėjame tokią statistiką $\xi_n = \sum_{j=1}^{n} y_{i_j}$.

Tada, kai

1. $$y_j = \begin{cases} 0, \\ 1, \end{cases}$$

tai ξ – sveiki skaičiai.

Kai

2. $$y_j = \begin{cases} \beta_1, \\ \beta_2, \end{cases}$$

tuomet $\xi := \beta_1 m_1 + \beta_2 m_2$, $m_1, m_2 = 0,1...$.

Atlikdami generalinės visumos centravimą ir normavimą, pasikeičia jos elementai ir atitinkamai nagrinėjama statistika:

$$\xi_n = \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{y_{i_j} - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} \cdot (\beta_1 - \beta_2) + \beta_2 \right) = (\beta_1 - \beta_2) \sum_{j=1}^{n} \frac{y_{i_j} - \beta_2}{\beta_1 - \beta_2} + n\beta_2 =$$

$$= (\beta_1 - \beta_2)\sum_{j=1}^{n} X_{i_j} + n\beta_2 = (\beta_1 - \beta_2)\eta_n + n\beta_2 .$$

Čia $\sum_{j=1}^{n} X_{i_j} = \eta_n$,

kur $X_j = \begin{cases} 1, \\ 0, \end{cases}$

taigi η_n – įgyja sveikus skaičius.

Paprasta atsitiktinė imtis duoda surištų imties elementų seką, t.y. ξ_n – suma priklausomų atsitiktinių dydžių.

II. Puasoninė imtis

Skirtingai nuo paprastos atsitiktinės imties, Puasoninė imtis yra tokia, kai pirmiausiai parenkame imties tūrį μ, pasiskirsčiusi pagal binominį dėsnį $\mu \sim B\left(N, \frac{n}{N}\right)$, su tokiais parametrais:

$$M\mu = N\frac{n}{N} = n \text{ ir } D\mu = N\frac{n}{N}\left(1 - \frac{n}{N}\right) = n\left(1 - \frac{n}{N}\right),$$

t.y. pasirenkame μ su tokia tikimybe

$$P\{\mu = m\} = C_N^m \left(\frac{n}{N}\right)^m \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-m}, \text{ kur } m = 0,1,\dots,N ,$$

nes Puasono imtyje kiekvienas elementas gali būti įtrauktas į imtį, nepriklausomai nuo kitų elementų, su tikimybe $p = \frac{n}{N}$, ir atrenkame paprastą atsitiktinę imtį iš generalinės visumos $y_1, y_2, \dots, y_N$.

Tada statistika užsirašo taip

$$\xi_\mu^* = \sum_{j=1}^{\mu} y_{i_j} ,$$

kur ξ_μ^* – suma nepriklausomų atsitiktinių dydžių.

2. TEORINIS PAGRINDAS

2.1 Fundamentalioji J. Hajeko lema

Puasono imtyje kiekvienas elementas gali būti įtrauktas į imtį, nepriklausomai nuo kitų elementų, su tikimybe $p = \frac{n}{N}$.

Šiuo atveju imties tūris yra atsitiktinis dydis $\mu \sim B\left(N, \frac{n}{N}\right)$.

Tikimybė atrinkti objektų rinkinį $O_{i_1}, \ldots, O_{i_k}$ yra lygi

$$p^k (1-p)^{N-k} = C_N^k p^k (1-p)^{N-k} \frac{1}{C_N^k}$$

Ši lygybė rodo, kad Puasono imtį galima gauti dviem etapais:

1. Gauname realizaciją binominio atsitiktinio dydžio μ, t.y.

$$P\{\mu = k\} = C_N^k p^k (1-p)^{N-k}.$$

2. Po to iš generalinės visumos $X_1, X_2, \ldots, X_N$ parenkame paprastą atsitiktinę imtį tūrio k.

Pažymėkime:

$S(n)$ – indeksų aibė paprastos atsitiktinės imties elementų;

$S'(n)$ – indeksų aibė Puasono imties elementų, kai $\mu = k$;

Pasirinkimas iš generalinės visumos atliekamas taip:

1. Kai $\mu = n$, tai iš elementų visumos parenkame paprastą atsitiktinę imtį tūrio *n* ir laikome, kad indeksų aibės sutampa $S(n) = S'(n)$.

2. Kai $\mu = k > n$, tai iš $B = \{1, 2, \ldots, N\}$ parenkame paprastą atsitiktinę imtį tūrio *k*, t.y. $S'(k)$. Po to iš $S'(k)$ parenkame paprastą atsitiktinę imtį tūrio *n* ir gauname $S(n) \subset S'(k)$.

3. Kai $\mu = k < n$, tai iš *B* parenkame paprastą atsitiktinę imtį tūrio *n*, t.y. $S(n)$, o po to iš $S(n)$ parenkame paprastą atsitiktinę imtį tūrio *k*, t.y. $S(n) \supset S'(k)$.

Rezultate gauname du indeksų rinkinius $(S(n), S'(\mu))$, be to,

$$\text{kai } \mu \le n, \text{ tai } S'(\mu) \subseteq S(n),$$

$$\text{kai } \mu > n, \text{ tai } S'(\mu) \supset S(n).$$

Apibrėžkime atsitiktinius dydžius :

$$\eta(n) = \sum_{j \in S(n)} \left(X_j - \overline{X} \right),$$

$$\eta'(\mu) = \sum_{j \in S'(\mu)} \left(X_j - \overline{X} \right),$$

Turime, kad $M\eta(n) = M\eta'(\mu) = 0$.

Iš $S(n)$ ir $S'(\mu)$ apibrėžimų išplaukia, kad

$$\eta(n) - \eta'(\mu) = \begin{cases} 0, & kai \quad \mu = n, \\ \sum_{j \in s(n) \setminus S(\mu)} (X_j - \overline{X}), & kai \quad \mu < n, \\ -\sum_{j \in S'(\mu) \setminus S(n)} (X_j - \overline{X}), & kai \quad \mu > n \end{cases}$$

Hajeko lema. Teisinga nelygybė

$$\frac{D(\eta(n) - \eta'(\mu))}{D\eta'(\mu)} \le \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{N-n}}$$

2.2 Puasono teorema

Teorema: Tam, kad sumų pasiskirstymo įstatymai $\xi_n = \xi_{n1} + \xi_{n2} + ... + \xi_{nk_n}$ nepriklausomiems be galo mažiems atsitiktiniams dydžiams susivestų į Puasono dėsnį

$$P(x) = \sum_{0<k<x} \frac{e^{-\lambda}\lambda^k}{k!}, \qquad \lambda > 0,$$

būtina ir pakankama, kad kiekvienam ε $(0 < \varepsilon < 1)$ būtų tenkinamos sąlygos:

1) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{R_\varepsilon} dF_{nk}(x) \to 0, \qquad (n \to \infty),$

2) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x-1|<\varepsilon} dF_{nk}(x) \to \lambda, \qquad (n \to \infty),$

3) $\sum_{k=1}^{k_n} \int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \to 0, \qquad (n \to \infty),$

4) $\sum_{k=1}^{k_n} \left\{ \int_{|x|<\varepsilon} x^2 dF_{nk}(x) - \left(\int_{|x|<\varepsilon} x dF_{nk}(x) \right)^2 \right\} \to 0, \qquad (n \to \infty),$

kur R_ε žymi sritį, kurį gaunama iš tiesės $-\infty < x < +\infty$ intervalų $|x| < \varepsilon$ ir $|x-1| < \varepsilon$ pašalinimo būdų.

2.3 J.Hajeko teorema apie konvergavimą į Puasono pasiskirstymą

Imtis iš baigtinės populiacijos gali būti laikoma, kaip atsitiktinis bandymas, kai iš aibės $S = \{1,2,3,...,N\}$ pasirenkama *s* elementų, $s \subset S$. Aibė *S* vadinasi populiacija, o *s* – imtis. Pažymėsime *s* turinti *k* elementų kaip s_k ir s_k tikimybę pažymėsim $\mathrm{P}(s_k)$.

Paprastos atsitiktinės imties (be gražinimo), tūrio *n*, tikimybė yra lygi

$$\mathrm{P}(s_k) = \begin{cases} \binom{N}{n}^{-1}, kai\ k = n, \\ 0, \text{kai } k \neq n. \end{cases} \tag{2.3.1}$$

J. Hajeko straipsnyje ([1]) parodyta, kad statistikų ribinių pasiskirstymų uždavinį galima spręsti imant iš populiacijos Puasono imtį, t.y. vietoj (2.3.1) imant tikimybes

$$\mathrm{P}(s_k) = \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1 - \frac{n}{N}\right)^{N-k}, \tag{2.3.2}$$

kai $0 \le k \le N$.

Imtį su tikimybėmis (2.3.2) J. Hajekas vadino Puasono imtimi.

Pažymėsime

$$\xi_{n_\nu} = \sum_{i \in s_{n_\nu}} y_{\nu i}\ , \tag{2.3.3}$$

kur s_{n_ν} - paprasta atsitiktinė imtis.

Aišku, kad $\xi_{n_\nu} = \xi_{n_\nu}\left(s_{n_\nu}\right)$ - atsitiktinis dydis turi baigtinį vidurkį

$$\mathrm{E}\xi_{n_\nu} = \frac{n_\nu}{N_\nu} \sum_{i=1}^{N_\nu} y_{\nu i} \tag{2.3.4}$$

ir dispersiją

$$D\xi_{n_\nu} = \frac{n_\nu}{N_\nu} \frac{N_\nu - n_\nu}{N_\nu - 1} \sum_{i=1}^{N_\nu} \left(y_{\nu i} - \overline{Y}\right)^2 , \tag{2.3.5}$$

kur $\overline{Y} = \frac{1}{N_\nu} \sum_{i=1}^{N_\nu} y_{\nu i}$.

J.Hajekas gavo būtinas ir pakankamas sąlygas, kad galiotų lygybė:

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{P}\left\{\xi_{n_\nu} - E\xi_{n_\nu} < x\sqrt{D\xi_{n_\nu}}\right\} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{1}{2}t^2} dt \tag{2.3.6}$$

Kai populiaciją $y_{\nu_1}, y_{\nu_2}, \ldots, y_{\nu N_\nu}$ sudaro sveiki teigiami skaičiai, tuomet jis gauna sąlygą kada

$$\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{P}\left\{\xi_{n_\nu} = k\right\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} . \tag{2.3.7}$$

***Teorema** (apie konvergavimą į Puasono pasiskirstymą)*

Tarkime, kad $n_\nu \to \infty$, $n_\nu \le \frac{1}{2} N_\nu$ ir

$$\lim_{\nu\to\infty} E\xi_{n_\nu} = \lim_{\nu\to\infty} D\xi_{n_\nu} = \lambda > 0 \tag{2.3.8}$$

Yra $\lim_{\nu\to\infty} \mathrm{P}\left\{\xi_{n_\nu} = k\right\} = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$, tada ir tik tada kai

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{n_\nu}{N_\nu} = 0 \tag{2.3.9}$$

ir

$$\lim_{\nu\to\infty} \frac{n_\nu}{N_\nu} \sum_{|y_{\nu i}-1|>\tau} y_{\nu i}^2 = 0 \tag{2.3.10}$$

su $\forall \tau > 0$.

Mes įrodėme, kad teisingos teoremos

1 Teorema

Kai generalinę visumą tokio pavidalo: $\overbrace{\beta_1,\beta_1,...,\beta_1}^{M_1},\overbrace{\beta_2,\beta_2,...,\beta_2}^{M_2}$,

populiacijos elementas: $y_j = m_1(j)\beta_1 + m_2(j)\beta_2,\ j=1,...,N$.

Parenkant paprastą atsitiktinę imtį ir jos elementų sumą yra $\xi_n = \sum_{j=1}^{n} y_{i_j}$.

Tai $P\left\{\xi_n = \beta_1 m_1 + \beta_2(n-m_1)\right\} \to \frac{e^{-\lambda}}{m_1!}\lambda^{m_1}, m_1 = 0,1,2,...$,

kai $pM_1 \to \lambda$, $\frac{n}{N} \to 0, n\to\infty, N-n\to\infty$, kur $M_1 + M_2 = N, m_1 + m_2 = n, p = \frac{n}{N}$.

2 Teorema

Kai generalinę visumą tokio pavidalo $\overbrace{\beta_1,\beta_1,...,\beta_1}^{M_1},\overbrace{\beta_2,\beta_2,...,\beta_2}^{M_2},\overbrace{\beta_1+\beta_2,...,\beta_1+\beta_2}^{M_{12}}$,

populiacijos elementas $y_j = m_1(j)\beta_1 + m_2(j)\beta_2,\ j=1,...,N$.

Parenkant Puasono imtį ir jos elementų suma lygi $\xi_\mu^* = \sum_{l=1}^{\mu}\frac{y_{j_l}-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}$.

Tai $P\left\{\sum_{l=1}^{\mu} y_{j_l} = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2\right\} \to \frac{\lambda_1^{r_1}e^{-\lambda_1}}{r_1!}\cdot\frac{\lambda_2^{r_2}e^{-\lambda_2}}{r_2!}, r_1, r_2 = 0,1,2,...$,

kai $M_2 p \to \lambda_1, M_{12}p \to \lambda_2$, $\frac{n}{N} \to 0, n\to\infty, N-n\to\infty$, kur $M_1 + M_2 + M_{12} = N, p = \frac{n}{N}$.

3. J.HAJEKO TEOREMOS ĮRODYMAS IMTIMS IŠ KVAZIGARDELINIŲ VISUMŲ

3.1 1 Teoremos įrodymas imtims iš kvazigardelinių visumų paprastai atsitiktiniai imčiai

Mes savo darbe įrodysime J. Hajeko teoremą apie konvergavimą į Puasono pasiskirstymą, kai populiacijos elementai yra iš kvazigardelės, t.y.

$$y_{\nu j} = m_{1\nu}(j)\beta_1 + m_{2\nu}(j)\beta_2\,,\ \ j = 1,2,..,N_\nu\,.$$

Kur β_1 ir β_2 yra bazė sveikųjų skaičių aibėje.

Pastaba. Mūsų populiacija sudaro dviejų matavimų sveikoji bazė, nors galėtu būti ir didesnio matavimo bazė.

J. Hajekas siūlė nagrinėti generalinių visumų sistemą:

$$y_{\nu 1}, y_{\nu 2}, \ldots y_{\nu N_\nu}\,, \qquad \nu = 1,2,\ldots\,,$$

kurios matricinis pavidalas yra toks:

$$\begin{matrix} y_{11}, & y_{12}, & \ldots, & y_{1N_1} \\ y_{21}, & y_{22}, & \ldots, & y_{2N_2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{\nu 1}, & y_{\nu 2}, & \cdots, & y_{\nu N_\nu} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{matrix}$$

Imame paprasta atsitiktinę imtį $y_{\nu j_1}, y_{\nu j_2}, \ldots, y_{\nu j_{n_\nu}}$, tūrio *n*, kur $1 \le j_1 \ne j_2 \ne \ldots \ne j_{n_\nu} \le N$.

Pasinaudosime žymėjimais įvestais J. Hajeko straipsnyje ([1]) ir pažymėsime imties elementų sumą:

$$\xi_{n_\nu} = y_{\nu j_1} + y_{\nu j_2} + \ldots + y_{\nu j_{n_\nu}}$$

t.y.

$$\mathrm{E}\xi_{n_\nu} = \frac{n}{N}\sum_{i=1}^{N_\nu} y_{\nu j_i}\,,$$

kadangi J. Hajeko nagrinėjamą populiaciją sudaro sveiki teigiami skaičiai, tai (2.3.7) formulėje turime, kad ξ_{n_ν} taip pat sveiki skaičiai.

Bet mūsų populiacijos elementai nėra sveiki skaičiai, t.y.

$$y_{\nu j} = m_{1\nu}(j)\beta_1 + m_{2\nu}(j)\beta_2\,, \tag{3.1.1}$$

Taigi ir imties elementų suma mūsų atvejų nebus sveikas skaičius.

Kadangi $\vec{\beta} = (\beta_1, \beta_2)$ – tiesiškai nepriklausoma sveikoji bazė, tai turime tokią sąlygą:

$$y_{\nu j} = m_{1\nu}(j)\beta_1 + m_{2\nu}(j)\beta_{\nu 2} = 0 \Leftrightarrow m_{1\nu} = m_{2\nu} = 0,$$

$$y_{\nu 1} + y_{\nu 2} + \ldots + y_{\nu j_{n_\nu}} = (\underbrace{m_{1\nu}(1) + m_{1\nu}(2) + \ldots + m_{1\nu}(j_{n_\nu})}_{\tilde{m}_1})\beta_1 + (\underbrace{m_{2\nu}(1) + m_{2\nu}(2) + \ldots + m_{2\nu}(j_{n_\nu})}_{\tilde{m}_2})\beta_2 =$$

$$= \beta_1\tilde{m}_1 + \beta_2\tilde{m}_2.$$

Charakteringa funkcija ξ_{n_ν} tokia:

$$Me^{it\xi_{n_\nu}} = \frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n}\prod_{j=1}^{N}(q + pe^{i\theta + ity_{\nu j}})d\theta, \qquad (3.1.2)$$

kur $p = \frac{n}{N}$, $q = 1 - p$,

$P_N(n) = C_N^n p^n q^{N-n}$.

Toliau mes praleisime serijos indeksą ν ir vietoje populiacijos $y_{\nu_1}, y_{\nu_2}, \ldots, y_{\nu N_\nu}$ nagrinėsime realiųjų skaičių seką $y_1, y_2, \ldots, y_N$.

Kadangi $y_{\nu j}$ turi pavidalą (3.1.1), tai y_j bus toks

$$y_j = m_1(j)\beta_1 + m_2(j)\beta_2. \qquad (3.1.3)$$

Mūsų generalinė visuma yra (1.3.2) pavidalo, taigi $P\{\xi_n = \tilde{m}_1\beta_1 + \tilde{m}_2\beta_2\}$ turi apibendrinta hipergeometrinį pasiskirstymą ir mes tai įrodysime.

$$Me^{it\xi_n} = \frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n}\prod_{j=1}^{N}(q + pe^{i\theta + it(m_1(j)\beta_1 + m_2(j)\beta_2)})d\theta =$$

$$= \frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n}\left(q + pe^{i\theta + it\beta_1}\right)^{M_1}\left(q + pe^{i\theta + it\beta_2}\right)^{M_2} d\theta, \qquad (3.1.4)$$

nes $y_j = \beta_1 m_1(j) + \beta_2 m_2(j)$, $\qquad j = 1,...,N$

$y_j' = \beta_1 m_1(j) + \beta_2 \cdot 0$, $\qquad m_1(j) = 1$, $\quad j = 1,...,M_1$

$y_j'' = \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 m_2(j)$, $\qquad m_2(j) = 1$, $\quad j = M_1 + 1,...,N$

Generalinėje visumoje baziniai elementai β_1 ir β_2 kartojasi .

$\underbrace{\beta_1,...,\beta_1}_{M_1}$ ir $\underbrace{\beta_2,...,\beta_2}_{M_2 = N - M_1}$

Toliau skleidžiame (3.1.4) pagal Niutono binomo formulę ir gauname

$$Me^{it\xi_n} = \frac{1}{P_N(n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} \sum_{l_1=0}^{M_1} \sum_{l_2=0}^{M_2} C_{M_1}^{l_1} p^{l_1} e^{it\beta_1 l_1} e^{i\theta l_1} q^{M_1 - l_1} C_{M_2}^{l_2} p^{l_2} e^{it\beta_2 l_2} e^{i\theta l_2} q^{M_2 - l_2} d\theta =$$

$$= \frac{1}{P_N(n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} e^{i\theta l_1} e^{i\theta l_2} d\theta \sum_{l_1=0}^{M_1} \sum_{l_2=0}^{M_2} C_{M_1}^{l_1} p^{l_1} e^{it\beta_1 l_1} q^{M_1 - l_1} C_{M_2}^{l_2} p^{l_2} e^{it\beta_2 l_2} q^{M_2 - l_2} .$$

Yra žinoma, kad

$$\frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta(n - l_1 - l_2)} d\theta = \begin{cases} 1, & l_1 + l_2 = n, \\ 0, & l_1 + l_2 \neq n. \end{cases}$$

Gauname

$$\sum_{l_1=0}^{M_1} \sum_{l_2=0}^{M_2} \frac{C_{M_1}^{l_1} C_{M_2}^{l_2}}{C_N^n p^n q^{N-n}} p^{l_1 + l_2} q^{M_1 + M_2 - l_1 - l_2} e^{it(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2)} =$$

$$= \sum_{l_1=0}^{M_1} \sum_{l_2=0}^{M_2} \frac{C_{M_1}^{l_1} C_{M_2}^{l_2}}{C_N^n} e^{it(\beta_1 l_1 + \beta_2 l_2)} .$$

Įrodėme, kad $P\{\xi_n = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2\} = \dfrac{C_{M_1}^{l_1} C_{M_2}^{l_2}}{C_N^n}$.

Jeigu pažymėsime, kad $t_1 = t_2 = t$, tai

$$q(t_1, t_2) = \sum_{l_1=0}^{M_1} \sum_{l_2=0}^{M_2} P\{\xi_n = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2\} e^{it_1\beta_1 l_1 + it_2\beta_2 l_2} .$$

Dabar turime dvimatę kvazigardelinę charakteringą funkciją, kurią padauginame iš

$$\frac{\beta_1\beta_2}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-it_1\beta_1\tilde{m}_1 - it_2\beta_2\tilde{m}_2} dt_1 dt_2 ,$$

ir gauname

$$\frac{\beta_1\beta_2}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-it_1\beta_1\tilde{m}_1 - it_2\beta_2\tilde{m}_2} q(t_{1,} t_2) dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{\beta_1\beta_2}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-it_1\beta_1\tilde{m}_1 - it_2\beta_2\tilde{m}_2} dt_1 dt_2 \cdot \sum_{l_1=0}^{M_1} \sum_{l_2=0}^{M_2} P\{\xi_n = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2\} e^{it_1\beta_1 l_1 + it_2\beta_2 l_2} =$$

$$= \sum_{l_1=0}^{M_1} \sum_{l_2=0}^{M_2} P\{\xi_n = \beta_1 l_1 + \beta_2 l_2\} \frac{\beta_1\beta_2}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-it_1\beta_1(\tilde{m}_1 - l_1)} e^{-it_2\beta_2(\tilde{m}_2 - l_2)} dt_1 dt_2$$

Taigi pagal ξ_n apibrėžimą yra

$$P\{\xi_n = \beta_1\tilde{m}_1 + \beta_2\tilde{m}_2\} = \frac{\beta_1\beta_2}{(2\pi)^2} \int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-it_1\beta_1\tilde{m}_1 - it_2\beta_2\tilde{m}_2} q(t_{1,} t_2) dt_1 dt_2 .$$

Kadangi

1) $$\frac{\beta_1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} e^{-it_1\beta_1(\tilde{m}_1-l_1)}dt_1=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iv(\tilde{m}_1-l_1)}dv=\begin{cases}1, & \tilde{m}_1=l_1,\\ 0, & \tilde{m}_1\neq l_1,\end{cases}$$

kur $t_1\beta_1=v$,

2) $$\frac{\beta_2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-it_2\beta_2(\tilde{m}_2-l_2)}dt_2=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iu(\tilde{m}_2-l_2)}du=\begin{cases}1, & \tilde{m}_2=l_2,\\ 0, & \tilde{m}_2\neq l_2,\end{cases}$$

kur $t_2\beta_2=u$,

gavome, kad $P\{\xi_n=\beta_1\tilde{m}_1+\beta_2\tilde{m}_2\}=\dfrac{C_{M_1}^{\tilde{m}_1}C_{M_2}^{\tilde{m}_2}}{C_N^n}$.

Dabar reikia įrodyti, kad $P\{\xi_n=\beta_1\tilde{m}_1+\beta_2\tilde{m}_2\}$ konverguoja į Puasono pasiskirstymą.

$$Me^{it\xi_n}=\frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}\prod_{j=1}^{N}(q+pe^{i\theta+it(m_1(j)\beta_1+m_2(j)\beta_2)})d\theta$$

Jeigu pažymėsime, kad $t_1=t_2=t$, tai

$$Me^{it\xi_n}=\frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}\prod_{j=1}^{N}(q+pe^{i\theta+im_1(j)t_1\beta_1+im_2(j)t_2\beta_2})d\theta=$$

$$=\frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}g(\theta,t_1,t_2)d\theta, \tag{3.1.5}$$

čia $\prod_{j=1}^{N}(q+pe^{i\theta+im_1(j)t_1\beta_1+im_2(j)t_2\beta_2})=g(\theta,t_1,t_2)$. (3.1.6)

Dabar atskirai išrašysime kaip atrodo $g(\theta, t_1, t_2)$

$$g(\theta, t_1, t_2) = \prod_{j=1}^{N} (q + pe^{i\theta + im_1(j)t_1\beta_1 + im_2(j)t_2\beta_2}) =$$

$$= \prod_{j=1}^{N} g_j(\theta, t_1, t_2) = Me^{i\theta S'_N + it_1 S''_N + it_2 S'''_N} \tag{3.1.7}$$

Pastebėkime, kad

$$qe^{i\theta 0 + it_1 0 + it_2 0} + pe^{i\theta + im_1(j)t_1\beta_1 + im_2(j)\beta_2} = Me^{i(\vec{t}\,\vec{\eta})},$$

kur $\vec{\eta}_j = (\eta'_j, \eta''_j, \eta'''_j)$,

$$P\{\eta'_j = 0, \eta''_j = 0, \eta'''_j = 0\} = q$$

$$P\{\eta'_j = 1, \eta''_j = \beta_1 m_1(j), \eta'''_j = \beta_2 m_2(j)\} = p.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$S'_N = \sum_{j=1}^{N} \eta'_j \quad S''_N = \sum_{j=1}^{N} \eta''_j \quad S'''_N = \sum_{j=1}^{N} \eta'''_j$$

$\vec{\eta}_1, ..., \vec{\eta}_N$ – nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai.

Atsitiktinio vektoriaus $\vec{\eta}_j$ charakteringoji funkcija yra $g_j(\theta, t_1, t_2)$ visiems $j = 1, ..., N$.

Dabar turime, kad

$$P\{S'_N = n, S''_N = m_1\beta_1, S'''_N = m_2\beta_2\} =$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \beta_1\beta_2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-i\theta n-im_1t_1\beta_1-im_2t_2\beta_2} g(\theta,t_{1,}t_2)d\theta dt_1dt_2 \,, \tag{3.1.8}$$

kur $m_1, m_2 = 0,\pm1,\pm2,....$.

Pagal apibrėžimą $g(\theta,t_1,t_2)$, kai

$S_N^{'} = m^{'}, S_N^{''} = m^{''}, S_N^{'''} = m^{'''}$,

kur $m^{'} = 0,1,..., N$, $m^{''} = -\infty,...,+\infty$, $m^{'''} = -\infty,...,+\infty$.

Gauname

$$Me^{i\theta S_N' + it_1 S_N'' + it_2 S_N'''} = g(\theta, t_1, t_2) =$$

$$= \sum_{m'=0}^{N}\sum_{m''=-\infty}^{\infty}\sum_{m'''=-\infty}^{\infty} e^{i\theta m' + it_1 m''\beta_1 + it_2 m'''\beta_2} P\{S_N' = m', S_N'' = m''\beta_1, S_N''' = m'''\beta_2\} \tag{3.1.9}$$

Dabar (3.1.9) formulę padauginsime iš integralo

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \beta_1\beta_2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-i\theta n-im_1t_1\beta_1-im_2t_2\beta_2} d\theta dt_1dt_2$$

ir gauname

$$P\{S_N' = n, S_N'' = m_1\beta_1, S_N''' = m_2\beta_2\} =$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \beta_1\beta_2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-i\theta n-im_1t_1\beta_1-im_2t_2\beta_2} g(\theta,t_1,t_2)d\theta dt_1dt_2 =$$

$$= \sum_{m'=0}^{N}\sum_{m''=-\infty}^{\infty}\sum_{m'''=-\infty}^{\infty} P\{S_N' = m', S_N'' = m''\beta_1, S_N''' = m'''\beta_2\}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \beta_1\beta_2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-i\theta n - im_1t_1\beta_1 - im_2t_2\beta_2} \cdot e^{i\theta m' + it_1m''\beta_1 + it_2m'''\beta_2} d\theta dt_1 dt_2 \,.$$

Dabar atskirai paskaičiuosime integralus:

$$\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3 \beta_1\beta_2 \int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-i\theta n - im_1t_1\beta_1 - im_2t_2\beta_2 + i\theta m' + it_1m''\beta_1 + it_2m'''\beta_2} d\theta dt_1 dt_2 =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{i\theta(m'-n)} d\theta \frac{\beta_1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} e^{it_1\beta_1(m''-m_1)} dt_1 \frac{\beta_2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{it_2\beta_2(m'''-m_1))} dt_2 = \begin{cases} 1, & m' = n, \; m'' = m_1, \; m''' = m_2 \\ 0, & kitais \;\; atvejais \end{cases}$$

Perrašysime (3.1.6) formulę taip, kad būtų patogu įstačius į (3.1.8) formulę, suintegruoti:

$$g(\theta, t_1, t_2) = \prod_{j=1}^{N}\left(q + pe^{i\theta + it_1\beta_1m_1(j) + it_2\beta_2m_2(j)}\right) =$$

$$= \exp\{\sum_{j=1}^{N}\ln(q + pe^{i\theta + it_1\beta_1m_1(j) + it_2\beta_2m_2(j)})\} \,.$$

Iš čia seka, kad, kai $q = 1 - p$, tuomet

$$g(\theta, t_1, t_2) = \exp\{\sum_{j=1}^{N}\ln(1 - p + pe^{i\theta + it_1\beta_1m_1(j) + it_2\beta_2m_2(j)})\} =$$

$$= \exp\{\sum_{j=1}^{N}\ln(1 + p(e^{i\theta + it_1\beta_1m_1(j) + it_2\beta_2m_2(j)} - 1))\} = \exp\{\sum_{j=1}^{N}\ln(1 + x)\} \,,$$

čia $x = p(e^{i\theta + it_1\beta_1m_1(j) + it_2\beta_2m_2(j)} - 1)$.

Kadangi $\ln(1 + x) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{(-1)^{j+1}x^j}{j}$, tai

pagal sąlygą $|x| < 1 \quad \Rightarrow$

$$\Rightarrow \quad \left| p(e^{i\theta+it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)\right| \le p(1+1)=2p \Rightarrow p<\frac{1}{2}.$$

Gauname

$$g(\theta,t_1,t_2)\approx \exp\{\sum_{j=1}^{N} p(e^{i\theta+it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)\}=$$

$$=\exp\{\sum_{j=1}^{N} p\left((e^{i\theta}-1+1)(e^{it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1+1)-1\right)\}=$$

$$=\exp\{\sum_{j=1}^{N} p\left(((e^{i\theta}-1)+1)((e^{it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)+1)-1\right)\}=$$

$$=\exp\{\sum_{j=1}^{N} p((e^{i\theta}-1)(e^{it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)+(e^{i\theta}-1)+(e^{it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)+1-1)\}=$$

$$=e^{\sum_{j=1}^{N} p(e^{i\theta}-1)}\; e^{\sum_{j=1}^{N} p(e^{it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)}\; e^{\sum_{j=1}^{N} p(e^{i\theta}-1)(e^{it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)}.$$

Gavome, kad

$$g(\theta,t_1,t_2)=e^{\sum_{j=1}^{N} p(e^{i\theta}-1)}\; e^{\sum_{j=1}^{N} p(e^{it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)}\cdot$$

$$\cdot\, e^{\sum_{j=1}^{N} p(e^{i\theta}-1)(e^{it_1\beta_1 m_1(j)+it_2\beta_2 m_2(j)}-1)}. \tag{3.1.10}$$

Toliau nagrinėsime $y_1,...,y_N$, kurių pavidalas yra

$$y_j = \beta_1 m_1(j) + \beta_2 m_2(j), \qquad j = 1,\ldots,N,$$

$$y_j' = \beta_1 m_1(j) + \beta_2 \cdot 0, \qquad m_1(j) = 1, \quad j = 1,\ldots,M_1,$$

$$y_j'' = \beta_1 \cdot 0 + \beta_2 m_2(j), \qquad m_2(j) = 1, \quad j = M_1 + 1,\ldots,N.$$

Generalinėje visumoje baziniai elementai β_1 ir β_2 kartojasi

$$\underbrace{\beta_1,\ldots,\beta_1}_{M_1} \text{ ir } \underbrace{\beta_2,\ldots,\beta_2}_{M_2 = N - M_1}.$$

Šiuo atveju gauname, kad

$$\sum_{j=1}^{N} (e^{it_1\beta_1 m_1(j) + it_2\beta_2 m_2(j)} - 1) =$$

$$= \sum_{j=1}^{M_1} \left(e^{it_1\beta_1 m_1(j)} \cdot e^{it_2\beta_2 m_2(j)} - 1 \right)\Bigg|_{\substack{m_1(j)=1 \\ m_2(j)=0}} + \sum_{j=M_1+1}^{N} \left(e^{it_1\beta_1 m_1(j)} \cdot e^{it_2\beta_2 m_2(j)} - 1 \right)\Bigg|_{\substack{m_1(j)=0 \\ m_2(j)=1}} =$$

$$= \sum_{j=1}^{M_1} \left(e^{it_1\beta_1 m_1(j)} - 1 \right) + \sum_{j=M+_1 1}^{N} \left(e^{it_2\beta_2 m_2(j)} - 1 \right) = M_1 \left(e^{it_1\beta_1} - 1 \right) + M_2 \left(e^{it_2\beta_2} - 1 \right).$$

Dabar gauta išraiška įstatome į (3.1.10)

$$g(\theta, t_1, t_2) = e^{Np(e^{i\theta} - 1)} \cdot e^{p(M_1\left(e^{it_1\beta_1} - 1\right) + M_2\left(e^{it_2\beta_2} - 1\right))} \cdot e^{p(M_1\left(e^{it_1\beta_1} - 1\right) + M_2\left(e^{it_2\beta_2} - 1\right))(e^{i\theta} - 1)} \qquad (3.1.11)$$

Ir įstačius (3.1.11) į (3.1.8) gauname

$$P\{S_N' = n, S_N'' = m_1\beta_1, S_N''' = m_2\beta_2\} \approx \left(\frac{1}{2\pi} \right)^3 \beta_1\beta_2 \int_{-\pi}^{\pi} \int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} \int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} (e^{-i\theta n - it_1\beta_1 m_1 - it_2\beta_2 m_2}) \cdot$$

$$\cdot\left(e^{Np(e^{i\theta}-1)}\cdot e^{p(M_1\left(e^{it_1\beta_1}-1\right)+M_2\left(e^{it_2\beta_2}-1\right))}e^{p(M_1\left(e^{it_1\beta_1}-1\right)+M_2\left(e^{it_2\beta_2}-1\right))(e^{i\theta}-1)}\right)d\theta dt_1dt_2. \qquad (3.1.12)$$

Apskaičiuosime (3.1.12) integralą:

$$V=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\beta_1\beta_2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}}(e^{-i\theta n-it_1\beta_1m_1-it_2\beta_2m_2})\cdot e^{Np(e^{i\theta}-1)}\cdot e^{p(M_1\left(e^{it_1\beta_1}-1\right)+M_2\left(e^{it_2\beta_2}-1\right))}\cdot$$

$$\cdot\, e^{p(M_1\left(e^{it_1\beta_1}-1\right)+M_2\left(e^{it_2\beta_2}-1\right))(e^{i\theta}-1)}d\theta dt_1dt_2=$$

$$=\left(\frac{1}{2\pi}\right)^3\beta_1\beta_2\int_{-\pi}^{\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}}e^{-i\theta n-it_1\beta_1m_1-it_2\beta_2m_2}e^{Npe^{i\theta}}e^{-Np}e^{pM_1e^{it_1\beta_1}}e^{pM_2e^{it_2\beta_2}}e^{-pM_1}e^{-pM_2}\cdot$$

$$\cdot\, e^{pM_1e^{it_1\beta_1}(e^{i\theta}-1)}e^{-pM_1(e^{i\theta}-1)}e^{pM_2e^{it_2\beta_2}(e^{i\theta}-1)}e^{-pM_2(e^{i\theta}-1)}d\theta dt_1dt_2=$$

$$=e^{-Np}e^{-pM_1}e^{-pM_2}\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\beta_1\beta_2\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}}e^{-it_1\beta_1m_1-it_2\beta_2m_2}e^{pM_1e^{it_1\beta_1}}e^{pM_2e^{it_2\beta_2}}dt_1dt_2\cdot$$

$$\cdot\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}e^{-i\theta n}e^{Npe^{i\theta}}e^{pM_1e^{it_1\beta_1}(e^{i\theta}-1)}e^{-pM_1(e^{i\theta}-1)}e^{pM_2e^{it_2\beta_2}(e^{i\theta}-1)}e^{-pM_2(e^{i\theta}-1)}d\theta \qquad (3.1.13)$$

Atskirai apskaičiuosime integralą, kurio pointegralinė funkcija priklauso nuo θ:

$$J = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} e^{Npe^{i\theta}} e^{pM_1 e^{it_1\beta_1}(e^{i\theta}-1)} e^{-pM_1 e^{i\theta}} e^{pM_1} e^{pM_2 e^{it_2\beta_2}(e^{i\theta}-1)} e^{-pM_2 e^{i\theta}} e^{pM_2} d\theta =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} e^{Npe^{i\theta}} e^{pM_1 e^{it_1\beta_1}(e^{i\theta}-1)+pM_2 e^{it_2\beta_2}(e^{i\theta}-1)} e^{-pe^{i\theta}(M_1+M_2)} e^{p(M_1+M_2)} d\theta .$$

Kadangi $M_1 + M_2 = N$, tai gauname

$$J = e^{Np}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} e^{\left(e^{i\theta}-1\right)p(M_1 e^{it_1\beta_1}+M_2 e^{it_2\beta_2})} d\theta = e^{Np}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} e^{\lambda(e^{i\theta}-1)} d\theta , \qquad (3.1.14)$$

kur $\lambda = p\left(M_1 e^{it_1\beta_1} + M_2 e^{it_2\beta_2}\right)$.

Kadangi $\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} e^{\lambda(e^{i\theta}-1)} d\theta = \frac{\lambda^n e^{-\lambda}}{n!}$, tai integralą J galime dabar užrašyti tokių pavidalų

$$J = e^{Np}\frac{\left(p\left(M_1 e^{it_1\beta_1} + M_2 e^{it_2\beta_2}\right)\right)^n e^{-p\left(M_1 e^{it_1\beta_1}+M_2 e^{it_2\beta_2}\right)}}{n!} =$$

$$= e^{Np}\frac{\left(pM_1 e^{it_1\beta_1} + pM_2 e^{it_2\beta_2}\right)^n e^{-p\left(M_1 e^{it_1\beta_1}+M_2 e^{it_2\beta_2}\right)}}{n!}$$

Pagal Niutono binomo formulė,

$$(a+b)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l a^l \cdot b^{n-l} ,$$

turime $\left(pM_1 e^{it_1\beta_1} + pM_2 e^{it_2\beta_2}\right)^n = \sum_{l=0}^{n} C_n^l \left(pM_1\right)^l e^{it_1\beta_1 l} \cdot \left(pM_2\right)^{n-l} e^{it_2\beta_2(n-l)}$.

Taigi

$$J = \frac{e^{Np}}{n!}\cdot\sum_{l=0}^{n} C_n^l \left(pM_1\right)^l e^{it_1\beta_1 l} \cdot \left(pM_2\right)^{n-l} e^{it_2\beta_2(n-l)} \cdot e^{-p\left(M_1 e^{it_1\beta_1}+M_2 e^{it_2\beta_2}\right)}. \qquad (3.1.15)$$

Gauta išraišką įstatome į (3.1.13) ir gauname, kad

$$V=e^{-Np}e^{-pM_1}e^{-pM_2}\frac{e^{Np}}{n!}\sum_{l=0}^{n}C_n^l\left(pM_1\right)^l\left(pM_2\right)^{n-l}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1}{2\pi}\right)^2\beta_1\beta_2\int\limits_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int\limits_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}}e^{-it_1\beta_1m_1-it_2\beta_2m_2}e^{pM_1e^{it_1\beta_1}}e^{pM_2e^{it_2\beta_2}}e^{it_1\beta_1l}e^{it_2\beta_2(n-l)}\cdot e^{-pM_1e^{it_1\beta_1}}e^{-pM_2e^{it_2\beta_2}}dt_1dt_2=$$

$$=e^{-pM_1}e^{-pM_2}\frac{1}{n!}\sum_{l=0}^{n}C_n^l\left(pM_1\right)^l\left(pM_2\right)^{n-l}\frac{1}{2\pi}\beta_1\int\limits_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}e^{-it_1\beta_1(m_1-l)}dt_1\frac{1}{2\pi}\beta_2\int\limits_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}}e^{-it_2\beta_2(m_2-(n-l))}dt_2\,.$$

Kadangi

1) $$\frac{1}{2\pi}\beta_1\int\limits_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}e^{-it_1\beta_1(m_1-l)}dt_1=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-iv(m_1-l)}dv=\begin{cases}1, & m_1=l,\\ 0, & m_1\neq l,\end{cases}$$

kur $t_1\beta_1=v$,

2) $$\frac{1}{2\pi}\beta_2\int\limits_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}}e^{-it_2\beta_2(m_2-(n-l))}dt_2=\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}e^{-iu(m_2-(n-l))}du=\begin{cases}1, & m_2=n-l,\\ 0, & m_2\neq n-l,\end{cases}$$

kur $t_2\beta_2=u$.

Gavome, kad

$$V=e^{-pM_1}e^{-pM_2}\frac{1}{n!}C_n^{m_1}\left(pM_1\right)^{m_1}\left(pM_2\right)^{m_2}=\frac{n!}{m_1!(n-m_1)!}\frac{1}{n!}e^{-pM_1}\left(pM_1\right)^{m_1}e^{-pM_2}\left(pM_2\right)^{m_2}=$$

$$=\frac{n!}{m_1!(n-m_1)!}\frac{1}{n!}e^{-pM_1}\left(pM_1\right)^{m_1}e^{-pM_2}\left(pM_2\right)^{m_2}=$$

$$=\frac{e^{-pM_1}}{m_1!}\left(pM_1\right)^{m_1}\frac{e^{-pM_2}}{m_2!}\left(pM_2\right)^{m_2}\,. \tag{3.1.16}$$

Priimame sąlygas

$$pM_1 \to \lambda\,,\ \frac{nM_1}{N} \to \lambda \qquad (3.1.17)$$

Kadangi $M_2 = N - M_1$, tai

$$pM_2 = \frac{n}{N}(N - M_1) = n - \frac{n}{N}M_1 \sim n - \lambda\,. \qquad (3.1.18)$$

Pasinaudodami lokaline Muavro-Loplaso teorema, mes gauname, kad

$$C_N^n\left(\frac{n}{N}\right)^n\left(1-\frac{n}{N}\right)^{N-n} \sim \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{(n-n)^2}{N\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)}}}{\sqrt{2\pi N\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi n\left(1-\frac{n}{N}\right)}}\,, \qquad (3.1.19)$$

nes $N\dfrac{n}{N} = n \to \infty$, todėl $-\dfrac{1}{2}\dfrac{(n-n)^2}{N\frac{n}{N}\left(1-\frac{n}{N}\right)} \to 0$.

Iš lokalinės Muavro-Loplaso teoremos turime, kad

$$\frac{e^{-pM_2}\left(pM_2\right)^{m_2}}{m_2!} = P\{\xi_p = m_2\} \approx \frac{e^{-\frac{(m_2 - pM_2)^2}{2pM_2}}}{\sqrt{2\pi pM_2}}\,. \qquad (3.1.20)$$

Kadangi,

$m_2 = n - m_1$ ir iš (3.1.18) formulės mes turime, kad $pM_2 = n - \dfrac{n}{N}M_1 \sim n - \lambda$,

tai $m_2 - pM_2 = m_2 - \left(n - \dfrac{n}{N}M_1\right) = -m_1 + \dfrac{n}{N}M_1$.

Tada įstatome šias išraiškas į (3.1.20)

$$\frac{e^{-\frac{(m_2 - pM_2)^2}{2pM_2}}}{\sqrt{2\pi pM_2}} \approx \frac{e^{-\frac{\left(-m_1+\frac{n}{N}M_1\right)^2}{2\left(n-\frac{n}{N}M_1\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(n-\frac{n}{N}M_1\right)}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi\left(n-\frac{n}{N}M_1\right)}}\,,$$

nes $e^{-\frac{\left(-m_1+\frac{n}{N}M_1\right)^2}{2\left(n-\frac{n}{N}M_1\right)}} \to e^0 \to 1$.

$$\frac{\dfrac{e^{-pM_2}\left(pM_2\right)^{m_2}}{m_2!}}{C_N^n\left(\dfrac{n}{N}\right)^n\left(1-\dfrac{n}{N}\right)^{N-n}} \approx \frac{\dfrac{e^{-\frac{\left(m_2-pM_2\right)^2}{2pM_2}}}{\sqrt{2\pi pM_2}}}{\dfrac{1}{\sqrt{2\pi n\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}}} \approx \frac{e^{-\frac{\left(-m_1+\frac{n}{N}M_1\right)^2}{2\left(n-\frac{n}{N}M_1\right)}}}{\sqrt{2\pi\left(n-\dfrac{n}{N}M_1\right)}}\sqrt{2\pi n\left(1-\frac{n}{N}\right)} \approx$$

$$\approx \sqrt{\frac{n\left(1-\dfrac{n}{N}\right)}{\left(n-\lambda\right)}} \to \sqrt{\frac{1-\dfrac{n}{N}}{1-\dfrac{\lambda}{n}}} \to 1,$$

čia $\dfrac{n}{N} \to 0$, $n \to \infty$, $N-n \to \infty$.

Taigi gavome, kad

$$P\left\{\xi_n = \beta_1 m_1 + \beta_2\left(n-m_1\right)\right\} = \frac{P\left\{S_N' = n, S_N'' = m_1\beta_1, S_N''' = m_2\beta_2\right\}}{P\left\{S_N' = n\right\}} \approx$$

$$\approx \frac{\dfrac{e^{-pM_1}}{m_1!}\left(pM_1\right)^{m_1}\dfrac{e^{-pM_2}}{m_2!}\left(pM_2\right)^{m_2}}{C_N^n\left(\dfrac{n}{N}\right)^n\left(1-\dfrac{n}{N}\right)^{N-n}} \to \frac{e^{-\lambda_1}}{m_1!}\lambda^{m_1}\ . \tag{3.1.21}$$

Mes įrodėme, kad su tokiom sąlygom $pM_1 \to \lambda$, $\dfrac{n}{N} \to 0, n \to \infty, N-n \to \infty$,kur $M_1 + M_2 = N, m_1 + m_2 = n, p = \dfrac{n}{N}$, teisinga 1 Teoremą $P\left\{\xi_n = \beta_1 m_1 + \beta_2\left(n-m_1\right)\right\} \to \dfrac{e^{-\lambda}}{m_1!}\lambda^{m_1}$.

3.2 2 Teoremos įrodymas imtims iš kvazigardelinių visumų Puasoniniai imčiai

Mūsų nagrinėjama generalinė visuma yra:

$$\overbrace{\beta_1,...,\beta_1}^{M_1}\ \overbrace{\beta_2,...,\beta_2}^{M_2}\ \overbrace{\beta_1+\beta_2,...,\beta_1+\beta_2}^{M_{12}}$$

kur $M_1 + M_2 + M_{12} = N$.

Populiacijos elementas yra iš kvazigardelės, t.y.

$$y_{\nu j} = m_{1\nu}(j)\beta_1 + m_{2\nu}(j)\beta_2\,,\ \ j = 1,2,..,N_\nu\,.$$

Kur β_1 ir β_2 yra bazė sveikųjų skaičių aibėje.

Imame Puasoninę imtį $y_{\nu j_1}, y_{\nu j_2},..., y_{\nu j_{k_\nu}}$, t.y. pasirenkame μ su tokia tikimybe

$P\{\mu = k\} = C_N^k \left(\frac{n}{N}\right)^k \left(1-\frac{n}{N}\right)^{N-k}$, kur $k = 0,1,...,N$,

Tada statistika užsirašo taip

$$\xi_\mu^* = \sum_{j=1}^{\mu} y_{i_j}\ , \qquad (3.2.1)$$

kur ξ_μ^* – suma nepriklausomų atsitiktinių dydžių.

Atsitiktinio dydžio ξ_μ^* charakteringa funkcija yra tokia:

$$Me^{it\xi_\mu^*} = \prod_{j=1}^{N}\left(q + pe^{it\beta_1 m_1(j)+it\beta_2 m_2(j)}\right)$$

$$Me^{it\xi_\mu^*} = \left(q + pe^{it\beta_1}\right)^{M_1}\left(q + pe^{it\beta_2}\right)^{M_2}\left(q + pe^{it(\beta_1+\beta_2)}\right)^{M_{12}}$$

$$\xi_{\mu}^{*} = \sum_{j_1=1}^{M_1} \gamma'_{j_1} + \sum_{j_2=1}^{M_2} \gamma''_{j_2} + \sum_{j_3=1}^{M_{12}} \gamma'''_{j_3}$$

$Me^{it\gamma'_{j1}} = q + pe^{it\beta_1}$, $\gamma'_1,...,\gamma'_{M_1}$ – nepriklausomi ir v.p. atsitiktiniai dydžiai

$Me^{it\gamma''_{j1}} = q + pe^{it\beta_2}$, $\gamma''_1,...,\gamma''_{M_2}$ – nepriklausomi ir v.p. atsitiktiniai dydžiai

$Me^{it\gamma'''_{j1}} = q + pe^{it\beta_3}$, $\gamma'''_1,...,\gamma'''_{M_3}$ – nepriklausomi ir v.p. atsitiktiniai dydžiai

$$Me^{it\xi_{\mu}^{*}} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty} \sum_{m_2=-\infty}^{\infty} \sum_{m_3=-\infty}^{\infty} P\left\{ \sum_{j=1}^{n} y_{i_j} = m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3 \right\} e^{it(m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3)} =$$

$$= \frac{1}{P_N(n)} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} \prod_{j=1}^{N} (q + pe^{i\theta + ity_j}) d\theta = g(t) .$$

Pagal $y_1,..., y_N$ apibrėžimą

$$g(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{1}{P_N(n)} \int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n} \left(q + pe^{i\theta + it\beta_1}\right)^{M_1} \left(q + pe^{i\theta + it\beta_2}\right)^{M_2} \left(q + pe^{i\theta + it(\beta_1 + \beta_2)}\right)^{M_{12}} d\theta .$$

J. Hajekas įrodė, kad

$$g(t) \sim \left(q + pe^{it\beta_1}\right)^{M_1} \left(q + pe^{it\beta_2}\right)^{M_2} \left(q + pe^{it(\beta_1 + \beta_2)}\right)^{M_{12}} = q(t) .$$

Konstruojame lydintį dėsnį

$$e^{M_1(q+pe^{it\beta_1}-1)+M_2(q+pe^{it\beta_2}-1)+M_{12}(q+pe^{it(\beta_1+\beta_2)}-1)} =$$

$$= \exp\left\{M_1 p\left(e^{it\beta_1}-1\right)+M_2 p\left(e^{it\beta_2}-1\right)+M_{12} p\left(e^{it(\beta_1+\beta_2)}-1\right)\right\}.$$

Tarkime

$M_1 p \to \lambda_1$ ir $M_2 p \to \lambda_2$.

Tuomet

$M_{12} = N - M_1 - M_2$

$p(N - M_1 - M_2) = \frac{n}{N}\left(N - M_1 - M_2\right) = n - pM_1 - pM_2$.

Esant šiomis prielaidomis gauname

$$e^{M_1 p(e^{it\beta_1}-1)} \to e^{\lambda_1(e^{it\beta_1}-1)}$$

$$e^{M_2 p(e^{it\beta_2}-1)} \to e^{\lambda_2(e^{it\beta_2}-1)}.$$

Kadangi $pM_{12} \to \infty$, tai

$$e^{pM_{12}\left(e^{i\frac{t}{B_n}(\beta_1+\beta_2)}-1\right)-\frac{itA_n}{B_n}} \tag{3.2.2}$$

Čia $A_n = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\ln e^{pM_{12}\left(e^{it(\beta_1+\beta_2)}-1\right)}\Big|_{t=0} = \frac{1}{i}\frac{d}{dt}\left[pM_{12}\left(e^{it(\beta_1+\beta_2)}-1\right)\right]_{t=0} =$

$$= \frac{1}{i} pM_{12} i(\beta_1+\beta_2)e^{it(\beta_1+\beta_2)}\big|_{t=0} = pM_{12}(\beta_1+\beta_2)$$

ir

$$B_n^2 = \frac{1}{i^2}\frac{d^2}{dt^2}\left[pM_{12}(e^{it(\beta_1+\beta_2)}-1)\right]_{|t=0} = \frac{1}{i^2}\left(pM_{12}i(\beta_1+\beta_2)e^{it(\beta_1+\beta_2)}\right)'_{|t=0} =$$

$$= \frac{1}{i^2}\left(pM_{12}i(\beta_1+\beta_2)i(\beta_1+\beta_2)e^{it(\beta_1+\beta_2)}\right)_{|t=0} = pM_{12}(\beta_1+\beta_2)^2 .$$

Iš (3.2.2) gauname

$$\exp\left\{pM_{12}\left(e^{i\frac{t}{\sqrt{pM_{12}}}}-1\right)-\frac{it(\beta_1+\beta_2)pM_{12}}{(\beta_1+\beta_2)\sqrt{pM_{12}}}\right\} =$$

$$\exp\left\{pM_{12}\left(i\frac{t}{\sqrt{pM_{12}}}+\frac{1}{2}\left(\frac{it}{\sqrt{pM_{12}}}\right)^2 pM_{12}+\frac{1}{6}\left(\frac{it}{\sqrt{pM_{12}}}\right)^3 pM_{12}+\ldots-it\sqrt{pM_{12}}\right)\right\} =$$

$$e^{-\frac{1}{2}t^2+\frac{1}{6}\frac{(it)^3}{\sqrt{pM_{12}}}+\ldots} \to e^{-\frac{t^2}{2}}, \text{ kadangi } pM_{12}\to\infty$$

Taigi

$$P\left\{\sum_{j=1}^{n} y_{i_j} = m_1\beta_1 + m_2\beta_2 + m_3\beta_3\right\} \to P\left\{\eta_{\beta_1} = m_1\right\}P\left\{\eta_{\beta_2} = m_2\right\}\frac{e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{\beta_1 m_1+\beta_2 m_2 - A_n}{B_n}\right)^2}}{\sqrt{2\pi B_n^2}} .$$

Bet mus toks atsakymas netenkina, nes mes gavome, kad tikimybė konverguoja į mišrųjį pasiskirstymą.

Todėl išsprendėme šį uždavinį kitokių būdų.

Nagrinėjam tokią pat generalinę visumą:

$$\underbrace{\beta_1,\ldots,\beta_1}_{M_1}\ \underbrace{\beta_2,\ldots,\beta_2}_{M_2}\ \underbrace{\beta_1+\beta_2,\ldots,\beta_1+\beta_2}_{M_{12}} ,$$

kur $M_1 + M_2 + M_{12} = N$,

ir tokią pat statistiką ξ_μ^*.

Bet po centravimo ir normavimo generalines visumos

$$\overbrace{0,0,...,0}^{M_1},\quad \overbrace{1,1,...,1}^{\mathrm{M}_2},\quad \overbrace{\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1},\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1},...,\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}}^{M_{12}},$$

pasikeičia ir statistika, kurį dabar atrodo taip:

$$\xi_\mu^* = \sum_{l=1}^{\mu} \frac{y_{j_l} - \beta_2}{\beta_2 - \beta_1}. \qquad (3.2.3)$$

Statistikos Charakteringa funkcija bus tokia:

$$Me^{it\xi_\mu^*} = \frac{1}{P_N(n)}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-i\theta n}\prod_{j=1}^{N}(q + pe^{i\theta + it\frac{y_j-\beta_2}{\beta_2-\beta_1}})d\theta .$$

Užrašysime charakteringą funkciją tokių pavidalų:

$$Me^{it\sum_{l=1}^{\mu}\frac{y_{j_l}-\beta_2}{\beta_2-\beta_1}} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty} P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}\frac{y_{j_l}-\beta_2}{\beta_2-\beta_1} = m_1 + \frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}m_2\right\} e^{it\left(m_1 + \frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}m_2\right)}$$

$$P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}\frac{y_{j_l}-\beta_2}{\beta_2-\beta_1} = m_1 + \frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}m_2\right\} = P\left\{\sum_{l=1}^{\mu} y_{j_l} = \mu\beta_1 + (\beta_2-\beta_1)m_1 + \beta_2 m_2\right\} =$$

$$= P\left\{\sum_{l=1}^{\mu} y_{j_l} = (\mu - m_1)\beta_1 + m_1\beta_2 + m_2\beta_2\right\}.$$

$$Me^{-it\frac{\mu\beta_2}{\beta_2-\beta_1}}e^{\frac{it}{\beta_2-\beta}\sum_{l=1}^{n}y_{j_l}} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}y_{j_l} = (\mu-m_1)\beta_1+m_1\beta_2+m_2\beta_2\right\}e^{it\left(m_1+\frac{\beta_2}{\beta_2-\beta_1}m_2\right)} =$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}y_{j_l} = (\mu-m_1)\beta_1+m_1\beta_2+m_2\beta_2\right\}e^{i\frac{t}{\beta_2-\beta_1}(m_1(\beta_2-\beta_1)+\beta_2 m_2)}$$

Pakeičiame $\dfrac{t}{\beta_2-\beta_1} = t'$

$$e^{-it'\mu\beta_2}Me^{it'\sum_{l=1}^{\mu}y_{j_l}} = \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}e^{it'(m_1(\beta_2-\beta_1)+\beta_2 m_2)}P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}y_{j_l} = (\mu-m_1)\beta_1+m_1\beta_2+m_2\beta_2\right\} =$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}e^{it'(\beta_1(\mu-m_1)+\beta_2(m_2+m_1))}P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}y_{j_l} = \beta_1(\mu-m_1)+\beta_2(m_2+m_1)\right\} =$$

Iš čia seka, kad

$$P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}y_{j_l} = \beta_1 r_1+\beta_2 r_2\right\} = \frac{\beta_1\beta_2}{(2\pi)^2}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}}e^{-it_1r_1-it_2r_2} \cdot$$

$$\cdot\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}e^{it_1\beta_1(\mu-m_1)+it_2\beta_2(m_2+m_1)}P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}y_{j_l} = \beta_1(\mu-m_1)+\beta_2(m_2+m_1)\right\}dt_1dt_2 =$$

$$= \sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\frac{\beta_1\beta_2}{(2\pi)^2}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}}e^{-it_1(r_1-(\mu-m_1))\beta_1-it_2(r_2-(m_2+m_1))\beta_2}P\left\{\sum_{l=1}^{\mu}y_{j_l} = \beta_1(\mu-m_1)+\beta_2(m_2+m_1)\right\}dt_1dt_2 \quad (3.2.4)$$

Kadangi

1) $$\frac{\beta_1}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}} e^{-it_1\beta_1(r_1-(\mu-m_1))}dt_1 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iv(r_1-(\mu-m_1))}dv = \begin{cases} 1, & m_1 = \mu - r_1, \\ 0, & m_1 \neq \mu - r_1, \end{cases}$$

kur $t_1\beta_1 = v$,

2) $$\frac{\beta_2}{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-it_2\beta_2(r_2-(m_2+m_1))}dt_2 = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-iu(r_2-(m_2+m_1))}du = \begin{cases} 1, & m_2 = r_2 - m_1, \\ 0, & m_2 \neq r_2 - m_1, \end{cases}$$

kur $t_2\beta_2 = u$.

Kadangi gavome, kad

$m_1 = \mu - r_1$,

tai $m_2 = r_2 - m_1 = r_2 - \mu + r_1 = r_1 + r_2 - \mu$

Įstatome į (3.2.4) gautas reikšmes

$$\sum_{m_1=-\infty}^{\infty}\sum_{m_2=-\infty}^{\infty}\frac{\beta_1\beta_2}{(2\pi)^2}\int_{-\frac{\pi}{\beta_1}}^{\frac{\pi}{\beta_1}}\int_{-\frac{\pi}{\beta_2}}^{\frac{\pi}{\beta_2}} e^{-it_1(r_1-(\mu-m_1))\beta_1 - it_2(r_2-(m_2+m_1))\beta_2} P\left\{\sum_{l=1}^{\mu} y_{j_l} = \beta_1(\mu - m_1) + \beta_2(m_2 + m_1)\right\} dt_1 dt_2 =$$

$$= P\left\{\sum_{l=1}^{\mu} y_{j_l} = \beta_1(\mu - \mu - r_1) + \beta_2(\mu - r_1 + r_1 + r_2 - \mu)\right\} = P\left\{\sum_{l=1}^{\mu} y_{j_l} = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2\right\}.$$

Remdamiesi 1 Teoremos skaičiavimais mes galim tvirtinti, kad

$$P\left\{\sum_{l=1}^{n} y_{j_l} = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2\right\} \to P\{\eta_1 = \beta_1 r_1\} P\{\eta_2 = \beta_2 r_2\} = \frac{\lambda_1^{r_1} e^{-\lambda_1}}{r_1!}\cdot\frac{\lambda_2^{r_2} e^{-\lambda_2}}{r_2!}.$$

Taigi, mes įrodyme 2 Teoremą

$$P\left\{\sum_{l=1}^{n} y_{j_l} = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2\right\} \to \frac{\lambda_1^{r_1} e^{-\lambda_1}}{r_1!}\cdot\frac{\lambda_2^{r_2} e^{-\lambda_2}}{r_2!},$$

kur $M_2 p \to \lambda_1, M_{12} p \to \lambda_2$, $M_1 + M_2 + M_{12} = N, r_1 + r_2 = n, p = \frac{n}{N}$,

$\frac{n}{N} \to 0, n \to \infty, N - n \to \infty$.

Išvada

Mūsų darbo tikslas buvo įrodyti J.Hajeko teoremą apie konvergavimą į Puasono pasiskirstymą, kai populiaciją sudaro nesveiki teigiami skaičiai.

J.Hajekas savo darbe įrodė kad

$$\lim_{\nu\to\infty} P\left\{\xi_{n_\nu}=k\right\}=e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

kur ξ_{n_ν} - sveikas skaičius.

Mes J. Hajeko teoremą įrodėme imtims iš kvazigardelinių visumų. Buvo įrodytos dvi teoremos.

1 Teorema

$P\left\{\xi_n=\beta_1 m_1+\beta_2\left(n-m_1\right)\right\}\to\frac{e^{-\lambda}}{m_1!}\lambda^{m_1}$, esant tokiom sąlygom $pM_1\to\lambda$,

$\frac{n}{N}\to 0, n\to\infty, N-n\to\infty$,kur $M_1+M_2=N, m_1+m_2=n, p=\frac{n}{N}$.

Nagrinėjome generalinę visumą tokio pavidalo:

$\beta_1,\beta_1,...,\beta_1,\beta_2,\beta_2,...,\beta_2$

Populiacijos elementas: $y_j=m_1\left(j\right)\beta_1+m_2\left(j\right)\beta_2, j=1,...,N$.

Mes pasirinkome paprastą atsitiktinę imtį, jos elementų sumą pažymėjome $\xi_n=\sum_{j=1}^{n}y_j$.

Ir aproksimuojant gavome, kad $P\left\{\xi_n=\beta_1 m_1+\beta_2\left(n-m_1\right)\right\}\to e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!}$.

2 Teorema

$$P\left\{\sum_{l=1}^{n}y_{j_l}=\beta_1 r_1+\beta_2 r_2\right\}\to\frac{\lambda_1^{r_1}e^{-\lambda_1}}{r_1!}\cdot\frac{\lambda_2^{r_2}e^{-\lambda_2}}{r_2!},$$

Kai $M_2 p\to\lambda_1, M_{12}p\to\lambda_2, \frac{n}{N}\to 0, n\to\infty, N-n\to\infty$, kur $M_1+M_2+M_{12}=N, p=\frac{n}{N}$,.

Čia mes nagrinėjome generalinę visumą $\beta_1,\beta_1,...,\beta_1,\beta_2,\beta_2,...,\beta_2,\beta_1+\beta_2,...,\beta_1+\beta_2$,

populiacijos elementas $y_j=m_1\left(j\right)\beta_1+m_2\left(j\right)\beta_2, j=1,...,N$. Pasirinkome Puasono imtį, kur

imties elementų suma lygi $\xi_\mu^*=\sum_{l=1}^{\mu}\frac{y_{j_l}-\beta_1}{\beta_2-\beta_1}$.

Šiuo atveju mes gavome, kad $P\left\{\sum_{l=1}^{\mu} y_{j_l} = \beta_1 r_1 + \beta_2 r_2\right\} \to \frac{\lambda_1^{r_1} e^{-\lambda_1}}{r_1!} \cdot \frac{\lambda_2^{r_2} e^{-\lambda_2}}{r_2!}$.

Taigi ir vienu ir kitu atveju tikimybė, kad imties elementų suma lygi nesveikam skaičiui, konverguoja į Puasono pasiskirstymą.

Santrauka

Nagrinėdami J. Hajeko teoremą apie konvergavimą į Puasono pasiskirstymą, pastebėjome, kad ji įrodyta imtims, kurių elementai sveiki skaičiai. Bet dažniausiai stebimų imčių elementai yra nesveiki skaičiai. Todėl mes savo darbe įrodėme J. Hajeko teoremą imtims iš kvazigardelinių visumų. Įrodėme dvi teoremas skirtingom populiacijom ir gavome

kad tikimybes, kad imties elementų suma lygi nesveikam skaičiui, konverguoja į Puasono pasiskirstymą.

Summary

While we were analyzing J. Hajeks' theorem about convergence to the Poison distribution, we noticed that this theorem was demonstrated to the sample from the finite population consisting of whole numbers. Majority of observed samples elements are real numbers. Therefore, we demonstrated J. Hajeks' theorem for the samples from quasi-grating

populations in our work. Also, two theorems were demonstrated for the different sets and we obtained that probability of the sum of the sample elements, which is equal to the real number, converges to the Poison distribution.

Literatūros sąrašas:

[1] J. Hajek, Limiting distributions in simple random sampling from a finite population.

[2] А. Бикялис, Асимптотические разложения для распределений статистик.

[3] Б. В. Гнеденко и А. Н. Колмогоров, Предельные распределения для сумм независимых случайных велечин.