ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

Dijana Udavičiūtė

# Elipsinių kreivių $L$-funkcijų universalumas. Diskretus atvejis

Magistro darbas

Darbo vadovas

Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas

Šiauliai, 2010

# TURINYS

# 1. ĮVADAS

Elipsinė kreivė $E$ virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ yra apibrėžiama Vejerštraso lygtimi

$$y^2 = x^3 + ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Laikysime, kad kreivės $E$ diskriminantas $\triangle = 16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$. Tuomet kreivė $E$ nėra singuliari. Magistro darbe yra nagrinėjama $L$ funkcija, susijusi su elipsine kreive $E$. Tarkime, kad $p$ žymi pirminius skaičius, o $v(p)$ yra lyginio

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \quad (mod\ p)$$

sprendinių skaičius. Apibrėžiame

$$\lambda(p) = p - v(p).$$

Elipsinės kreivės $L$ funkcija $L_E(s), s = \sigma + it$, pusplokštumėje $\sigma > \frac{3}{2}$ yra apibrėžiama Oilerio sandauga

$$L_E(s) = \prod_{p|\triangle}\left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\nmid\triangle}\left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Iš klasikinio Hasės (Hasse) įverčio

$$|\lambda(p)| \leq 2\sqrt{p} \tag{1.1}$$

išplaukia, kad sandauga, apibrėžianti funkciją $L_E(s)$, konverguoja absoliučiai ir tolygiai pusplokštumėje $\sigma \geq \frac{3}{2} + \epsilon$ su kiekvienu $\epsilon > 0$. Todėl funkcija $L_E(s)$ yra analizinė pusplokštumėje $\sigma > \frac{3}{2}$.

Dzeta ir $L$ funkcijų teorijoje svarbią vietą užima jų universalumo tyrimai. Primename, kad Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$, kuri pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

ir yra meromorfiškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą su vieninteliu poliumi taške $s = 1$, universalumą 1975m., įrodė Voroninas [7]. Tarkime, kad $0 < r < \frac{1}{4}$, o funkcija $f(s)$ yra tolydi ir nevirstanti nuliu skritulyje $|s| \leq r$, bei analizinė to skritulio viduje. Tuomet Voronino teorema tvirtina, kad su kiekvienu $\epsilon > 0$ egzistuoja toks realusis skaičius $\tau = \tau(\epsilon)$, kad

$$\max_{|s|\leq r} |\zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau) - f(s)| < \epsilon.$$

Vėliau Voronino teorema buvo įrodyta bendresnėje formoje [4]. Tegul $meas\ \{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas, $K$ yra juostos $\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$ kompaktinė aibė turinti jungųjį papildinį, o funkcija $f(s)$ yra analizinė ir nevirstanti nuliu aibėje $K$, bei analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu $\epsilon > 0$

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T} meas\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \epsilon\} > 0.$$

Linikas su Ibrahimovu iškėlė hipotezę, pagal kuria visos funkcijos, kurioje nors pusplokštumėje apibrėžiamos Dirichlė eilute, analiziškai pratęsiamos į kairę nuo absoliutaus konvergavimo pusplokštumės ir ten tenkinančios kai kurias natūralias augimo sąlygas, yra universalios Voronino prasme. Daugelis autorių gavo rezultatus, remiančius minėtą hipotezę. Magistrinio darbo tikslas yra įrodyti diskrečią universalumo teoremą elipsinių kreivių $L$ funkcijoms.

Tegul, trumpumo dėlei,

$$\mu_N(...) = \frac{1}{N+1} \sharp\{0 \le m \le N : ...\},$$

čia $\sharp\{A\}$ yra aibės $A$ elementų skaičius, o vietoje daugtaškio rašoma sąlyga, kurią tenkina $m$. Tegul $h > 0$ yra fiksuotas skaičius. Pagrindinis darbo rezultatas yra tokia teorema.

**Teorema**. *Tarkime, kad* $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ *su kuriuo nors sveikuoju* $k \neq 0$ *yra racionalusis skaičius. Tegul* $K$ *yra juostos* $D = \{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}\}$ *kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi ir nelygi nuliui aibėje* $K$ *ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu* $\epsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N(\sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - f(s)| < \epsilon) > 0.$$

## 2. ATSITIKTINIŲ ELEMENTŲ APIBRĖŽIMAS

Pagrindinės teoremos įrodymas remiasi ribine teorema tikimybinių matų silpnojo konvergavimo prasme funkcijai $L_E(s)$ analizinių funkcijų erdvėje. Priminsime, kai kurias sąvokas ir apibrėžimus.

Tegul $S$ yra metrinė erdvė. Simboliu $\mathcal{B}(S)$ žymėsime erdvės $S$ Borelio aibių klasę. Ją sudaro $\sigma$ - kūnas, generuotas erdvės atvirų aibių sistemos, tai yra mažiausias $\sigma$ kūnas, kuriam priklauso atvirosios aibės. Tikimybinis matas $P$, erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra neneigiama aibės funkcija, apibrėžta aibių sistemoje $\mathcal{B}(S)$ ir tenkinanti sąlygas:

$1^0$. $P(S) = 1$;

$2^0$. Jei $A_1, A_2, ..., \in \mathcal{B}(S)$ ir $A_j \cap A_k = \varnothing$, kai $j \neq k$, tai

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k).$$

Tegul $P_n, n \in \mathbb{N}$, ir $P$ yra tikimybiniai matai, erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Sakome, kad $P_n$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P$, jeigu su kiekviena realia, aprėžta ir tolydžia funkcija $f$ erdvėje $S$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_S f dP_n = \int\limits_S f dP.$$

Tegul $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$ yra tikimybinė erdvė. Funkcija $X : \Omega \to S$ yra vadinama $S$ - reikšmiu atsitiktiniu elementu, apibrėžtu tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), \mathbb{P})$, jeigu su kiekviena aibe $A \in \mathcal{B}(S)$

$$\{\omega \in \Omega : X(\omega) \in A\} \in \mathcal{B}(\Omega).$$

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Apibrėžiame begaliniamatį torą

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais $p$. Šį torą sudaro visos galimos funkcijos, kurios pirminių skaičių aibę atvaizduoja į vienetinį apskritimą. Yra žinoma, kad su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija toras $\Omega$ yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ galima apibrėžti tikimybinį Haro matą $m_H$. Haro matas $m_H$ yra invariantiškas postūmių elementais iš $\Omega$ atžvilgiu, tai reiškia, kad su kiekvienu $\omega \in \Omega$ ir bet kuria aibe $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra teisingos lygybės

$$m_H(\omega A) = m_H(A\omega) = m_H(A).$$

Tarkime, kad skaičius $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ yra racionalusis su kuriuo nors $k \neq 0$. Tuomet egzistuoja toks teigiamas sveikasis skaičius $k_0$, kad visi $k$, kuriems $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ yra racionalus skaičius, yra $k_0$ kartotiniai [3]. Tegul

$$\exp\left\{\frac{2\pi k_0}{h}\right\} = \frac{m_0}{n_0}, \quad m_0, n_0 \in \mathbb{N}, \quad (m_0, n_0) = 1.$$

Apibrėžiame grupės $\Omega$ pogrupį $\Omega_h$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į apskritimą $\gamma_p$. Funkciją $\omega(p)$ pratęsiame į aibę $\mathbb{N}$ formulės

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \| m} \omega^\alpha(p)$$

pagalba, čia $p^\alpha\|$ reiškia, kad $p^\alpha | m$, bet $p^{\alpha+1} \nmid m$. Minėtą pogrupį apibrėžiame taip:

$$\Omega_h = \{\omega \in \Omega : \omega(m_0) = \omega(n_0)\}.$$

Tuomet, savo ruožtu, $\Omega_h$ yra tai pat kompaktinė topologinė Abelio grupė, todėl erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h))$, galime apibrėžti tikimybinį Haro matą $m_H^h$. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$.

Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}\}$. Tarkime, kad $s \in D, \omega_h \in \Omega_h$ ir apibrėžiame

$$L_E(s, \omega_h) = \prod_{p|\Delta}\left(1 - \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\nmid\Delta}\left(1 - \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Tegul $H(D)$ yra analizinių juostoje $D$ funkcijų erdvė su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija, tai yra, šios erdvės seka $f_n(s)$ konverguoja į funkciją $f(s)$, jeigu bet kuriai kompaktinei aibei $K \subset D$ ji konverguoja tolygiai aibėje $K$ į funkciją $f(s)$.

**2.1 lema**. *Funkcija $L_E(s, \omega_n)$ yra $H(D)$ - reikšmis atsitiktinis elementas, apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$.*

*Įrodymas.* Tegul $\mathcal{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė. Pirmiausia pastebėsime, kad $\omega(p), p \in \mathcal{P}$, yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai Haro mato $m_H$ atžvilgiu. Tai išplaukia iš to, kad Haro matas $m_H$ yra Haro matų ant kordinatinių apskritimų $\gamma_p$ sandauga. Straipsnyje [3] buvo įrodyta, kad egzistuoja mati funkcija $g : \Omega \to \Omega_h$. Simboliu $g_p$, pažymėsime šios funkcijos siaurinį į kordinatinį apskritimą $\gamma_p$. Tegul $p_1, ..., p_r$ yra bet koks baigtinis pirminių skaičių rinkinys, o $A_1, ..., A_r \in \mathcal{B}(\gamma)$. Tegul $u : S \to S_1$. Primename, kad kiekvienas tikimybinis matas $P$ erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ indukuoja vienintelį tikimybinį matą $Pu^{-1}$ erdvėje $(S_1, \mathcal{B}(S_1))$, apibrėžiamą formule

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), A \in \mathcal{B}(S_1).$$

Taigi turime, kad $m_H^h = m_H g^{-1}$. Iš šių pastabų randame, kad

$$m_H^h(\omega_h \in \Omega_h : \omega_h(p_1) \in A_1, ..., \omega_h(p_r) \in A_r) =$$

$$= m_H g^{-1}(\omega_h \in \Omega_h : \omega_h(p_1) \in A_1, ..., \omega_h(p_r) \in A_r) =$$

$$= m_H(\omega \in \Omega : \omega(p_1) \in g_{p_1}^{-1} A_1, ..., \omega(p_r) \in g_{p_r}^{-1} A_r) =$$

$$= m_H(\omega \in \Omega : \omega(p_1) \in g_{p_1}^{-1} A_1), ..., m_H(\omega \in \Omega : \omega(p_r) \in g_{p_r}^{-1} A_r) =$$

$$= m_H^h(\omega_h \in \Omega_h : \omega_h(p_1) \in A_1), ..., m_H^h(\omega_h \in \Omega_h : \omega_h(p_r) \in A_r).$$

Taigi gavome, kad $\omega_h(p), p \in \mathcal{P}$, yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, apibrėžti tikimybinėje erdvėje $(\Omega_H, \mathcal{B}(\Omega_H), m_H^h)$.

Kadangi sandauga

$$\prod_{p|\triangle} \left( \frac{1 - \lambda(p)\omega_h(p)}{p^s} \right)^{-1}$$

yra baigtinė, tai ji yra analizinė funkcija su visais $s$. Todėl lemos įrodymui pakanka įrodyti, kad sandauga

$$\prod_{p\nmid\triangle} \left( \frac{1 - \lambda(p)\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}} \right)^{-1}$$

konverguoja tolygiai kompaktinėse juostos $D$ aibėse.

Tegul

$$x_p(s, \omega_h) = \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}.$$

Kadangi

$$\log\left(1 - \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s} + \frac{\omega_h^2(p)}{p^{2s-1}}\right) = \frac{-\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s} + O\left(\frac{1}{p^{2\sigma-1}}\right),$$

tai užtenka nagrinėti eilutės

$$\sum_{p\nmid\triangle} x_p(s, \omega_h) \tag{2.1}$$

tolygų konvergavimą kompaktinėse aibėse, nes eilutė

$$\sum_p \frac{1}{p^{2\sigma-1}}$$

konverguoja, kai $\sigma > 1$.

Tarkime, kad $\mathbb{E}X$ yra atsitiktinio dydžio $X$ vidurkis. Tuomet

$$\mathbb{E}|x_p(s, \omega_h)|^2 = \mathbb{E}(x_p(s, \omega_h)) \cdot \overline{x_p(s, \omega_h)} = \frac{\lambda^2(p)}{p^{2\sigma}} \int\limits_{\Omega_h} \omega_h(p) \cdot \overline{\omega_h(p)} d\omega_h = \frac{\lambda^2(p)}{p^{2\sigma}}.$$

Iš čia ir (1.1) įverčio gauname, kad

$$\sum_{p\nmid\triangle} \mathbb{E}|x_p(s, \omega_h)|^2 < \infty,$$

kai $s \in D$. Todėl pagal 1.2.11 teoremą iš [4] gauname, kad (2.1) eilutė konverguoja beveik visiems $\omega_h \in \Omega_h$ su kiekvienu fiksuotu $s \in D$. Iš teoremos apie Dirichlė eilučių tolygų konvergavimą (2.1.3 teorema iš [4]) išplaukia, kad (2.1) eilutė konverguoja tolygiai juostos $D$ kompaktinėse aibėse, o tuo pačiu sandauga, apibrėžianti $L_E(s, \omega_h)$, taip pat konverguoja tolygiai kompaktinėse juostos $D$ aibėse beveik visiems $\omega_h \in \Omega_h$. Todėl $L_E(s, \omega_h)$ $H(D)$ - reikšmis atsitiktinis elementas.

# 3. RIBINĖ TEOREMA

Šiame skyrelyje įrodysime diskrečią ribinę teoremą silpnojo tikimybinio mato konvergavimo prasme funkcijai $L_E(s)$. Tegul $P_{L_E}$ yra atsitiktinio elemento $L_E(s,\omega_h)$ skirstinys, tai yra,

$$P_{L_E} = m_H^h(\omega_h \in \Omega_h : L_E(s,\omega_h) \in A), A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Apibrėžiame tikimybinį matą

$$P_N(A) = \mu_N(L_E(s+imh) \in A), A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

**3.1 teorema**. *Tarkime, kad $h$ tenkina pagrindinės teoremos sąlygas. Tuomet tikimybinis matas $P_N$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoją į matą $P_{L_E}$.*

3.1 teoremos įrodymas yra pakankamai ilgas ir sudėtingas, todėl jį skaidysime į kelias lemas. Pradėsime ribine teorema erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h))$.

Apibrėžiame tikimybinį matą

$$Q_N(A) = \mu_N((p^{-imh} : p \in \mathcal{P}) \in A), A \in \mathcal{B}(\Omega_h),$$

čia $\mathcal{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė.

**3.2 lema**. *Tikimybinis matas $Q_N$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į Haro matą $m_H^h$.*

*Įrodymas.* Mato $Q_{h_N}$ Furjė transformacija $f_N(\underline{k})$,$\underline{k} = (k_p \in \mathbb{Z}, p \in \mathcal{P})$, turi pavidalą

$$f_N(\underline{k}) = \int\limits_{\Omega_h} (\omega_h)^{\underline{k}} dQ_N = \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \prod_{p \in \mathcal{P}} p^{-imhk_p} =$$

$$= \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \exp\left\{ -imh \sum_{p \in \mathcal{P}} k_p \log p \right\}.$$

Čia tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių $k_p$ yra nelygūs nuliui. Pritaikę geometrinės progresijos sumos formulę, iš čia gauname, kad

$$f_N(\underline{k}) = 1, \quad kai\ \underline{k} = \underline{0},$$

ir

$$f_N(\underline{\mathrm{k}}) = \frac{1}{N+1} \frac{e^{-i(N+1)h \sum_{p \in \mathcal{P}} k_p \log p} - 1}{e^{-ih \sum_{p \in \mathcal{P}} k_p \log p} - 1}, \quad kai\ \underline{k} \neq \underline{0}.$$

Iš čia išplaukia, kad

$$\lim_{N \to \infty} f_N(\underline{\mathrm{k}}) = \begin{cases} 1, & \text{kai} \quad \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{kai} \quad \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Kadangi mato $Q_{h_N}$ Furjė transformacija, kai $N \to \infty$, konverguoja į Haro mato transformaciją, tai iš žinomų tolydumo teoremų tikimybiniams matams grupėse gauname teoremos tvirtinimą.

Tegul $\sigma \in \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius ir

$$v_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right\}, \quad m, n \in \mathbb{N}.$$

Apibrėžiame koficientus $\lambda(m), m \in \mathbb{N}$, lygybės

$$L_E(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m^s}, \quad \sigma > \frac{3}{2}$$

pagalba. Be to, tegul

$$L_{E,n}(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m) v_n(m)}{m^s}$$

ir

$$L_{E,n}(s, \omega_h) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m) \omega_h(m) v_n(m)}{m^s}, \quad \omega_h \in \Omega_h.$$

Kadangi iš (1.1) įverčio išplaukia, kad

$$\lambda(m) = \sum_{p^\alpha \| m} \lambda^\alpha(p) \ll m^{\frac{1}{2}} d(m),$$

čia

$$d(m) = \sum_{d|m} 1 \ll m^\epsilon, \quad \forall \epsilon > 0,$$

ir $p^\alpha \| m$ reiškia, kad $p^\alpha | m$, bet $p^\alpha \nmid m$, tai eilutės, apibrėžiančios funkcijos $L_{E,n}(s)$ ir $L_{E,n}(s, \omega_h)$, konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > 1$. Erdvėje apibrėžiame $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ tikimybinius matus

$$P_{N,n}(A) = \mu_N(L_{E,n}(s + imh) \in A)$$

ir

$$\hat{P}_{N,n}(A) = \mu_N(L_{E,n}(s + imh, \omega_{0h}) \in A).$$

Čia $\omega_{0h}$ yra fiksuotas $\Omega_h$ elementas.

**3.3 lema**. *Tikimybiniai matai $P_{N,n}$ ir $\hat{P}_{N,n}$, kai $N \to \infty$, abu silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą $P_n$, erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$.*

*Įrodymas.* Nagrinėjame funkciją $u : \Omega_h \to H(D)$, apibrėžtą formule

$$u(\omega_h) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m) v_n(m) \omega_h(m)}{m^s}.$$

Kadangi pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai, tai funkcija yra tolydi. Be to, iš funkcijos $u$ apibrėžimo matome, kad

$$P_{N,n} = Q_{h_N} u^{-1}.$$

Todėl iš [1] monografijos 5.1 teoremos gauname, kad matas $P_{N,n}$, kai $N \to \infty$ silpnai konverguoja į matą $m_H^h u^{-1}$. Panašiai apibrėžę funkciją $\hat{u} : \Omega_h \to H(D)$ lygybe

$$\hat{u}(\omega_h) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m) v_n(m) \omega_{0h}(m) \omega_h(m)}{m^s},$$

gauname, kad matas $\hat{P}_{N,n}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $m_H^h \hat{u}^{-1}$. Todėl lieka įrodyti, kad

$$m_H^h u^{-1} = m_H^h \hat{u}^{-1}.$$

Apibrėžiame dar vieną funkciją $u_1 : \Omega_h \to \Omega_h$ formule

$$u_1(\omega_h) = \omega_{0h} \omega_h.$$

Tuomet turime, kad

$$\hat{u}(\omega_h) = u(u_1(\omega_h)).$$

Kadangi Haro matas $m_H^h$ yra invariantiškas postūmių taškais iš $\Omega_h$ atžvilgiu, tai

$$m_H^h \hat{u}^{-1} = m_H^h (u(u_1))^{-1} = (m_H^h u_1^{-1}) u^{-1} = m_H^h u^{-1},$$

ir lema įrodyta.

Kad įrodytume 3.1 teoremą, lieka pereiti nuo funkcijos $L_{E,n}(s)$ prie $L_E(s)$. Tai pati sudėtingiausia įrodymo dalis.

Pradėsime metrikos apibrėžimu erdvėje $H(D)$. Yra žinoma, kad egzistuoja tokia juostos $D$ kompaktinių aibių seka $\{K_l\}$, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l.$$

Be to, aibes $K_l$ galima parinkti taip, kad $K_l \subset K_{l+1}, l \in \mathbb{N}$ ir, jeigu $K$ yra juostos $D$ kompaktinė aibė, tai $K \subseteq K_l$ su kuriuo nors $l$.

Tegul $f, g \in H(D)$ ir

$$\rho_l(f, g) = \sup_{s \in K_l} |f(s) - g(s)|.$$

Tuomet

$$\rho(f, g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\rho_l(f, g)}{1 + \rho_l(f, g)}$$

yra metrika, erdvėje $H(D)$ indukuojanti tolygaus konvergavimo kompaktuose topologiją.

Mums bus reikalingos kai kurios sąvokos, naudojamos silpnojo matų konvergavimo teorijoje. Tegul $\{P\}$ yra seka tikimybinių matų erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Sakome, kad ši šeima yra reliatyviai kompaktinė, jeigu iš kiekvienos jos sekos galima išrinkti silpnai konverguojanti posekį į kurį nors matą, erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$. Šeima yra vadinama suspausta, jeigu su kiekvienu $\epsilon > 0$ egzistuoja tokia kompaktinė aibė $K \subset S$, kad su visais $P \in \{P\}$ yra teisinga nelygybė

$$P(K) > 1 - \epsilon.$$

Matų šeimos reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo sąvokas suriša Prohorovo teoremos. Tiesioginė teorema tvirtina, kad kiekviena suspausta šeima yra ir reliatyviai kompaktinė. Atvirkštinė teorema sako, kad pilnoje separabiliojoje erdvėje $S$ kiekviena reliatyviai kompaktinė matų šeima yra ir suspausta.

Dabar įrodysime tvirtinimą, apie funkcijos $L_E(s)$ vidurkinę aproksimaciją funkcija $L_{E,n}(s)$.

**3.4 lema**. *Tegul $K$ yra kompaktinė juostos $D$ aibė. Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{(N+1)} \sum_{m=1}^{N} \sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - L_{E,n}(s+imh)| = 0.$$

*Įrodymas.* Tegul $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ ir

$$l_n(s) = \frac{s}{\sigma_1}\Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right)n^s.$$

Čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Tuomet standartiniu keliu yra įrodoma, kad

$$L_{E,n}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L_E(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z}.$$

Šioje formulėje pakeisime integravimo tiesę nauja. Tegul $\sigma_2 > 1$ ir $\sigma_2 > \sigma$. Kadangi integruojamoji funkcija turi paprastąjį polių taške $z = 1$, tai iš reziduumų teoremos išplaukia, kad

$$L_{E,n}(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - \sigma - i\infty}^{\sigma_2 - \sigma + i\infty} L_E(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z} + L_E(s). \tag{3.1}$$

Juostoje $D$ imame uždarą kontūrą $L$, apimantį aibę $K$, ir tegul $\sigma$ yra kontūro $L$ atstumas iki aibės $K$. Tuomet, pasinaudoję Košį integraline formule, gauname

$$\sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - L_{E,n}(s+imh)| \leq \frac{1}{2\pi\delta} \int\limits_{L} |L_E(z+imh) - L_{E,n}(z+imh)||dz|.$$

Vadinasi, pakankamai dideliems $N$

$$\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\sup_{s\in K}|L_E(s+imh)-L_{E,n}(s+imh)| \ll$$

$$\ll \frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\frac{1}{2\pi\delta}\int\limits_{L}|L_E(z+imh)-L_{E,n}(z+imh)||dz| \ll$$

$$\ll \frac{|L|}{N+1}\sup_{s\in L}\sum_{m=0}^{2N}|L_E(\sigma+imh)-L_{E,n}(\sigma+imh)|,$$

čia $|L|$ yra kontūro $L$ ilgis.

Iš (3.1) randame, kad

$$L_E(\sigma+imh)-L_{E,n}(\sigma+imh) \ll$$

$$\ll \int\limits_{-\infty}^{\infty}|L_E(\sigma_2+imh+i\tau)||l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|d\tau. \tag{3.2}$$

Čia $f(x) \ll g(x), g(x) > 0, x \in \mathbb{X}$, reiškia, kad egzistuoja tokia konstanta $c > 0$, kad su visais $x \in \mathbb{X}$ yra teisinga nelygybė

$$|f(x)| \leq cg(x).$$

Iš įverčio

$$\int\limits_{0}^{T}|L_E(\sigma+it)|^2dt \ll T,$$

teisingo srityje $\sigma > 1$, išplaukia diskretusis įvertis

$$\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}|L_E(\sigma+imh+i\tau)|^2 \ll 1+|\tau|, \quad N\to\infty.$$

Todėl iš 3.2 turime, kad

$$\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{2N}|L_E(\sigma+imh)-L_{E,n}(\sigma+imh)| \ll$$

$$\ll \int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|\left(\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{2N}|L_E(\sigma_2+imh+i\tau)|^2\right)^{\frac{1}{2}}d\tau \ll$$

$$\ll \int\limits_{-\infty}^{\infty}|l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|(1+|\tau|)d\tau. \tag{3.3}$$

Parametrus $\delta$ ir $\sigma_2$ galima parinkti taip, kad galiotų nelygybė $\sigma_2-\sigma \leq -c < 0$.

Kadangi iš funkcijos $l_n(s)$ apibrėžimo gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{\sigma\le -c} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma+i\tau)|(1+|\tau|)d\tau = 0,$$

tai iš (3.3) išplaukia lemos tvirtinimas.

Analogiškas tvirtinimas galioja ir funkcijoms $L_E(s+imh,\omega_h)$ ir $L_{E,n}(s+imh,\omega_h)$.

**3.5 lema**. *Tegul yra kompaktinė juostos $D$ aibė. Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \sum_{m=0}^{N} \sup_{s\in K} |L_E(s+imh,\omega_h) - L_{E,n}(s+imh,\omega_h)| = 0.$$

*Įrodymas.* Pažodžiui kartoja 3.4 lemos įrodymo samprotavimus ir įvertį

$$\sum_{m=0}^{N} |L_E(\sigma+imh,\omega_h)|^2 \ll N, \quad N\to\infty.$$

Apibrėžiame dar vieną tikimybinį matą

$$\hat{P}_N(A) = \mu_N(L_E(s+imh,\omega_h)\in A), \quad A\in\mathcal{B}(H(D)).$$

**3.6 lema**. *Tikimybiniai matai $P_N$ ir $\hat{P}_N$, kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą erdvėje $(H(D),\mathcal{B}(H(D)))$.*

*Įrodymas.* Pagal 3.3 lemą tikimybiniai matai $P_{N,n}$ ir $\hat{P}_{N,n}$, kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į tą patį matą $P_n$. Tegul

$$X_{N,n}(s) = L_{E,n}(s+i\theta_N),$$

čia $\theta_N$ yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas kurioje nors tikimybinėje erdvėje $(\hat{\Omega},\mathcal{B}(\hat{\Omega}),\mathbb{P})$, ir turintis pasiskirstymą

$$\mathbb{P}(\theta_N = mh) = \frac{1}{N+1}, \quad 0\le m\le N.$$

Simboliu $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ žymėsime konvergavimą pagal pasiskirstymą. Tuomet iš 3.3 lemos turime, kad

$$X_{N,n}(s) \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} X_n(s), \tag{3.4}$$

čia $X_n(s)$ yra $H(D)$ - reikšmis atsitiktinis elementas, turintis pasiskirstymą $P_n$. Įrodysime, kad matų šeima $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$ yra suspausta. Tegul $M_l$ yra bet koks teigiamas skaičius. Tuomet iš Čebyševo tipo nelygybės išplaukia, kad

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l} |X_{N,n}(s)| > M_l) \le \frac{1}{(N+1)M_l} \sum_{m=0}^{N} \sup_{s\in K_l} |L_{E,n}(s+imh)|, \tag{3.5}$$

čia $\{K_l\}$ - yra juostos $D$ kompaktinių aibių seka, naudojama erdvės $H(D)$ metrikos apibrėžime. Kadangi funkcijos $L_{E,n}(s)$ eilutė konverguoja absoliučiai srityje $D$, tai

$$\sup_{M\geq 1}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\sup_{s\in K_l}|L_{E,n}(s+imh)|\leq R_l<\infty. \tag{3.6}$$

Dabar tegul $\epsilon>0$ yra bet koks skaičius, o $M_l=\frac{R_l 2^l}{\epsilon}$. Tuomet iš (3.5) ir (3.6) išplaukia, kad

$$\limsup_{N\to\infty}P(\sup_{s\in K_l}|X_{N,n}(s)|>M_l)\leq\frac{\epsilon}{2^l}.$$

Iš čia ir (3.4) gauname, kad

$$\mathbb{P}(\sup_{s\in K_l}|X_n(s)|>M_l)\leq\frac{\epsilon}{2^l}. \tag{3.7}$$

Apibrėžiame aibę

$$H_\epsilon=\{f\in H(D):\sup_{s\in K_l}|f(s)|\leq M_l, l\in\mathbb{N}\}.$$

Šią aibę sudaro tolygiai aprėžtos analizinės funkcijos, todėl ji yra kompaktinė erdvės $H(D)$ aibė. Be to iš (3.7) gauname, kad

$$\mathbb{P}(X_n(s)\in H_\epsilon)\geq 1-\epsilon$$

su visais $n\in\mathbb{N}$, arba iš mato $P_n$ apibrėžimo

$$P_n(H_\epsilon)\geq 1-\epsilon$$

su visais $n\in\mathbb{N}$. Taigi įrodėme, jog matų šeima $\{P_n\}$ yra suspausta, todėl pagal Prohorovo teoremą ji yra reliatyviai kompaktinė. Vadinasi, egzistuoja $\{P_{n_k}\}\subset\{P_n\}$, kad $P_{n_k}$, kai $k\to\infty$, silpnai konverguoja į kurį nors matą $P$ erdvėje $(H(D),\mathcal{B}(H(D)))$. Kitais žodžiais sakant,

$$X_n(s)\xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}}P. \tag{3.8}$$

Tegul $X_N(s)=L_E(s+i\theta_N)$. Tuomet iš (3.4) lemos randame, kad su bet kuriuo $\epsilon>0$

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}P(\rho(X_{N,n}(s),X_N(s))\geq\epsilon)=$$

$$=\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\mu_N(\rho(L_{E,n}(s+imh),L_E(s+imh))\geq\epsilon)\leq$$

$$\leq\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{(N+1)\epsilon}\sum_{m=0}^{N}\rho(L_{E,n}(s+imh),L_E(s+imh))=0.$$

Iš čia (3.4), (3.8) ir 4.2 teoremos iš [1] gauname, kad

$$X_N(s)\xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}}P, \tag{3.9}$$

kas yra ekvivalentu mato $P_N$ silpnajam konvergavimui į matą $P$. Be to, iš (3.9) turime, kad matas $P$ nepriklauso nuo sekos $\{P_{n_k}\}$. Todėl teisingas sąryšis

$$X_n \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3.10}$$

Pakartoję samprotavimus atsitiktiniams elementams

$$\hat{X}_{N,n}(s,\omega_h) = L_{E,n}(s+i\theta_N,\omega_h)$$

ir

$$\hat{X}_N(s,\omega_h) = L_E(s+i\theta_N,\omega_h),$$

bei atsižvelgę į (3.10), įrodome, kad matas $\hat{P}_N$, kai $N\to\infty$, taip pat silpnai konverguoja į matą $P$. Lema įrodyta.

*3.1 teoremos įrodymas.* Iš 3.6 lemos turime, kad 3.1 teoremos įrodymui pakanka įrodyti ribinio mato $P$ pavidalą 3.6 lemoje.

Tarkime, kad $A$ yra mato $P$ tolydumo aibė, tai yra jos krašto $P$ - matas yra lygus nuliui. Iš 3.6 lemos ir silpnojo tikimybinių matų savybės (2.1 teoremos $5^o$ tvirtinimas iš [1]) gauname, kad

$$\lim_{N\to\infty} \mu_N(L_E(s+imh,\omega_h)\in A) = P(A). \tag{3.11}$$

Aibę $A$ fiksuojame ir $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$ erdvėje apibrėžiame atsitiktinį dydį $\theta$ formule

$$\theta(\omega_h) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad L_E(s,\omega_h)\in A, \\ 0, & \text{jei} \quad L_E(s,\omega_h)\notin A. \end{cases}$$

Nesunku matyti, kad to dydžio vidurkis

$$\mathbb{E}(\theta) = \int\limits_{\Omega_h} \theta dm_H^h = m_H^h(\omega_h\in\Omega_h : L_E(s,\omega_h)\in A) = P_{L_E}(A). \tag{3.12}$$

Primename, kad $P_{L_E}(A)$ yra atsitiktinio elemento $L_E(s,\omega_h)$ pasiskirstymas.

Tolimesnis įrodymas naudoja ergodinės teorijos elementus. Tarkime, kad $a_h = p^{-ih} : p\in\mathcal{P}$. Apibrėžiame toro $\Omega_h$ transformaciją $f_n$ formule

$$f_n(\omega_h) = a_h\omega_h, \quad \omega_h\in\Omega_h.$$

Kadangi Haro matas $m_H^h$ yra invariantinis, tai turime, kad $f_n$ yra mati išlaikanti matą transformacija tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$. Darbe [3] yra įrodyta, kad ši transformacija $f_n$ yra ergodinė. Iš čia ir klasikinės Birkhofo teoremos [2] išplaukia, kad beveik visiems $\omega_h\in\Omega_h$ mato $m_H^h$ atžvilgiu

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N} \theta(f_h^m(\omega_h)) = \mathbb{E}(\theta). \tag{3.13}$$

Tačiau iš atsitiktinio dydžio $\theta$ ir $f_n$ apibrėžimų matome, kad

$$\frac{1}{N+1}\sum_{m=0}^{N}\theta(f_h^m(\omega_h)) = \mu_N(L_E(s+imh,\omega_h)\in A).$$

Todėl iš (3.12) ir (3.13) gauname, kad beveik visiems $\omega_h \in \Omega_h$ yra teisinga lygybė

$$\lim_{N\to\infty}\mu_N(L_E(s+imh,\omega_h)\in A) = P_{L_E}(A).$$

Pastaroji lygybė kartu su (3.11) parodo, kad $P(A) = P_{L_E}(A)$. Kadangi $A$ buvo bet kuri mato $P$ tolydumo aibė, tai ši lygybė galioja visoms mato $P$ tolydumo aibėms. Yra žinoma [1], kad mato tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę, todėl su visomis aibėmis $A \in \mathcal{B}(H(D))$ yra teisinga lygybė $P(A) = P_{L_E}(A)$. Taigi iš 3.6 lemos išplaukia, kad matas $P_N$, kai $N\to\infty$, silpnai konverguoja į matą $P_{L_E}$. Teorema įrodyta.

# 4. PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS

Šiame skyrelyje remdamiesi 3.1 teorema, įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą apie funkcijos $L_E(s)$ universalumą.

**4.1 teorema**. *Tarkime, kad* $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ *su kuriuo nors sveikuoju* $k \neq 0$ *yra racionalusis skaičius. Tegul* $K$ *yra juostos* $D = \{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}\}$ *kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi ir nelygi nuliui aibėje* $K$*, ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu* $\epsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N(\sup_{s\in K} |L_E(s+imh) - f(s)| < \epsilon) > 0.$$

4.1 teoremos įrodymą pradėsime nuo kai kurių aibių tirštumo įrodymo. Gautus rezultatus panaudosime 3.1 teoremos ribinio mato $P_{L_E}$ atramos pavidalui gauti.

Tarkime, kad su visais $p \in \mathcal{P}$ $|a_p| = 1$. Apibrėžiame funkciją

$$f_p(s, a_p) = \begin{cases} -\log\left(1 - \frac{\lambda(p)a_p}{p^s}\right), & \text{jei} \quad p \mid \triangle, \\ -\log\left(1 - \frac{\lambda(p)a_p}{p^s} + \frac{a_p^2}{p^{2s-1}}\right), & \text{jei} \quad p \nmid \triangle. \end{cases}$$

**4.2 lema**. *Visų konverguojančių eilučių*

$$\sum_p f_p(s, a_p)$$

*aibė yra visur tiršta erdvėje* $H(D)$.

Lemos įrodymui bus reikalingi tokie tvirtinimai.

**4.3 lema**. *Tarkime, kad* $\{g_m\}$ *yra erdvės* $H(D)$ *seka, tenkinanti sąlygas:*

$1^0$. *Jei* $\mu$ *yra kompleksinis matas erdvėje* $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ *su kompaktine atrama, priklausančia juostai* $D$*, kad*

$$\sum_{m=1}^{\infty} |\int_{\mathbb{C}} g_m d\mu| < \infty,$$

*tai tuomet su visais* $r = 0, 1, 2...$

$$\int_{\mathbb{C}} s^r d\mu(s) = 0;$$

$2^0$. *Eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} g_m$$

*konverguoja erdvėje* $H(D)$;

$3^0$. *Su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \sup_{s \in K} |g_m(s)|^2 < \infty.$$

*Tuomet visų konverguojančių eilučių*

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m g_m, \quad |a_m| = 1,$$

*aibė yra visur tiršta erdvėje $H(D)$.*

Lema yra 6.3.10 teorema iš [4], ten galima rasti ir jos įrodymą.

Primename, kad analizinė kampe $|\arg s| \leq \theta_0, 0 < \theta_0 \leq \pi$, funkcija $g(s)$ yra vadinama eksponentinio tipo, jeigu tolygiai pagal $\theta, |\theta| \leq \theta_0$,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{\log |g(re^{i\theta})|}{r} < \infty.$$

**4.4 lema**. *Tarkime, kad $g(s)$ yra sveikoji eksponentinio tipo funkcija, o $\{\lambda_m\}$ yra kompleksinių skaičių seka. Tegul $\alpha, \beta$ yra tokie realūs skaičiai, kad:*
$1^0$.

$$\limsup_{y \to \infty} \frac{\log |g(\pm iy)|}{y} \leq \alpha;$$

$2^0$.

$$|\lambda_m - \lambda_n| \geq \delta |m - n|;$$

$3^0$.

$$\lim_{m \to \infty} \frac{\lambda_m}{m} = \beta;$$

$4^0$.

$$\alpha\beta < \pi.$$

*Tuomet*

$$\limsup_{m \to \infty} \frac{\log |g(\lambda_m)|}{|\lambda_m|} = \limsup_{r \to \infty} \frac{\log |g(r)|}{r}.$$

Lema yra vadinama Bernšteino teorema. Jos įrodymas yra duotas [4].

**4.5 lema**. *Tegul*

$$\pi(x) = \sum_{p \leq x} 1.$$

*Tuomet*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{1}{\pi(x)} \sum_{p \leq x} \lambda_p^2 = 1.$$

Lemos įrodymas duotas [6].

**4.6 lema**. *Tarkime, kad $\mu$ yra kompleksinis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktinę atrama, gulinčia pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$. Be to, tegul*

$$g(s) = \int\limits_{\mathbb{C}} e^{sz} d\mu(z)$$

*ir $g(s) \not\equiv 0$. Tuomet*

$$\limsup_{r \to \infty} \frac{\log |g(r)|}{r} > \sigma_0.$$

Lema yra 6.4.10 lema iš [4].

*4.2 lemos įrodymas.* Tarkime, kad $p_0$ pakankamai didelis fiksuotas skaičius. Pirmuoju žingsniu įrodysime, kad visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{p > p_0} f_p(s,1) a_p, \quad |a_p| = 1,$$

aibė yra visur tiršta erdvėje $H(D)$. Pažymime

$$\hat{f}_p(s,1) = \begin{cases} \{f_p(s,1), & \text{jei} \quad p > p_0, \\ 0, & \text{jei} \quad p \le p_0. \end{cases}$$

Tuomet, iš (1.1) įverčio gauname, kad su visais $p > p_0$

$$\hat{f}_p(s,1) = \frac{\lambda(p)}{p^s} + r_p(s), \tag{4.1}$$

ir funkcijai $r_p(s)$ yra teisingas įvertis

$$r_p(s) \ll p^{1-2\sigma}.$$

Taigi eilutė

$$\sum_p r_p(s)$$

konverguoja tolygiai juostos $D$ kompaktinėse aibėse. Įrodinėjant 2.1 lemą, buvo gauta, kad eilutė

$$\sum_p \frac{\lambda(p)\omega_h(p)}{p^s}$$

su beveik visais $\omega_h \in \Omega_h$ konverguoja tolygiai srities $D$ kompaktinėse aibėse. Taigi, egzistuoja tokia seka $\{\hat{a}_p : |\hat{a}_p| = 1\}$, kad eilutė

$$\sum_p \hat{f}_p(s,1)\hat{a}_p$$

konverguoja erdvėje $H(D)$.

Tegul $g_p(s) = \hat{f}_p(s,1)\hat{a}_p$. Kad įrodytume visų konverguojančių eilučių

$$\sum_{p>p_0} f_p(s,1)a_p, \quad |a_p| = 1,$$

aibės tirštumą erdvėje $H(D)$, pakanka įrodyti visų konverguojančių eilučių

$$\sum_p g_p(s)a_p, \quad |a_p| = 1,$$

tirštumą erdvėje $H(D)$, nes $|\hat{a}_p \cdot a_p| = 1$.

Tarkime, kad $\mu$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis matas erdvėje $(\mathbb{C}, \mathcal{B}(\mathbb{C}))$ su kompaktine atrama, gulinčia juostoje $D$, ir tenkinantis sąlygą

$$\sum_p \left| \int_{\mathbb{C}} g_p(s)d\mu \right| < \infty. \tag{4.2}$$

Primename, kad mato $\mu$ atrama yra minimali uždara aibė $A$, kurioje $|\mu(A)| > 0$. Trumpumo dėlei, tegul

$$h_p(s) = \frac{\lambda(p)\hat{a}_p}{p^s}.$$

Tuomet turime iš (4.1), kad eilutė

$$\sum_p |g_p(s) - h_p(s)|$$

konverguoja tolygiai kompaktinėse juostos $D$ poaibiuose. Todėl iš (4.2) turime, kad

$$\sum_p \left| \int_{\mathbb{C}} h_p(s)d\mu \right| < \infty,$$

arba, panaudoję $h_p(s)$ apibrėžimą, gauname, kad

$$\sum_p |\lambda(p)| \left| \int_{\mathbb{C}} p^{-s}d\mu \right| < \infty. \tag{4.3}$$

Dabar transformuojame sritį $D$. Tegul $\hat{D} = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, $u(s) = s - \frac{1}{2}$ ir $\mu u^{-1}(A) = \mu(u^{-1}A)$, $A \in \mathcal{B}(\mathbb{C})$. Aišku, kad tuomet $\mu u^{-1}$ yra taip pat kompleksinis matas su kompaktine atrama, gulinčia juostoje $\hat{D}$. Pažymime

$$k(z) = \int_{\mathbb{C}} e^{-sz} d\mu u^{-1}(s), \ z \in \mathbb{C},$$

ir

$$\lambda_p = \lambda(p)p^{-\frac{1}{2}}.$$

Tuomet iš (4.3) turime, kad

$$\sum_p |\lambda_p||k(\log p)| < \infty. \tag{4.4}$$

Dabar parodysime, kad funkcijai $k(z)$ galime taikyti 4.4 lemą. Iš mato $\mu u^{-1}$ atramos kompaktiškumo turime, kad egzistuoja toks $M > 0$, kad su kiekvienu $y > 0$

$$|k(\pm iy)| = \left| \int\limits_K e^{\pm iys} d\mu u^{-1}(s) \right| \leq e^{My} \int\limits_{\mathbb{C}} |d\mu u^{-1}(s)|,$$

čia $K$ yra mato $\mu u^{-1}$ atrama. Iš šio įverčio išplaukia, kad

$$\limsup_{y\to\infty} \frac{\log|k(\pm y)|}{y} \leq M.$$

Vadinasi gavome, kad 4.4 lemos sąlyga $1^0$ galioja su $\alpha = M$. Tegul skaičius $\beta$ tenkina nelygybes $0 < \beta < \frac{\pi}{M}$. Apibrėžiame aibę

$$A = \{m \in \mathbb{N} : \exists r \in \left[\left(m - \frac{1}{4}\right)\beta \left(m + \frac{1}{4}\right)\beta\right], k(r) \leq e^{-r}\}.$$

Imame fiksuotą skaičiu $\theta, 0 < \theta < 1$. Tegul $P_\theta$ yra pirminių skaičių, kuriems $|\lambda_p| > 0$ aibė. Tuomet iš (4.4) turime, kad

$$\sum_{p\in P_\theta} |k(\log p)| < \infty. \tag{4.5}$$

Be to,

$$\sum_{p\in P_\theta} |k(\log p)| \geq \sum_{m\notin A} {\sum}'_p |k(\log p)| \geq \sum_{m\notin A} {\sum}'_p \frac{1}{p}, \tag{4.6}$$

čia ${\sum}'_p$ reiškia, kad yra sumuojama pagal visus tokius pirminius $p \in P_\theta$, kuriems galioja nelygybė

$$\left(m - \frac{1}{4}\right)\beta < \log p \leq \left(m + \frac{1}{4}\right)\beta.$$

Trumpumo dėlei, tegul

$$a = e^{(m-\frac{1}{4})\beta}$$

ir

$$b = e^{(m+\frac{1}{4})\beta}.$$

Tada iš (4.5) ir (4.6) turime, kad

$$\sum_{m\notin A} \sum_{\substack{p\in P_\theta \\ a<p\leq b}} \frac{1}{p} < \infty. \tag{4.7}$$

Pažymėję

$$\pi_\theta(x) = \sum_{\substack{p\leq x \\ p\in P_\theta}} 1$$

ir

$$\pi(x) = \sum_{p \le x} 1,$$

bei pasinaudoję $\alpha_p$ apibrėžimu ir (1.1) įverčiu, gauname

$$\sum_{a<p\le u} \lambda_p^2 \le \sum_{\substack{a<p\le u \\ p\in P_\theta}} 1 + \theta^2 \sum_{\substack{a<p\le u \\ p\notin P_\theta}} 1 =$$

$$= (4-\theta^2)(\pi_\theta(u) - \pi_\theta(a)) + \theta^2(\pi(u) - \pi(a)). \tag{4.8}$$

Tegul $\delta$ yra maža teigiama, konstanta ir $u \ge a(1+\delta)$. Tuomet iš (4.8) ir 4.5 lemos, kai $m \to \infty$, randame

$$(\pi_\theta(u) - \pi_\theta(a)) \ge \left(\frac{1-\theta^2}{4-\theta^2+o(1)}\right)(\pi(u) - \pi(a)).$$

Pasinaudoję pastarąja nelygybe ir sumavimu dalimis, gauname

$$\sum_{\substack{p\in P_\theta \\ a<p\le b}} \frac{1}{p} = \int_a^b \frac{d\pi_\theta(u)}{u} \ge \left(\frac{1-\theta^2}{4-\theta^2+o(1)}\right) \int_a^b \frac{d\pi_\theta(u)}{u} \ge$$

$$\ge \left(\frac{1-\theta^2}{4-\theta^2+o(1)}\right) \sum_{a(1+\delta)<p\le b} \frac{1}{p}. \tag{4.9}$$

Gerai žinoma, kad su kuriomis nors konstantomis $c_1$ ir $c_2$ yra teisinga formulė

$$\sum_{p\le x} \frac{1}{p} = \log\log x + c_1 + O(e^{-c_2\sqrt{x}}), \ \ x \to \infty,$$

iš kurios, kai $m \to \infty$, gauname, kad

$$\sum_{a(1+\delta)<p\le b} \frac{1}{p} = \frac{1}{2} - \frac{\log(1+\delta)}{\beta}\frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Iš čia ir (4.9), kai $m \to \infty$, išplaukia nelygybė

$$\sum_{\substack{p\in P_\theta \\ a<p\le b}} \frac{1}{p} \ge \frac{1-\theta^2}{4-\theta^2}\left(\frac{1}{2} - \frac{\log(1+\delta)}{\beta}\right)\frac{1}{m} + O\left(\frac{1}{m^2}\right).$$

Prisiminę (4.7), kai $\delta$ yra pakankamai maža konstanta, iš čia gauname, kad

$$\sum_{m\notin A} \frac{1}{m} < \infty. \tag{4.10}$$

Aibę $A$ užrašome pavidalu

$$A = \{a_m\}, \ \ a_1 < a_2 < \dots.$$

Tuomet (4.10) rodo, kad

$$\lim_{m\to\infty} \frac{a_m}{m} = 1. \tag{4.11}$$

Tačiau iš aibės $A$ apibrėžimo matome, kad egzistuoja tokia seka $\{\xi_m\}$, kad

$$\left(a_m - \frac{1}{4}\right)\beta < \xi_m \leq \left(a_m + \frac{1}{4}\right)\beta \tag{4.12}$$

ir $|k(\xi_m)| \leq e^{-\xi_m}$. Iš čia ir (4.11) išplaukia, kad

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\xi_m}{m} = \beta \tag{4.13}$$

ir

$$\limsup_{m\to\infty} \frac{\log|k(\xi_m)|}{\xi_m} \leq -1. \tag{4.14}$$

(4.13) lygybė yra 4.4 lemos $3^0$ sąlyga. Be to iš (4.12) turime, kad

$$|\xi_m - \xi_n| \geq |a_m - a_n|\beta - \frac{\beta}{2} \geq c_3|m-n|.$$

Taigi 4.4 lemos $2^0$ sąlyga taip pat yra išpildyta. Gauname, kad visos 4.4 lemos sąlygos yra patenkintos, todėl iš (4.14) randame, kad

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|k(r)|}{r} \leq -1. \tag{4.15}$$

Tačiau pagal 4.6 lemą, jei $k(z) \not\equiv 0$, tai

$$\limsup_{r\to\infty} \frac{\log|k(r)|}{r} > -1,$$

kas prieštarauja (4.15) nelygybei. Vadinasi turi būti $k(z) \equiv 0$. Diferencijuodami šią lygybę ir imdami $z = 0$ gauname, kad

$$\int_{\mathbb{C}} s^r d\mu u^{-1}(s) = 0, \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Šios lygybės ir mato $\mu u^{-1}$ apibrėžimas parodo, kad

$$\int_{\mathbb{C}} s^r d\mu(s) = 0, \quad r = 0, 1, 2, \ldots.$$

Taigi gavome, kad yra patenkinta 4.3 lemos $1^0$ sąlyga. Be to galioja ir šios lemos $2^0$ sąlyga, nes iš funkcijos $g_p(s)$ apibrėžimo turime, kad eilutė

$$\sum_p g_p(s)$$

konverguoja erdvėje $H(D)$. Aišku, kad 4.3 lemos $3^0$ sąlyga taip pat galioja, nes su kiekviena kompaktine aibė $K \subset D$

$$\sum_p \sup_{s\in K} |g_p(s)|^2 < \infty.$$

Vadinasi gavome, kad seka $\{g_p(s)\}$ tenkina visas 4.3 lemos sąlygas. Todėl visų konverguojančių eilučių

$$\sum_p g_p(s)a_p, \quad |a_p| = 1,$$

aibė yra visur tiršta erdvėje $H(D)$. Lema įrodyta.

Dabar, remdamiesi 4.2 lema, įrodysime tvirtinimą apie 3.1 teoremos ribinio mato $P_{L_E}$ atramą. Primename, kad mato $P_{L_E}$ atrama yra tokia minimali uždara aibė, kad $P_{L_E}(s) = 1$. Aibė $S$ yra sudaryta iš visų tokių elementų $x \in H(D)$, kurių kiekviena aplinka $G$ turi savybę $P_{L_E}(G) > 0$. Apibrėžiame aibę

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \ arba \ g(s) \equiv 0\}.$$

**4.7 teorema**. *Mato $P_{L_E}$ atrama yra aibė $S$.*

Prieš įrodydami 4.7 teoremą suformuluosime dvi lemas.

**4.8 lema**. *Tarkime, kad $\{X_n\}$ yra tokia $H(D)$ - reikšmių nepriklausomų atsitiktinių elementų seka, kad eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m$$

*beveik tikrai konverguoja. Tada tos eilutės sumos atrama yra visų tokių elementų $g \in H(D)$, kuriuos galima užrašyti konverguojančia eilute*

$$g = \sum_{m=1}^{\infty} f_m, \ f_m \in S_{X_m},$$

*aibės uždarinys.*

Lema yra 1.7.10 teorema iš [5].

**4.9 lema**. *Tarkime, kad $\{g_n(s) : n \in \mathbb{N}\}$ yra analizinių srityje $D$ funkcijų seka ir, kai $n \to \infty$, $f_n(s) \to f(s)$ tolygiai konverguoja srityje $D$. Tegul $f(s) \not\equiv 0$. Tada vidinis srities $D$ taškas $s_0$ yra funkcijos $f(s)$ nulis tada ir tik tada, kai egzistuoja tokia seka $\{S_n \in D\}$, konverguojanti į $s_o$ ir $f_n(s_n) = 0$, kai $n > n_0(s_0)$.*

Lema yra vadinama Hurvico teorema, ji yra 6.5.6 lema iš [4].

*4.7 teoremos įrodymas.* Mes turėjome, kad $\{\omega_h(p) : p \in \mathcal{P}\}$ yra nepriklausomų atsitiktinių dydžių, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$ seka. Iš čia, naudodami šio skyrelio pradžios žymenis, turime, kad $\{f_p(s, \omega_h(p)) : p \in \mathcal{P}\}$ yra nepriklausomų $f(D)$ - reikšmių atsitiktinių elementų, apibrėžtų tikimybinėje erdvėje $(\Omega_h, \mathcal{B}(\Omega_h), m_H^h)$ seka. Kiekvieno atsitiktinio elemento $f_p(s, \omega_h(p))$ atrama yra aibė

$$\{g \in H(D_M) : g(s) = f_p(s, a), |a| = 1\}.$$

Todėl pagal 4.8 lemą turime, kad $H(D)$ - reikšmio atsitiktinio elemento

$$\log L_E(s, \omega_h) = \sum_p f_p(s, \omega_h(p))$$

atrama yra visų konverguojančių eilučių

$$\sum_p f_p(s, a_p), \quad |a_p| = 1,$$

aibės uždarinys. Pagal 4.2 lemą, ši aibė yra visur tiršta erdvėje $H(D)$. Atvaizdis $u : H(D) \to H(D)$ duotas formule $u(g) = e^g, g \in H(D)$, yra tolydus ir $\log L_E(s, \omega_h)$ atvaizduoja į $L_E(s, \omega_h)$, o $H(D)$ atvaizduoja $S \backslash \{0\}$. Iš čia turime, kad atsitiktinis elementas $L_E(s, \omega_h)$ priklauso aibei $S \backslash \{0\}$. Tačiau pagal apibrėžimą atrama yra uždara aibė. Kadangi pagal 4.9 lemą uždarinys $\overline{S \backslash \{0\}} = S$, tai elemento $L_E(s, \omega_h)$ atrama priklauso aibė $S$. Iš kitos pusės, atsitiktinis elementas $L_E(s, \omega_h)$ yra beveik tikrai konverguojanti nenulinių daugiklių sandauga, todėl vėl pagal 4.9 lemą gauname, kad beveik tikrai

elemento $L_E(s, \omega_h)$ atrama priklauso aibei $S$.

Pagal apibrėžimą, mato $P_{L_E}$ atrama $S_{P_{L_E}}$ yra atsitiktinio elemento $L_E(s, \omega_h)$ atrama. Taigi įrodėme, kad $S \subset S_{P_{L_E}}$ ir $S_{P_{L_E}} \subset S$. Iš čia gauname, kad $S_{P_{L_E}} = S$. Teorema įrodyta.

Prieš 4.1 teoremos įrodymą pateiksime dar porą lemų.

**4.10 lema**. *Tarkime, kad $P_n, n \in \mathbb{N}$ ir $P$ yra tikimybiniai matai kurioje nors metrinėje erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ ir kai $n \to \infty$ $P_n$ silpnai konverguoją į $P$. Tuomet su kiekviena atvira aibę $G \subset S$*

$$\liminf_{n \to \infty} P_n(G) \geq P(G).$$

**4.11 lema**. *Tarkime, kad $K$ yra kompaktinė kompleksinės plokštumos aibė turinti jungųjį papildinį. Tuomet kiekviena funkcija $g(s)$, kuri yra tolydi aibėje $K$ ir analizinė jos viduje, yra tolygiai aibėje $A$ aproksimuojama daugianariais nuo $s$.*

Lema yra vadinama Mergeliano teorema. Jos įrodymą galima rasti [8].

*4.1 teoremos įrodymas.* Iš pradžių, tarkime, kad funkcija $f(s)$ turime ne nulį analizinį tęsinį į juostą $D$. Apibrėžiame aibę

$$G = \{g \in G : \sup |g(s) - f(s)| < \epsilon\}.$$

Aibė $G$ yra atvira, be to, pagal 4.7 lemą funkcija priklauso mato $P_{L_E}$ atramai. Todėl iš mato atramos sąvybių ir 4.10 lemos išplaukia, kad

$$\liminf_{N \to \infty} \mu_N(\sup_{s \in K} |L_E(s + imh) - f(s)| < \epsilon) \geq P_{L_E}(G) > 0. \tag{4.16}$$

Dabar tegul funkcija $f(s)$ tenkina 4.1 teoremos sąlygas. Tuomet pagal 4.11 lemą egzistuoja toks daugianaris $p(s)$, $p(s) \neq 0$ aibėje $K$, kad

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \frac{\epsilon}{4}. \tag{4.17}$$

Fiksuojame tolydžią logaritmo $\log p(s)$ šaką. Tuomet vėl pagal 4.11 teoremą egzistuoja toks daugianaris $q(s)$, kad

$$\sup_{s\in K} |p(s) - e^{q(s)}| < \frac{\epsilon}{4}.$$

Iš čia ir (4.17) išplaukia, kad

$$\sup_{s\in K} |f(s) - e^{q(s)}| \leq \sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| + \sup_{s\in K} |p(s) - e^{q(s)}| < \frac{\epsilon}{4} + \frac{\epsilon}{4} = \frac{\epsilon}{2}. \tag{4.18}$$

Kadangi $e^{q(s)} \neq 0$, tai iš (4.16) gauname, kad

$$\liminf_{N\to\infty} \mu(\sup_{s\in K} |L_E(s + imh) - e^{q(s)}| < \frac{\epsilon}{2}) > 0.$$

Pastaroji nelygybė kartu su (4.18) įrodo teoremą.

# IŠVADOS

Elipsinė kreivė $E$ virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$ yra apibrėžiama Vejerštraso lygtimi

$$y^2 = x^3 + ax + b, \qquad a, b \in \mathbb{Z}.$$

Laikysime, kad kreivės $E$ diskriminantas $\triangle = 16(4a^3 + 27b^2) \neq 0$. Tuomet kreivė $E$ nėra singuliari. Magistro darbe yra nagrinėjama $L$ funkcija, susijusi su elipsine kreive $E$. Tarkime, kad $p$ žymi pirminius skaičius, o $v(p)$ yra lyginio

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \quad (mod\ p)$$

sprendinių skaičius. Apibrėžiame

$$\lambda(p) = p - v(p).$$

Elipsinės kreivės $L$ funkcija $L_E(s), s = \sigma + it$, pusplokštumėje $\sigma > \frac{3}{2}$ yra apibrėžiama Oilerio sandauga

$$L_E(s) = \prod_{p|\triangle} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\nmid\triangle} \left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1}.$$

Magistro darbe yra įrodyta diskreti universalumo teorema elipsinių kreivių $L$ funkcijoms.

**Teorema**. *Tarkime, kad* $\exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ *su kuriuo nors sveikuoju* $k \neq 0$ *yra racionalusis skaičius. Tegul* $K$ *yra juostos* $D = \{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}\}$ *kompaktinė aibė, turinti jungųjį papildinį, o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi ir nelygi nuliui aibėje* $K$ *ir analizinė jos viduje. Tuomet su kiekvienu* $\epsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N(\sup_{s\in K} |L_E(s + imh) - f(s)| < \epsilon) > 0.$$

# LITERATŪRA


1. BILLINGSLEY P. *Convergence of Probability Measures.* New York, 1968.

2. CRAMER H.; LEADBETTER M. R. *Stationary and related stochastic processes sample function properties and their applications.* New York, 1967.

3. KAČINSKAITĖ R.; LAURINČIKAS A. *On the value distribution of the Matsumoto zeta - function.* Hungar, 2004. Acta Math. **105**, No. 4, 339–359.

4. LAURINČIKAS A. *Limit Theorems for the Riemann Zeta - Function.* Kluwer, Dordrecht, Boston, London, 1996.

5. LAURINČIKAS A. MATSUMOTO K. *The joint universality of zeta - functions attached to certain cusp for us* Fiz. mat. fak. Moksl. semin. darb. **5**, 2002. 58–75.

6. MURTY M. R.; MURTY V. K. *Non-Vanishing of L-Functions and Applications* Birkhäuser, Basel etc., 1997.

7. VORONIN S. M. *A theorem on the "universality" of the Riemann zeta - function.* Math. USSR-Izv., **9**, 1975. 443–453.

8. WALSH J. L. *Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain.* Amer. Math. Soc., Collog. Publ. **20**, 1960.

## Universality of $L$ - functions, of elliptic curves. Discrete case


## SUMMARY

Let $E$ be an elliptic curve given by the Weierstrass equation

$$y^2 = x^3 + ax + b, \quad a, b \in \mathbb{Z}.$$

We suppose that the discriminant $\triangle$ of $E$ is distinct from zero. For each prime $p$, denote by $v(p)$ the number of solutions of the congruence

$$y^2 \equiv x^3 + ax + b \quad (mod\ p),$$

and define

$$\lambda(p) = p - v(p).$$

The $L$ - function of $L_E(s), s = \sigma + it$, of the curve $E$ is defined, for $\sigma > \frac{3}{2}$, by

$$L_E(s) = \prod_{p|\triangle}\left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s}\right)^{-1} \prod_{p\nmid\triangle}\left(1 - \frac{\lambda(p)}{p^s} + \frac{1}{p^{2s-1}}\right)^{-1},$$

and is analytically continued to an entire function.

In the master work, we prove the universality of the function $L_E(s)$.

**Theorem**. *Suppose that $h > 0$ is such that $exp\{\frac{2\pi k}{h}\}$ is rational for some $k \in \mathbb{Z}\backslash 0$. Let $K$ be a compact subset of the strip $\{s \in \mathbb{C} : 1 < \sigma < \frac{3}{2}\}$ with connected complement, and let $f(s)$ be a function continuous on $K$ and analytic in the interior of $K$. Then, for every $\epsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \mu_N(\sup_{s\in K} |L_E(s + imh) - f(s)| < \epsilon) > 0.$$