ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

Asta Vaitiškytė

POLINOMINIO SKIRSTINO HIPOTEZIŲ TIKRINIMAS

Magistro darbas

Darbo vadovas

doc. Vaidotas Kanišauskas

Šiauliai, 2010 m.

TURINYS

ĮVADAS

Darbo tikslas – susipažinti su Kulbako-Leibliero ir Čensovo-Salichovo informacijų taikymais.

Uždavinys: Ištirti kelių hipotezių tikrinimo, optimalių kriterijų tikimybinių klaidų asimptotinį elgesį.

Parametrų įvertinimo ir hipotezių patikrinimo uždaviniai yra svarbiausi matematinėje statistikoje. Tikslūs sprendiniai galimi tik specialiais atvejais, todėl asimptotiniai metodai leidžia sukurti statistines procedūras, kuriomis galime gauti asimptotiškai efektyvius įverčius arba optimalius kriterijus. Le Kamas [2] atskleidė glaudų ryšį tarp asimptotinių statistikos uždavinių ir tikėtinumo santykio logaritmo elgesio, didėjant stebėjimų apimčiai. Todėl natūralu, kad XX a. 6 dešimtmetyje buvo įvesti Kulbako [10, 11] Černovo [4] atstumai, taikomi hipotezių tikrinimo teorijoje. Statistinių hipotezių tikrinimo uždaviniuose taikomos dvi procedūros gaunant optimalius kriterijus. Geriausiai ištirta, galėtume vadinti galingiausių kriterijų procedūrą, kada tikrinant dvi hipotezes apribojama vienos rūšies klaidos tikimybė, o kitos rūšies klaidos tikimybę stengiamasi sumažinti. Tokios procedūros išsamiai aprašytos Lemano monografijoje [15], o kriterijai vadinami Neimano-Pirsono vardais. Pagal antrą procedūrą stengiamasi sumažinti didžiausią iš visų rūšių klaidų tikimybes. Statistiniai kriterijai, tenkinantys antrąją procedūrą, vadinami minimaksiškais.

Pirmasis asimptotines procedūras, hipotezių tikrinimo uždaviniuose, kai stebimi nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę dydžiai aprašė Černovas [3]. Toliau tos idėjos gilinamos Čensovo [4] ir Salichovo [14].

Kai stebėjimų prigimtis yra sudėtingesnė maksimalaus tikėtinumo statistinius kriterijus intensyviai tyrė J. Linkovas [16], o minimaksiškus V. Kanišauskas [7]

Šiame darbe stengiamasi užpildyti tarpinę grandį tarp seniausių Černovo ir Čensovo darbų ir naujausių Linkovo ir Kanišausko, nagrinėjant sudėtingą polinominį skirstinį. Reikia pastebėti, kad asimptotiniaime paprastųjų hipotezių tikrinimo uždavinyje, stebint polinominio skirstinio imtį, Salichovas [14] savo darbe pateikė tik galutinius rezultatus, kurie mūsų darbe pilnai išvedami ir paaiškinami.

Magistro darbą sudaro: įvadas, teorija, pagrindiniai rezultatai ir literatūra. Teorinėje dalyje trumpai supažindinama su pagrindinėmis polinominio skirstinio savybėmis ir sąsajomis su Helingero integralu bei informacijos atstumais. Dalyje „Pagrindiniai rezultatai“ yra pristatomos gautos formulės bei jų pritaikymo galimybės. Darbo pabaigoje pateikiamos išvados.

1. TEORIJA

1.1. Absoliutinis matų tolydumas

Imkime tikimybinę erdvę (Ω, B, P) ir atsitiktinį dydį $X = X(w)$, $w \in \Omega$. Sakykime, kad funkcija $g(x) = g(x_1, x_2, ..., x_n)$ yra tolydi pagal visus savo argumentus.

1 Apibrėžimas: Jei iš lygybės $\rho(A) = 0$, $A \in \mathrm{A}$, išplaukia $\varphi(A) = 0$, tai sakoma, kad matas ρ yra absoliučiai tolydus mato φ atžvilgiu. Žymime $\rho << \varphi$.

Teorema: (Radono-Nikodimo). Jei φ ir ρ yra matai išmatuojamojoje erdvėje $\{\Omega, A\}$, matas φ yra σ – baigtinis, o matas ρ – absoliučiai tolydus mato φ atžvilgiu, tai egzistuoja neneigiama *A* – išmatuojama funkcija *f*, kiekvienai $A \in \mathrm{A}$ tenkinanti lygybę

$$\rho(A) = \int_A f(w)\varphi(dw).$$

Jei ir matas ρ yra σ – baigtinis, tai funkcija *f* yra beveik visur baigtinė. Jei be funkcijos *f* yra dar ir kita *A* – išmatuojama funkcija *g*, visoms $A \in \mathrm{A}$ tenkinanti lygybę

$$\rho(A) = \int_A f(w)\varphi(dw),$$

tai funkcijos *f* ir *g* yra beveik visur lygios mato φ atžvilgiu.

Funkcija *f* teoremoje dažnai vadinama mato ρ Radono-Nikodimo išvestine mato φ atžvilgiu ir žymima $\frac{d\rho}{d\varphi}$. Ji turi daugelį paprastos klasikinės analizės nagrinėjamos išvestinės savybių.

Jei φ ir ρ yra du baigtiniai tikimybiniai matai, nusakyti formulėmis:

$$\varphi(A) = \sum_{i:x_i \in A} p(x_i),\ A \in B(X), \text{ kur } X = \{x_1, x_2, ..., x_n\},$$

čia $p(x_i > 0)$, $i = 1,2,...,n$;

$$\rho(A) = \sum_{i:y_i \in A} q(y_i),\ A \in B(Y), \text{ kur } Y = \{y_1, y_2, ..., y_n\},$$

Čia $q(y_i) > 0$, $i = 1,2,...,m$, tada $\rho << \varphi$, t.y. $x_i = y_i$, $m = n$. Šiuo atveju galime rašyti

$$\rho(A) = \sum_{i:x_i \in A} \left\{\frac{q(x_i)}{p(x_i)}\right\} p(x_i) \text{ ir } \frac{d\rho}{d\varphi}(x) = \frac{q(x)}{p(x)},\ x \in X.$$

1.2. Helingerio integralas

Tarkime, kad $\left(X^n, B^n, \left\{P_1^n, P_2^n\right\}\right)$, $n \geq 0$ – binarinė statistinių eksperimentų šeima su stebėjimais $X^n \in X^n$, H_1^n ir H_2^n – dvi paprastos hipotezės, reiškiančios, kad stebėjimai X^n turi tikimybinį matą P_1^n ir P_2^n atitinkamai.

Sakykime, kad mačioje erdvėje $\left(X^n, B^n\right)$ turime tris tikimybinius matus P_1^n, P_2^n, Q^n tokius, kad $P_i^n << Q^n$, $i = 1,2$, $\forall n \in N$. Tada tikimybių matų P_1^n ir P_2^n, $\alpha \in [0,1]$ eilės Helingerio integralu vadiname dydį

$$H_n(\alpha) = H_n\left(\alpha, P_1^n, P_2^n\right) = \begin{cases} E_Q^n z_2^1 1\left(z_1^n > 0\right), \alpha = 0 \\ E_Q^n \left(z_1^n\right)^\alpha \left(z_2^n\right)^{1-\alpha}, \alpha \in (0,1) \\ E_Q^n z_1^n 1\left(z_2^n > 0\right), \alpha = 1 \end{cases},$$

kur E_Q^n – matematinis vidurkis mato Q^n atžvilgiu, $1(A)$ – aibės A indikatorius, $z_i^n = \dfrac{dP_i^n}{dQ^n}$, $i = 1,2$.

Jei turime stebėjimus $X^n = \left(X_1, X_2, ..., X_n\right)$, kur $X_1, X_2, ..., X_2$ yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai apibrėžti tikimybinėje erdvėje (X, B) su nežinomu skirstiniu P_θ, $\theta \in \Theta$, o mačioje erdvėje (X, B) apibrėžtas matas Q toks, kad $P_{\theta i} << Q$ $i = 1,2,...,r$, kur $\theta_1, ..., \theta_r$ yra fiksuoti taškai iš Θ.

Tada $\alpha \in [0,1]$ eilės Helingerio integralas tarp matų $P_{\theta i}^n = \underbrace{P_{\theta i} \times ... \times P_{\theta i}}_{n}$ ir $P_{\theta j}^n = \underbrace{P_{\theta j} \times ... \times P_{\theta j}}_{n}$:

$$H_{ij}^n(\alpha) = H_n\left(\theta_i, \theta_j, \alpha\right) = E_Q^n \left(z_i^n\right)^\alpha \left(z_j^n\right)^{1-\alpha} = \left(\int_X p_i^\alpha(x) p_j^{1-\alpha}(x) Q(dx)\right)^n,$$

kur $p_i(x) = \dfrac{dP_{\theta i}}{dQ}$, $i = 1,2,...,r$.

1.3. Hipotezių tikrinimas

Susipažinsime su pagrindiniais principais, kuriuos pateikė A. Aksiomaitis [1] hipotezėms tikrinti.

Bet koks teiginys apie tikrąjį imties X skirstinį P^X vadinamas hipoteze.

Dažniausiai tikriname dvi hipotezes:

$$H_0 : P^X = P_0 \qquad\qquad H_1 : P^X = P_1$$

(užrašas $P^X = P_i$ reiškia teiginį: tikrasis X skirstinys P^X yra P_i).

Statistine hipoteze vadiname bet kurią prielaidą apie nežinomą generalinės aibės (atsitiktinio dydžio) tikimybių skirstinį. Skirstinių klasė dažnai yra žinoma (normalioji, eksponentinė, Puasono ir t. t.), tačiau priklauso nuo vieno ar kelių nežinomų parametrų.

Prielaidą apie tikimybių skirstinio parametrų reikšmes vadiname parametrine hipoteze. Parametrinę hipotezę vadiname paprastąja, jeigu ji nusakoma viena parametro reikšme. Priešingu atveju hipotezė yra sudėtingoji. Sakykime, žinome, kad atsitiktinis dydis $X \sim N(m,\sigma)$. Tada hipotezė $m = m_0$ yra paprastoji, o hipotezė $m > m_0$ – sudėtingoji. Vieną iš galimų hipotezių, dažniausiai mums ypač reikšmingą, vadiname *pagrindine* arba *nuline hipoteze* ir žymime H_0. Hipotezę, priešingą nulinei, vadiname *alternatyviąją hipoteze* arba tiesiog alternatyva, ir žymime H_a (H_1).

Tarkime, turime imtį $(X_1,...,X_n)$, gauta stebint atsitiktinį dydį *X*, kurios tikimybių skirstinys priklauso nuo parametro θ. Reikia patikrinti nulinę hipotezę $H_0 : \theta = \theta_0$ su alternatyva $H_a : \theta = \theta_1$. Laikydami, kad H_0 teisinga, parenkame statistiką $G_n = G_n(X_1,...,X_n)$, kurio tikimybių skirstinys yra žinomas arba aproksimuojamas žinomu skirstiniu. Statistikos galimų reikšmių aibę ***R*** suskaidome į dvi sritis: *K* ir *R* \ *K*. Hipotezę H_0 tikriname tokia procedūra: jei sudarius konkrečią imtį $(x_1,...,x_n)$, statistikos G_n reikšmė patenka į sritį *K*, tai hipotezė H_0 prieštarauja imties duomenims ir yra atmestina, o jei į sritį *R* \ *K* – hipotezė yra suderinta su imtimi ir priimtina. Sritį *K* – hipotezės H_0 atmetimo aibę vadiname *kritine sritimi*.

Pirmos rūšies klaida – atmesta teisinga hipotezė H_0. Šios klaidos tikimybė α lygi tikimybei, kad statistika G_n pateks į kritinę sritį *K*, kai H_0 teisinga:

$$\alpha = P(G \in K \mid H_0).$$

Antros rūšies klaida – priimta klaidinga hipotezė H_0. Šios klaidos tikimybė β lygi tikimybei, kad statistika G_n nepateks į kritinę sritį *K*, kai H_0 klaidinga (teisinga alternatyva H_a (H_1)):

$$\beta = P(G_n \notin K \mid H_a) = 1 - P(G_n \in K \mid H_a).$$

Būtų idealu, jei $\alpha = 0$ (niekada neatmestume teisingos hipotezės) ir $\beta = 0$ (nepriimtume klaidingos hipotezės). Nenorėdami atmesti hipotezės H_0, parenkame mažą pirmosios klaidos tikimybę α (jos statistinės reikšmės gali būti 0,1; 0,05; 0,01). Tokius kriterijus vadinsime reikšmingumo kriterijais, o tikimybę α – *reikšmingumo lygmeniu*.

Tarkime, kad H_0 yra klaidinga, o alternatyva H_a – teisinga. Tikimybę atmesti klaidingą hipotezę H_0, kai teisinga alternatyva H_a (antros rūšies klaidos nebuvimo tikimybę), $1-\beta = P(G_n \in K \mid H_a)$ vadiname reikšmingumo kriterijaus galia. Mažesnę antrosios rūšies klaidos tikimybę β atitinka didesnę kriterijaus galia. Kriterijų, kurio reikšmingumo lygmuo α, reikia parinkti taip, kad kriterijaus galia būtų kuo didesnė. Didžiausią galią turintį kriterijų vadinsime galingiausiu.

Parametrinės hipotezės tikrinimo reikšmingumo kriterijaus algoritmas:

- Formuojame nulinę hipotezę H_0 ir alternatyvą H_a.
- Parenkame reikšmingumo lygmenį α.
- Laikydami, kad H_0 yra teisinga, imties $(X_1,...,X_n)$ pagrindu apibrėžiame statistiką $G_n = G_n(X_1,...,X_n)$ ir apibūdiname jos skirstinį.
- Parenkame kritinę sritį *K*.
- Priimame sprendimą: jei statistikos G_n konkreti realizacija $g_n \in K$, hipotezė H_0 nesuderinama su imties duomenimis ir yra atmestina, o jei $g_n \notin K$, hipotezė yra suderinama su stebėjimo duomenimis ir priimtina.

1.4. Polinominis skirstinys

Turime nepriklausomu bandymų seką tokią, kad kiekviename bandyme gali įvykti nesutaikomi įvykiai $A_1, A_2,....,A_k$. Įvykio A_i tikimybė kiekviename bandyme lygi $p_i > 0$ $(p_1 + p_2 + ... + p_k = 1)$ ir nepriklauso nuo kitų bandymų rezultatų. Per *m* bandymų įvykusių įvykių A_i skaičių žymime X_i, $i = 1,2,....,k$. Tada atsitiktinio vektoriaus $X = (X_1,...,X_{k-1})$ tikimybinis skirstinys vadinamas *polinominiu* ir žymimas $X \sim P(m, p_1,...., p_k)$.

$$P(X_1 = m_1, X_2 = m_2,..., X_{k-1} = m_{k-1}) = \frac{m!}{m_1!...m_k!} p_1^{m_k} ... p_k^{m_k},$$

kur $m \geq m_i \geq 0$ ir $m_1 + ... + m_k = m$.

1.4.1. Polinominio skirstinio taikymas

Tarkime, kad turime statistinių eksperimentų šeimą $\left(X^{n}, B^{n}, P^{n}\right)$, $n \in N$ su stebėjimais $X^{n}=\left(X_{1}, X_{2}, \ldots, X_{n}\right) \in X^{n}$, kur $X_{1}, X_{2}, \ldots, X_{n}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai vektoriai $X_{i}=\left(Y_{1}, Y_{2}, \ldots, Y_{k-1}\right)$ turime polinominį skirtinį:

$$P\left(Y_{1}=m_{1}, Y_{2}=m_{2}, \ldots, Y_{k-1}=m_{k-1}\right)=\frac{m!}{m_{1}!\ldots m_{k}!} p_{1}^{m_{k}} \ldots p_{k}^{m_{k}},$$

kur $m_{1}+\ldots+m_{k}=m$ ir $p_{1}+p_{2}+\ldots+p_{k}=1$, p_{i}, $i=1,\ldots,k$ yra tikimybės. Žymėsime $X \sim P=\left(p_{1}, p_{2}, \ldots, p_{k}, m\right)$.

Tikriname r paprastųjų hipotezių $H_{i}^{n}: P^{n}=P_{i}^{n}$, $i=1,\ldots,r$.

Teorema. Kulbako-Leibliero atstumas sukonstruotas pagal polinominį skirstinį $P_{i}=\left(p_{1_{i}}, p_{2_{i}}, \ldots, p_{k_{i}}, m\right)$, $P_{j}=\left(p_{1_{j}}, p_{2_{j}}, \ldots, p_{k_{j}}, m\right)$ turi tokį pavidalą:

$$I\left(P_{i}, P_{j}\right)=m \sum_{l=1}^{k} p_{l_{i}} \ln \frac{p_{l_{i}}}{p_{l_{j}}},$$

kur $i \neq j$, $i, j=1,2,\ldots,r$.

Teorema. $\alpha \in[0,1]$ eilės Helingerio integralas, sukonstruotas pagal du polinominio skirstinio tikimybinius matus P_{i}^{n} ir P_{j}^{n} turi pavidalą:

$$H_{ij}^{n}(\alpha)=H\left(P_{i}^{n}, P_{j}^{n}, \alpha\right)=\left(\sum_{t=1}^{k} p_{ti}^{\alpha} p_{tj}^{1-\alpha}\right)^{m \cdot n},$$

kur $i \neq j$, $i, j=1,2,\ldots,r$.

1.5. Kulbako atstumai

Susipažinsime su pagrindinėmis sąvokomis ir Kulbako atstumų savybėmis, kurios pateiktos [10] knygoje.

1 apibrėžimas: Turime dvi tikimybines erdves (χ,B,μ_1) (χ,B,μ_2) su elementais $X \in \chi$ ir jų σ-algebromis B.

Tarkime, kad egzistuoja matas λ toks, kad $\lambda \sim \mu_{1}$, $\lambda \sim \mu_{2}$. Tai reiškia, kad pagal Radeno – Nikodimo teoremą, egzistuoja tankis $f_{i}(x)$, kad

$$\mu_{i}(E)=\int_{E} f_{i}(x) d \lambda(x),\ i=1,2,\ E \in \mathrm{B}$$

žymėsime

$$f_i(x)=\frac{d\mu_i}{d\lambda}(x) \quad \text{arba } d\mu_i(x)=f_i(x)d\lambda(x).$$

Kartu galioja formulė:

$$\frac{dv}{d\lambda}=\frac{dv}{d\mu}\cdot\frac{d\mu}{d\lambda}(\lambda).$$

Čia (λ) nurodo kurio mato atžvilgiu galioja lygybė.

3 apibrėžimas: Informacijos kiekis matų μ_1 ir μ_2 atžvilgiu aibės *E*, kai $\mu_1(E)>0$ apibrėžiamas formule:

$$I(1:2;E)=\frac{1}{\mu_1(E)}\int_E \log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}d\mu_1(x)=\frac{1}{\mu_1(E)}\int_E f_1(x)\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}d\lambda(x).$$

Kai $\mu_1(E)=0$, tada ši lygybė lygi 0 su $d\mu_1(x)=f_1(x)d\lambda(x)$.

Kai *E* yra visa erdvė χ, tada žymime $I(1:2)$.

Taigi pagal apibrėžimą

$$I(1:2)=\int f_1(x)\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}d\lambda(x) \text{ ir } I(2:1)=\int f_2(x)\log\frac{f_2(x)}{f_1(x)}d\lambda(x).$$

Iš čia išplaukia, kad

$$-I(2:1)=\int f_2(x)\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}d\lambda(x).$$

Kartu su atstumu $I(1;2)$ apibrėšime atstumą $J(1,2)$ pagal formulę:

$$J(1,2)=I(1:2)+I(2:1)=\int\left(f_1(x)-f_2(x)\right)\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}d\lambda(x).$$

1.5.1. $I(1:2)$ ir $J(1,2)$ savybės

1 Teorema: Atstumas $I(1:2)$ yra adityvi funkcija nepriklausomų atsitiktinių įvykių ar dydžių atžvilgiu t. y., jei *X* ir *Y* yra nepriklausomi įvykiai, tai

$$I(1:2;X,Y)=I(1:2;X)+I(1:2;Y).$$

Ši formulės išplaukia iš vektoriaus (*X*, *Y*) tankio išsiskaidymo dėl nepriklausomybės. T.y. $f_i(x,y)=g_i(x)h_i(y)$

$$I(1:2;X,Y)=\int f_1(x,y)\log\frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)}d\lambda(x,y)=\int g_1(x)h_1(y)\log\frac{g_1(x)h_1(y)}{g_2(x)h_2(y)}d\mu(x)dv(y)=$$

$$= \int g_1(x) \log \frac{g_1(x)}{g_2(x)} d\mu(x) + \int h_1(y) \log \frac{h_1(y)}{h_2(y)} dv(y) = I(1:2;X) + I(1:2;Y),$$

čia

$$d\lambda(x,y) = d\mu(x)dv(y) \text{ ir } \int g_i(x)d\mu(x) = 1, \ \int h_i(y)dv(y) = 1, \ i = 1,2 .$$

Jei dydžiai X ir Y yra priklausomi, tai adityvumas vis tiek išlieka atžvilgiu sąlyginių informacijų:

$$I(1:2;X,Y) = \int f_1(x,y) \log \frac{f_1(x,y)}{f_2(x,y)} dxdy = \int g_1(x) \log \frac{g_1(x)}{g_2(x)} dx + \int g_1(x) \left[h_1(y\,|\,x) \log \frac{h_1(y\,|\,x)}{h_2(y\,|\,x)} dy \right] dx$$

kur $g_1(x) = \int f_1(x,y)dy$, $h_i(y\,|\,x) = f_i(x,y)/g_i(x)$, $i = 1,2$.

Čia sąlyginė informacija apibrėžiama formule:

$$I(1:2;Y\,|\,X = x) = \int h_1(y\,|\,x) \log \frac{h_1(y\,|\,x)}{h_2(y\,|\,x)} dy .$$

Pastebime, kad

$$I(1:2;Y\,|\,X) = E_1(I(1:2;Y\,|\,X = x)) = \int g_1(x) I(1:2;Y\,|\,X = x) dx ,$$

kur $I(1:2;Y\,|\,X = x)$ gali būti apibrėžta kaip sąlyginė informacija *Y*, kai $X = x$.

2 Teorema.

$$I(1:2;X,Y) = I(1:2;X) + I(1:2;Y\,|\,X) = I(1:2;Y) + I(1:2;X\,|\,Y).$$

3 Teorema . Bet kuriems matams μ_1 ir μ_2 $I(1:2) \geq 0$ su lygybe, tada ir tik tada jei jų tankiai lygūs, t. y. $f_1(x) = f_2(x)$.

Išvados:

1) $$\int_E f_1(x) \log \frac{f_1(x)}{f_2(x)} d\lambda(x) \geq \left(\int_E f_1(x) d\lambda(x) \right) \log \frac{\int_E f_1(x) d\lambda(x)}{\int_E f_2(x) d\lambda(x)} = \mu_1(E) \log \frac{\mu_1(E)}{\mu_2(E)},$$

nuo $\lambda(E) > 0$, su lygybe tada ir tik tada, kai $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\mu_1(E)}{\mu_2(E)}[\lambda]$ $x \in E$.

2) Jeigu $E_i \in \mathrm{B}$, $i = 1,2,\ldots$, $E_i \ \mathrm{I}\ E_1 = 0$, $i \neq j$ ir $x = \cup_i E_i$, tai yra suskaidoma erdvė *x* į susikertančias aibes $E_1, E_2, \ldots$. Tada teisinga nelygybė

$$I(1:2) \geq \sum_i \mu_1(E_i) \log \frac{\mu_1(E_i)}{\mu_2(E_i)},$$

su lygybe tada ir tik tada, kai $\frac{f_1(x)}{f_2(x)} = \frac{\mu_1(E_i)}{\mu_2(E_i)}[\lambda]$, $x \in E_i$, $i = 1,2,\ldots$

3) a) $I(1:2;Y,X) \geq I(1:2;X)$ su lygybe tada ir tik tada, kai I(1:2;Y|X)=0;

b) $I(1:2;X,Y) \geq I(1:2;Y)$ su lygybe tada ir tik tada, kai $I(1:2;X\,|\,Y) = 0$;

c) $I(1:2;X\,|\,Y) \geq I(1:2;Y\,|\,X)$ su lygybe tada ir tik tada, kai $I(1:2;X) = 0$;

d) $I(1:2;X,Y) \geq I(1:2;X\,|\,Y)$ su lygybe tada ir tik tada, kai $I(1:2;Y) = 0$.

Kadangi $J(1,2) = I(1:2) + I(2:1)$, tai analogiškos savybės galioja atstumui $J(1,2)$:

4 Teorema. $J(1,2)$ yra adityvi funkcija nepriklausomų atsitiktinių įvykių X ir Y atžvilgiu, t. y. $J(1,2;X,Y) = J(1,2;X) + J(1,2;Y)$.

5 Teorema. $J(1,2;X,Y) = J(1,2;X) + J(1,2;Y\,|\,X) = J(1,2;Y) + J(1,2;X\,|\,Y)$.

6 Teorema. $J(1,2) \geq 0$ su lygybe tada ir tik tada, kai $f_1(x) = f_2(x)[\lambda]$.

Išvados

1) $$\int_E (f_1(x) - f_2(x))\log\frac{f_1(x)}{f_2(x)}d\lambda(x) \geq \left(\int_E f_1(x)d\lambda(x) - \int_E f_2(x)d\lambda(x)\right)\log\frac{\int_E f_1(x)d\lambda(x)}{\int_E f_2(x)d\lambda(x)} =$$

$$= (\mu_1(E) - \mu_2(E))\log\frac{\mu_1(E)}{\mu_2(E)}$$

$\lambda(E) > 0$, tada ir tik tada, kai $f_1(x)/f_2(x) = \mu_1(E)/\mu_2(E)[\lambda]$, $x \in E$.

2) Jei $E_i \in \mathrm{B}$, $i = 1,2,\ldots$, $E_i \cap E_j = 0$, $i \neq j$ ir $x = \bigcup_i E_i$,

$$J(1,2) \geq \sum_i (\mu_1(E_i) - \mu_2(E_i))\log\frac{\mu_1(E_i)}{\mu_2(E_i)}$$

tada ir tik tada, kai $f_1(x)/f_2(x) = \mu_1(E_i)/\mu_2(E_i)[\lambda]$, $x \in E_i$, $i = 1,2,\ldots$.

3) a) $J(1,2;X,Y) \geq J(1,2;X)$ tada ir tik tada, kai $J(1,2;Y\,|\,X) = 0$;

b) $J(1,2;X,Y) \geq J(1,2;Y)$ tada ir tik tada, kai $J(1,2;X\,|\,Y) = 0$;

c) $J(1,2;X,Y) \geq J(1,2;Y\,|\,X)$ tada ir tik tada, kai $J(1,2;X) = 0$;

d) $J(1,2;X,Y) \geq J(1,2;X\,|\,Y)$ tada ir tik tada, kai $J(1,2;Y) = 0$.

7 Teorema. $J(1,2;X) \geq J(1,2;Y)$, tada ir tik tada, kai $f_1(x)/f_2(x) = g_1(T(x))/g_2(T(x))[\lambda]$.

2. PAGRINDINIAI REZULTATAI

2.1. Černovo-Salichovo informacijos ryšys su hipotezių tikrinimu.

Tarkime, kad turime statistinių eksperimentų šeimą $\left(\chi^n, B^n, P_\theta^n, \theta \in \Theta\right)$, $n \geq 0$, kur Θ yra abstrakti aibė, su stebėjimais $X^n \in \chi^n$. Pasinaudodami šiais stebėjimais tikriname tris paprastas hipotezes:

$$H_1 : \theta = \theta_1,\ H_2 : \theta = \theta_2,\ H_3 : \theta = \theta_3,$$

kur θ tikroji parametro reikšmė. Šioms hipotezėms tikrinti naudosime statistinį kriterijų $\delta^n : \chi^n \to R^{(3)}$, kur $R^{(3)}$ yra aibė vektorių $\delta^n = \left(\delta_1^n, \delta_2^n, \delta_3^n\right)$,

$$\delta_i^n \geq 0,\ \delta_1^n + \delta_2^n + \delta_3^n = 1. \tag{1}$$

Kartu naudosime $\alpha \in [0,1]$ eilės Helingerio integralą tarp matų $P_{\theta_i}^n$ ir $P_{\theta_j}^n$:

$$H_{ij}^n(\alpha) = H_n(\theta_i, \theta_i, \alpha) = E_\theta^n\left(z_i^n\right)\left(z_j^n\right)^{1-\alpha},\ \alpha \in [0,1] \tag{2}$$

Tarkime, Δ^n yra aibė visų statistinių kriterijų. Kartu žymėsime $\alpha_{ij}\left(\delta^n\right) = E_i^n \delta_j^n\left(X^n\right)$ - tikimybė priimti H_j, kai teisinga hipotezė H_i, $i = 1,2,3$, kur E_i^n žymi matematinį vidurkį atžvilgiu mato $P_{\theta_i}^n$.

Įvedame tokias sąlygas:

A1. Su visais $i = \overline{1,3}$ ir $n \in N$ laikome, kad

$$P_{\theta_i}^n \sim P_{\theta_1}^n.$$

A2. Egzistuoja funkcija ψ_n tokia, kad $\psi_n \to \infty$ kai $n \to \infty$, ir griežtai iškilioji ir diferencijuojama funkcija $c_{ij}(\alpha)$ tokia, kad visiems $\alpha = [0,1]$, $i, j = \overline{1,3}, i \neq j$ egzistuoja riba

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \ln H_{ij}^n(\alpha) = c_{ij}(\alpha). \tag{3}$$

TEOREMA:

Tegul sąlygos *A1* ir *A2* būna patenkinamos, tada

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \inf_{\delta \in \Delta^n} \ln \max_{\substack{i \neq j \\ i,j \in [1,\dots,3]}} \alpha_{ij}(\delta) = -\min_{\substack{i \neq j \\ i,j \in [1,\dots,3]}} J_{ij}, \tag{4}$$

kur

$$-J_{ij} = -J\left(\theta_i, \theta_j\right) = c_{ij}(\alpha_0) = \inf_{0<\alpha<1} c_{ij}(\alpha) < 0. \tag{5}$$

J_{ij} vadinama Černovo-Salichovo informacija [3, 13]

Įrodymas: Apibrėžkime matų šeimą $Q_\alpha^{n,ij}$, $\alpha \in [0,1]$, $i, j = \overline{1,3}$

$$dQ_\alpha^{n,ij} = \frac{\exp\{\alpha L_{ij}^n\}}{H_{ij}^n(\alpha)} dP_{\theta_j}^n , \tag{6}$$

kur $L_{ij}^n = \ln Z_{ij}^n = \ln \dfrac{dP_{\theta_i}^n}{dP_{\theta_j}^n}$.

Pagal sąlygą *A2* ir (lema VII.3.2 R.S. Ellis [5]) turime

$$Q_{\alpha_0}^{n,ij} - \lim_{n\to\infty} \psi_n^{-1} L_{ij}^n = c'_{ij}(\alpha_0) = 0 , \tag{7}$$

kur $Q_{\alpha_0}^{n,ij} - \lim_{t\to\infty}$ reiškia konvergavimą pagal tikimybę.

Iš (6) lygybės turime

$$L_{j,Q_\alpha^{ij}} = -\alpha L_{ij}^n + \ln H_{ij}^n(\alpha), \tag{8}$$

kur $L_{j,Q_\alpha^{ij}}^n = \ln dP_{\theta_j}^n \Big/ dQ_\alpha^{n,ij}$.

Pagal (7) iš (8) lygybės gauname

$$Q_{\alpha_0}^{n,ij} - \lim_{n\to\infty} n^{-1} L_{j,Q_{\alpha_0}^{ij}}^n = -J_{ij} . \tag{9}$$

Iš (6) ir (2) lygybės turime

$$dQ_\alpha^{n,ij} = \frac{\exp\{(\alpha-1)L_{ij}^n\}}{H_{ij}^n(\alpha)} dP_{\theta_i}^n . \tag{10}$$

Iš (10) lygybės išplaukia

$$L_{i,Q_\alpha^{ij}}^n = (1-\alpha)L_{ij}^n + \ln H_{ij}^n(\alpha) . \tag{11}$$

Iš (9) ir (11) lygybių gauname

$$Q_{\alpha_0}^{n,ij} - \lim_{n\to\infty} n^{-1} L_{j,Q_{\alpha_0}^{ij}}^n = -J_{ij} . \tag{12}$$

Tai reiškia

$$D_\varepsilon^{n,ij} = \left\{X^n \in \chi^n : n^{-1} L_{i,Q_{\alpha_0}^{ij}}^n \left(X^n\right) + J_{ij} \ge -\varepsilon\right\}.$$

Iš (12) lygybės išplaukia, kad $\varepsilon > 0$ ir $\gamma > 0$,

$$Q_{\alpha_0}^{n,ij}\left(\chi^n / D_\varepsilon^{n,ij}\right) < \gamma , \tag{13}$$

visiems $n > n_0 = n_0(\gamma, \varepsilon)$.

Iš (1) lygybės, kai laisvasis narys $\delta^n \in \Delta^n$, gauname

$$E_{Q_{\alpha_0}^{ij}}^n \delta_1^n\left(X^n\right) + \ldots + E_{Q_{\alpha_0}^{ij}}^n \delta_r^n\left(X^n\right) = 1 .$$

Akivaizdu, kad

$$\alpha_{ij}\left(\delta^n\right)=E_i^n\delta_j^n\left(X^n\right)=E^n_{Q^{ij}_{\alpha_0}}\delta_j^n\left(X^n\right)\exp\left\{L^n_{i,Q^{ij}_{\alpha_0}}\right\}\geq E^n_{Q^{ij}_{\alpha_0}}\delta_j^n\left(X^n\right)I\left(X^n\in D_\varepsilon^{n,ij}\right)\exp\left\{L^n_{i,Q^{ij}_{\alpha_0}}\left(X^n\right)\right\},\quad(14)$$

kur $I(A)$ žymimas aibės A indikatorius.

Tegul $\max\limits_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}} E^n_{Q^{ij}_{\alpha_0}}\delta_j^n\left(X^n\right)\geq 1/r$. Tada iš (13) ir (14) lygybių turime

$$\max_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}}\alpha_{ij}\left(\delta^n\right)\geq\left(\frac{1}{r}-\gamma\right)\exp\left\{-n\min_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}}J_{ij}-n\varepsilon\right\}.\quad(15)$$

Kadangi $\varepsilon>0$ ir $\delta^n\in\Delta^n$, įstatę į (15) gauname

$$\underline{\lim}_{n\to\infty}n^{-1}\inf_{\delta^n\in\Delta^n}\ln\max_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}}\alpha_{ij}\left(\delta^n\right)\geq-\min_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}}J_{ij},\quad(16)$$

Iš (7) formulės, kai $\varepsilon>0$ ir $\delta>0$, kur $\exists\ n_0=n_0(\varepsilon,\delta)$ toks, kad

$$Q^{n,ij}_{\alpha_0}\left(\left|n^{-1}L^n_{i,j}\right|<\delta\right)>1-\varepsilon,\quad n>n_0.\quad(17)$$

Į (14) įstatę (11), gauname

$$\alpha_{ij}\left(\delta^n\right)=E^n_{Q^{ij}_{\alpha_0}}\delta_j^n\left(X^n\right)\exp\left\{(1-\alpha_0)L^n_{ij}+\ln H^n_{ij}(\alpha_0)\right\}.\quad(18)$$

Tai išplaukia iš (18) ir (17) lygybių, kadangi

$$\max_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}}\alpha_{ij}\left(\delta^n\right)\leq\exp\left\{(1-\alpha_0)n\delta+\max_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}}H^n_{ij}(\alpha_0)\right\}.\quad(19)$$

Kadangi $\delta>0$, pasinaudoja (19) gauname

$$\overline{\lim}_{n\to\infty}n^{-1}\inf_{\delta^n\in\Delta^n}\ln\max_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}}\alpha_{ij}\left(\delta^n\right)\leq-\min_{\substack{i\neq j\\ i,j\in\{1,\dots,3\}}}J_{ij}.\quad(20)$$

Sujungią (16) ir (20) gauname (4).

Teorema įrodyta.

Pastaba: Akivaizdu, kad gauname teoremos rezultatą, kai funkcija $c_{ij}(\alpha)$ sąlygose *A2* apibrėžta visiems $\alpha\in(0,1)$.

2.2. Kulbako informacijos ryšys su hipotezių tikrinimu

Tikriname hipotezes

$$H_0:P^X=P_0,\ H_1:P^X=P_1$$

Pagal stebėjimus $X=(X_1,X_2,\dots,X_n)$, kur $X_1,X_2,\dots,X_n$ - nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai turintys skirstinį P^X , δ statistinis kriterijus tikrinti hipotezes H_1 ir H_2.

Kartu įvertinsime tokią statistinių kriterijų klasę $B(b,n)=\{\delta : \alpha_2(\delta)<b, 0<b<1\}$, kurioje aprėžta antros rūšies klaidos tikimybė. Čia kriterijus $\delta=(\delta_1,\delta_2)$ toks, kad $\delta_i \geq 0$ ir $\delta_1+\delta_2=1$, $\alpha_1(\delta)=E_1^n\delta_2(X)$ - tikimybė priimti hipotezę H_2, kai teisinga H_1. $\alpha_2(\delta)=E_2^n\delta_1(X)$ - tikimybė priimti hipotezę H_1, kai teisinga H_2.

Teorema: Tarkime, kad $P_0 \sim P_1$. Jei tikimybinių matų P_0 ir P_1 Kulbako informacija $I(P_0,P_1)$ baigtinė, tai teisinga formulė

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\delta\in B(b,n)} \frac{1}{n}\ln\alpha_1(\delta) = -I(P_1,P_0).$$

Įrodymas. Tarkime, kad X_i turi tankius $p_0(x)$ ir $p_1(x)$ matų P_0 ir P_1 atžvilgiu. Tada stebėjimų $X=(X_1,X_2,...,X_n)$ tankis atžvilgiu P_0 ir P_1 bus

$$P_0(x)=p_0(x_1)p_0(x_2)\cdot\ldots\cdot p_0(x_n) \text{ ir } P_1(x)=p_1(x_1)p_1(x_2)\cdot\ldots\cdot p_1(x_n),$$

kai $x=(x_1,...,x_n)$.

Tada $\frac{dP_0}{dP_1}(X)=\prod_{i=1}^{n} g(X_i)$, kur $g(X)=\frac{p_1(x)}{p_0(x)}$.

Pagal apibrėžimą

$$\alpha_1(\delta)=E_0^n\delta_1(X)=E_1^n\delta_1(X)\frac{dP_0}{dP_1}(X)=E_1^n\delta_1(X)e^{\ln\frac{dP_0}{dP_1}(X)}=E_1^n\delta_1(X)\exp\left\{n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln g(X_i)\right\}. \quad (21)$$

Kadangi $E_1\ln g(X_1)=-I(P_0,P_1)<\infty$, tai pagal didžiųjų skaičių dėsnį

$$P_1^n-\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln g(X_i)=-I(P_1,P_0). \quad (22)$$

Įvedame aplinką

$$U(\eta,n)=\{X : f_n(X)+I(P_0,P_1)>-\eta\},$$

kur $f_n(X)=\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln g(X_i)$.

Tada iš (22) seka, kad $P_1\{U(\eta,n)\}\geq 1-\delta$, kai $n\geq n_0(\eta,\delta)$.

Kartu pastebime, kad pagal $B(b,n)$ apibrėžimą bet kokiam kriterijui $\delta\in B(b,n)$ teisingos nelygybės

$$E_1^n\delta_0(X)\leq b,$$

$$E_1^n\delta_1(X)\geq 1-b \ . \quad (23)$$

Vadinasi, kai $n\geq n_0$ iš (21) atsižvelgę į (22) ir (23) gauname

$$\alpha_1(\delta)=E_1^n\delta_1(X)=E_1^n\delta_1(X)\exp\left\{n\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\ln g(X_i)\right\}\geq E_1^n 1\mathrm{I}(X\in U(\eta,n))\exp\{-nI(P_0,P_1)-n\eta\}\geq$$

$$\geq(1-b-\delta)\exp\{-nI(P_1,P_0)-n\eta\}.$$

Iš čia

$$\lim_{n\to\infty}\inf_{\delta\in B(b,n)}n^{-1}\ln\alpha_1(\delta)=-I(P_1,P_0).$$

Teorema įrodyta.

2.3. Taikymai su polinominiu skirstiniu

1 atvejis:

Pritaikysime praeituose skyreliuose gautas teoremas. Sakykime, tikriname hipotezę, kad stebima imtis $(X_1,\ldots,X_n)$ turi polinominį skirstinį, t.y.

$H_1: p_1=p_{1_1}, p_2=p_{1_2},\ldots,p_k=p_{1_k}$;

$H_2: p_1=p_{2_1}, p_2=p_{2_2},\ldots,p_k=p_{2_k}$;

$H_3: p_1=p_{3_1}, p_2=p_{3_2},\ldots,p_k=p_{3_k}$.

Mūsų atveju reikia rasti

$$J_{ij}=J(P_i,P_j)=J\left(P_i=(p_{i_1},\ldots,p_{i_k},m),P_j=(p_{j_1},\ldots,p_{j_k},m)\right).$$

Žinome, kad $J_{ij}=\inf_\alpha C_{ij}(\alpha)$, kur $C_{ij}(\alpha)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln H_{ij}^n(\alpha)$.

$H_{ij}^n(\alpha)$- α eilės Helingerio integralas, atitinkantis du polinominio skirstinio matus

$$P_i=(p_{i_1},\ldots,p_{i_k},m)\text{ ir }P_j=(p_{j_1},\ldots,p_{j_k},m).$$

Kaip žinome (žr. 1.4.1 skyrelį)

$$H_{ij}^n(\alpha)=\left(\sum_{t=1}^{k}p_{i_t}^{\alpha}p_{j_t}^{1-\alpha}\right)^{m\cdot n},\ \alpha\in[0,1].$$

Tada

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\ln\left(\sum_{i=1}^{k}p_{t_i}^{\alpha}p_{t_j}^{1-\alpha}\right)=m\left(\sum_{t=1}^{k}p_{t_i}^{\alpha}p_{t_j}^{1-\alpha}\right)=C_{ij}(\alpha)$$

$$\inf_\alpha C_{ij}(\alpha)=J(\theta_i,\theta_j)$$

$$(C_{ij}(\alpha))_\alpha'=0$$

$$C_{ij}'(\alpha)=m\left(\sum_{t=1}^{k}\left[\left(p_{t_j}^{\alpha}\ln p_{t_i}\right)p_{t_j}^{1-\alpha}-p_{t_i}^{\alpha}p_{t_j}^{1-\alpha}\ln p_{t_j}\right]\right)=m\left(\sum_{t=1}^{k}\left[p_{t_i}^{\alpha}p_{t_j}^{1-\alpha}\ln p_{t_i}-p_{t_i}^{\alpha}p_{t_j}^{1-\alpha}\ln p_{t_j}\right]\right)=$$

$$= m\sum_{t=1}^{k} p_{t_i}^{\alpha} p_{t_j}^{1-\alpha}\left[\ln p_{t_i} - \ln p_{t_j}\right] = m\sum_{t=1}^{k}\ln\left(\frac{p_{t_i}}{p_{t_j}}\right) p_{t_i}^{\alpha} p_{t_j}^{1-\alpha} = 0.$$

$\alpha_0 = \alpha$ toks, kad $m\sum_{t=1}^{k}\ln\left(\frac{p_{t_i}}{p_{t_j}}\right) p_{t_i}^{\alpha} p_{t_j}^{1-\alpha} = 0$.

Tada $J_{ij} = J(\theta_i, \theta_j) = m\left(\sum_{t=1}^{m} p_{t_i}^{\alpha_0} p_{t_j}^{1-\alpha_0}\right)$, $i \neq j$.

Pavyzdys:

Tegul hipotezės

$H_1 : p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{6}$;

$H_2 : p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{8}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{8}$;

$H_3 : p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{4}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{4}$.

Tegul $m = 100$, $k = 4$.

Pagal (16) formulę

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\inf_{\delta^n\in\Delta^n}\ln\max_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i\neq j}}\alpha_{ij}(\delta^n) = -\min_{\substack{i,j\in\{1,2,3\}\\ i\neq j}} J_{ij}.$$

Ieškome $\alpha_0 = \alpha$ iš lygties

$$m\sum_{t=1}^{4}\left(\ln\frac{p_{t_j}}{p_{t_j}}\right) p_{t_i}^{\alpha} p_j^{1-\alpha} = 0.$$

Kai $i = 1$ *ir* $j = 2$

$$100\left[\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha} + \left(\ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{8}}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-\alpha} + \left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha} + \left(\ln\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-\alpha}\right] = 0,$$

kai $\alpha = 0{,}49$, tada $-0{,}711 = 0$ - netinka,

$\alpha = 0{,}5$, tada $-0{,}333 = 0$ - netinka,

$\alpha = 0{,}51$, tada $0{,}046 = 0$ - tinka.

Radome $\alpha_0 = 0{,}51$, jį įstatome į lygtį

$$J_{ij} = J_{12} = 100\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{0,51}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-0,51} + \left(\frac{1}{3}\right)^{0,51}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-0,51} + \left(\frac{1}{4}\right)^{0,51}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,51} + \left(\frac{1}{6}\right)^{0,51}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-0,51}\right) = 95{,}2.$$

Kai $i=1$ *ir* $j=3$

$$100\left[\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{3}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{6}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}\right]=0,$$

kai $\alpha=0{,}48$, tada $-0{,}085=0$ - netinka,

$\alpha=0{,}49$, tada $-0{,}029=0$ - netinka,

$\alpha=0{,}5$, tada $0{,}028=0$ - tinka.

Radome $\alpha_0=0{,}5$, jį įstatome į lygtį

$$J_{ij}=J_{13}=100\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{3}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{6}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}\right)=99{,}28.$$

Kai $i=2$ *ir* $j=1$

$$100\left[\left(\ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\alpha}\right]=0,$$

kai $\alpha=0{,}4$, tada $-3{,}493=0$,

$\alpha=0{,}49$, tada $-0{,}046=0$ - tinka.

Radome $\alpha_0=0{,}49$, jį įstatome į lygtį

$$J_{ij}=J_{21}=100\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0,49}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,49}+\left(\frac{1}{8}\right)^{0,49}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-0,49}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,49}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,49}+\left(\frac{1}{8}\right)^{0,49}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-0,49}\right)=95{,}2.$$

Kai $i=2$ *ir* $j=3$

$$100\left[\left(\ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{2}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{8}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}\right]=0,$$

kai $\alpha=0{,}49$, tada $-0{,}34=0$ - netinka,

$\alpha=0{,}5$, tada $0=0$ - tinka.

Radome $\alpha_0=0{,}5$, jį įstatome į lygtį

$$J_{ij}=J_{23}=100\left(\left(\frac{1}{2}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{8}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{8}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}\right)=95{,}711.$$

Kai $i=3$ *ir* $j=1$

$$100\left[\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{3}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{6}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-\alpha}\right]=0,$$

kai $\alpha = 0{,}495$, tada $-0{,}057 = 0$ - netinka,

$\alpha = 0{,}5$, tada $-0{,}028 = 0$ - netinka,

$\alpha = 0{,}503$, tada $-0{,}011 = 0$ - tinka.

Radome $\alpha_0 = 0{,}503$, jį įstatome į lygtį

$$J_{ij} = J_{31} = 100\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{0,503}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,503}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,503}\left(\frac{1}{3}\right)^{1-0,503}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,503}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,503}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,503}\left(\frac{1}{6}\right)^{1-0,503}\right)=99{,}28$$

Kai $i = 3$ *ir* $j = 1$

$$100\left[\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-\alpha}+\left(\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{8}}\right)\left(\frac{1}{4}\right)^{\alpha}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-\alpha}\right]=0,$$

kai $\alpha = 0{,}499$, tada $-0{,}034 = 0$ - netinka,

$\alpha = 0{,}5$, tada $0 = 0$ - tinka.

Radome $\alpha_0 = 0{,}5$, jį įstatome į lygtį

$$J_{ij} = J_{32} = 100\left(\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{2}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{4}\right)^{1-0,5}+\left(\frac{1}{4}\right)^{0,5}\left(\frac{1}{8}\right)^{1-0,5}\right)=95{,}711.$$

Matome, kad minimaksiškas trijų paprastų hipotezių klaidų tikimybių apatinė riba eksponentiškai mažėja kaip

$$\max_{1,2,3}\left(\alpha_{12}(\delta),\alpha_{13}(\delta),\alpha_{21}(\delta),\alpha_{23}(\delta),\alpha_{31}(\delta),\alpha_{32}(\delta)\right)=e^{-n\min_{i,j} J_{ij}}$$

$$\max_{\substack{i,j\in\{1,3\}\\ i\neq j}}\left[\alpha_{ij}(\delta)\right]=e^{-n\cdot 95,2}.$$

<u>2 atvejis:</u>

$I(P_0, P_1)$ skaičiavimai.

Turime stebėjimus $X^n = (X_1,\dots,X_n)$, $X_i \sim P_\theta$, $\theta \in \Theta$ - nežinomas

$$H_0 : \theta = \theta_0, \qquad H_1 : \theta = \theta_1, \qquad \theta_0, \theta_1 \in \Theta.$$

Pagal (2.2 skyrelio) teoremą žinome, kad $\alpha_1(\delta) \sim e^{-nI\left(P_{\theta_1}, P_{\theta_0}\right)}$

Rasime Kulbako atstumą $I\left(P_{\theta_1}, P_{\theta_0}\right)$ konkrečiu atveju.

Pavyzdys:

Tikriname dvi hipotezes su polinominiu skirstiniu:

$$H_1 : p_1 = p_{1_1}, p_2 = p_{1_2}, ..., p_k = p_{1_k};$$

$$H_2 : p_1 = p_{2_1}, p_2 = p_{2_2}, ..., p_k = p_{2_k}.$$

Pagal 1.4.1. skyrelyje nurodytą formulę randame Kulbako atstumus

$$I(P_1, P_0) = m\left(\sum_{l=1}^{k} p_{l_i} \ln \frac{p_{l_i}}{p_{l_j}}\right).$$

Tarkime duotos hipotezės:

$$H_1 : p_1 = \frac{1}{4}, p_2 = \frac{1}{3}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{6};$$

$$H_2 : p_1 = \frac{1}{2}, p_2 = \frac{1}{8}, p_3 = \frac{1}{4}, p_4 = \frac{1}{8}.$$

Tegul $m = 100$, $k = 4$.

Kai $i = 1$ *ir* $j = 2$

$$I(P_1, P_2) = 100\left(\frac{1}{4}\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{2}} + \frac{1}{3}\ln\frac{\frac{1}{3}}{\frac{1}{8}} + \frac{1}{4}\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{6}\ln\frac{\frac{1}{6}}{\frac{1}{8}}\right) = 20{,}16.$$

Kai $i = 2$ *ir* $j = 1$

$$I(P_1, P_2) = 100\left(\frac{1}{2}\ln\frac{\frac{1}{2}}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{8}\ln\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{3}} + \frac{1}{4}\ln\frac{\frac{1}{4}}{\frac{1}{4}} + \frac{1}{8}\ln\frac{\frac{1}{8}}{\frac{1}{6}}\right) = 18{,}801.$$

IŠVADOS

Tiriant paprastas hipotezes ištyrėme optimalų kriterijų (1 – atvejo minimakso, 2 – atvejo tolygiai galingiausio) blogiausių klaidų pasirenkant hipotezės tikimybių asimptotinį elgesį, t. y. gavome dvi asimptotines formules (teoremos):

1. Teorema:

$$\lim_{n\to\infty} n^{-1} \inf_{\delta\in\Delta^n} \ln \max_{\substack{i\neq j \\ i,j\in[1,\dots,3]}} \alpha_{ij}(\delta) = -\min_{\substack{i\neq j \\ i,j\in[1,\dots,3]}} J_{ij} \quad ,$$

kur

$$-J_{ij} = -J(\theta_i, \theta_j) = c_{ij}(\alpha_0) = \inf_{0<\alpha<1} c_{ij}(\alpha) < 0 .$$

J_{ij} vadinama Černovo-Salichovo informacija.

2. Teorema: Tarkime, kad $P_0 \sim P_1$. Jei tikimybinių matų P_0 ir P_1 Kulbako informacija $I(P_0, P_1)$ baigtinė, tai teisinga formulė

$$\lim_{n\to\infty} \inf_{\delta\in B(b,n)} \frac{1}{n} \ln \alpha_1(\delta) = -I(P_1, P_0) .$$

Parodėme konkrečiuose pavyzdžiuose, kaip tos formulės taikomos tiriant hipotezes apie Polinominį skirstinį.

TESTING THE HYPOTHESES OF POLYNOMIAL DISTRIBUTION

SUMMARY

Statistical Hypothesis Testing. The work consists of two parts: in the first part two simple hypotheses were tested and a statistical criterion which should meet the following specifications was applied:

α_1 – the probability of type I error was defined and α_2 - the probability of type II error was minimized.

The asymptote formula of behaviour of the probability of type II error was obtained in the work when the n number of the data was approaching infinity.

In the second part of the work three simple hypotheses were tested. It has been explored how the minimum error probability of all available errors, i.e., the error probability of the optimal minimax criterion, performed when the n number of the data was indefinitely increasing.

The error probability analysed in the first part of the work was asymptotically decreasing in proportion to the Kulbak distance while the corresponding error probability analysed in the second part of the work was respectively decreasing in proportion to the Censov distance.

Moreover, the properties of the distances mentioned above were described in the theoretical part of the work.

The work concludes with choosing a polynomial distribution as an example which has demonstrated how the two asymptote formulas of the two results were obtained and how the asymptotic behaviour of testing of respective hypotheses looked like.

LITERATŪRA:

1. Aksiomaitis A. *Tikimybių teorija ir statistika*. Technologija, Kaunas (2000).
2. Le Cam. L. *Locally asymptotically normal families of distributions*. Univ. Calif. Publ.Statist., 3, 27-98 (1986).
3. Chernoff H. *A measure of asymptotic effeciency for tests of a hypothesis based on the sum of observations*. Ann. Math. Statist., 23, 493-507 (1952).
4. Ченцов Н.Н. *Статистические решающне правила и оптимальные выводы*. Наука, Маскво (1972).
5. Ellis R.S. *Entropy, Large Deviations adn Statistical Machanics*. Springer, Berlin (1985).
6. Kanišauskas V. *Tikimybių teorija ir matematinės statistikos pagrindai*. ŠU, Šiauliai (2000).
7. Kanišauskas V. *Asymptotically minimax testing of r>2 simple hypotheses*. Lietuvos matematikos rinkinys,T.40 (3), 313-320 (2000).
8. Kruopis J. *Matematinė statistika*. Mokslas, Vilnius (1993).
9. Kubilius J. *Tikimybių teorija ir matematinė statistika*. Mokslas, Vilnius (1980).
10. Kullback S. *Information theory and ststistics*. Mineola, New York (1997).
11. Kullback S. *Information theory and ststistics*. Wiley, New York (1959).
12. Морозова Е.А.; Ченцов Н.Н. *Естественная геометрия семейств вероятностных законов*. Итоги науки и техники Соврем, проб. Мат. Фундю напр., 83 (1991).
13. Salikhov N.P. *Absolute significace test for polynomial distribution*.
14. Salikhov M.P. *Asymptotic properties of error probabilities of tests for discriminating betwwen multinomial testing schemes.* Dokl. Akad. Nauk SSSR, 209(1), 54-57 (1973).
15. Леман Э. *Проверка статистических гипртез*. Масква, Наука (1979).
16. Линьков Ю. Н. *Асимптотигеские методы статистики случайнсих нроцессоb.* Наукова думка, Киев (1993).