Matematikos ir informatikos fakultetas

VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

Ar sunkiauodegis skirstinys visada yra sunkesnis už lengvauodegį?

Is heavy-tailed distribution always heavier than light-tailed?

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Raminta Pukytė, Donatas Meilus

VU el. paštas: raminta.pukyte@mif.stud.vu.lt,

donatas.meilus@mif.stud.vu.lt

Vadovas: Prof. (HP) Dr. Jonas Šiaulys

Vilnius
2024

Ar sunkiauodegis skirstinys visada yra sunkesnis už lengvauodegį?

Santrauka

Magistrantūros baigiamajame darbe nagrinėjamos sunkiauodegių skirstinių klasės. Kiekvienam poklasiui pateikiami skirstinių pavyzdžiai. Suformuluojamos ir įrodomos teoremos teigiančios, kad skirtiniai iš konkrečios sunkiauodegių skirstinių klasės yra sunkesni už lengvauodegius skirstinius. Pagrindinis darbo tikslas yra sukonstruoti pasiskirstymo funkciją, kuri apibrėžiama kaip sunkiauodegis skirstinys, tačiau yra lengvesnis už lengvauodegį skirstinį.

Raktiniai žodžiai: Sunkiauodegiai skirstiniai; lengvauodegiai skirstiniai ;reguliariai kintantys skirstiniai; dominuojamai kinantys skirstiniai; subeksponentiniai skirstiniai; ilgauodegiai skirstiniai

Is heavy-tailed distribution always heavier than light-tailed?

Abstract

In the master's thesis, an analysis of heavy-tailed distributions is conducted. Examples are provided for each class of heavy-tailed distributions. Theorems are formulated and proved, stating that distributions from the heavy-tailed class are heavier than distributions from the light-tailed class. The main result aims to create a distribution function defined as heavy-tailed, yet lighter than distributions from the light-tailed class.

Key words: Heavy-tailed distributions; light-tailed distributions; regularly varying distributions; dominatedly varying distributions; subexponential distributions; long-tailed distributions

Turinys

1 Įvadas

Tikimybių teorijos ir statistikos srityje pasiskirstymo funkcijų tyrimas yra labai svarbus. Toks tyrimas atliekamas norint analizuoti reiškinius įvairiose srityse, tokiose kaip statistika, ekonomika, rizikos vertinamas bei draudimas. Nors tradiciniai statistiniai modeliai dažniausiai remiasi normaliuoju ar binominiu pasiskirstymu, egzistuoja skirstinių klasė, kurioje funkcijų uodega nyksta lėčiau nei eksponentinio skirstinio. Šios pasiskirstymo funkcijos yra žinomos kaip sunkiauodegiai skirstiniai ir pasižymi unikaliomis savybėmis, kurios yra naudingos siekiant prognozuoti retus, tačiau didelę įtaką turinčius įvykius.

Šiame darbe nagrinėjami sunkiauodegių skirstinių poklasiai - reguliariai kintantys, dominuojamai kintantys, subeksponentiniai, ir ilgauodegiai skirstiniai. Reguliariai kintantys skirstiniai yra vienas plačiausiai ištirtų sunkiauodegių skirstinių poklasių, kurį vienas iš pirmųjų apibrėžė Karamata [1]. Bingham, Goldie, Teugels knygoje „Regular variation" [2] analizavo reguliariai kintančių skirstinių taikymą finansų ir draudimo srityse bei išvedė šio poklasio reprezentacinę teoremą. Apibendrindamas regurialiai kintančių skirstinių klasę Feller [3] apibrėžė dominuojamai kintančius skirstinius. Ilgauodegius skirstinius vienas iš pirmųjų apibrėžė Čistyakov [4], o apibendrinant juos Chover [5] pristatė subeksponentinių skirstinių klasę, kurią vėliau nagrinėjo Embrechts ir Goldie [6] bei Klüppelberg[7].

Pagrindinis šio darbo tikslas yra išsiaiškinti ar tikrai skirstiniai iš paminėtų sunkiauodegių skirstinių klasių yra sunkesni už lengvauodegius skirstinius. Kiekvienam apibrėžtam sunkiauodegių skirstinių poklasiui yra pateikiami pavyzdžiai. Taip pat suformuluojama ir įrodoma teorema teigianti, jog visi skirstiniai iš sunkiauodegių skirstinių poklasio yra sunkesni už lengvauodegius skirstinius. Tuo tarpu skirstinių klasei $\mathscr{H}$ pateikiamas prieštaringas pavyzdys, parodantis jog galima rasti sunkiauodegių skirstinių, kurie nėra sunkesni už bet kurį lengvauodegį skirstinį.

2 Skirstiniai

Tikimybių teorijoje sunkiauodegiai skirtstiniai yra tokie, kurių uodegos yra sunkesnės už eksponentinį skirstinį. Analogiškai, jei uodegos yra lengvesnės už eksponentinį skirstinį tai lengvauodegiai skirstiniai. Šiame skyriuje apibrėžiami šie skirstiniai. Laikykime, kad skirstinio uodega yra $\overline{F}(x) = 1 - F(x)$ visiems realiems x ir bet kokiai pasirinktai pasiskirstymo funkcijai $F(x)$.

Apibrėžimas 2.1. *Pasiskirstymo funkciją F, apibrėžtą $\mathbb{R}$, vadinsime **sunkiauodege** $F \in \mathscr{H}$, jei kiekvienai $\delta > 0$*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta x} dF(x) = \infty$$

Galima įrodyti, jog $F \in \mathscr{H}$, tada ir tik tada, jei yra tenkinama viena iš savybių:

$$(i) \quad \limsup_{x \to \infty} e^{\lambda x} \overline{F}(x) = \infty \text{ bet kokiam } \lambda > 0$$

$$(ii) \quad \liminf_{x \to \infty} \frac{(-\log \overline{F}(x))}{x} = 0$$

Apibrėžimas 2.2. *Pasiskirstymo funkciją F, apibrėžtą $\mathbb{R}$, vadinsime **lengvauodege** $F \in \mathscr{H}^c$, jei egzistuoja $\delta > 0$, kuriam*

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{\delta x} dF(x) < \infty$$

Analogiškai sunkios uodegos atvejui, galima teigti, kad $F \in \mathscr{H}^c$, jei tenkinama viena iš savybių:

$$(i) \quad \limsup_{x \to \infty} e^{\lambda x} \overline{F}(x) < \infty \text{ kuriam nors } \lambda > 0$$

$$(ii) \quad \liminf_{x \to \infty} \frac{(-\log \overline{F}(x))}{x} > 0$$

Apibrėžimas 2.3. *Tarkime, kad f ir g yra dvi teigiamos funkcijos, tada sakoma*

$$f(x) = o(g(x)) \quad \textit{jei} \quad \limsup_{x \to \infty} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

3 Sunkiauodegių skirstinių klasės

Šiame skyriuje nagrinėjami sunkiauodegių skirstinių poklasiai, pateikiami jų pavyzdžiai ir įrodomas teiginys, kad pasiskirstymo funkcija iš tokio poklasio yra sunkesnė už bet kurį lengvauodegį skirstinį. Apibrėžimai suformuluoti remiantis Šiaulio, Leipaus, Konstantinides knyga „Closure Properties for Heavy-Tailed and Related Distributions: An Overview" [8] ir Embrechts, Klüppelberg, Mikosch knyga „Modelling Extremal Events for Insurance and Finance" [9].

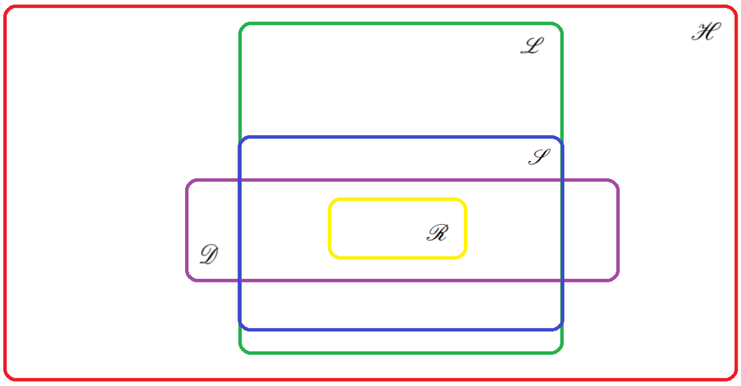
Nagrinėsime klases remiantis tokia jų įdėtimi

$$\mathscr{R} = \bigcup_{\alpha \geq 0} \mathscr{R}(\alpha) \subset \mathscr{D} \subset \mathscr{H}$$

$$\mathscr{R} \subset \mathscr{S} \subset \mathscr{H}$$

$$\mathscr{S} \subset \mathscr{L} \subset \mathscr{H}$$

kurią aiškiai iliustruoja paveikslas



1 pav. Sunkiauodegių skirstinių klasės

3.1 Klasė $\mathscr{R}$

Šiame poskyryje apibrėžiamas pasiskirstymo funkcijos priklausymas reguliariai kintančių skirstinių klasei. Pateikiama šios klasės reprezentacinė teorema su pavyzdžiais. Galiausiai įrodoma, jog funkcijos iš šios klasės yra sunkesnės už bet kurį lengvauodegį skirstinį.

Apibrėžimas 3.1. *Pasiskirstymo funkciją F, apibrėžtą ant aibės $\mathbb{R}$, vadinsime reguliariai kintančia su indeksu $\alpha \geq 0$ bei žymėsime $F \in \mathscr{R}(\alpha)$, jeigu*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = y^{-\alpha} \text{ bet kokiam } y > 0$$

Pastaba 3.1. Sakysime, kad pasiskirstymo funkcija F apibrėžta ant aibės $\mathbb{R}$, jeigu ši funkcija yra realias reikšmes įgyjančio atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Jei $F \in \mathscr{R}(\alpha)$, tai ją galima išreikšti pavidalu

$$\overline{F}(x) = x^{-\alpha} L(x), x > 0$$

kur L yra lėtai kintanti funkcija, t.y. funkcija su savybe $\lim_{x\to\infty} \frac{L(xy)}{L(x)} = 1$ bet kokiam $y > 0$. Visi reguliariai kintantys skirstiniai įprastai žymimi $\mathscr{R} = \bigcup_{\alpha\geq 0} \mathscr{R}(\alpha)$.

Šios pasiskirstymų klasės reprezentacinę teoremą (3.5) bei įrodymą galima rasti Bingham, Goldie ir Teugels knygoje „Regular variation" [2].

Teorema 3.1. *Jei funkcija $F \in \mathscr{R}(\alpha)$ su $\alpha \geq 0$ tai kažkokiam $a > 0$*

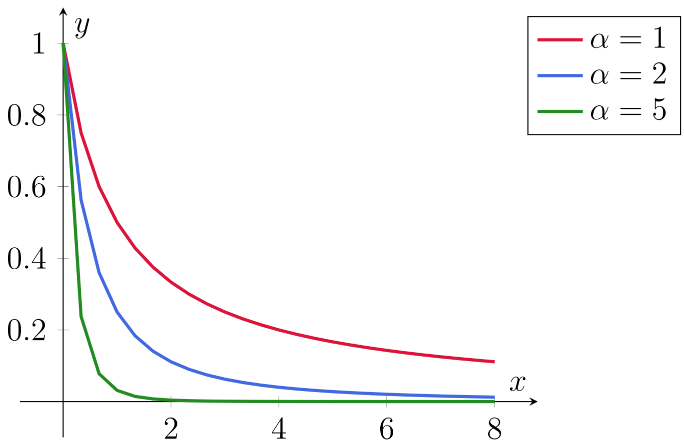
$$\overline{F}(x) = x^{-\alpha} a(x) \exp\left(\int_a^x \frac{b(u)}{u} du\right), \quad x \geq a$$

su funkcijomis $a(x) \to c \in (0;\infty)$ ir $b(x) \to 0$, kai $x \to \infty$

Remiantis 3.1 teorema, galima patikrinti ar $F \in \mathscr{R}(\alpha)$.

Pavyzdys 3.1 (Pareto skirstinys)**.** Galima parodyti, kad Pareto skirstinys yra reguliarusis bei pateikti jį reprezentacine forma. Turime Pareto skirstinio uodegą

$$\overline{F}(x) = \mathbb{1}_{(-\infty;0)}(x) + \frac{1}{(x+1)^{\alpha}} \mathbb{1}_{[0;\infty)}(x)$$



Remiantis apibrėžimu 3.1 patikriname ar skirstinys reguliarusis

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{(xy+1)^{\alpha}}}{\frac{1}{(x+1)^{\alpha}}} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x+1)^{\alpha}}{(xy+1)^{\alpha}} = y^{-\alpha} \text{ visiems } y > 0$$

Pagal 3.1 teoremą Pareto skirstinio reprezentacinė forma yra tokia

$$\overline{F}(x) = \frac{1}{x^\alpha} \cdot \frac{x^\alpha}{(1+x)^\alpha} \cdot 1 = x^{-\alpha} \cdot \frac{x^\alpha}{(1+x)^\alpha} \cdot \exp\left\{ \int_1^x \frac{0}{u} du \right\}$$

Taigi, norint gauti Pareto su parametru α uodegos išraišką 3.1 teoremoje reikia imti $a = 1$, $a(x) = \frac{x^\alpha}{(1+x)^\alpha}$ ir $b(x) = 0$.

Pavyzdys 3.2 (Dzeta (α) skirstinys)**.** Galima parodyti, kad Dzeta (α) skirstinys taip pat yra reguliarusis bei pateikti jį reprezentacine forma.Tarkime, kad turime pasiskirstymo funkciją

$$\mathbb{P}(\xi = n) = \frac{1}{n^\alpha} \frac{1}{\zeta_\alpha} \text{ kur } \alpha > 1, \text{ o } n \in \{1, 2, ...\}$$

čia ζ yra Rymano dzeta funkcija $\zeta_\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$.

Žinoma, kad Dzeta (α) skirstinio uodega yra

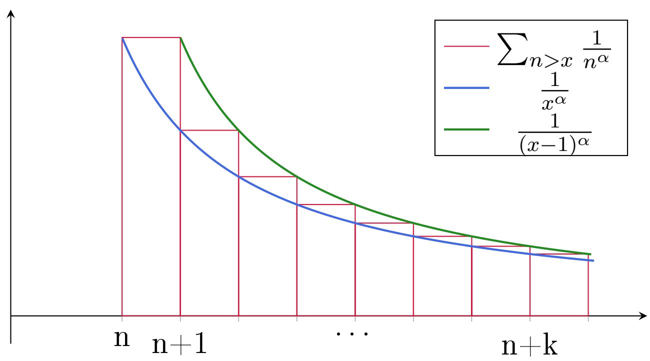
$$\overline{F}_\alpha(x) = \frac{1}{\zeta_\alpha} \sum_{n>x} \frac{1}{n^\alpha}$$

Pastaba 3.2. Pradžioje parodysime, kad

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^\alpha} \underset{x\to\infty}{\sim} \int_x \frac{dy}{y^\alpha} \qquad \text{visiems } \alpha > 1$$

Brėžinys iliustruoja, jog šią sumą, kai $x \to \infty$ galime apriboti taip

$$\int_x \frac{dy}{y^\alpha} \le \sum_{n>x} \frac{1}{n^\alpha} \le \int_x \frac{dy}{(y-1)^\alpha}$$



Jei turime funkcijas g, f ir h, kad $g(x) \le f(x) \le h(x)$ ir $\lim_{x\to\infty} g(x) = \lim_{x\to\infty} h(x) = L$, tuomet $\lim_{x\to\infty} f(x) = L$.

Mūsų atveju su $\alpha > 1$

$$\int_x \frac{dy}{y^\alpha} = \frac{1}{x^{\alpha-1}(\alpha-1)}$$

$$\int_x \frac{dy}{(y-1)^\alpha} = \frac{1}{(x-1)^{\alpha-1}(\alpha-1)} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}(\alpha-1)}$$

Iš to išplaukia, kad

$$\sum_{n>x} \frac{1}{n^\alpha} \underset{x\to\infty}{\sim} \int_x \frac{dy}{y^\alpha} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^{\alpha-1}(\alpha-1)} \qquad \text{visiems } \alpha > 1$$

Remiantis 3.1 apibrėžimu ir pastaba 3.2 patikriname ar Dzeta(α) skirstinys priklauso $\mathscr{R}$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{\frac{1}{\zeta_\alpha}\sum_{n>xy}\frac{1}{n^\alpha}}{\frac{1}{\zeta_\alpha}\sum_{n>x}\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\sum_{n>xy}\frac{1}{n^\alpha}}{\sum_{n>x}\frac{1}{n^\alpha}} = \lim_{x\to\infty} \frac{\int_{xy}\frac{dz}{z^\alpha}}{\int_x \frac{dz}{z^\alpha}} =$$

$$\lim_{x\to\infty} \frac{(\alpha-1)x^{\alpha-1}}{(\alpha-1)(xy)^{\alpha-1}} = \frac{1}{y^{\alpha-1}} \qquad \alpha > 1$$

Taigi, $\overline{F}_\alpha(x) \in \mathscr{R}(\alpha - 1)$ ir naudojantis 3.1 teorema Dzeta(α) galime išreikšti ją reprezentacinė forma, kai $\alpha > 1$

$$\overline{F}_\alpha(x) = \frac{1}{x^{\alpha-1}} \cdot \frac{x^{\alpha-1}}{\zeta_\alpha} \sum_{n>x} \frac{1}{n^\alpha} \cdot \exp\left\{\int_1^x \frac{0}{u} du\right\}$$

Taigi, norint gauti Dzeta(α) skirstinio uodegą reikia 3.1 teoremoje pasirinkti $a = 1$, $a(x) = \frac{x^{\alpha-1}}{\zeta_\alpha}\sum_{n>x}\frac{1}{n^\alpha}$ ir $b(x) = 0$, nes

$$\lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\zeta_\alpha} \sum_{n>x} \frac{1}{n^\alpha} = \lim_{x\to\infty} \frac{x^{\alpha-1}}{\zeta_\alpha} \int_x \frac{dz}{z^\alpha} = \frac{1}{\zeta_\alpha(\alpha-1)} = c \in (0;\infty)$$

ir $\exp\left\{\int_1^x \frac{0}{u} du\right\} = 1$ visiems $x > 1$.

Teiginys 3.1. Jei $\overline{F}_X(x) \in \mathscr{H}^c$ ir $\overline{F}_Y(x) \in \mathscr{R}$, tai $\overline{F}_X(x) = o(\overline{F}_Y(x))$

Įrodymas. *Paimkime* $\lambda > 0$ *tokią, kad* $\limsup e^{\lambda x}\overline{F}_X(x) < \infty$ *ir* $\alpha \geq 0$. *Naudojantis 2.3 apibrėžimu ir 3.3 pastaba turime*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_Y(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{x^{-\alpha}L(x)} = \limsup_{x\to\infty} x^\alpha \frac{\overline{F}_X(x)}{L(x)} \frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}}$$

$$\le \limsup_{x\to\infty}\left(e^{\lambda x}\overline{F}_X(x)\right)\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{x^{\alpha}}{e^{\lambda x}L(x)}\right)$$

$$= \limsup_{x\to\infty}\left(e^{\lambda x}\overline{F}_X(x)\right)\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2\alpha}}{x^{\alpha}e^{\lambda x}L(x)}\right)$$

$$\le \limsup_{x\to\infty}\left(e^{\lambda x}\overline{F}_X(x)\right)\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{x^{2\alpha}}{e^{\lambda x}}\right)\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{1}{x^{\alpha}L(x)}\right)=0$$

Pagal lėtai kintančios funkcijos savybę pateiktą žemiau 3.3 pastaboje.

Pastaba 3.3. Jeigu $L(x)$ yra lėtai kintanti ir $\delta > 0$, tada

$$L(x)x^{\delta} \to \infty, \quad \text{kai } x \to \infty$$

Įrodymas. *Lėtai kintančiai funkcijai $L(x)$ galioja 3.1 teoremos formulė su $\alpha = 0$. Pasirinkę tokį δ_0, kad $\delta > \delta_0 > 0$ ir žinodami, kad teoremoje 3.1 funkcija $b(u) \to 0$, kai $x \to \infty$, turime $\forall\delta_0 \quad \exists x_0 : |b(u)| < \delta_0$, kai $u \ge x_0$ tuomet $b(u) > -\delta_0$, kai $u \ge x_0$. Tada turime*

$$\lim_{x\to\infty} L(x)x^{\delta} = \lim_{x\to\infty} x^{\delta}a(x)\exp\left(\int_a^x \frac{b(u)}{u}du\right)$$

$$= c\lim_{x\to\infty} x^{\delta}\left(\exp\left(\int_a^{x_0}\frac{b(u)}{u}du\right)+\exp\left(\int_{x_0}^{x}\frac{b(u)}{u}du\right)\right).$$

Pažymėjus, kad $\exp(\int_a^{x_0}\frac{b(u)}{u}du) = K$, kur $K \in (0;\infty)$ turime

$$\lim_{x\to\infty} L(x)x^{\delta} \ge c\lim_{x\to\infty} x^{\delta}\exp(K-\delta_0(\ln\frac{x}{x_0})) = c\lim_{x\to\infty}\frac{x^{\delta}e^{K}}{\left(\frac{x}{x_0}\right)^{\delta_0}} = \infty$$

3.2 Klasė $\mathscr{D}$

Šiame poskyryje apibrėžiamas pasiskirstymo funkcijos priklausymas dominuojamai kintančių skirstinių klasei. Pristatomi Matuszewskos indeksai, kurie yra svarbūs nustatyti pasiskirstymo funkcijos priklausymą klasei. Galiausiai pateikiamas pavyzdys iš šios klasės bei įrodoma, jog funkcijos iš šios klasės yra sunkesnės už bet kurį lengvauodegį skirstinį.

Apibrėžimas 3.2. *Pasiskirstymo funkcija F, apibrėžta $\mathbb{R}$ yra dominuojamai kintanti, žymėsime $F \in \mathscr{D}$, jei*

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty \quad \textit{visiems } y \in (0,1)$$

ekvivalenčiai

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} > 0 \text{ visiems } y > 1$$

Apibrėžimas 3.3. *Tarkime, F yra pasiskirstymo funkcija, apibrėžta $\mathbb{R}$, tada pažymėkime*

$$\overline{F}_*(y) := \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \quad \overline{F}^*(y) := \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}, \quad y > 1$$

ir šiai pasiskirstymo funkcijai atitinkamai - viršutinį ir apatinį Matuszewska indeksus

$$J_F^+ = -\lim_{y\to\infty} \frac{\log \overline{F}_*(y)}{\log y} \quad J_F^- = -\lim_{y\to\infty} \frac{\log \overline{F}^*(y)}{\log y}.$$

Taip pat, svarbus parametras yra

$$L_F := \lim_{y\searrow 1} \overline{F}_*(y).$$

Šiaulio, Leipaus, Konstantinides knygoje „Closure properties for heavy-tailed and related distributions: An overview" [8] buvo suformuluoti pasiskirstymo funkcijos teiginiai, kurie yra pateikti 3.2 teoremoje.

Teorema 3.2. *Pasiskirstymo funkcijai F šie teiginiai yra ekvivalentūs*

$$\text{(i) } F \in \mathscr{D}, \quad \text{(ii) } \overline{F}_*(y) > 0 \text{ kažkuriam } y > 1, \quad \text{(iii) } 0 \le J_F^+ < \infty, \quad \text{(iv) } L_F > 0.$$

Iš (3.2) *apibrėžimo išplaukia (i), (ii) ir (iv) teiginių ekvivalentumas, o (ii) ir (iii) išplaukia iš*

$$J_F^+ < \infty \Leftrightarrow \frac{\log \overline{F}_*(y)}{\log y} < \infty \quad \text{dideliems } y \ge y_0 > 1 \Leftrightarrow -\log \overline{F}_*(y_0) < \infty$$

Straipsnyje „A class of heavy tailed distributions" [10] Konstantinides pasiskirstymo funkcijos iš klasės $\mathscr{D}$ uodegą įvertino kaip pateikta 3.3 teoremoje.

Teorema 3.3. *Sakykime $F \in \mathscr{D}$. Tada egzistuoja konstantos $\delta > 0$ ir $C > 0$, kurioms*

$$\overline{F}(x) \ge Cx^{-\delta} \quad \text{pakankamai dideliems } x.$$

Įrodymas. *Apibrėžime 3.2 pasirinkę konkretų $y > 1$ turime*

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = z$$

Tuomet pasirinkę tokį $\varepsilon > 0$, kad $z - \varepsilon > 0$ ir kad visiems dideliems x

($x \geq x_0 = x_0(y,z,\varepsilon) > 0$) galiotų nelygybė

$$1 > \frac{\overline{F}(x)}{\overline{F}(\frac{x}{y})} \geq z - \varepsilon > 0$$

Lieka tik įrodyti teoremos 3.3 nelygybę. Pasirinktam $x \geq x_0$ paimkime $n = \left\lfloor \frac{\log x/x_0}{\log y} + 1 \right\rfloor$, tuomet

$$\begin{aligned}\overline{F}(x) &\geq (z-\varepsilon)\overline{F}(x/y) \geq (z-\varepsilon)^2\overline{F}(x/y^2) \geq \ldots \geq (z-\varepsilon)^n\overline{F}(x/y^n)\\ &\geq \exp\left(\frac{\log(z-\varepsilon)}{\log y}\log x/x_0\right)\overline{F}(x_0).\end{aligned}$$

nes

$$\begin{aligned}(z-\varepsilon)^n &= \exp\left(n\log(z-\varepsilon)\right) = \exp\left(\left(\left\lfloor \frac{\log x/x_0}{\log y} + 1 \right\rfloor\right)\log(z-\varepsilon)\right)\\ &\geq \exp\left(\frac{\log(z-\varepsilon)}{\log y}\log x/x_0\right)\end{aligned}$$

ir

$$\overline{F}(x/y^n) = \overline{F}\left(\frac{x}{y^{\left\lfloor \frac{\log x/x_0}{\log y}+1 \right\rfloor}}\right) \geq \overline{F}\left(\frac{x}{y^{\frac{\log x/x_0}{\log y}}}\right) = \overline{F}(x_0)$$

Taigi turime, kad teoremos 3.3 nelygybė galioja su

$$C = \exp\left(-\frac{\log(z-\varepsilon)}{\log y}\log x_0\right)\overline{F}(x_0) > 0, \quad \delta = -\frac{\log(z-\varepsilon)}{\log y} > 0.$$

Šiaulio, Leipaus, Konstantinides knygoje „Closure properties for heavy-tailed and related distributions: An overview" [8] pateiktas toks pasiskirstymo funkcijos iš šios klasės pavyzdys.

Pavyzdys 3.3 (Apibendrintas Peter ir Paul skirstinys)**.** Tarkime, kad turime diskretų atsitiktinį dydį X su tikimybėmis

$$P(X = b^k) = (b^a - 1)b^{-ak}, \quad k = 1, 2, \ldots \quad a > 0, b > 1$$

Šio dydžio pasiskirstymo funkcijos $F(x)$ uodega yra tokia

$$\overline{F}(x) = (b^a - 1)\sum_{k:b^k > x} b^{-ak} = \mathbb{1}_{(-\infty;b)}(x) + b^{-a\lfloor \log_b x \rfloor}\mathbb{1}_{[b;\infty)}(x)$$

Naudojantis 3.2 apibrėžimu patikriname ar pasiskirstymo funkcija priklauso klasei $\mathscr{D}$ su

$a > 0, b > 1$. Jeigu $y > 1$, tai

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{b^{-a\lfloor \log_b xy \rfloor}}{b^{-a\lfloor \log_b x \rfloor}} = \liminf_{x\to\infty} b^{a(\lfloor \log_b x \rfloor - \lfloor \log_b xy \rfloor)} =$$

$$\liminf_{x\to\infty} b^{a(\lfloor \log_b x \rfloor - \lfloor \log_b x + \log_b y \rfloor)} \geq \liminf_{x\to\infty} b^{a(\lfloor \log_b x \rfloor - \lfloor \log_b x \rfloor - \lfloor \log_b y \rfloor - 2)} = b^{-a(\lfloor \log_b y \rfloor + 2)} > 0$$

Taigi, mūsų pasiskirstymo funkcija $F \in \mathscr{D}$ pagal (ii) teiginį iš 3.2 teoremos, bet tai galima patvirtinti ir (iii) ir (iv) Matuszewskos indeksais iš teoremos 3.2, nes

$$(iii) \quad J_F^+ = -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)}$$

$$= -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \liminf_{x\to\infty} \frac{b^{-a\log_b y} b^{a\{\log_b xy\}}}{b^{a\{\log_b x\}}}$$

$$= -\lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \left(b^{-a\log_b y} \liminf_{x\to\infty} b^{a(\{\log_b xy\} - \{\log_b x\})} \right)$$

$$= -\lim_{y\to\infty} \left(\frac{1}{\log y} (-a\log_b y) \log b + \frac{1}{\log y} \log \liminf_{x\to\infty} b^{a(\{\log_b xy\} - \{\log_b x\})} \right)$$

$$= \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} a \frac{\log y}{\log b} \log b - \lim_{y\to\infty} \frac{1}{\log y} \log \liminf_{x\to\infty} b^{a(\{\log_b xy\} - \{\log_b x\})} = a - 0 = a$$

$$(iv) \quad L_F = \lim_{y\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} = \lim_{y\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{b^{-a\lfloor \log_b xy \rfloor}}{b^{-a\lfloor \log_b x \rfloor}}$$

$$= \lim_{y\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{b^{-a(\log_b xy - \{\log_b xy\})}}{b^{-a(\log_b x - \{\log_b x\})}} = \lim_{y\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} \frac{b^{-a\log_b y} b^{a\{\log_b xy\}}}{b^{a\{\log_b x\}}}$$

$$= \lim_{y\downarrow 1} \liminf_{x\to\infty} b^{a(\{\log_b xy\} - \{\log_b x\})} = \lim_{y\downarrow 1} b^{-a} = b^{-a}$$

Dar vieną šios klasės pavyzdį pateikė Cai, Tang straipsnyje „On max-sum equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications" [11].

Pavyzdys 3.4. Tarkime, kad turime atsitiktinį dydį $X = (1 + Y)2^N$, kur Y ir N yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai. Y yra tolygiai pasiskirstęs [0,1], o N yra geometrinis atsitiktinis dydis su $\mathbb{P}(N = k) = p(1-p)^k, p \in (0,1), k = 0, 1, ...$ Tuomet X skirstinio uodega yra

$$\overline{F}(x) = (2 - 2^{-\lfloor \log_2 x \rfloor} x) p (1-p)^{\lfloor \log_2 x \rfloor} + (1-p)^{\lfloor \log_2 x \rfloor + 1}, \quad x \geq 1.$$

Tada remiantis 3.2 apibrėžimu galime patikrinti ar ši pasiskirstymo funkcija priklauso $\mathscr{D}$. Iš tiesų

$$\liminf_{x\to\infty} \frac{\left(2-2^{-\lfloor \log_2 xy\rfloor}xy\right)p\,(1-p)^{\lfloor \log_2 xy\rfloor}+(1-p)^{\lfloor \log_2 xy\rfloor+1}}{\left(2-2^{-\lfloor \log_2 x\rfloor}x\right)p\,(1-p)^{\lfloor \log_2 x\rfloor}+(1-p)^{\lfloor \log_2 x\rfloor+1}}$$

$$\geq \liminf_{x\to\infty} \frac{\left(2-2^{-\lfloor \log_2 xy\rfloor}xy\right)p\,(1-p)^{\lfloor \log_2 x\rfloor+\lfloor \log_2 y\rfloor+1}+(1-p)^{\lfloor \log_2 x\rfloor+\lfloor \log_2 y\rfloor+2}}{\left(2-2^{-\lfloor \log_2 x\rfloor}x\right)p\,(1-p)^{\lfloor \log_2 x\rfloor}+(1-p)^{\lfloor \log_2 x\rfloor+1}}$$

$$= \liminf_{x\to\infty} \frac{\left(2-2^{-\lfloor \log_2 xy\rfloor}xy\right)p\,(1-p)^{\lfloor \log_2 y\rfloor+1}+(1-p)^{\lfloor \log_2 y\rfloor+2}}{\left(2-2^{-\lfloor \log_2 x\rfloor}x\right)p+(1-p)}$$

$$= (1-p)^{\lfloor \log_2 y\rfloor} \liminf_{x\to\infty} \frac{\left(2-2^{-\lfloor \log_2 xy\rfloor}xy\right)p\,(1-p)+(1-p)^{2}}{\left(2-2^{-\lfloor \log_2 x\rfloor}x\right)p+(1-p)}$$

$$\geq (1-p)^{\lfloor \log_2 y\rfloor} \liminf_{x\to\infty} \frac{\left(2-\frac{xy}{2^{\log_2 xy-1}}\right)p\,(1-p)+(1-p)^{2}}{\left(2-\frac{x}{2^{\log_2 x}}\right)p+(1-p)}$$

$$= (1-p)^{\lfloor \log_2 y\rfloor} \liminf_{x\to\infty} \frac{(2-2)\,p\,(1-p)+(1-p)^{2}}{(2-1)\,p+(1-p)} = (1-p)^{\lfloor \log_2 y\rfloor+2}$$

Todėl $F \in \mathscr{D}$ pagal 3.2 (ii) teoremą.

Teiginys 3.2. Jei $\overline{F}_X(x) \in \mathscr{H}^c$ ir $\overline{F}_Y(x) \in \mathscr{D}$, tai $\overline{F}_X(x) = o(\overline{F}_Y(x))$

Įrodymas. *Paimkime $\lambda > 0$ tokią, kad $\limsup e^{\lambda x}\overline{F}_X(x) < \infty$ ir $C, \delta > 0$. Naudojantis 2.3 apibrėžimu ir 3.3 teorema turime*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_Y(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_Y(x)}\frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} \leq \limsup_{x\to\infty}\left(e^{\lambda x}\overline{F}_X(x)\right)\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\lambda x}\overline{F}_Y(x)}\right)$$

$$\leq \limsup_{x\to\infty}\left(e^{\lambda x}\overline{F}_X(x)\right)\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\lambda x}Cx^{-\delta}}\right) = \limsup_{x\to\infty}\left(e^{\lambda x}\overline{F}_X(x)\right)\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{x^{\delta}}{e^{\lambda x}C}\right) = 0$$

3.3 Klasė $\mathscr{S}$

Šiame poskyryje apibrėžiamas pasiskirstymo funkcijos priklausymas subeksponentinių skirstinių klasei. Galiausiai pateikiamas pavyzdys iš šios klasės bei įrodoma, jog funkcijos iš šios klasės yra sunkesnės už bet kurį lengvauodegį skirstinį.

Apibrėžimas 3.4. *Pasiskirstymo funkciją F, apibrėžtą ant aibės $\mathbb{R}$, vadinsime subeksponentine*
$F \in \mathscr{S}$, jei

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F^{+} * F^{+}}(x)}{\overline{F}(x)} = 2, \quad kur\ F^{+}(x) = F(x)\mathbb{1}_{[0;\infty)}(x)$$

Pastaba 3.4. Galima įrodyti, jog F apibrėžta $\mathbb{R}$ yra subeksponentine, jei

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1 \quad \text{bet kuriam } y>0 \text{ ir } \lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F*F}(x)}{\overline{F}(x)}=2$$

Vieną būdą patikrinti ar skirstinys subeksponentinis apibrėžė Pitman straipsnyje „Subexponential distribution functions" [12].

Lema 3.1. *Tarkime, kad pasiskirstymo funkcija F apibrėžta $\mathbb{R}_+$ yra absoliučiai tolydi su tankiu f. Tuomet, apibrėžkime rizikos galią $q(x)=f(x)/\overline{F}(x)$. Jei ši funkcija ilgainiui mažėjanti į 0, tai $F\in\mathscr{S}$ tada ir tik tada, kai*

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x e^{uq(x)}f(u)du=1.$$

Jeigu funkcija $e^{uq(u)}f(u)$ yra integruojama, tai $F\in\mathscr{S}$.

Teorema 3.4. *Tarkime, kad F yra pasiskirstymo funkcija apibrėžta ant $\mathbb{R}$. Tada*
(i) Jei $F\in\mathscr{S}$, tai

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}=n \quad \textit{visiems } n\geq 2.$$

(ii) Jei

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)}=n \quad \textit{kuriam nors } n\geq 2,$$

tada $F\in\mathscr{S}$.
(iii) Tarkime $X_1,X_2,...$ yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai su pasiskirstymo funkcija F. Tada $F\in\mathscr{S}$ tada ir tik tada, jei

$$\mathbb{P}(X_1^++X_2^++...+X_n^+>x)\sim\mathbb{P}(\max\{X_1,...,X_n\}>x) \quad \textit{visiems } n\geq 2,$$

$$\textit{čia } X_k^+=max\{X_k,0\}$$

(iv) Jei $F\in\mathscr{S}$, tuomet bet kokiam $y\in\mathbb{R}$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)}=1.$$

(v) Jei $F\in\mathscr{S}$, tuomet

$$\lim_{x\to\infty}e^{\delta x}\overline{F}(x)=\infty \textit{ bet kokiam } \delta>0.$$

(vi) Jei $F\in\mathscr{S}$, tuomet bet kokiam $\varepsilon>0$ egzistuoja teigiama konstanta $K(\varepsilon)$, tokia, kad

visiems $n \in N$ ir $x \geq 0$ galioja

$$\frac{\overline{F^{*n}}(x)}{\overline{F}(x)} \leq K(\varepsilon)(1+\varepsilon)^n.$$

Šių savybių įrodymai yra Čistyakov straipsnyje „Theorem on Sums of Independent Random Positive Variables and its Applications to Branching Processes" [4],Goldie ir Embrechts straipsnyje „On Convolution tails" [13], Athereya ir Ney knygoje „Branching Processes" [14], Foss, Korshunov ir Zachary knygoje „An Introduction to Heavy-Tailed and Subexponential Distributions" [15] bei Embrechts, Klüppelberg, Mikosch knygoje „Modelling Extremal Events for Insurance and Finance" [9].

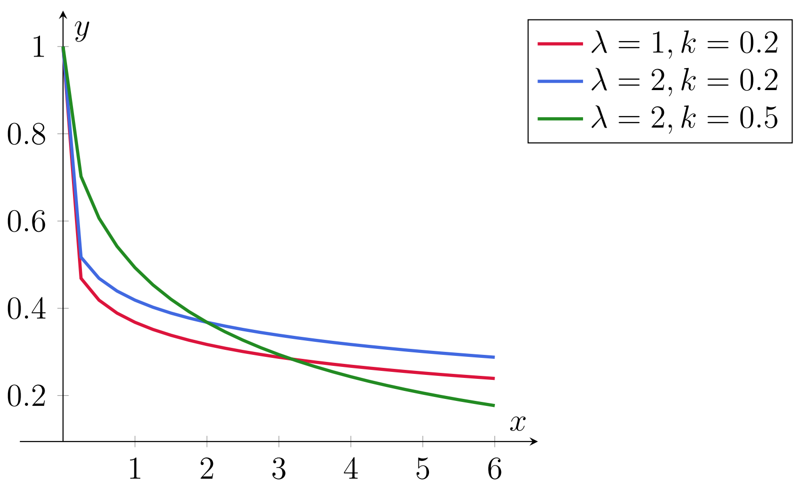
Pavyzdys 3.5 (Weibullio skirstinys)**.** Galima parodyti, kad Weibullio skirstinys priklauso subeksponentinių klasei. Ši funkcija turi tankį

$$f(x) = \frac{k}{\lambda}\left(\frac{x}{\lambda}\right)^{k-1} e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad x \geq 0$$

kur parametrai yra $\lambda \in (0;\infty), k \in (0,\infty)$. Tad žinome, kad Weibullio skirstinio uodega yra

$$\overline{F}(x) = e^{-\left(\frac{x}{\lambda}\right)^k} \quad x \geq 0$$

Naudojantis 3.1 apibrėžimu patikriname ar Weibullio skirstinys su parametrais $k = 0.5$ ir



$\lambda = 1$ priklauso $\mathscr{S}$ klasei.

Mūsų atveju

$$f(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}e^{\sqrt{x}}}$$

$$\overline{F}(x) = e^{-\sqrt{x}}$$

$$q(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

Tuomet patikriname ar funkcija $e^{xq(x)}f(x)$ integruojama. Turime

$$\lim_{x\to\infty}\int_0^x \exp\left(\frac{u}{2\sqrt{u}}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}e^{\sqrt{u}}}du = \lim_{x\to\infty}\int_0^x \exp\left(\frac{\sqrt{u}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}e^{\sqrt{u}}}du$$
$$= \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to 0}\int_y^x \exp\left(\frac{-\sqrt{u}}{2}\right)\cdot\frac{1}{2\sqrt{u}} = \lim_{x\to\infty}\lim_{y\to 0}\left(2\exp\left(-\frac{\sqrt{y}}{2}\right)-2\exp\left(-\frac{\sqrt{x}}{2}\right)\right) = 2$$

Teiginys 3.3. Jei $\overline{F}_X(x)\in\mathscr{H}^c$ ir $\overline{F}_Y(x)\in\mathscr{S}$, tai $\overline{F}_X(x)=o(\overline{F}_Y(x))$

Įrodymas. *Paimkime* $\lambda>0$ *tokią, kad* $\limsup e^{\lambda x}\overline{F}_X(x)<\infty$ *ir* $\delta>0$. *Iš teoremos 3.4 (v) turime*

$$\limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_Y(x)} = \limsup_{x\to\infty}\frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_Y(x)}\frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} \le \limsup_{x\to\infty}\left(e^{\lambda x}\overline{F}_X(x)\right)\limsup_{x\to\infty}\left(\frac{1}{e^{\lambda x}\overline{F}_Y(x)}\right) = 0.$$

3.4 Klasė $\mathscr{L}$

Šiame poskyryje apibrėžiamas pasiskirstymo funkcijos priklausymas ilgauodegių skirstinių klasei. Pateikiama šios klasės reprezentacinė teorema su pavyzdžiais. Galiausiai įrodoma, jog funkcijos iš šios klasės yra sunkesnės už bet kurį lengvauodegį skirstinį.

Apibrėžimas 3.5. *Pasiskirstymo funkciją* F, *apibrėžtą* $\mathbb{R}$ *priklauso ilgauodegių skirstinių klasei* $F\in\mathscr{L}$, *jei*

$$\lim_{x\to\infty}\frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1 \text{ visiems } y>0$$

Iš apibrėžimo galima gauti, kad

$$\mathcal{F}\in\mathscr{L} \text{ tada ir tik tada, kai } \overline{F}\circ\log\in\mathscr{R}(0)$$

Shimura, Watanabe straipsnyje „Infinite divisibility and generalized subexponentiality" [16] suformulavo tokį teiginį apie ilgauodegių skirstinių klasę.

Pastaba 3.5. Jeigu $F\in\mathscr{L}$ tai

$$\lim_{x\to\infty}e^{\delta x}\overline{F}(x)=\infty \quad \text{visiems } \delta>0$$

Įrodymas. *Žinodami, kad iš sąlygos* $F\in\mathscr{L}$ *išplaukia tai kad* $F(\log x)$ *yra lėtai kintanti, o tokia funkcija turi savybę esančią 3.3 pastaboje. Todėl*

$$\lim_{x\to\infty}x^\delta\overline{F}(\log x)=\infty, \text{ su visais } \delta>0$$

Vadinasi,

$$\lim_{x\to\infty} e^{\delta x}\overline{F}(x) = \infty,\ \text{su visais } \delta > 0.$$

Klasė $\mathscr{L}$ turi savo reprezentacinę teoremą, kurią suformulavo Klüppelberg straipsnyje „Subexponential distributions and characterizations of related classes" [7].

Teorema 3.5. *Pasiskirstymo funkcija $F \in \mathscr{L}$ tada ir tik tada, kai*

$$\overline{F}(x) = c(x)\exp\left(-\int_0^x b(y)dy\right), \quad x \geq 0$$

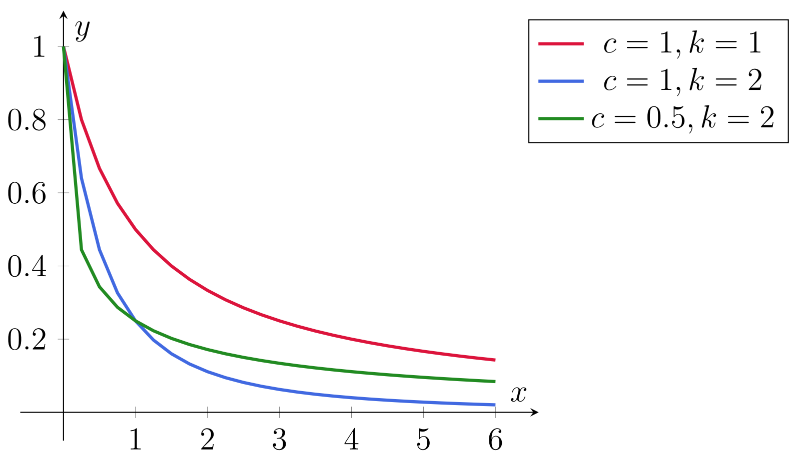
su funkcijomis $c(x) \to c \in (0;\infty), b(x) \to 0$, kai $x \to \infty$

Pavyzdys 3.6 (Burr skirstinys)**.** Galima parodyti, kad Burr skirstinys priklauso ilgauodegių klasei. Ši funkcija turi tankį

$$f(x) = ck\frac{x^{c-1}}{(1+x^c)^{k+1}} \quad x > 0$$

kur parametrai yra $c, k > 0$. Tad žinome, kad Burr skirstinio uodega yra

$$\overline{F}(x) = (1+x^c)^{-k} \quad x > 0$$



Naudojantis 3.5 apibrėžimu patikriname ar Burr skirstinys su parametrais $k = 1$ ir $c = 2$ priklauso $\mathscr{L}$ klasei.

$$\lim_{x\to\infty}\frac{(1+(x-y)^2)^{-1}}{(1+x^2)^{-1}} = \lim_{x\to\infty}\frac{1+x^2}{1+(x-y)^2} = \lim_{x\to\infty}\frac{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}{x^2\left(\frac{1}{x^2}+\left(1-\frac{y}{x}\right)^2\right)} = 1$$

Šį skirstinį galima pateikti ilgauodegių skirstinių reprezentacine forma iš 3.5 teoremos

$$\overline{F}(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2}\frac{1}{(1+x)^2} = c(x)\exp\left\{-\int_0^x b(y)dy\right\}$$

su

$$c(x) = \frac{(1+x)^2}{1+x^2} \underset{x\to\infty}{\to} 1$$

$$b(x) = \frac{2}{1+x} \underset{x\to\infty}{\to} 0$$

nes

$$\exp\left(-\int_0^x b(y)dy\right) = \exp\left(-\int_0^x \frac{2}{1+y}dy\right) = \exp\left(-2(\ln(1+x)-\ln 1)\right) = \frac{1}{(1+x)^2}$$

Pavyzdys 3.7 (Benktander II)**.** Galima parodyti, kad Benktander II tipo skirstinys priklauso ilgauodegių klasei. Ši funkcija turi tankį

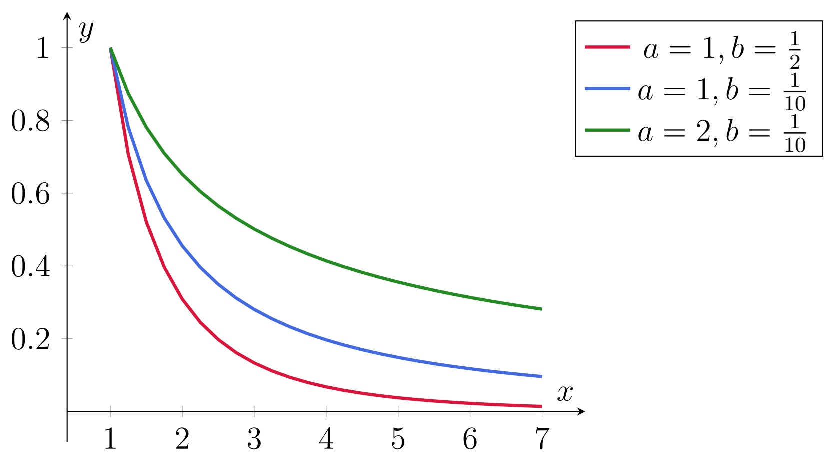
$$f(x) = \exp\left(\frac{a}{b}[1-x^b]\right)x^{b-2}(ax^b-b+1)$$

kur parametrai $a > 0$ ir $0 < b \leq 1$. Benktander II pasiskirstymo funkcija yra

$$F(x) = 1 - x^{b-1}\exp\left(\frac{a}{b}\left[1-x^b\right]\right)$$

Šio skirstinio uodega yra

$$\overline{F}(x) = x^{b-1}\exp\left(\frac{a}{b}\left[1-x^b\right]\right)$$



Paimkime konkretų atvejį, kai $a = 1$ ir $b = \frac{1}{2}$, tai yra

$$\overline{F}(x) = \frac{\exp\left(2\left[1 - \sqrt{x}\right]\right)}{\sqrt{x}}$$

Tada iš 3.5 apibrėžimo turime, kad šis skirstinys priklauso klasei $\mathscr{L}$.

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = \lim_{x\to\infty} \frac{(x-y)^{-\frac{1}{2}} \exp(2 - 2(x-y)^{\frac{1}{2}})}{x^{-\frac{1}{2}} \exp(2 - 2x^{\frac{1}{2}})}$$

$$= \lim_{x\to\infty} \frac{\sqrt{x}}{\sqrt{x-y}} \lim_{x\to\infty} \frac{\exp(-2\sqrt{x-y})}{\exp(-2\sqrt{x})} = \lim_{x\to\infty} \left(\frac{\exp(\sqrt{x})}{\exp(\sqrt{x-y})} \right)^2$$

$$= \lim_{x\to\infty} \left(\exp(\sqrt{x} - \sqrt{x-y})\right)^2 = \lim_{x\to\infty} \left(\exp\left(\sqrt{x} - \sqrt{x-y}\right) \cdot \frac{\sqrt{x} + \sqrt{x-y}}{\sqrt{x} + \sqrt{x-y}} \right)^2$$

$$= \lim_{x\to\infty} \exp\left(\frac{y}{(\sqrt{x} + \sqrt{x+y})} \right)^2 = 1.$$

Pagal 3.5 teoremą šį skirstinį galime išreikšti su

$$c(x) = 1,$$

$$b(x) = \frac{1}{\sqrt{x}} + \frac{1}{2x} \underset{x\to\infty}{\to} 0,$$

nes

$$\overline{F}(x) = 1 \cdot e^{-\int_1^x \left(\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2y}\right) dy}, \quad x \geq 1.$$

Iš tiesų,

$$\overline{F}(x) = \exp\left(-\int_1^x \left[\frac{1}{\sqrt{y}} + \frac{1}{2y} \right] dy \right) = \exp\left(-\left[\int_1^x \frac{1}{\sqrt{y}} dy + \int_1^x \frac{1}{2y} dy \right] \right)$$

$$= \exp\left(-\left[2\sqrt{x} - 2 + \ln\sqrt{x} \right] \right) = \exp\left(-\left[\ln e^{2\sqrt{x}-2} + \ln\sqrt{x} \right] \right)$$

$$= \exp\left(\ln\left[e^{-2\sqrt{x}+2} \frac{1}{\sqrt{x}} \right] \right) = \frac{\exp\left(2\left[1 - \sqrt{x}\right]\right)}{\sqrt{x}} \qquad x \geq 1.$$

Teiginys 3.4. Jei $\overline{F}_X(x) \in \mathscr{H}^c$ ir $\overline{F}_Y(x) \in \mathscr{L}$, tai $\overline{F}_X(x) = o(\overline{F}_Y(x))$

Įrodymas. *Paimkime* $\lambda > 0$ *tokią, kad* $\limsup e^{\lambda x} \overline{F}_X(x) < \infty$ *ir* $\delta > 0$. *Remiantis 3.5 pastaba turime*

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_Y(x)} = \limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x)}{\overline{F}_Y(x)} \frac{e^{\lambda x}}{e^{\lambda x}} \leq \limsup_{x\to\infty} \left(e^{\lambda x} \overline{F}_X(x)\right) \limsup_{x\to\infty} \left(\frac{1}{e^{\lambda x} \overline{F}_Y(x)} \right) = 0.$$

3.5 Klasė $\mathscr{H}$

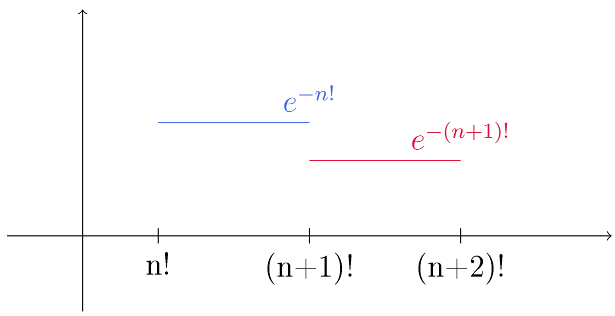
Anksčiau nagrinėtos sunkiauodegių skirstinių klasės yra $\mathscr{H}$ poklasiai kaip pavaizduota 1 paveiksle. 2 skyriuje yra pateiktas sunkiauodegių skirstinių apibrėžimas 2.1. Šiame poskyryje sunkonstruojami pasiskirstymo funkcijos pavyzdžiai iš šios klases, kurie yra lengvesni už lengvauodegį skirstinį.

Pavyzdys 3.8. Tarkime, kad turime pasiskirstymo funkcijos uodegą

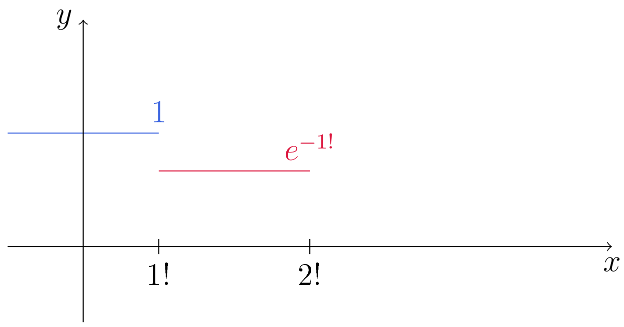
$$\overline{F}_X(x) = \mathbb{1}_{(-\infty;1)}(x) + \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n!}\mathbb{1}_{[n!,(n+1)!)}(x).$$

Pagal šią uodegą galima sukonstruoti atsitiktinį dydį

$$\mathbb{P}(X = (n+1)!) = \frac{1}{e^{n!}} - \frac{1}{e^{(n+1)!}}$$



Kai $n = 0$ turime $\mathbb{P}(X = 1!) = 1 - \frac{1}{e^1}$ ir ji netinka pagal bendrą formulę.



Tad turime, jog

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \dfrac{1}{e^1} \\ \mathbb{P}(X = n!) = \dfrac{1}{e^{(n-1)!}} - \dfrac{1}{e^{n!}}, \text{ kai } n = 2, 3, 4, ... \end{cases}$$

Galima parodyti, kad ši pasiskirstymo funkcija yra iš klasės $\mathscr{H}$. Žinome, kad

$\lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)!}{n!} = \infty$ ir remiantis (i) savybe iš 2.1 apibrėžimo

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}\overline{F}(x) = \limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x} \sum_{n=1}^{\infty} e^{-n!}\mathbb{1}_{[n!,(n+1)!)}(x)$$

Pasirinkime $x_n = (n+1)! - 1$. Tuomet gauname

$$\lim_{n\to\infty} e^{\lambda x_n}\overline{F}(x_n) = \lim_{n\to\infty} e^{\lambda((n+1)!-1)} \cdot e^{-n!} = e^{-\lambda} \lim_{n\to\infty} e^{(\lambda(n+1)!-n!)} = \infty$$

Todėl

$$\limsup_{x\to\infty} e^{\lambda x}\overline{F}(x) = \infty \quad \text{su bet kuriuo } \lambda > 0.$$

Analizuoti šį atsitiktinį dydį taip pat galima nagrinėjant jo momentus generuojančią funkciją.

$$\mathbb{E}e^{\lambda X} = e^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda n!}\left(\frac{1}{e^{(n-1)!}} - \frac{1}{e^{n!}}\right)$$

Pereikime tik prie sumos

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda n!}\left(\frac{1}{e^{(n-1)!}} - \frac{1}{e^{n!}}\right) = \sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda n!}\frac{1}{e^{(n-1)!}}\left(1 - \frac{1}{e^{n!-(n-1)!}}\right)$$
$$= \sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda n!-(n-1)!}\left(1 - \frac{1}{e^{(n-1)!(n-1)}}\right) \geq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} e^{(n-1)!(\lambda n-1)} = \infty, \quad \text{kai } n \text{ didelis, tai } \lambda n - 1 > 0.$$

Gauname, kad $\mathbb{E}e^{\lambda X} = \infty$ su visais $\lambda > 0$, todėl atsitiktinis dydis X yra iš klasės $\mathscr{H}$ remiantis 2.1 apibrėžimu. Taigi $F_X \in \mathscr{H}$.

Panagrinėkime ar ši pasiskirstymo funkcija priklauso kitoms sunkiauodegių skirstinių klasėms. Nagrinėkime atvirkštine įdėties tvarka kaip pavaizduota 1 paveikslėlyje. Pasirinkę $y = 1$ iš 3.5 apibrėžimo žinome, kad $F_X(x) \in \mathscr{L}$, kai

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Pasirenkame seką $x_n = n!$ ir tada turime

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x_n - 1)}{\overline{F}_X(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-(n-1)!}}{e^{-n!}} = e^{n!-(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} e^{(n-1)!(n-1)} = \infty.$$

Taigi $F_X \notin \mathscr{L}$. Remiantis klasių įdėtimi, kadangi ši pasiskirstymo funkcija nepriklauso klasei $\mathscr{L}$, tai ji nepriklauso jos poklasiams $\mathscr{S}$ ir $\mathscr{R}$. Tad lieka patikrinti ar ši pasiskirstymo funkcija priklauso klasei $\mathscr{D}$. Pasirinkę $y = \frac{1}{2}$, iš 3.2 apibrėžimo turime, kad $F_X \in \mathscr{D}$, jei

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty$$

Vėl pasirenkame $x_n = n!$ ir tada $\frac{x_n}{2} \in [(n-1)!; n!)$, jeigu n yra didelis, nes

$$\frac{n!}{2} > (n-1)! \iff n! > 2(n-1)! \iff n > 2$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}_X(\frac{x_n}{2})}{\overline{F}_X(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-(n-1)!}}{e^{-n!}} = e^{n!-(n-1)!} = \lim_{n\to\infty} e^{(n-1)!(n-1)} = \infty.$$

Tada turime

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\overline{F}_X(\frac{x_n}{2})}{\overline{F}_X(x_n)} = \infty.$$

Taigi $F_X \notin \mathscr{D}$.
Toliau paimkime eksponentinį atsitiktinį dydį Y su parametru $\frac{1}{2}$. Tokiu atveju $\overline{F}_Y(x) = \mathbb{P}(Y > x) = e^{-\frac{x}{2}}$, kai $x \geq 0$. Šis atsitiktinis dydis yra lengvauodegis, nes

$$\mathbb{E}e^{\lambda Y} = \int_0^\infty e^{\lambda x} d(1 - e^{-\frac{x}{2}}) = \int_0^\infty e^{\lambda x} e^{-\frac{x}{2}} \frac{1}{2} dx = \frac{1}{2} \int_0^\infty e^{x\left(\lambda - \frac{1}{2}\right)} dx < \infty \quad \text{visiems } 0 < \lambda < \frac{1}{2}$$

Taigi gauname, kad atsitiktinis dydis Y yra lengvas, o atsitiktinis dydis X sunkus. Tuomet reikia patikrinti ar lengvas yra lengvesnis už sunkų. Dideliems x turime

$$\frac{\overline{F}_Y(x)}{\overline{F}_X(x)} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sum_{n=1}^\infty e^{-n!} \mathbb{1}_{[n!;(n+1)!)}(x)}$$

Ir jeigu $x_n = n!$ turime

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}_Y(x_n)}{\overline{F}_X(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{n!}{2}}}{e^{-n!}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n!}{2}} = \infty$$

Taigi matome, kad mūsų pasirinktas lengvauodegis atsitiktinis dydis Y yra sunkesnis už sunkiauodegį atsitiktinį dydį X.

Panagrinėkime dar vieną pasiskirstymo funkciją.

Pavyzdys 3.9. Tarkime, kad turime tokią pat pasiskirstymo funkcijos uodegą kaip 3.8 pavyzdyje ir pagal ją uodegą sukonstruojame atsitiktinį dydį

$$\mathbb{P}(X = n^n) = \frac{1}{e^{(n-1)^{n-1}}} - \frac{1}{e^{n^n}}, \quad n = 2, 3, 4, ...$$

Kai $n = 1$ turime $\mathbb{P}(X = 1) = 1 - \frac{1}{e^1}$ ir ji netinka pagal bendrą formulę. Tad turime, jog

$$\begin{cases} \mathbb{P}(X = 1) = 1 - \dfrac{1}{e^1} \\ \mathbb{P}(X = n^n) = \dfrac{1}{e^{(n-1)^{n-1}}} - \dfrac{1}{e^{n^n}}, \text{ kai } n = 2, 3, 4, ... \end{cases}$$

Analizuoti šį atsitiktinį dydį nagrinėkime jo momentus generuojančią funkciją.

$$\mathbb{E}e^{\lambda X} = e^{\lambda}\left(1 - \frac{1}{e}\right) + \sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda n^n}\left(\frac{1}{e^{(n-1)^{n-1}}} - \frac{1}{e^{n^n}}\right)$$

Pereikime tik prie sumos

$$\sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda n^n}\left(\frac{1}{e^{(n-1)^{n-1}}} - \frac{1}{e^{n^n}}\right) \geq \sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda(n-1)^n} \frac{1}{e^{(n-1)^{n-1}}}\left(1 - \frac{1}{e^{n^n-(n-1)^{n-1}}}\right)$$

$$= \sum_{n=2}^{\infty} e^{\lambda(n-1)^n-(n-1)^{n-1}}\left(1 - \frac{1}{e^{n^n-(n-1)^{n-1}}}\right) \geq \frac{1}{2}\sum_{n=2}^{\infty} e^{(n-1)^{n-1}[\lambda(n-1)-1]} = \infty,$$

kai n didelis, tai $\lambda(n-1) - 1 > 0$.

Gauname, kad $\mathbb{E}e^{\lambda X} = \infty$ su visais $\lambda > 0$, todėl atsitiktinis dydis X yra iš klasės $\mathscr{H}$ remiantis 2.1 apibrėžimu. Taigi $F_X \in \mathscr{H}$.

Panagrinėkime ar ši pasiskirstymo funkcija priklauso kitoms sunkiauodegių skirstinių klasėms. Nagrinėkime atvirkštine įdėties tvarka kaip pavaizduota 1 paveikslėlyje. Pasirinkę $y = 1$ iš 3.5 apibrėžimo žinome, kad $F_X(x) \in \mathscr{L}$, kai

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(x-y)}{\overline{F}(x)} = 1.$$

Pasirenkame seką $x_n = n^n$ ir tada turime

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}_X(x_n - 1)}{\overline{F}_X(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-(n-1)^{n-1}}}{e^{-n^n}} = \lim_{n\to\infty} e^{n^n-(n-1)^{n-1}}$$

$$\geq \lim_{n\to\infty} e^{n^n-n^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^{n^{n-1}(n-1)} = \infty$$

Taigi $F_X \notin \mathscr{L}$. Remiantis klasių įdėtimi, kadangi ši pasiskirstymo funkcija nepriklauso klasei $\mathscr{L}$, tai ji nepriklauso jos poklasiams $\mathscr{S}$ ir $\mathscr{R}$. Tad lieka patikrinti ar ši pasiskirstymo funkcija priklauso klasei $\mathscr{D}$. Pasirinkę $y = \frac{1}{3}$, iš 3.2 apibrėžimo turime, kad $F_X \in \mathscr{D}$, jei

$$\limsup_{x\to\infty} \frac{\overline{F}(xy)}{\overline{F}(x)} < \infty$$

Vėl pasirenkame $x_n = n^n$ ir tada $\frac{x_n}{3} \in [(n-1)^{n-1}; n^n)$, nes

$$\frac{n^n}{3} > (n-1)^{n-1} \iff n^n > 3(n-1)^{n-1} \iff (n-1)(n-1)^{n-1} > 3(n-1)^{n-1} \iff n > 4$$

Vadinasi,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}_X(\frac{x_n}{3})}{\overline{F}_X(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-(n-1)^{n-1}}}{e^{-n^n}} = \lim_{n\to\infty} e^{n^n-(n-1)^{n-1}} \geq \lim_{n\to\infty} e^{n^n-n^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} e^{n^{n-1}(n-1)} = \infty.$$

Tada turime

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{\overline{F}_X(\frac{x_n}{3})}{\overline{F}_X(x_n)} = \infty.$$

Taigi $F_X \notin \mathscr{D}$.
Paimkime lengvauodegį eksponentinį atsitiktinį dydį Y su parametru $\frac{1}{2}$ iš 3.8 pavyzdžio. Turime, kad atsitiktinis dydis Y yra lengvas, o atsitiktinis dydis X sunkus. Tuomet reikia patikrinti ar lengvas yra lengvesnis už sunkų. Dideliems x turime

$$\frac{\overline{F}_Y(x)}{\overline{F}_X(x)} = \frac{e^{-\frac{x}{2}}}{\sum_{n=1}^{\infty} e^{-n^n} \mathbb{1}_{[n^n;(n+1)^{n+1})}(x)}$$

Ir jeigu $x_n = n^n$ turime

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\overline{F}_Y(x_n)}{\overline{F}_X(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{e^{-\frac{n^n}{2}}}{e^{-n^n}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{n^n}{2}} = \infty$$

Taigi matome, kad mūsų pasirinktas lengvauodegis atsitiktinis dydis Y yra sunkesnis už sunkiauodegį atsitiktinį dydį X.

4 Išvados

Šiame baigiamajame darbe naudojantis sunkiauodegių skirstinių klasių apibrėžimais ir savybėmis parodėme, jog skirstiniai iš nagrinėtų - reguliariai kintančių $\mathscr{R}$, dominuojamai kintančių $\mathscr{D}$, subeksponentinių $\mathscr{S}$, ilgauodegių $\mathscr{L}$ klasių - sunkesni už skirstinius iš lengvauodegių klasės $\mathscr{H}^c$.

Klasėje $\mathscr{H}$ buvo sukonstruoti pasiskirstymo funkcijų pavyzdžiai 3.8 ir 3.9 įrodė teiginį, kad yra skirstinių, kurie apibrėžiami kaip sunkiauodegiai, tačiau nėra sunkesni už pasirinktus lengvauodegius skirstinius.

Literatūros šaltiniai

[1] J. Karamata, Sur un mode de croissance régulière. théorèmes fondamentaux (1933).

[2] J. N.H. Bingham, C.M. Goldie, Regular variation (1987) 21–22.

[3] W. Feller, On regular variation and local limit theorems (1967).

[4] V. Čistyakov, Theorem on sums of independent random positive variables and its applications to branching processes (1964) 710–718.

[5] J. Chover, Degeneracy properties of subcritical branching processes (1973).

[6] P. E. C.M.Goldie, On closure and factorization properties of subexponential and related distributions (19ū0).

[7] C. Klüppelberg, Subexponential distributions and characterizations of related classes (1989) 260–261.

[8] D. K. R. Leipus, J. Šiaulys, Closure properties for heavy-tailed and related distributions: an overview (2023).

[9] T. M. P. Embrechts, C. Klüppelberg, Modelling extremal events for insurance and finance (1997).

[10] D. Konstantinides, A class of heavy tailed distributions (2014) 2–3.

[11] Q. T. J. Cai, On max-sum equivalence and convolution closure of heavy-tailed distributions and their applications (2004) 122–123.

[12] E. J. G. Pitman, Subexponential distribution functions (1980).

[13] P. E. C.M. Goldie, On convolution tails (1982) 263–278.

[14] P. N. K.B. Athereya, Branching processes (1972).

[15] S. Z. S. Foss, D. Korshunov, An introduction to heavy-tailed and subexponential distributions (2009).

[16] T. W. T. Shimura, Infinite divisibility and generalized subexponentiality (2005) 450–451.