Matematikos ir informatikos fakultetas

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

# Tiksli išgyvenimo tikimybė diskretaus laiko E. Sparre Andersen modeliui

# Exact survival probability for discrete time E. Sparre Andersen model

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Evelina Zabielaitė
VU el. p.: evelina.zabielaite@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas:
Doc. Dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2024

# Turinys

# Tiksli išgyvenimo tikimybė diskretaus laiko E. Sparre Andersen modeliui


**Santrauka**

Šiame baigiamajame magistro darbe yra nagrinėjamas apibendrintas diskretaus laiko rizikos modelis, kurį generuoja atsitiktiniai dydžiai $X$ bei $\theta$. Pristatomos pagrindinės teoremos ir apibrėžimai, kuriais remiantis yra apskaičiuojamos begalinio laiko išgyvenimo tikimybės. Apžvelgiamas begalinio laiko išgyvenimo tikimybės apskaičiavimo būdas naudojantis generuojančiomis funkcijomis. Naudojantis R programavimo kalba pateikiami praktiniai pavyzdžiai, kuriuose randamos begalinio laiko išgyvenimo tikimybių reikšmės skirtingiems žalų skirstiniams.



**Raktiniai žodžiai:** diskretaus laiko rizikos modelis, begalinio laiko išgyvenimo tikimybė, tikimybes generuojanti funkcija, grynojo pelno sąlyga, rekursinis skaičiavimas.


# Exact survival probability for discrete time E. Sparre Andersen model


**Abstract**

This master's thesis analyzes a discrete time risk model which is generated by two random variables $X$ and $\theta$. The main theorems and definitions are presented, based on them infinite time survival probabilities are calculated. Furthermore, calculation method for finite time survival probability is being reviewed by using probability generating functions. Practical examples are provided using the R programming language to find values of infinite time survival probabilities for different distributions of claims.



**Key words:** discrete-time risk model, finite time survival probability, probability generating function, net profit condition, recursive calculation.

# 1. Įvadas

Rizikos teorijoje vyrauja įvairūs matematiniai modeliai aprašantys draudiko kapitalo kitimą bėgant laikui. Pats pirmasis, 1903 m. švedų matematikas Filip Lundberg pristatė klasikinį rizikos modelį, dar kitaip vadinamas Cramér–Lundberg modeliu, kuris nusako draudiko kapitalo dydį bet kokiu laiko momentu bei kuris teigia, jog laiko tarpai tarp žalų yra nepriklausomi eksponentiškai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Tuomet, 1930 m. švedų matematikas Harald Cramér iš naujo paskelbė F. Lundberg's darbą [C30]. Na ir 1957 m. danų matematikas E. Sparre Andersen [A57] išplėtė minėtą Cramér–Lundberg modelį, laikydamas, jog laiko tarpai tarp žalų yra nepriklausomi vienodai pasiskirstę neneigiamas reikšmes įgyjantys atsitiktiniai dydžiai. Būtent pastarasis diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelis, kuris apibūdina draudimo įmonės turto kitimą diskrečiais laiko momentais, yra vienas iš populiariausių modelių naudojamų negyvybės draudimo sektoriuje, siekiant užtikrinti sklandų draudimo įmonės veiklos vystymąsi ir išvengti bankroto. Norint, jog draudikui pavyktų išvengti bankroto ir užtikrinti pelningą veiklą - patirtos išlaidos vidutiniškai neturi viršyti pradinio kapitalo ir per tam tikrą laiką gautų draudimo įmokų. Dėl šios priežasties draudikui yra labai svarbu kuo tiksliau įsivertinti išgyvenimo tikimybę.

Šiame magistro baigiamajame darbe yra nagrinėjamas diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelis (1) arba dar kitaip vadinamas rizikos atstatymo modeliu. Pagrindinis šio darbo tikslas yra apžvelgti begalinio laiko išgyvenimo tikimybės apskaičiavimo metodą naudojant tikimybes generuojančias funkcijas. Taip pat aptartą begalinio laiko išgyvenimo tikimybės radimo metodą pritaikyti praktiniuose skaičiavimuose.

# 2. Diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelis

Šiame skyriuje plačiau pristatysime diskretaus laiko E. Sparre Andersen modelį, kuris nusako draudiko kapitalo kitimo procesą laike. Apibrėžkime šį modelį.

**2.1 Apibrėžimas.** *Sakome, kad draudiko turtas $W_u(n)$ kinta pagal diskretaus laiko rizikos modelį, jeigu bet kuriam $n \in \mathbb{N}_0 = \{0, 1, 2, ...\}$*

$$W_u(0) = u, \;\; W_u(n) = u + cn - \sum_{i=1}^{\theta(n)} X_i. \tag{1}$$

*Lygybėje* (1)*:*

- *draudiko kapitalas pradiniu laiko momentu $u = W_u(0)$ yra neneigiamas sveikasis skaičius, t.y. $u \in \mathbb{N}_0$;*
- *$c \in \mathbb{N}$ žymi premijų surinkimo greitį per laiko vienetą;*
- *$\theta(n) = max\{t : \theta_1 + \theta_2 + ... + \theta_t \in [0, n]\}$ yra žalų skaičius intervale $[0, n]$;*
- *Laiko intervalai tarp žalos pasirodymo laikų - $\{\theta_1, \theta_2, ...\}$ yra neneigiamo atsitiktinio dydžio $\theta$ nepriklausomų kopijų seka;*
- *$X_i$ žymi draudiko i-osios žalos dydį. $X_1, X_2, ...$ yra nepriklausomos neneigiamo atsitiktinio dydžio X kopijos t.y. $X_i \overset{d}{=} X$.*

Apibrėžkime modeliui (1) begalinio ir baigtinio laiko išgyvenimo tikimybę.
Begalinio laiko išgyvenimo tikimybė

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{\infty}\Big\{W_u(n) > 0\Big\}\right) = \mathbb{P}\left(u + cn - \sum_{i=1}^{\theta(n)} X_i > 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(u + c\sum_{i=1}^{t}\theta_i - \sum_{i=1}^{\theta(\theta_1+\theta_2+...+\theta_t)} X_i > 0\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\sup_{t\geqslant 1}\sum_{i=1}^{t}(X_i - c\theta_i) < u\right), \;\; u \in \mathbb{N}_0
\end{aligned} \tag{2}$$

Baigtinio laiko išgyvenimo tikimybė

$$\varphi(u, T) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{T}\Big\{W_u(n) > 0\Big\}\right) = \mathbb{P}\left(\sup_{1\leqslant t\leqslant T}\sum_{i=1}^{t}(X_i - c\theta_i) < u\right), \;\; u \in \mathbb{N}_0, \; T \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

# 3. Tiksli išgyvenimo tikimybė diskretaus laiko E. Sparre Andersen modeliui

Šiame skyriuje, remdamiesi straipsniu [G23], pateiksime pagrindines nagrinėjamo modelio teoremas ir lemas bei naudodamiesi tikimybes generuojančiomis funkcijomis gausime tikslias begalinio laiko išgyvenimo tikimybės išraiškas.

## 3.1. Pagalbinė informacija ir grynojo pelno sąlyga

Nagrinėjame diskretaus laiko rizikos modelį (1)

$$W_u(n) = u + cn - \sum_{i=1}^{\theta(n)} X_i = u - \sum_{i=1}^{t}(X_i - c\theta_i).$$

Apibrėžkime diskretaus neneigiamo ir svekareikšmio atsitiktinio dydžio $X$ generuojančią funkciją

$$G_X(s) := \sum_{i=0}^{\infty}(\mathbb{P} = i)s^i = \mathbb{P}(X = 0) + s\mathbb{P}(X = 1) + s^2\mathbb{P}(X = 2) + ..., \ \ |s| \leqslant 1.$$

Suformuluokime prielaidas, kurios reikalingos norint apibrėžti atsitiktinio dydžio $X - c\theta$ tikimybes generuojančią funkciją:

**(P1)** Nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai $X$ ir $c\theta$ įgyja neneigiamas sveikąsias reikšmes;

**(P2)** Atsitiktinis dydis $c\theta$ turi baigtinę atramą, t.y. $\mathbb{P}(c\theta \leqslant m) = 1, m \in \mathbb{N}$.

Remiantis (P1) ir P(2) prielaidomis, atsitiktinio dydžio $X - c\theta$, kur $X$ ir $c\theta$ yra nepriklausomi, tikimybes generuojanti funkcija yra lygi

$$G_{X-c\theta}(s) = G_X(s)G_{c\theta}(1/s), \ \ 0 < |s| \leqslant 1.$$

Yra keletas priežasčių kodėl (P2) prielaida yra neišvengiama. Pirma priežastis, jog mes pageidaujame, kad $G_{X-c\theta}(s)$ egzistuotų ne tik taške $s = 1$. Antra priežastis, jog mes pageidaujame, kad išsprendus lygtį $G_{X-c\theta}(s) = 1$ gautume $m - 1$ šaknų vienetinio skritulio viduje, t.y. $0 < |s| \leqslant 1, s \neq 1$. Ir trečia priežastis, jog mes negalime gauti visų išgyvenimo tikimybės $\varphi(u)$ reikšmių vienu kartu, kai $u \in \mathbb{N}_0$.

Sukonstruokime apibrėžimą, jeigu į modelį (1) norime įtraukti $\theta$ su begaline atrama. Atsižvelgdami į (P2) prielaidą ir kad skaičius $m$ gali būti labai didelis, galime apibrėžti naują atsitiktinį dydį $\theta_m$ su skirstiniu:

$$\begin{cases} \mathbb{P}(c\theta_m = l) = \mathbb{P}(c\theta = l), \ \ l \in \{0, 1, ..., m-1\} \\ \mathbb{P}(c\theta_m = m) = \mathbb{P}(c\theta \geqslant m) \end{cases} \tag{4}$$

Tada, visiems $u \in \mathbb{N}_0$

$$\mathbb{P}\left(\sup_{t\geqslant 1}\sum_{i=1}^{t}(X_i - c\theta_i^m) < u\right) \leqslant \mathbb{P}\left(\sup_{t\geqslant 1}\sum_{i=1}^{t}(X_i - c\theta_i) < u\right),$$

kai $\theta_1^m, \theta_2^m, \ldots$ yra nepriklausomos atsitiktinio dydžio $\theta_m$ kopijos.

Prisiminkime grynojo pelno sąlyga. Vidurkis $\mathbb{E}(X - c\theta)$ yra vadinamas grynojo pelno sąlyga ir ji yra tenkinama, jeigu vidutinis žalų dydis yra mažesnis nei surinktų premijų dydis, t.y.

$$G'_{X-c\theta}(1) = \mathbb{E}(X - c\theta) < 0. \tag{5}$$

Remiantis [GKJ23] šaltiniu grynojo pelno sąlyga negalioja, jeigu $\mathbb{E}(X - c\theta) \geqslant 0$. Tokiu atveju draudiko kapitalas, beveik visada, per ilgą laiką nukris iki 0 arba taps neigiamas. Tuomet išgyvenimo tikimybė $\varphi(u)$ bus lygi nuliui su visomis reikšmėmis $u \in \mathbb{N}_0$.

Taip pat svarbu paminėti begalinio laiko išgyvenimo tikimybės ribos požymį.

**3.1 Lema.** *Tarkime, kad modelis* (1) *tenkina grynojo pelno salygą* $\mathbb{E}(X - c\theta) < 0$*, tuomet galioja lygybė*

$$\lim_{u\to\infty}\varphi(u) = 1. \tag{6}$$

*Šios lygybės įrodymą galima rasti [GJJ22] 4 lemoje.*

Apibrėžkime baigtinio laiko išgyvenimo tikimybę.

**3.1 Teiginys.** *Baigtinio laiko išgyvenimo tikimybę galima išreikšti:*

- *Kai* $T = 1$ :

$$\varphi(u, 1) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{1}\Big\{W_u(n) > 0\Big\}\right) = F(u-1).$$

- *Kai* $T \geqslant 2$ :

$$\begin{aligned}
\varphi(u, T) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{T}\Big\{W_u(n) > 0\Big\}\right) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{T}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - c\theta_i) < u\right\}\right)\\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{n=2}^{T}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - c\theta_i) < u\right\} \cap \{X_1 - c\theta_1 < u\}\right)\\
&= \sum_{i=-m}^{u-1}\mathbb{P}\left(\bigcap_{n=1}^{T-1}\left\{\sum_{i=1}^{n}(X_i - c\theta_i) < u - (X_1 - c\theta_1)\right\}\right)\mathbb{P}(X - c\theta = i)\\
&= \sum_{i=-m}^{u-1}\varphi(u-i, T-1)f(i).
\end{aligned}$$

*čia* $f(j) = \mathbb{P}(X - c\theta = j)$ *ir* $F(j) = \mathbb{P}(X - c\theta \leqslant j)$*,* $j = -m, -m+1, \ldots$*.*

*Įrodymą galima rasti šaltinio [G23] 1 teiginyje.*

Toliau apibrėžkime lemą, kurioje pateikiamas begalinio laiko išgyvenimo tikimybės rekursinis sąryšis.

**3.2 Lema.** *Begalinio laiko išgyvenimo tikimybę* (2) *galima išreikšti tokiu rekursiniu sąryšiu*

$$\varphi(u) = \sum_{i=1}^{u+m} \varphi(i) f(u-i), \quad u \in \mathbb{N}_0, \tag{7}$$

*čia* $f(j) = \mathbb{P}(X - c\theta = j), j = -m, -m+1, ....$

*Įrodymas.* Kadangi $X_i - c\theta_i$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai ir $\mathbb{P}(X - c\theta \geqslant -m) = 1$, tuomet

$$\begin{aligned}
\varphi(u) &= \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{t}(X_i - c\theta_i) < u\right\}\right) \\
&= \mathbb{P}\left(\bigcap_{t=1}^{\infty}\left\{\sum_{i=1}^{t}(X_i - c\theta_i) < u\right\}, X_1 - c\theta_1 < u\right) \\
&= \sum_{i=-m}^{u-1} \varphi(u-i) f(i) = \sum_{i=1}^{u+m} \varphi(i) f(u-i).
\end{aligned}$$

□

Kai $u = 0, 1, ..$ lygybėje (7), tai

$$\varphi(0) = \sum_{i=1}^{m} \varphi(i) f(-i), \quad \varphi(1) = \sum_{i=1}^{m+1} \varphi(i) f(1-i), ....$$

Iš pastarųjų lygybių matome, jog norint gauti $\varphi(m), \varphi(m+1), ...$ turime žinoti visas prieš tai einančias reikšmes $\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(m-1)$.

## 3.2. Tiksli begalinio laiko išgyvenimo tikimybė

Pažymėkime naują atsitiktinį dydį

$$\mathcal{H} = \sup_{t \geqslant 1}\left(\sum_{i=1}^{t}(X_i - c\theta_i)\right)^+,$$

čia $x^+ = \max\{0, x\}$ yra teigiama dalis realaus skaičiaus $x$.

Taip pat pažymėkime atsitiktinio dydžio $\mathcal{H}$ tikimybės masės funkcija

$$\pi_i := \mathbb{P}(\mathcal{H} = i), \quad \forall i \in \mathbb{N}_0.$$

Verta paminėti, jog, kai galioja grynojo pelno sąlyga, tai atsitiktinis dydis $\mathcal{H}$ neįgyja begalinės reikšmės su teigiama tikimybe, t.y. $\mathbb{P}(\mathcal{H} < \infty) = 1$.

Tuomet, remiantis begalinio laiko išgyvenimo tikimybės apibrėžimu (2)

$$\varphi(u+1) = \sum_{i=0}^{u} \pi_i = \mathbb{P}(\mathcal{H} \leqslant u), \quad u \in \mathbb{N}_0. \tag{8}$$

Pažymėkime išgyvenimo tikimybes $\varphi(1), \varphi(2), ...$ generuojančią funkciją bei atsitiktinio dydžio $\mathcal{H}$ generuojančią funkciją

$$G_{\varphi}(s) := \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(i+1)s^i, \quad |s| \leqslant 1,$$

$$G_{\mathcal{H}}(s) := \sum_{i=0}^{\infty} \pi_i s^i, \quad |s| \leqslant 1.$$

Tada, pasinaudojus (8) išraiška, išgyvenimo tikimybes generuojančią funkciją galime užrašyti

$$G_{\varphi}(s) = \sum_{i=0}^{\infty} \varphi(i+1)s^i = \sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{i} \pi_j s^i = \sum_{j=0}^{\infty} \pi_j \sum_{i=j}^{\infty} s^i = \frac{\sum\limits_{j=0}^{\infty} \pi_j s^j}{1-s} = \frac{G_{\mathcal{H}}(s)}{1-s}, \quad |s| \leqslant 1. \tag{9}$$

Remiantis šaltiniu [GJJ22] suformuluojame lemą, kurioje yra apskaičiuojama konkreti riba, susidedanti iš pirmų dviejų atsitiktinio dydžio momentų.

**3.3 Lema.** *Tarkime, kad Y yra sveikasis atsitiktinis dydis. Pažymėkime tikimybes generuojančią funkciją*

$$G_Y(s) = \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}(Y=j)s^j = \sum_{j=1}^{\infty} p_j s^j, \quad |s| \leqslant 1.$$

*Jeigu* $\mathbb{E}Y = \infty$*, tuomet*

$$\lim_{s \to 1^-} \frac{(\frac{d}{ds}G_Y(s))^2}{\frac{d^2}{ds^2}G_Y(s)} = 0.$$

*Įrodymą galima rasti jau minėto šaltinio [GJJ22] 9 lemoje.*

Toliau pateiksime teoremą, kurioje yra apibrėžiamos pagrindinės lygybės padedančios rasti pradines begalinio laiko išgyvenimo tikimybės reikšmes.

**3.1 Teorema.** *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai* $X$ *ir* $c\theta$ *yra nepriklausomi neneigiami sveikieji skaičiai, kur* $\mathbb{P}(c\theta \leqslant m) = 1, m \in \mathbb{N}$. *Jei yra tenkinama grynojo pelno sąlyga* $c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X > 0$, *tuomet šios lygybės yra teisingos:*

$$\begin{aligned}&(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0))(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m)\\ &= (1-s)\left(\varphi(0)s^m G_{X-c\theta}(s) + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi(i) \sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^u\right), \quad |s| \leqslant 1,\end{aligned} \tag{10}$$

$$0 = \varphi(0)\alpha^m + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi(i) \sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)\alpha^u, \tag{11}$$

$$(c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi(i)F(-i-1), \tag{12}$$

*čia* $f(j) = \mathbb{P}(X - c\theta = j), F(j) = \mathbb{P}(X - c\theta \leqslant j)$, *visiems* $j \in \mathbb{Z}$ *ir* $s \in \mathbb{C}$ *bei* $\alpha$ *yra šaknis srityje* $|s| \leqslant 1, s \neq 1$.

*Įrodymas.* Iš pradžių įrodysime lygybę (10). Kadangi $\varphi(u) = \sum\limits_{i=1}^{u+m} \varphi(i)f(u-i), u = 0, 1, 2, ...,$ tai $\varphi(u-m) = \sum\limits_{i=1}^{u+m} \varphi(i)f(u-m-i), u = m, m+1, .....$ Padaugindami abi lygybės $\varphi(u-m)$ puses iš $s^{u-m}$ ir sumuodami $u$ nuo $m$ iki $\infty$, gauname

$$\sum_{u=m}^{\infty} s^{u-m}\varphi(u-m) = \sum_{u=m}^{\infty} s^{u-m}\left(\sum_{i=1}^{u} \varphi(i)f(u-m-i)\right)$$

arba

$$\begin{aligned}
\Big(sG_{\varphi}(s) + \varphi(0)\Big) &= \sum_{u=m}^{\infty} s^{u-m}\left(\sum_{i=0}^{u} \varphi(i)f(u-m-i) - \varphi(0)f(u-m)\right) \\
&= \sum_{u=m}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{u} \varphi(i)f(u-m-i)\right)s^{u-m} - \varphi(0)\sum_{u=m}^{\infty} f(u-m)s^{u-m} \\
&= \sum_{u=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{u} \varphi(i)f(u-m-i)\right)s^{u-m} - \sum_{u=0}^{m-1} \left(\sum_{i=0}^{u} \varphi(i)f(u-m-i)\right)s^{u-m} \\
&- \varphi(0)\sum_{u=m}^{\infty} f(u-m)s^{u-m} \\
&= \Big(sG_{\varphi}(s) + \varphi(0)\Big)G_{X-c\theta}(s) - \sum_{i=0}^{m-1} \varphi(i) \sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^{u-m} \\
&- \varphi(0)\sum_{u=m}^{\infty} f(u-m)s^{u-m} \\
&= \Big(sG_{\varphi}(s) + \varphi(0)\Big)G_{X-c\theta}(s) - s^{-m}\sum_{i=1}^{m-1} \varphi(i) \sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^{u} \\
&- \varphi(0)G_{X-c\theta}(s).
\end{aligned}$$

Tuomet paskutinės lygybės abi puses padauginus iš $s^m$ bei atlikus elementarius lygybės pertvarkymus, gauname

$$\Big(sG_{\varphi}(s) + \varphi(0)\Big)\Big(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m\Big) = \varphi(0)s^m G_{X-c\theta}(s) + \sum_{i=1}^{m-1} \varphi(i) \sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^u$$

arba žinodami, jog $G_\varphi(s) = \frac{G_{\mathcal{H}}(s)}{1-s}$, turime

$$\begin{aligned}&\Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)\Big(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m\Big)\\&= (1-s)\Bigg(\varphi(0)s^m G_{X-c\theta}(s) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^u\Bigg).\end{aligned} \tag{13}$$

Kadangi $G_{X-c\theta}(s)$ absoliučiai konverguoja, tai lygybėje (13), kai $G_{X-c\theta}(s) = 1$ ir $s = \alpha$ turime išraišką (11)

$$0 = \varphi(0)\alpha^m + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)\alpha^u,$$

kur $\alpha$ yra $G_{X-c\theta}(s) = 1$ šaknis.

Norėdami įrodyti 3.1 teoremos trečiąją lygybę (12), skaičiuojame lygybės (13) išvestinę pagal $s$

$$\begin{aligned}L_1 + L_2 :&= \left[\frac{d}{ds}\Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)\right]\Big(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m\Big)\\&+ \Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)\left[\frac{d}{ds}\Big(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m\Big)\right]\\&= \frac{d}{ds}\left[(1-s)\Bigg(\varphi(0)s^m G_{X-c\theta}(s) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^u\Bigg)\right] := L_3.\end{aligned} \tag{14}$$

Perėję prie ribos skaičiavimo, kai $\mathbb{E}\mathcal{H} = \infty$ ir $s \to 1^-$ lygybėje (14) bei pasinaudojus 3.3 lema, gauname pirmąją $L_1$ ribą

$$\begin{aligned}\lim_{s\to1^-} L_1 &= \lim_{s\to1^-}\left[\frac{d}{ds}\Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)\right]\Big(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m\Big) = \lim_{s\to1^-}\frac{\Big(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m\Big)}{1/\frac{d}{ds}\Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)}\\&= \lim_{s\to1^-}\frac{\Big(ms^{m-1}G_{X-c\theta}(s) + s^m\frac{d}{ds}G_{X-c\theta}(s) - ms^{m-1}\Big)}{-\frac{d^2}{ds^2}\Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)/\frac{d}{ds}\Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)^2} = 0.\end{aligned}$$

Tuomet randame ir antrąją $L_2$ ribą

$$\begin{aligned}\lim_{s\to1^-} L_2 &= \lim_{s\to1^-}\Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)\left[\frac{d}{ds}\Big(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m\Big)\right]\\&= \lim_{s\to1^-}\Big(sG_{\mathcal{H}}(s) + \varphi(0)\Big)\Big(ms^{m-1}G_{X-c\theta}(s) + s^m\frac{d}{ds}G_{X-c\theta}(s) - ms^{m-1}\Big)\\&= \mathbb{E}(X - c\theta).\end{aligned}$$

Galiausiai turime, jog

$$\lim_{s\to1^-} L_1 + L_2 = \mathbb{E}(X - c\theta).$$

Taip pat randame ir likusią $L_3$ ribą

$$\begin{aligned}
\lim_{s\to 1^-} L_3 = \lim_{s\to 1^-} \frac{d}{ds}\Bigg[(1-s)\Bigg(\varphi(0)s^m G_{X-c\theta}(s) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^u\Bigg)\Bigg] \\
= \lim_{s\to 1^-}\Bigg[-\Bigg(\varphi(0)s^m G_{X-c\theta}(s) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^u\Bigg) \\
+ (1-s)\Bigg(\varphi(0)ms^{m-1}G_{X-c\theta}(s)s^m\frac{d}{ds}G_{X-c\theta}(s) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)us^{u-1}\Bigg)\Bigg] \\
= -\Bigg(\varphi(0) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)\Bigg) = -\Bigg(\varphi(0) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)F(-i-1)\Bigg).
\end{aligned}$$

Tuomet, grįždami prie lygybės (14) ir įsistatę rastas ribas bei padauginę abi lygybės puses iš $(-1)$, gauname lygybę (12)

$$(c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X) = \varphi(0) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)F(-i-1).$$

□

Verta paminėti, jog remiantis lygybėmis (9) ir (10), begalinio laiko išgyvenimo tikimybių generuojanti funkcija yra lygi

$$sG_\varphi(s) + \varphi(0) = \frac{\varphi(0)s^m G_{X-c\theta}(s) + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)s^u}{(s^m G_{X-c\theta}(s) - s^m)}. \tag{15}$$

Apibrėžkime dar vieną lemą apie lygties $G_{X-c\theta}(s) = 1$ šaknų kiekį.

**3.4 Lema.** *Tarkime, jog $s \in \mathbb{C}$. Laikome, jog neneigiamiems, nepriklausomiems sveikiesiems atsitiktiniams dydžiams $X$ ir $c\theta$ galioja $\mathbb{P}(c\theta \leqslant m) = 1$ ir $\mathbb{P}(X - c\theta = -m) = 1$, t.y. $\mathbb{P}(X = 0) > 0$ ir $\mathbb{P}(c\theta = m) > 0$. Tuomet yra lygiai $m-1$ lygties*

$$G_{X-c\theta}(s) = 1$$

*šaknų vienetinio skritulio viduje, t.y. $|s| \leqslant 1, s \neq \{0, 1\}$, įskaitant ir pasikartojančias šaknis.*

*Įrodymas seka iš jau minėto šaltinio [G23] lemos 3.3 įrodymo.*

Toliau apibrėžkime teoremą, kuri leis mums išreikšti pradines išgyvenimo tikimybes sudarant tiesinių lygčių sistemą.

**3.2 Teorema.** *Pažymėkime $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ galimas lygties $G_{X-c\theta}(s) = 1$ šaknis vienetinio skritulio viduje $|s| \leqslant 1$. Tada pagal* (3.1) *teoremą turime tiesinių lygčių sistemą*

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_1^u & \sum\limits_{u=2}^{m-1} f(u-m-2)\alpha_1^u & \dots & f(-m)\alpha_1^{m-1} \\ \alpha_2^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_2^u & \sum\limits_{u=2}^{m-1} f(u-m-2)\alpha_2^u & \dots & f(-m)\alpha_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\ \alpha_{m-1}^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_{m-1}^u & \sum\limits_{u=2}^{m-1} f(u-m-2)\alpha_{m-1}^u & \dots & f(-m)\alpha_{m-1}^{m-1} \\ 1 & F(-2) & F(-3) & \dots & f(-m) \end{pmatrix}$$

$$\times \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \vdots \\ \varphi(m-2) \\ \varphi(m-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X) \end{pmatrix}. \tag{16}$$

*Įrodymas.* Pritaikysime anksčiau gautas lygybes (11) bei (12) ir sudarysime lygčių sistemą. Tuomet, turime

$$\begin{cases} \varphi(0)\alpha_1^m + \sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi(i) \sum\limits_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)\alpha_1^u = 0 \\ \varphi(0)\alpha_2^m + \sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi(i) \sum\limits_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)\alpha_2^u = 0 \\ \vdots \\ \varphi(0)\alpha_{m-1}^m + \sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi(i) \sum\limits_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)\alpha_{m-1}^u = 0 \\ \varphi(0) + \sum\limits_{i=1}^{m-1} \varphi(i)F(-i-1) = (c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X). \end{cases}$$

Gautą lygčių sistemą perrašius matricos pavidalu gauname tiesinių lygčių sistemą (16). Išsprendus sistemą (16) randame pradines begalinio laiko išgyvenimo tikimybes $\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(m-1)$. $\square$

Verta paminėti, jog jeigu pažymėsime sistemą (16) kaip $A\boldsymbol{\varphi} = B$, tai matrica $A$ yra Vandermondo matrica [L17], kurios determinantas $|A|$ yra lygus

$$|A| = \frac{f^{m-1}(-m)}{(-1)^{m+1}} \prod_{j=1}^{m-1} \alpha_j(\alpha_j - 1) \prod_{1 < i \leqslant j \leqslant m-1} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0.$$

Sekančioje lemoje pateiksime Vandermondo matricos determinanto išraiškos įrodymą.

**3.5 Lema.** *Tarkime, kad $A$ yra sistemos* (16) *matrica ir $f^m(-m) = (\mathbb{P}(X - c\theta = -m))^m$. Tuomet jos determinatas yra lygus*

$$|A| = \frac{f^{m-1}(-m)}{(-1)^{m+1}} \prod_{j=1}^{m-1} \alpha_j(\alpha_j - 1) \prod_{1 < i \leqslant j \leqslant m-1} (\alpha_j - \alpha_i).$$

*Taip pat, paskutinės eilutės matricos $A$ minorai yra lygūs:*

$$\begin{aligned}
M_{m,1} &= f^{m-1}(-m)\prod_{i=1}^{m-1}\alpha_i \prod_{1\leqslant i<j\leqslant m-1}(\alpha_j-\alpha_i),\\
M_{m,2} &= f(-m)^{m-1}\prod_{1\leqslant i<j\leqslant m-1}(\alpha_j-\alpha_i)\sum_{1\leqslant j_1<\ldots<j_{m-2}\leqslant m-1}\alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_{m-2}}\\
&\quad+\frac{F(-m+1)}{f(-m)}M_{m,1},\\
M_{m,3} &= f(-m)^{m-1}\prod_{1\leq i<j\leq m-1}(\alpha_j-\alpha_i)\sum_{1\leq j_1<\ldots<j_{m-3}\leq m-1}\alpha_{j_1}\cdots\alpha_{j_{m-3}},\\
&\quad-\frac{F(-m+2)}{f(-m)}M_{m,1}+\frac{F(-m+1)}{f(-m)}M_{m,2},\\
&\ \vdots\\
M_{m,m} &= f(-m)^{m-1}\prod_{1\leq i<j\leq m-1}(\alpha_j-\alpha_i)+(-1)^m\frac{F(-1)}{f(-m)}M_{m,1}\\
&\quad+(-1)^{m+1}\frac{F(-2)}{f(-m)}M_{m,2}+\ldots+(-1)^{2m-1}\frac{F(-m+2)}{f(-m)}M_{m,m-2}\\
&\quad+\frac{F(-m+1)}{f(-m)}M_{m,m-1}.
\end{aligned}$$

*Įrodymas.* Skaičiuokime determinantą

$$|A|=\begin{vmatrix}
\alpha_1^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_1^u & \ldots & f(-m)\alpha_1^{m-1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\alpha_{m-1}^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_{m-1}^u & \ldots & f(-m)\alpha_{m-1}^{m-1}\\
1 & F(-2) & \ldots & f(-m)
\end{vmatrix}.$$

Pirmiausiai iškelkime $f(-m)$ iš paskutinio stulpelio. Tuomet, daugindami paskutinį stulpelį iš $f(-m+1), f(-m+2), ..., f(-2)$ ir atitinkamai atimdami iš atitinkamų stulpelių, gauname

$$|A|=f(-m)\begin{vmatrix}
\alpha_1^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_1^u & \ldots & \alpha_1^{m-1}\\
\vdots & \vdots & \vdots & \vdots\\
\alpha_{m-1}^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_{m-1}^u & \ldots & \alpha_{m-1}^{m-1}\\
1 & F(-2) & \ldots & 1
\end{vmatrix}.$$

Toliau tęsdami tuos pačius veiksmus ir pritaikydami pagrindines determinanto savybes, gauname, jog determinantas $|A|$ yra lygus

$$|A| = f^{m-1}(-m)\begin{vmatrix} \alpha_1^m & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{m-1} \\ \alpha_2^m & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{m-1} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ \alpha_{m-1}^m & \alpha_{m-1} & \dots & \alpha_{m-1}^{m-1} \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{f^{m-1}(-m)}{(-1)^{m+1}}\begin{vmatrix} 0 & \alpha_1(\alpha_1^m - 1) & \dots & \alpha_1^{m-1}(\alpha_1 - 1) \\ 0 & \alpha_2(\alpha_2^m - 1) & \dots & \alpha_2^{m-1}(\alpha_2 - 1) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \alpha_{m-1}(\alpha_{m-1} - 1) & \dots & \alpha_{m-1}^{m-1}(\alpha_{m-1} - 1) \\ 1 & 1 & \dots & 1 \end{vmatrix}$$

$$= \frac{f^{m-1}(-m)}{(-1)^{m+1}}\prod_{j=1}^{m-1}\alpha_j(\alpha_j - 1)\begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{m-2} \\ 1 & \alpha_2 & \dots & \alpha_2^{m-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 1 & \alpha_{m-1} & \dots & \alpha_{m-1}^{m-2} \end{vmatrix}$$

$$= \frac{f^{m-1}(-m)}{(-1)^{m+1}}\prod_{j=1}^{m-1}\alpha_j(\alpha_j - 1)\prod_{1<i\leqslant j\leqslant m-1}(\alpha_j - \alpha_i) \neq 0.$$

Minorų įrodymas seka iš šaltinio [G22] 3 teoremos įrodymo. □

Toliau pateiksime teoremą, kurioje apibrėžiami sistemos (16) sprendiniai - tikslios išgyvenimo tikimybės $\varphi(u)$ reikšmės.

**3.3 Teorema.** *Tarkime, kad* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ *yra lygties* $G_{X-c\theta}(s) = 1$ *šaknys vienetinio skritulio viduje* $|s| \leqslant 1$ ***bei*** $f(-m) = \mathbb{P}(X - c\theta = -m) > 0$ ***ir*** $F(j) = \mathbb{P}(X - c\theta) > 0, j \in \mathbb{Z}$. *Tuomet*

$$\varphi(0) = \frac{\mathbb{E}(X - c\theta)}{(-1)^m}\prod_{i=1}^{m-1}\frac{1}{\alpha_j - 1},$$

$$\varphi(1) = \frac{-\mathbb{E}(X - c\theta)}{f(-m)}\prod_{j=1}^{m-1}\frac{\alpha_j}{\alpha_j - 1},$$

$$\varphi(2) = -\frac{F(-m+1)}{f(-m)}\varphi(1) - \frac{\mathbb{E}(X - c\theta)}{f(-m)}\prod_{j=1}^{m-1}\frac{1}{\alpha_j - 1}\Big(\prod_{j=1}^{m-1}\alpha_j - \sum_{1\leqslant j_1\leqslant \ldots\leqslant j_{m-2}\leqslant m-1}\alpha_{j_1}\ldots\alpha_{j_{m-2}}\Big),$$

$$\varphi(3) = -\frac{F(-m+1)}{f(-m)}\varphi(2) - \frac{F(-m+2)}{f(-m)}\varphi(1) - \frac{\mathbb{E}(X-c\theta)}{f(-m)}\prod_{j=1}^{m-1}\frac{1}{\alpha_j - 1}$$
$$\times\Big(\prod_{j=1}^{m-1}\alpha_j - \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_{m-2}\leqslant m-1}\alpha_{j_1}\ldots\alpha_{j_{m-2}} + \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_{m-3}\leqslant m-1}\alpha_{j_1}\ldots\alpha_{j_{m-3}}\Big),$$
$$\vdots$$
$$\varphi(m) = -\frac{1}{f(-m)}\sum_{i=1}^{m-1}F(-i)\varphi(i) - \frac{\mathbb{E}(X-c\theta)}{f(-m)}\prod_{j=1}^{m-1}\frac{1}{\alpha_j-1}$$
$$\times\Big(\prod_{j=1}^{m-1}\alpha_j - \sum_{1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_{m-2}\leqslant m-1}\alpha_{j_1}\ldots\alpha_{j_{m-2}}$$
$$+\sum_{1\leqslant j_1\leqslant\ldots\leqslant j_{m-3}\leqslant m-1}\alpha_{j_1}\ldots\alpha_{j_{m-3}} + \ldots + (-1)^{m+1}\Big).$$

*ir*

$$\varphi(u) = \frac{1}{f(-m)}\Big(\varphi(u-m) - \sum_{i=1}^{u-1}\varphi(i)f(u-m-i)\Big), \;\; u = m, m+1, ... \tag{17}$$

*Įrodymas.* Pažymėkime $\boldsymbol{\varphi} = (\varphi(0), \varphi(1), ..., \varphi(m-1))^T$. Tuomet, pagal sistemą (16) turime, jog

$$\boldsymbol{\varphi} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} M_{1,1} & -M_{1,2} & \ldots & (-1)^{1+m}M_{1,m} \\ -M_{2,1} & M_{2,2} & \ldots & (-1)^{2+m}M_{2,m} \\ \vdots & \vdots & \ldots & \vdots \\ (-1)^{m+1}M_{m,1} & (-1)^{m+2}M_{m,2} & \ldots & M_{m,m}\end{pmatrix}^T\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ (c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X)\end{pmatrix}$$
$$= \frac{(c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X)}{|A|}\begin{pmatrix}(-1)^{m+1}M_{m,1} \\ (-1)^{m+2}M_{m,2} \\ \vdots \\ M_{m,m}\end{pmatrix}.$$

Iš čia gauname, kad

$$\varphi(i) = \frac{(-1)^{m+i+1}M_{m,i+1}}{|A|}(c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X), \;\; i = 0, 1, ..., m-1.$$

Minorų $M_{m,1}, M_{m,2}, ..., M_{m,m}$ bei determinanto $|A|$ išraiškos pateiktos 3.5 lemoje. Lygybė (17) yra pertvarkytos išraiškos (7) versija. □

**3.6 Lema.** *Tarkime* $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_{m-1}$ *yra lygties* $G_{X-c\theta}(s) = 1$ *kartotinės šaknys srityje* $|s| \leqslant 1$. *Tuomet, modifikuota pagrindinės matricos* (16) *versija pakeitus atitinkamas jos eilutes (išskyrus paskutinę) išvestinėmis lieka neišsigimusi.*

*Įrodymas.* Iš pradžių pažymėkime $n$-tojo laipsnio išvestinę

$$\frac{d^n}{d\alpha^n}\left(\varphi(0)\alpha^m + \sum_{i=1}^{m-1}\varphi(i)\sum_{u=i}^{m-1} f(u-m-i)\alpha^u\right) = 0,$$

visiems $n \in \{0, 1, ..., k-1\}$, kur $k \in \{2, 3, ..., m-1\}, m \geqslant 3$ yra $G_{X-c\theta}(s) = 1$ šaknų kartotinumas.

Tarkime, jog $\alpha_1$ yra antro kartotinumo šaknis. Tuomet egzistuoja artimas nuliui skaičius $\delta \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$. Todėl norėdami išvengti vienodų eilučių, matricos (16) antrą eilutę pakeičiame išvestine ir gauname

$$\begin{pmatrix}
\alpha_1^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_1^u & \sum\limits_{u=2}^{m-1} f(u-m-2)\alpha_1^u & \dots & f(-m)\alpha_1^{m-1} \\
(\alpha_2+\delta)^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)(\alpha_2+\delta)^u & \sum\limits_{u=2}^{m-1} f(u-m-2)(\alpha_2+\delta)^u & \dots & f(-m)(\alpha_2+\delta)^{m-1} \\
\vdots & \vdots & \dots & \vdots & \\
\alpha_{m-1}^m & \sum\limits_{u=1}^{m-1} f(u-m-1)\alpha_{m-1}^u & \sum\limits_{u=2}^{m-1} f(u-m-2)\alpha_{m-1}^u & \dots & f(-m)\alpha_{m-1}^{m-1} \\
1 & F(-2) & F(-3) & \dots & f(-m)
\end{pmatrix}$$

□

Tuomet, iš pirmosios matricos eilutės atėmus antrąją eilutę ir po atėmimo pirmąją eilutę padalinus iš $\delta$, kai $\delta \to 0$, gauname norimą eilutės pakeitimą išvestine.

# 4. Praktiniai pavyzdžiai

Šiame skyriuje pateiksime penkis praktinių skaičiavimų pavyzdžius, kuriuose skaičiuojama begalinio laiko išgyvenimo tikimybė remiantis ankstesniame skyriuje pristatyta teorija. Iš pradžių apžvelgsime 1 ir 2 pavyzdžius iš straipsnio [G23], kad įsitikintume, jog mūsų aprašytas algoritmas veikia ir gaunamos išgyvenimo tikimybės reikšmės sutampa su apskaičiuotomis minėtame straipsnyje. Skaičiavimai atlikti naudojantis R programavimo kalba.

**4.1 Pavyzdys.** (Remiantis 1 pavyzdžiu iš [G23]). Tarkime, kad diskretaus laiko rizikos modelį (1) generuojančių atsitiktinių dydžių $X$ ir $\theta$ pasiskirstymas yra

$$\mathbb{P}(X = 0) = \mathbb{P}(X = 1) = \frac{1}{2}, \ \ X \stackrel{d}{=} \theta$$

ir premijų surinkimo greitis $c = 2$.

Iš pradžių patikrinsime ar yra tenkinama grynojo pelno sąlygą (5)

$$\mathbb{E}(2\theta - X) = 2\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X = \frac{1}{2} > 0.$$

Tuomet, atsitiktinio dydžio $X - 2\theta$ generuojanti funkcija

$$G_{X-2\theta}(s) = G_X(s)G_{2\theta}(1/s) = \left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2s^2}\right) = 1$$

ir išsprendę lygtį $|s| \leqslant 1, s \neq 1$,

$$\left(\frac{1}{2} + \frac{s}{2}\right)\left(\frac{1}{2} + \frac{1}{2s^2}\right) = 1,$$

gauname šaknį $\alpha := s = 1 - \sqrt{2}$, $\alpha \in (-1, 0)$.

Tada, remiantis 3.2 teorema ir pasinaudojus (16) sistema, turime

$$\begin{pmatrix} \alpha^2 & f(-2)\alpha \\ 1 & f(-2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 2\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X \end{pmatrix}.$$

Tuomet, išsprendę lygčių sistemą

$$\begin{cases} \alpha^2\varphi(0) + f(-2)\alpha\varphi(1) = 0 \\ \varphi(0) + f(-2)\varphi(1) = 2\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X \end{cases}$$

randame pradines išgyvenimo tikimybės reikšmes $(\varphi(0), \varphi(1)) = (0.3536, 0.5858)$, čia

$$\varphi(0) = \frac{(\mathbb{E}X - 2\mathbb{E}\theta)}{(\alpha - 1)},$$

$$\varphi(1) = \frac{\alpha(\mathbb{E}X - 2\mathbb{E}\theta)}{(\alpha - 1)f(-2)}.$$

Likusias išgyvenimo tikimybės reikšmes generuoja lygtis (17)

$$\varphi(u) = \frac{1}{f(-2)} \left( \varphi(u-2) - \sum_{i=1}^{u-1} \varphi(i) f(u-2-i) \right), u \geqslant 2,$$

arba remiantis 3.1 teorema, galime pasinaudoti generuojančiąja funkcija

$$(sG_\varphi(s) + \varphi(0)) = \frac{\frac{\sqrt{2}}{4}(s^3+s^2+s+1) + (2-\sqrt{2})s}{s^3 - 3s^2 + s + 1}, s \neq \alpha,$$

ir rasti likusias išgyvenimo tikimybes

$$\varphi(u+1) = \frac{1}{u!} \lim_{s \to 0} \frac{d^u}{ds^u} (sG_\varphi(s) + \varphi(0)), u = 0, 1, 2, ...$$

Gautos begalinio laiko išgyvenimo tikimybės pateiktos žemiau esančioje 1 lentelėje.

| | $u$ | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\infty$ | 0.3536 | 0.5858 | 0.8284 | 0.9289 | 0.9706 | 0.9878 | 0.9949 | 0.9991 | 0.9996 | 1 | 1 |

1 lentelė. Begalinio laiko išgyvenimo tikimybė 4.1 pavyzdžio modeliui

Matome, jog gavome išgyvenimo tikimybės reikšmes sutampančias su straipsnyje [G23] apskaičiuotomis tikimybėmis. Taip pat iš 1 lentelės galime pastebėti, jog didėjant pradiniam turtui $u$, išgyvenimo tikimybės riba (6) artėja prie 1.

**4.2 Pavyzdys.** (Remiantis 2 pavyzdžiu iš [G23]) Tarkime, jog $p = 1/2$,

$$\mathbb{P}(X = k) = (1-p)^k p, k \in \mathbb{N}_0$$

ir

$$\mathbb{P}(c\theta = k) = \binom{4}{k} p^k (1-p)^{4-k}, k = 0, 1, ..., 4.$$

Analogiškai, kaip ir pirmame uždavinyje iš pradžių tikrininame grynojo pelno sąlygą

$$\mathbb{E}(c\theta - X) = c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X = 1 > 0.$$

Tuomet, užsirašę atsitiktinio dydžio $X - c\theta$ generuojančią funkciją ir išsprendę lygtį

$$G_{X-c\theta}(s) = G_X(s) G_{c\theta}(1/s) = \left( \frac{p}{1-(1-p)s} \right) \left( 1 - p + \frac{p}{s} \right)^4 = 1,$$

gauname tris šaknis $\alpha_j \in (-1, 0), j = 1, 2, 3$ vienetinio skritulio viduje:

$$\alpha_1 = -0.154340 + 0.3421147i$$
$$\alpha_2 = -0.154340 - 0.3421147i$$
$$\alpha_3 = -0.289014 + 0.0000000i,$$

kur $i=\sqrt{-1}$.

Tada, pasinaudojus 3.1 teorema ir išraiška (16), turime

$$\begin{pmatrix} \alpha_1^4 & f(-4)\alpha_1+f(-3)\alpha_1^2+f(-2)\alpha_1^3 & f(-4)\alpha_1^2+f(-3)\alpha_1^3 & f(-4)\alpha_1^3 \\ \alpha_2^4 & f(-4)\alpha_2+f(-3)\alpha_2^2+f(-2)\alpha_2^3 & f(-4)\alpha_2^2+f(-3)\alpha_2^3 & f(-4)\alpha_2^3 \\ \alpha_3^4 & f(-4)\alpha_3+f(-3)\alpha_3^2+f(-2)\alpha_3^3 & f(-4)\alpha_3^2+f(-3)\alpha_3^3 & f(-4)\alpha_3^3 \\ 1 & F(-2) & F(-3) & f(-4) \end{pmatrix}$$
$$\times \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ (c\mathbb{E}\theta-\mathbb{E}X) \end{pmatrix}.$$

Išsprendus lygčių sistemą, gauname pradines išgyvenimo tikimybės reikšmes

$$\begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \\ \varphi(3) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0.5352 \\ 0.6972 \\ 0.8028 \\ 0.8715 \end{pmatrix},$$

čia, pagal 3.3 teorema:

$$\varphi(0) = -\prod_{j=1}^{3}\frac{1}{\alpha_j-1} = -\frac{1}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)(\alpha_3-1)},$$
$$\varphi(1) = 32\prod_{j=1}^{3}\frac{\alpha_j}{\alpha_j-1} = 32\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)(\alpha_3-1)},$$
$$\varphi(2) = 32\left(-\frac{11}{64}\varphi(1)+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_3}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)(\alpha_3-1)}\right),$$
$$\varphi(3) = 32\left(-\frac{11}{64}\varphi(2)-\frac{55}{128}\varphi(1)+\frac{\alpha_1\alpha_2\alpha_3-\alpha_1\alpha_2-\alpha_1\alpha_3-\alpha_2\alpha_3+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3}{(\alpha_1-1)(\alpha_2-1)(\alpha_3-1)}\right).$$

Likusias išgyvenimo tikimybės $\varphi(u)$, kai $u \geqslant 4$ generuoja lygtis (17)

$$\varphi(u) = \frac{1}{f(-4)}\left(\varphi(u-4)-\sum_{i=1}^{u-1}\varphi(i)f(u-4-i)\right).$$

Gautos begalinio laiko išgyvenimo tikimybės reikšmės pateiktos 2 lentelėje.

Šiuo atveju, taip pat matome, jog apskaičiuotos išgyvenimo tikimybės reikšmės sutampa su gautomis straipsnyje [G23].

| | $u$ | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 10 | 15 | 20 |
| $\infty$ | 0.5352 | 0.6972 | 0.8028 | 0.8715 | 0.9163 | 0.9455 | 0.9936 | 0.9993 | 1 |

2 lentelė. Begalinio laiko išgyvenimo tikimybė 4.2 pavyzdžio modeliui

**4.3 Pavyzdys.** Sakykime, jog diskretaus laiko rizikos modelį generuoja atsitiktinis dydis $X$ su skirstiniu

| $X$ | $0$ | $1$ | $2$ | $3$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $1/64$ | $3/16$ | $9/16$ | $15/64$ |

bei tarplaikis $\theta$ su skirstiniu

| $\theta$ | $1$ | $2$ | $3$ | $4$ |
|---|---|---|---|---|
| $\mathbb{P}$ | $21/32$ | $3/16$ | $3/32$ | $1/16$ |

,

premijų surinkimo greitis $c = 2$. Skaičiavimus atliksime remiantis aukščiau apžvelgtais pavyzdžiais.

Grynojo pelno sąlyga yra tenkinama

$$\mathbb{E}(2\theta - X) = 2\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X = \frac{71}{64} > 0.$$

Užsirašę atsitiktinio dydžio $X - 2\theta$ generuojančią funkciją ir išsprendę lygtį

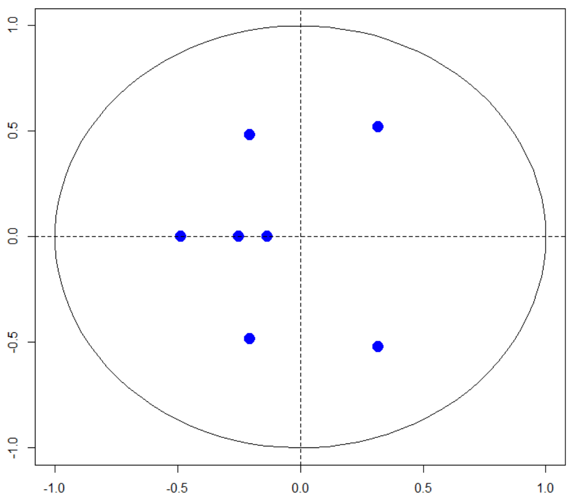
$$G_{X-2\theta}(s) = \left(\frac{1}{64} + \frac{3}{16}s + \frac{9}{16}s^2 + \frac{15}{64}s^3\right)\left(\frac{21}{32s^2} + \frac{3}{16s^4} + \frac{3}{32s^6} + \frac{1}{16s^8}\right) = 1,$$

gauname septynias šaknis $\alpha_j \in (-1, 0), j = 1, 2, ..., 7$:

$$\begin{aligned}
&\alpha_1 = -0.4880568 + 0.0000000i, \quad \alpha_2 = -0.2494437 + 0.0000000i,\\
&\alpha_3 = -0.2063014 - 0.4837483i, \quad \alpha_4 = -0.2063014 + 0.4837483i,\\
&\alpha_5 = -0.1347061 + 0.0000000i, \quad \alpha_6 = 0.3185867 - 0.5214133i,\\
&\alpha_7 = 0.3185867 + 0.5214133i.
\end{aligned}$$

Žemiau esantis 1 pav. vizualiai parodo lygties $G_{X-2\theta}(s) = 1$ šaknų išsidėstymą vienetinio skritulio viduje.

Tuomet, kaip ir ankstesniuose pavyzdžiuose, pasinaudojus 3.1 teorema ir išraiška (16), gauname pradines išgyvenimo tikimybes. Likusias išgyvenimo tikimybes $\varphi(u)$, kai $u \geqslant 8$ generuoja rekursinė lygtis (17).




1 pav. Lygties $G_{X-2\theta}(s) = 1$ šaknų išsidėstymas vienetinio skritulio viduje.

Begalinio laiko išgyvenimo tikimybės reikšmės pateiktos 3 lentelėje.

| | *u* | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $T$ | 0 | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | 9 | 10 |
| $\infty$ | 0.4229 | 0.7333 | 0.9289 | 0.9810 | 0.9949 | 0.9987 | 0.9996 | 0.9999 | 1 | 1 | 1 |

3 lentelė. Begalinio laiko išgyvenimo tikimybė 4.3 pavyzdžio modeliui

**4.4 Pavyzdys.** Tarkime, kad diskretaus laiko modelį generuojantys atsitiktiniai dydžiai $X$ ir $c\theta$ turi tokius skirstinius:

$$\begin{array}{|c|c|c|} \hline X & 0 & 1 \\ \hline \mathbb{P} & 1/5 & 4/5 \\ \hline \end{array}, \quad \begin{array}{|c|c|c|} \hline c\theta & 1 & 3 \\ \hline \mathbb{P} & 5/9 & 4/9 \\ \hline \end{array}.$$

Tokiu pačiu skaičiavimo principu, kaip ir ankstesniuose pavyzdžiuose tikriname grynojo pelno sąlygą bei randame lygties $G_{X-c\theta}(s) = 1$ šaknis.

Grynojo pelno sąlyga yra tenkinama $\mathbb{E}(c\theta - X) = c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X = 49/45 > 0$.

Tuomet turime

$$\left(\frac{5}{9s} + \frac{4}{9s^3}\right)\left(\frac{1}{5} + \frac{4}{5}s\right) = 1.$$

Išsprendus aukščiau pateiktą lygtį, gauname antro laipsnio kartotinę šaknį, kuri lygi

$$\alpha := s = -2/5.$$

Tada remiantis 3.6 lema, antrąją matricos eilutę galime pakeisti pirmosios eilutės išvestine pagal $\alpha$

$$\begin{pmatrix} \alpha^3 & f(-3)\alpha + f(-2)\alpha^2 & f(-3)\alpha^2 \\ 3\alpha^2 & f(-3) + 2f(-2)\alpha & 2f(-3)\alpha \\ 1 & F(-2) & f(-3) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \varphi(0) \\ \varphi(1) \\ \varphi(2) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ c\mathbb{E}\theta - \mathbb{E}X \end{pmatrix}.$$

Išsprendus lygčių sistemą turime

$$\varphi(u) = \begin{pmatrix} 0.5556 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \quad u = 0, 1, 2.$$

Tai reiškia, jog $\varphi(1), \varphi(2), ... = 1$. O tuo tarpu, pagal rekursinę lygtį (7), turime

$$\varphi(0) = \sum_{i=1}^{3} \varphi(i) f(-i) = f(-1) + f(-2) + f(-3) = 0.5556.$$

**4.5 Pavyzdys.** Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai $X$ ir $c\theta$ yra pasiskirstę pagal Puasono skirstinius, atitinkamai su parametrais $\lambda = 1$ ir $\lambda = 5/3$ bei $r = 0$, t.y.
$X \sim \mathcal{P}(1, 0)$ ir $c\theta \sim \mathcal{P}(5/3, 0)$,

$$\mathbb{P}(X = l) = \frac{e^{-1}}{l!},$$

$$\mathbb{P}(c\theta = l) = \frac{e^{-\frac{5}{3}}(\frac{5}{3})^l}{l!}, \ \ l = 0,\ 1, \ldots$$

Šiame pavyzdyje pabandysime parodyti, jog atsitiktinio dydžio $c\theta$ pasiskirstymas gali būti sutrumpintas.

Remiantis išraiška (4) apibrėžkime du naujus atsitiktinius dydžius $c\theta_{15}$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(c\theta_{15} = l) = \mathbb{P}(c\theta = l), \ \ l \in \{0, 1, ..., 14\} \\ \mathbb{P}(c\theta_{15} = 15) = \mathbb{P}(c\theta \geqslant 15) \end{cases}$$

ir $c\theta_{20}$

$$\begin{cases} \mathbb{P}(c\theta_{20} = l) = \mathbb{P}(c\theta = l), \ \ l \in \{0, 1, ..., 19\} \\ \mathbb{P}(c\theta_{20} = 20) = \mathbb{P}(c\theta \geqslant 20). \end{cases}$$

Grynojo pelno sąlygos yra tenkinamos

$$\mathbb{E}(X - c\theta) = 1 - \frac{5}{3} = -\frac{2}{3} < 0,$$

$$\mathbb{E}(X - c\theta_{15}) = -0.66666666662741 < 0,$$

$$\mathbb{E}(X - c\theta_{20}) = -0.6666666666666714 < 0.$$

Tuomet, užsirašę atsitiktinio dydžio $X - c\theta_{15}$ generuojančios funkcijos lygtį ir ją išsprendus

$$G_{X-c\theta_{15}}(s) = e^{s-1} \left( \sum_{l=0}^{14} \frac{\mathbb{P}(c\theta = l)}{s^l} + \frac{\mathbb{P}(c\theta \geqslant 15)}{s^{15}} \right) = 1$$

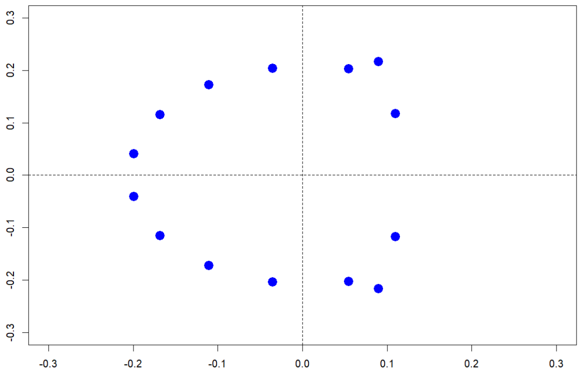
gaunąme 14 šaknų vienetinio skritulio viduje.

Analogiškai išsprendę atsitiktinio dydžio $X - c\theta_{20}$ lygtį

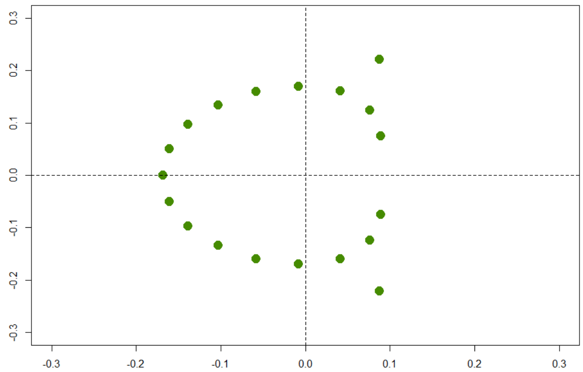
$$G_{X-c\theta_{20}}(s) = e^{s-1}\left(\sum_{l=0}^{19}\frac{\mathbb{P}(c\theta = l)}{s^l} + \frac{\mathbb{P}(c\theta \geqslant 20)}{s^{20}}\right) = 1$$

gauname 19 šaknų vienetinio skritulio viduje.

Žemiau esantys 2 pav. ir 3 pav. parodo gautų šaknų išsidėstymus vienetinio skritulio viduje.




2 pav. Šaknų išsidėstymas, kai $m = 15$.




3 pav. Šaknų išsidėstymas, kai $m = 20$.

Tuomet remiantis 3.3 teorema gauname begalinio laiko išgyvenimo tikimybes $\varphi_{15}(u)$ ir $\varphi_{20}(u)$, kai $u \in \mathbb{N}_0$. Gautos reikšmės pateiktos 4 lentelėje.

| $u$ | $\varphi_{15}(u)$ | $u$ | $\varphi_{20}(u)$ |
|---|---|---|---|
| 0 | 0.3622625593415874 | 0 | 0.3622625593415874 |
| 1 | 0.5634729365319756 | 1 | 0.5634730319802156 |
| 2 | 0.7265010503324136 | 2 | 0.7265013315518338 |
| 3 | 0.834586195013735 | 3 | 0.834582014185472 |
| 4 | 0.900749635891657 | 4 | 0.900774264267056 |
| 5 | 0.94048640998335 | 5 | 0.940162117361979 |
| 6 | 0.964291381005751 | 6 | 0.964512328020646 |
| 7 | 0.978052991471486 | 7 | 0.988049385836348 |
| 8 | 0.988957665511407 | 8 | 0.990625346079469 |

4 lentelė. Begalinio laiko išgyvenimo tikimybė, kai $m = 15$ ir $m = 20$.

Iš lentelėje pateiktų begalinio laiko išgyvenimo tikimybės reikšmių matome, jog atsitiktinio dydžio $c\theta$ pasiskirstymo sutrumpinimas neturi reikšmingos įtakos, nes gautos reikšmės abiem atvejais yra labai panašios.

# 5. Išvados

Šiame magistro baigiamajame darbe išnagrinėtas diskretaus laiko rizikos atstatymo modelis. Suformuluotos teoremos ir pateikti įrodymai, kuriais remiantis apibrėžtos tikslios begalinio laiko išgyvenimo tikimybės išraiškos. Apžvelgtas begalinio laiko išgyvenimo tikimybės apskaičiavimo metodas naudojantis generuojančiomis funkcijomis, kai yra tenkinama grynojo pelno sąlyga. Skaičiavimo rezultatai, gauti dviejuose pirmuose pavyzdžiuose, patvirtina, jog baigiamajame darbe apžvelgtas skaičiavimo algoritmas veikia - gauti rezultatai sutampa su kitų autorių gautais rezultatais. Taip pat, 4 skyriaus skaičiavimo rezultatai, patvirtina, jog didėjant pradiniam turtui, išgyvenimo tikimybė artėja prie vieneto. Praktiniuose pavyzdžiuose begalinio laiko išgyvenimo tikimybės skaitinės reikšmės buvo apskaičiuotos naudojant R programavimo kalbą skirtingiems žalų skirstiniams.

Ateityje būtų galima pratęsti pradėtą darbą - pritaikyti apžvelgtą algoritmą ir kitoms diskretaus laiko rizikos modelio modifikacijoms.

# Literatūros šaltiniai


[A57] E. S. Andersen "On the collective theory of risk in case of contagion between the claims". Trans. Xvth Int. Actuar. 1957, 2, 219–229.

[L17] K. Lundengård "Generalized Vandermonde matrices and determinants in electromagnetic compatibility". 2017.

[C30] H. Cramér. "On the mathematical theory of risk". Skandia Jubilee Volume, Stockholm, 1930.

[G23] A. Grigutis "On the exact survival probability by setting discrete random variables in E. Sparre Andersen's model ". Rankraštis, 2023. (https://arxiv.org/pdf/2306.16897v1.pdf)

[GKJ23] A. Grigutis, A. Karbonskis, J. Šiaulys "Ruin probability for renewal risk models with neutral net profit condition". Rankraštis, 2023. (https://arxiv.org/pdf/2306.01502.pdf)

[GJJ22] A. Grigutis, J. Jankauskas, J. Šiaulys "Multi seasonal discrete time risk model revisited". Rankraštis, 2022. (https://arxiv.org/pdf/2207.03196.pdf)

[G22] A. Grigutis "Exact expression of ultimate time survival probability in homogeneous discrete-time risk model". Rankraštis, 2022. (https://doi.org/10.3934/math.2023260)

# Priedai

Pavyzdžiuose naudojami R paketai: „polynom“ ir „memoise“. R paketas „polynom“ suteikia galimybę atlikti polinomų manipuliacijas, o R paketas „memoise“ pagreitina skaičiavimus, kadangi atmintyje išsaugo skaičiavimo rezultatus.

#### 4.1 PAVYZDŽIO KODAS

```
library(memoise)
library(polynom)

m=2
E_m<-(2*((0*1/2)+1*1/2))-(0*1/2+1*1/2)

# a.d. X pasiskirstymo funkcija
x<-function(k){
  if (k==0){
    return(1/2)}
  if (k==1){
    return(1/2)}
  else
    return(0)
  }

# a.d. Theta pasiskirstymo funkcija
Theta<-x

lygtis<-function(k){
  l<-c(1)
  if (k!=1){
    for (i in 1:(k-1)){
      l<-c(l,0)}}
  l<-c(l,1,-3,1)
  return(polynomial(l))
  print(l)
}

# alpha reikšmes
s<-solve(lygtis(1))
alpha<-c()
for (i in 1:length(s)){
  if (abs(s[i])<1){
    alpha<-c(alpha,s[i])}}

# tikimybių  funkcijos
f<-function(k,n){
  suma=0
  for (i in (0:1)){
    for (j in (0:1)){
      if (j-(2*i)==n){
        suma=suma+(Theta(i)*x(j))}}}
  return (suma)
}

F_didysis<-function(m,n){
  suma=0
  for (i in (0:1)){
    for (j in (0:1)){
      if ((j-(2*i)==n) | (j-(2*i)<n)){
        suma=suma+(Theta(i)*x(j))}}}
```

```
  return (suma)
}

# susidarau matricą
f1<-function(m){
  A<-c()
  for (r in 0:(m-1)){
    for (i in 1:(m-1)){
      if (r==0){
        rez=alpha[i]^m
        A<-c(A,rez)
        print(A)
      }
      else{
        suma=0
        rez=0
        for (j in 1:(m-1)){
          suma=f(m,(j-m-r))*alpha[i]^(j)
          rez=rez+suma
        }
        A<-c(A,rez)
        print(A)
      }
    }
    suma=0
    rez=0
    for (t in 1:(m-1)){
      if (r==0){
        A<-c(A,1)
      }
      else{
        suma=F_didysis(m,-t-1)
        rez=suma
        A<-c(A,rez)}
    }

    M<-matrix(A, nrow=m, ncol=m)
  }
  return(M)
}
MA<-f1(m)

f2<-function(k){
  B<-c()
  for (i in 1:(k-1)){
    B<-c(B,0)
  }
  B<-c(B,1/2)
  M<-matrix(B, nrow=k, ncol=1)
  return(M)
}
MB<-f2(m)

# phi reikšmės
atvirkstine<-solve(MA)
phi_i<-Mod(atvirkstine%*%MB)


# likusios begalinio laiko išgyvenimo tikimybės reikšmės
phi_inf<-memoise(function(m,u){
  if (u==0){
    return(phi_i[1]) }
```

```
  if (u>0 & u<=m-1){
    return((phi_i[u+1]))
  }
  else{
    suma=0
    rez=0
    for (i in 1:(u-1)){
      suma=phi_inf(m,i)*f(m,(u-m-i))
      rez=rez+suma
    }
    return((1/f(m,-m))*(phi_inf(m,u-2)-rez))
  }
})

phi_inf(m,4)


visos_reiksmes = NULL
for (u in 0:15) {
  visos_reiksmes[u + 1] = c(round(phi_inf(m,u), 4))
}
visos_reiksmes
```

#### 4.2 PAVYZDŽIO KODAS

```
p<-1/2
m=4

#  a. d. X ir cTheta pasiskirstymo funkcijos
x<-function(k){
  return(p*(((1-p)**k)))}

cTheta<-function(k){
  return(
    (factorial(4)/(factorial(k)*factorial(4-k)))
    *(p**k)*((1-p)**(4-k))
  )}

# tikimybių funkcijos
f<-function(m,n){
  suma=0
  for (i in (0:4)){
    for (j in (0:100)){
      if (j-i==n){
        suma=suma+(cTheta(i)*x(j))}}}
  return (suma)
}

F_didysis<-function(m,n){
  suma=0
  for (i in (0:4)){
    for (j in (0:1000)){
      if ((j-i==n) | (j-i<n)){
        suma=suma+(cTheta(i)*x(j))}}}
  return (suma)
  }
```

```
# alpha reikšmių ieškojimas
lygtis<-function(k){
  l<-c(1)
  if (k!=1){
    for (i in 1:(k-1)){
      l<-c(l,0)}}
  l<-c(l,4,6,4,-31,16)
  return(polynomial(l))
  print(l)
}

s<-solve(lygtis(1))
alpha<-c()
for (i in 1:length(s)){
  if (abs(s[i])<1){
    alpha<-c(alpha,s[i])}
}
alpha<-sort(alpha, decreasing = TRUE)
alpha<-alpha[-c(1:1)]

# susidarau matricą
f1<-function(m){
  A<-c()
    for (i in 1:(m-1)){
      A<-c(A,alpha[i]^m)
      for (j in 1:(m-1)){
        suma=0
        rez=0
        for (k in j:(m-1)){
          suma=f(m,(k-m-j))*alpha[i]^(k)
          rez=rez+suma
        }
        A<-c(A,rez)
      }
    }
    A<-c(A,1)
    for (b in 1:(m-1)){
      rez=F_didysis(m,-b-1)
      A<-c(A,rez)
    }
    M<-matrix(A, nrow=m, ncol=m)
  return(M)
}

MA<-f1(m)
# transponuoju matrica
MA<-t(MA)

f2<-function(k){
  B<-c()
  for (i in 1:(k-1)){
    B<-c(B,0)
  }
  B<-c(B,1)
  M<-matrix(B, nrow=k, ncol=1)
  return(M)
}
MB<-f2(m)

# phi reikšmės
atvirkstine<-solve(MA)
phi_i<-Mod(atvirkstine%*%MB)
```

```
# likusios begalinio laiko išgyvenimo tikimybės reikšmės
phi_inf<-memoise(function(m,u){
  if (u==0){
    return(phi_i[1]) }

  if (u>0 & u<=m-1){
    return((phi_i[u+1]))
  }
  else{
    suma=0
    rez=0
    for (i in 1:(u-1)){
      suma=phi_inf(m,i)*f(m,(u-m-i))
      rez=rez+suma
    }
    return((1/f(m,-m))*(phi_inf(m,u-m)-rez))
  }
})

visos_reiksmes2 = NULL
for (u in 0:20) {
  visos_reiksmes2[u + 1] = c(round(phi_inf(m,u), 4))
}
```

### 4.3 PAVYZDŽIO KODAS

```
E_m<-(2*((1*21/32)+2*6/32+3*3/32+4*2/32))-(0*1/64+1*12/64+2*36/64+3*15/64)
m=8

# a. d. X ir Theta pasiskirstymo funkcijos
x<-function(k){
  if (k==0){
    return(1/64)}
  if (k==1){
    return(12/64)}
  if (k==2){
    return(36/64)}
  if (k==3){
    return(15/64)}
  else
    return(0)}

Theta<-function(k){
  if (k==1){
    return(21/32)}
  if (k==2){
    return(6/32)}
  if (k==3){
    return(3/32)}
  if (k==4){
    return(2/32)}
  else
    return(0)}

# alpha reikšmių ieškojimas
lygtis<-function(k){
  l<-c(2)
  if (k!=1){
    for (i in 1:(k-1)){
      l<-c(l,0)
```

```
    }
  }
  l<-c(1,24,75,66,114,117,237,342,-1292,315)
  return(polynomial(l))
  print(l)
}

s<-solve(lygtis(1))

# alpha reikšmės
alpha<-c()
for (i in 1:length(s)){
  if (abs(s[i])<1){
    alpha<-c(alpha,s[i])}}

alpha <- head(alpha, -1)

# tikimybių funkcijos
f<-function(k,n){
  suma=0
  for (i in (1:4)){
    for (j in (0:3)){
      if (j-(2*i)==n){
        suma=suma+(Theta(i)*x(j))}}}
  return (suma)
}

F_didysis<-function(m,n){
  suma=0
  for (i in (1:4)){
    for (j in (0:3)){
      if ((j-(2*i)==n) | (j-(2*i)<n)){
        suma=suma+(Theta(i)*x(j))}}}
  return (suma)
}

# susidarau matricą
f1<-function(m){
  A<-c()
  for (i in 1:(m-1)){
    A<-c(A,alpha[i]^m)
    for (j in 1:(m-1)){
      suma=0
      rez=0
      for (k in j:(m-1)){
        suma=f(m,(k-m-j))*alpha[i]^(k)
        rez=rez+suma
      }
      A<-c(A,rez)
    }
  }
  A<-c(A,1)
  for (b in 1:(m-1)){
    rez=F_didysis(m,-b-1)
    A<-c(A,rez)
  }
  M<-matrix(A, nrow=m, ncol=m)
  return(M)
}

MA<-f1(m)
# transponuoju matricą
```

```
MA<-t(MA)

f2<-function(k){
  B<-c()
  for (i in 1:(k-1)){
    B<-c(B,0)
  }
  B<-c(B,E_m)
  M<-matrix(B, nrow=k, ncol=1)
  return(M)
}
MB<-f2(m)

# phi reikšmės
atvirkstine<-solve(MA)
phi_i<-Mod(atvirkstine%*%MB)

# likusios begalinio laiko išgyvenimo tikimybės reikšmės
phi_inf<-memoise(function(m,u){
  if (u==0){
    return(phi_i[1]) }

  if (u>0 & u<=m-1){
    return((phi_i[u+1]))
  }
  else{
    suma=0
    rez=0
    for (i in 1:(u-1)){
      suma=phi_inf(m,i)*f(m,(u-m-i))
      rez=rez+suma
    }
    return((1/f(m,-m))*(phi_inf(m,u-m)-rez))
  }
})

visos_reiksmes3 = NULL
for (u in 0:15) {
  visos_reiksmes3[u + 1] = c(round(phi_inf(m,u), 4))
}

# šaknų išsidėstymas grafike
plot(Re(alpha), Im(alpha), pch = 19, col = "blue", cex = 2,
     xlim = c(-1, 1), ylim = c(-1, 1), xlab = "", ylab = "")
ilgis <- seq(0, 2 * pi, length.out = 100)
x_circle <- cos(ilgis)
y_circle <- sin(ilgis)
lines(x_circle, y_circle, col = "black", lty = 1)
abline(h = 0, col = "black", lty = 2)
abline(v = 0, col = "black", lty = 2)
```

**4.4 PAVYZDŽIO KODAS**

```
m=3
E<-((1*5/9)+(3*4/9))-((0*1/5)+(1*4/5))

# a. d. X pasiskirstymo funkcija
x<-function(k){
  if (k==0){
    return(0.2)
  }
```

```
  if (k==1){
    return(0.8)
  }
  else
    return(0)}

# a. d. cTheta pasiskirstymo funkcija
cTheta<-function(k){
  if (k==1){
    return(5/9)
  }
  if (k==3){
    return(4/9)
  }
  else
    return(0)}

# alpha reikšmių ieškojimas
lygtis<-function(k){
  l<-c(-4)
  if (k!=1){
    for (i in 1:(k-1)){
      l<-c(l,0)
    }
  }
  l<-c(l,-16,-5,25)
  return(polynomial(l))
  print(l)
}

s<-solve(lygtis(1))
alpha<-c()
for (i in 1:length(s)){
  if (abs(s[i])<1){
    alpha<-c(alpha,s[i])}}

# tikimybių funkcijos
f<-function(m,n){
  suma=0
  for (i in (0:3)){
    for (j in (0:1)){
      if (j-i==n){
        suma=suma+(cTheta(i)*x(j))
      }
    }
  }
  return (suma)
}

F_didysis<-function(m,n){
  suma=0
  for (i in (0:3)){
    for (j in (0:1)){
      if ((j-i==n) | (j-i<n)){
        suma=suma+(cTheta(i)*x(j))}}}
  return (suma)
}
# susidarau matricą
f1<-function(m){
  A<-c()
  for (i in 1:(m-1)){
    if (i==1){
```

```
      A<-c(A,alpha[i]^m)
      for (j in 1:(m-1)){
        suma=0
        rez=0
        for (k in j:(m-1)){
          suma=f(m,(k-m-j))*alpha[i]^(k)
          rez=rez+suma
        }
        A<-c(A,rez)
      }
    }
    if (i==2){
      print(A)
      A<-c(A,(m*alpha[i-1]^(m-1)))
      d1<-(f(m,(-m))+(2*(f(m,(-m+1)))*alpha[1]))
      d2<-2*(f(m,(-m)))*alpha[1]
      A<-c(A,d1,d2)
    }
  }

  A<-c(A,1)
  for (b in 1:(m-1)){
    rez=F_didysis(m,-b-1)
    A<-c(A,rez)
  }
  M<-matrix(A, nrow=m, ncol=m)
  return(M)
}

MA<-f1(m)
# transponuoju matrica
MA2<-t(MA)


f2<-function(k){
  B<-c()
  for (i in 1:(k-1)){
    B<-c(B,0)
  }
  B<-c(B,49/45)
  M<-matrix(B, nrow=k, ncol=1)
  return(M)
}
MB<-f2(m)

# phi reikšmės
atvirkstine<-solve(MA2)
phi_i<-Mod(atvirkstine%*%MB)
```

### 4.5 PAVYZDŽIO KODAS

```
# parametrai
m=20
l1=1
l2=5/3

# vidurkis
Em=l1-l2

X <- c(sapply(0:(m-1), function(i) {dpois(i, lambda = l1)}), 1 - ppois(m-1, lambda = l1))

L <- c(sapply(0:(m-1), function(i) {dpois(i, lambda = l2)}), 1 - ppois(m-1, lambda = l2))
```

```
# tikimybių funkcijos
fm<-function(m,n){
  suma=0
  for (i in (0:m)){
    for (j in (0:m)){
      if (j-i==n){
        suma=suma+(L[i+1]*X[j+1])}}}
  return (suma)
}

F_didysis<-function(m,n){
  suma=0
  for (i in (0:m)){
    for (j in (0:m)){
      if ((j-i==n) | (j-i<n)){
        suma=suma+(L[i+1]*X[j+1])}}}
  return (suma)
}

# alpha reikšmės
alpha19<-c(-0.05832163469-0.1593971165i, -0.05832163469+0.1593971165i,
           -0.1384517415-0.09682838937i, -0.1384517415+0.09682838937i,
           -0.1609395664-0.05069698280i, -0.1609395664+0.05069698280i,
           -0.1686623106+0.00000000000i, -0.1031921020+0.1342111283i,
           -0.1031921020-0.1342111283i,  -0.008024567666-0.1697511485i,
           -0.008024567666+0.1697511485i, 0.04141174047-0.1604729485i,
           0.04141174047+0.1604729485i,   0.08779700907-0.2213917176i,
           0.08779700907+0.2213917176i,   0.07610152085-0.1244365982i,
           0.07610152085+0.1244365982i,   0.08905661917+0.07452935813i,
           0.08905661917-0.07452935813i)

# grafiko braižymas
plot(Re(alpha19), Im(alpha19), pch = 19, col = "chartreuse4", cex = 2,
     xlim = c(-0.3, 0.3), ylim = c(-0.3, 0.3), xlab = "", ylab = "")
k <- seq(0, 2 * pi, length.out = 100)
x_circle <- cos(k)
y_circle <- sin(k)
lines(x_circle, y_circle, col = "black", lty = 1)
abline(h = 0, col = "black", lty = 2)
abline(v = 0, col = "black", lty = 2)

alpha<-alpha19

sumaL=0
for(i in 1:(m+1)){
  sandauga=L[i]*(i-1)
  sumaL=sumaL+sandauga
}
result<-sumaL-l1
El2<- (-result)
El2

# išgyvenimo tikimybių reikšmės
options("digits" = 16)

phi_0<-memoise(function(m){
  sandauga<-0
  rez<-1
  for (j in 1:(m-1)){
    sandauga=(1/((alpha[j])-1))
    rez=rez*sandauga
```

```
  }
  rez=((-1)^(m-1))*rez*(-El2)
  return(rez)
})

phi_1<-memoise(function(m){
  f<-fm(m,-m)
  sandauga<-0
  rez<-1
  for (j in 1:(m-1)){
    sandauga=(alpha[j]/((alpha[j])-1))
    rez=rez*sandauga
  }
  rez=(1/f)*rez*(-El2)
  return(rez)
})

N2 <- combn(alpha, m - 2, simplify = FALSE)
phi_2 <-(-phi_1(m)*((F_didysis(m,(-m)+1))/fm(m,-m))
          +(prod((1)/(alpha-1))*(prod(alpha)
                                    -sum(sapply(N2, function(x) prod(x)))))/fm(m,-m)*-El2)

N3 <- combn(alpha, m - 3, simplify = FALSE)
phi_3<- (-phi_1(m)*((F_didysis(m,(-m)+2))/fm(m,-m))
        -phi_2*((F_didysis(m,(-m)+1))/fm(m,-m))
        +(prod((1)/(alpha-1))*(prod(alpha)
                                -sum(sapply(N2, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N3, function(x) prod(x)))))/fm(m,-m)*-El2)

N4 <- combn(alpha, m - 4, simplify = FALSE)
phi_4<- (-phi_1(m)*((F_didysis(m,(-m)+3))/fm(m,-m))
        -phi_2*((F_didysis(m,(-m)+2))/fm(m,-m))
        -phi_3*((F_didysis(m,(-m)+1))/fm(m,-m))
        +(prod((1)/(alpha-1))*(prod(alpha)
                                -sum(sapply(N2, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N3, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N4, function(x) prod(x)))))/fm(m,-m)*-El2)

N5 <- combn(alpha, m - 5, simplify = FALSE)
phi_5<-(-phi_1(m)*((F_didysis(m,(-m)+4))/fm(m,-m))
        -phi_2*((F_didysis(m,(-m)+3))/fm(m,-m))
        -phi_3*((F_didysis(m,(-m)+2))/fm(m,-m))
        -phi_4*((F_didysis(m,(-m)+1))/fm(m,-m))
        +(prod((1)/(alpha-1))*(prod(alpha)
                                -sum(sapply(N2, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N3, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N4, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N5, function(x) prod(x)))))/fm(m,-m)*-El2)

N6 <- combn(alpha, m - 6, simplify = FALSE)
phi_6<- (-phi_1(m)*((F_didysis(m,(-m)+5))/fm(m,-m))
         -phi_2*((F_didysis(m,(-m)+4))/fm(m,-m))
         -phi_3*((F_didysis(m,(-m)+3))/fm(m,-m))
         -phi_4*((F_didysis(m,(-m)+2))/fm(m,-m))
         -phi_5*((F_didysis(m,(-m)+1))/fm(m,-m))
         +(prod((1)/(alpha-1))*(prod(alpha)
                                -sum(sapply(N2, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N3, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N4, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N5, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N6, function(x) prod(x)))))/fm(m,-m)*-El2)
```

```
N7 <- combn(alpha, m - 7, simplify = FALSE)
phi_7<- (-phi_1(m)*((F_didysis(m,(-m)+6))/fm(m,-m))
         -phi_2*((F_didysis(m,(-m)+5))/fm(m,-m))
         -phi_3*((F_didysis(m,(-m)+4))/fm(m,-m))
         -phi_4*((F_didysis(m,(-m)+3))/fm(m,-m))
         -phi_5*((F_didysis(m,(-m)+2))/fm(m,-m))
         -phi_6*((F_didysis(m,(-m)+1))/fm(m,-m))
         +(prod((1)/(alpha-1))*(prod(alpha)
                                -sum(sapply(N2, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N3, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N4, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N5, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N6, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N7, function(x) prod(x)))))/fm(m,-m)*-El2)

N8 <- combn(alpha, m - 8, simplify = FALSE)
phi_8<- (-phi_1(m)*((F_didysis(m,(-m)+7))/fm(m,-m))
         -phi_2*((F_didysis(m,(-m)+6))/fm(m,-m))
         -phi_3*((F_didysis(m,(-m)+5))/fm(m,-m))
         -phi_4*((F_didysis(m,(-m)+4))/fm(m,-m))
         -phi_5*((F_didysis(m,(-m)+3))/fm(m,-m))
         -phi_6*((F_didysis(m,(-m)+2))/fm(m,-m))
         -phi_7*((F_didysis(m,(-m)+1))/fm(m,-m))
         +(prod((1)/(alpha-1))*(prod(alpha)
                                -sum(sapply(N2, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N3, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N4, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N5, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N6, function(x) prod(x)))
                                +sum(sapply(N7, function(x) prod(x)))
                                -sum(sapply(N8, function(x) prod(x)))))/fm(m,-m)*-El2)
```