VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

Asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos matai rizikos poroms
Association, Dependence and Concordance Measures for Risk Pairs

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Ernestas Kolpakovas

VU el. p.: ernestas.kolpakovas@mif.stud.vu.lt

Vadovas: doc. dr. Martynas Manstavičius

Vilnius
2024

Asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos matai rizikos poroms

Santrauka

Šiame darbe yra nagrinėjamos asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos sąvokos bei aksiomos ir jų taikymai matuojant ryšį tarp dviejų dydžių. Be to, darbe yra nagrinėjama funkcionalo nuo kvantilių priklausomybė konkordacijos matų klasei. Taip pat yra analizuojamas Hoeffding H koeficientas ir jo priklausomybė konkordacijos matams. Darbe pateikiami praktiniai pavyzdžiai, leidžiantys įvertinti dviejų atsitiktinių dydžių bei generuotų realizacijų priklausomybę.

Raktiniai žodžiai: asociacija, priklausomybė, konkordacija, koreliacija, Spearman, Pearson, Hoeffding, Kendall.

Association, Dependence and Concordance Measures for Risk Pairs

Abstract

In this work, the concepts and axioms of association, dependence, and concordance and their applications in measuring the relationship between two quantities are presented. In addition, the paper examines the belonging of the functional of the quantiles to the class of concordance measures. The belonging of the Hoeffding H coefficient to the concordance measures is also analyzed. The work presents practical examples that allow to evaluate the dependence between two random variables as well as generated realizations.

Key words: association, dependence, concordance, correlation, Spearman, Pearson, Hoeffding, Kendall.

Turinys

1 Įvadas

„Rizika kyla iš nežinojimo, ką darai." (angl. "Risk comes from not knowing what you are doing.") – Warren Buffett (JAV verslininkas, investuotojas, filantropas, vienas turtingiausių planetos žmonių) [4].

Rizikos vertinimo ir valdymo srityje tam tikrų dydžių asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos tyrimas atlieka vieną iš pagrindinių vaidmenų analizuojant finansinių rinkų dinamiką. Norint sukurti patikimas rizikos valdymo strategijas, būtina suprasti skirtingų rizikos matų ryšius. Rizikos matas yra dažnai suprantamas kaip kiekybinis arba kokybinis rodiklis, naudojamas įvertinti potencialių nuostolių ar žalos galimybes, susijusias su konkretaus sprendimo, veiksmo ar investavimo sprendimo priėmimu. Rizikos matų asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos sąvokos bei jų taikymai gali būti naudojami siekiant atskleisti sudėtingus tam tikrų matų ryšius. Šių konceptų reikšmė – galimybė padidinti rizikos modeliavimo tikslumą ir patikimumą, suteikiant gilesnę įžvalgą apie nagrinėjamų matų sąveiką.

Šiame darbe yra nagrinėjamos asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos sąvokos bei aksiomos, kurios yra naudingos įvertinant priklausomybės tarp dviejų dydžių įtaką. Siekiant įvertinti dydžių priklausomybę, yra nagrinėjami Spearman ρ_S, Hoeffding H, Gini G ir Kendall τ koeficientai. Be to, darbe yra pateikiami dviejų dydžių priklausomybės įvertinimo pavyzdžiai naudojant dvimates kopulas.

Pirmame skyriuje yra pateikiamos Scarsini darbe [12] apibrėžtos asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos aksiomos naudojant kopulas. Antrame skyriuje yra pateikiamos Ferretti darbe [14] apibrėžtos asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos aksiomos tam tikriems dvimačiams atsitiktiniams dydžiams bei yra įrodoma, kad tam tikras pasiskirstymo funkcijų funkcionalas yra konkordacijos matas. Trečiame skyriuje yra analizuojama ar konkretūs funkcionalai yra konkordacijos matai bei pateikiami keli pavyzdžiai. Ketvirtame skyriuje yra pateikiami atsitiktinių bei generuotų dydžių priklausomybės koeficientų skaičiavimo pavyzdžiai.

Šio darbo tikslas – įvertinti Hoeffding H koeficiento priklausomybę konkordacijos matų klasei remiantis tiek Ferretti, tiek Scarsini aksiomomis, be to, panagrinėti ar tam tikras funkcionalas nuo kvantilių yra konkordacijos matas. Taip pat išanalizuosime įvairių priklausomybės matų skaičiavimo pavyzdžius atsitiktiniams dydžiams ir generuotoms realizacijoms.

2 Literatūros apžvalga

Šis darbas yra paremtas Scarsini [12] ir Ferretti [14] straipsniais, kuriuose yra apibrėžiami asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos matai. Scarsini darbe konkordacijos matai yra apibrėžiami naudojant kopulų sąvoką, o Ferretti – dviejų atsitiktinių dydžių vektorių bei jų jungtinę pasiskirstymo funkciją. Abiejuose straipsniuose yra analizuojami asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos matai dydžiams, kurie priklauso Fréchet klasei [8]. Scarsini darbe yra naudojama ir Sklar [2] teorema bei jos išvados, apjungiančios kopulų ir jungtinių pasiskirstymo funkcijų sąvokas, kurios yra naudojamos apibrėžiant konkordancijos matą $I(X, Y)$. Remiantis Scarsini, šis matas tenkina srities, simetrijos, monotoniškumo, ribos, nepriklausomumo, ženklų pasikeitimo ir tolydumo sąlygas. Ferretti darbo atveju, apibrėžiant asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos matus, yra naudojama Joe [5] aksiomatika. Pateiktais apibrėžimais ir teoremomis siekiama panagrinėti atsitiktinių dydžių priklausomybės ir unimodalumo, tikėtinumo, supermoduliarumo, iškilumo tvarkų sąvokas: yra įrodomas iškilumo tvarkos ir tam tikrų funkcijų funkcionalo sąryšis. Taip pat Scarsini bei Ferretti darbuose yra nagrinėjama koeficientų Spearman ρ_S, Kendall τ, Gini G priklausomybė konkordacijos matų klasei ir yra gaunamos šios klasės charakterizacijos naudojant tam tikrus funkcionalus.

3 Asociacijos, priklausomybės, konkordacijos matų aksiomos

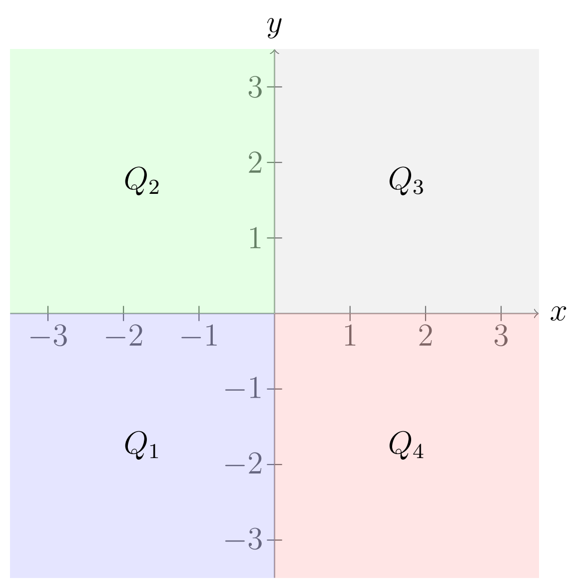
Šiame skyriuje yra pateikiamos pagrindinės sąvokos ir teoremos naudojamos darbe bei nagrinėjamos Scarsini [12] ir Ferretti [14] aksiomos. Taip pat, skyriuje yra pateikiamas praktinis Ferretti ir Scarsini aksiomų taikymas, išbandant įvairius rizikos, asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos matus. Šiuo tyrimu siekiama praplėsti Ferreti aksiomų taikymą įvairiuose scenarijuose.

3.1 Scarsini aksiomos

Nagrinėkime pasiskirstymo funkcijas $H(x, y)$ (su marginaliomis pasiskirstymo funkcijomis $F(x)$ ir $G(y)$), kurios sudaro vadinamąją Fréchet klasę $\Gamma(F, G)$ [8]. Jeigu taškas (x_0, y_0) yra fiksuotas, tai galima išskirti keturis aibės $\mathbb{R}^2$ poaibius:

$$\begin{aligned}
Q_1(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant x_0, y \leqslant y_0\},\\
Q_2(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \leqslant x_0, y > y_0\},\\
Q_3(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > x_0, y > y_0\},\\
Q_4(x_0, y_0) &= \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x > x_0, y \leqslant y_0\}.
\end{aligned}$$

Ketvirtyje $Q_1(Q_3)$ mažos (didelės) x reikšmės bei mažos (didelės) y reikšmės. Ketvirtyje $Q_2(Q_4)$ mažos (didelės) x reikšmės bei didelės (mažos) y reikšmės. Sritys Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, kai padalijimo centras (x_0, y_0) yra koordinačių pradžia, iliustruojamos 1 pav.



1 pav.: Sritys Q_1, Q_2, Q_3, Q_4, kai $(x_0, y_0) = (0, 0)$

Toliau yra pateikiami suderinamumo, kvazi-monotoniškumo ir kopulos apibrėžimai kartu su teiginiu, kuriuo vadovaujantis galima palyginti atsitiktinių dydžių porų pasiskirstymo funkcijas suderinamumo prasme. Šie apibrėžimai yra naudojami formuluojant Scarsini aksiomas.

3.1 Apibrėžimas ([12])**.** *Tarkime, kad $H, H' \in \Gamma(F, G)$. Pasiskirstymo funkcija H yra labiau suderinta (angl. more concordant) nei H', jei kiekvienam $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yra teisinga*

$$\mathbb{P}\{(X, Y) \in [Q_1(x, y) \cup Q_3(x, y)]\} \geqslant \\ \mathbb{P}\{(X', Y') \in [Q_1(x, y) \cup Q_3(x, y)]\},$$

čia atsitiktinių dydžių poros (X, Y) pasiskirstymo funkcija yra H, o atsitiktinių dydžių poros (X', Y') pasiskirstymo funkcija yra H'.

3.1 Teiginys ([12])**.** *Tarkime, kad $H, H' \in \Gamma(F, G)$. Pasiskirstymo funkcija H yra labiau suderinta nei H' tada ir tik tada, kai $H(x, y) \geqslant H'(x, y)$ visiems $(x, y) \in \mathbb{R}^2$.*

3.2 Apibrėžimas ([12])**.** *Funkcija $\phi : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra vadinama kvazi-monotoniška, jei*

$$\phi(x, y) - \phi(x', y) - \phi(x, y') + \phi(x', y') \geqslant 0, \text{ kai } x \geqslant x' \text{ ir } y \geqslant y'.$$

3.3 Apibrėžimas ([12])**.** *Kopula (dvimatė) yra funkcija $C : [0, 1]^2 \to [0, 1]$ tokia, kad*

- *$C(u, 0) = C(0, u) = 0$ ir $C(u, 1) = C(1, u) = u$ visiems $u \in [0, 1]$,*
- *C yra kvazi-monotoniška.*

Kelios svarbios kopulos C savybės:

- C yra tolydi ([13, Teorema 2.1]);
- Fréchet–Hoeffding rėžiai ([9]):

$$W(u, v) := \max(0, u + v - 1) \leqslant C(u, v) \leqslant M(u, v) := \min(u, v) \\ \text{kiekvienam } u, v \in [0, 1];$$

- jei (X, Y) yra atsitiktinių dydžių pora su pasiskirstymo funkcija $H \in \Gamma(F, G)$, tada egzistuoja kopula C_{XY} tokia, kad

$$H(x, y) = C_{XY}(F(x), G(y)), \text{ kiekvienam } x, y \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

Šios savybės (dvimatis Sklar teoremos atvejis) įrodymą galima rasti [2].

- jei f ir g yra griežtai didėjančios funkcijos srityse $Ran(X), Ran(Y)$ atitinkamai, tai $C_{f(X)g(Y)} = C_{XY}$ ([13, Teorema 2.6]), čia $Ran(X)$ ir $Ran(Y)$ žymi atsitiktinių dydžių X, Y reikšmių sritis;

- jei f yra griežtai mažėjanti funkcija srityje $Ran(X)$, tai $C_{f(X)Y}(u, v) = v - C_{XY}(1 - u, v)$ ([13, Teorema 2.7]).

3.1 Išvada (Sklar teoremos išvada, [12])**.** *Tarkime, kad (X, Y) ir (W, Z) yra dvi atsitiktinių dydžių poros su pasiskirstymo funkcijomis $H, H' \in \Gamma(F, G)$. Tada, remiantis savybe (1), egzistuoja kopulos $C_{X,Y}$ ir $C_{W,Z}$, tokios, kad*

$$H(x, y) = C_{X,Y}(F_X(x), G_Y(y)), \text{ kiekvienam } x, y \in \mathbb{R},$$
$$H'(w, z) = C_{W,Z}(F_W(w), G_Z(z)), \text{ kiekvienam } w, z \in \mathbb{R},$$

čia $F_X(x), G_Y(y), F_W(w), G_Z(z)$ žymi atitinkamų atsitiktinių dydžių X, Y, W, Z pasiskirstymo funkcijas. Be to, pasiskirstymo funkcija H yra labiau suderinta nei H', jei $C_{XY}(u, v) \geqslant C_{WZ}(u, v)$ visiems $u, v \in [0, 1]$.

Toliau nagrinėkime atsitiktinių dydžių porą (X, Y), kurios pasiskirstymo funkcija yra $H(x, y)$, o marginalai – $F_X(x), F_Y(y)$. Taip pat tarkime, kad dvimačių atsitiktinių dydžių su tolydžiais marginalais yra aibė A. Apibrėžkime funkciją $J : A \to B$, kur B yra pilnai surūšiuota aibė (dažniausiai intervalas priklausantis $\mathbb{R}$). Pažymėkime funkciją $I(X, Y) := J(H)$.

3.4 Apibrėžimas ([12])**.** *Funkcija $I(X, Y)$ yra vadinama konkordacijos matu, jei ji tenkina sekančias aksiomas:*

1. *Sritis: $I(X, Y)$ yra apibrėžta bet kuriai atsitiktinių dydžių porai (X, Y).*
2. *Simetrija: $I(X, Y) = I(Y, X)$.*
3. *Monotoniškumas: $I(X, Y)$ yra monotoniška C_{XY} atžvilgiu, t.y., jei $C_{XY} \geqslant C_{WZ}$, tai $I(X, Y) \geqslant I(W, Z)$.*
4. *Ribos: $-1 \leqslant I(X, Y) \leqslant 1$.*
5. *Nepriklausomumas: $I(X, Y) = 0$, jei X ir Y yra stochastiškai nepriklausomi.*
6. *Ženklų pasikeitimas: $I(-X, Y) = -I(X, Y)$.*
7. *Tolydumas: jei $(X, Y) \sim H$ ir $(X_n, Y_n) \sim H_n$, $n \in \mathbb{N}$, bei H_n konverguoja pataškiui į H (H_n ir H yra tolydžios), tai $\lim_{n\to\infty} I(X_n, Y_n) = I(X, Y)$.*

3.2 Ferretti aksiomos

Nagrinėkime atsitiktinių dydžių vektorių $P = (X, Y)$ bei jo dvimatę pasiskirstymo funkciją $F_P(x, y) = \mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y)$. Apibrėžkime išgyvenamumo funkciją $S_P(\mathbf{t}) := \mathbb{P}(P > \mathbf{t}) = \mathbb{P}(X > x, Y > y)$, čia $\mathbf{t} = (x, y)$. Taip pat apibrėžkime atsitiktinių dydžių poros P marginalias pasiskirstymo ir išgyvenamumo funkcijas:

$$F_X(x) := \mathbb{P}(X \leqslant x),\ F_Y(y) := \mathbb{P}(Y \leqslant y),$$
$$S_X(x) := \mathbb{P}(X > x),\ S_Y(y) := \mathbb{P}(Y > y).$$

Analogiškai, kaip ir 3.1 skyriuje, toliau nagrinėjamos dvimatės pasiskirstymo funkcijos $H(x, y)$ (su fiksuotais marginalais $F_X(x)$ ir $F_Y(y)$), kurios sudaro vadinamąją Fréchet klasę $\Gamma(F_X, F_Y)$. Bet kurios šios klasės pasiskirstymo funkcijos apatinis rėžis W yra apibrėžtas pasiskirstymo funkcija $F_W(\mathbf{t}) := \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0)$, o viršutinis rėžis M yra apibrėžtas pasiskirstymo funkcija $F_M(\mathbf{t}) := \min(F_X(x), F_Y(y))$ [9]. Galima pastebėti, kad Fréchet viršutinis ir apatinis rėžiai yra dvimačiai skirstiniai su atitinkamais marginalais F_X ir F_Y [6].

Sekantys apibrėžimai ir teorema nusako atsitiktinių dydžių porų palyginimą naudojant įvairias jų charakteristikas bei vienmačių atsitiktinių dydžių teigiamą ir neigiamą priklausomybę.

3.5 Apibrėžimas ([14]). *Tarkime, kad P, P' yra dvi atsitiktinių dydžių poros. Tada*

- $P \prec_{uo} P'$, *jei* $S_P(\mathbf{t}) \leqslant S_{P'}(\mathbf{t})$ *visiems* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ *(uo žymi unimodalumo tvarką, angl. unimodal ordering);*
- $P \prec_{lo} P'$, *jei* $F_P(\mathbf{t}) \geqslant F_{P'}(\mathbf{t})$ *visiems* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ *(lo žymi tikėtinumo tvarką, angl. likelihood ordering);*
- $P \prec_{sm} P'$, *jei* $\mathbb{E}f(P) \leqslant \mathbb{E}f(P')$ *visoms kvazi-monotoniškoms funkcijoms* f, *kurioms vidurkis egzistuoja (sm žymi supermodaliarumo tvarką, angl. supermodular ordering, čia dvimačių funkcijų kontekste supermoduliarumo ir kvazi-monotoniškumo sąvokos yra ekvivalenčios);*
- $P \prec_{c} P'$, *jei* $F_P(\mathbf{t}) \leqslant F_{P'}(\mathbf{t})$ *visiems* $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$ *(c žymi iškilumo tvarką, angl. convex ordering).*

3.1 Pavyzdys. *Nagrinėkime dvi atsitiktinių dydžių poras* $X = (X_1, X_2), Y = (Y_1, Y_2)$. *Be to, tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai* X_1, X_2, Y_1, Y_2 *yra neprisklausomi ir vienodai pasiskirstę pagal Bernoulli dėsnį [11], t.y.* $\mathbb{P}(Z = 1) = p_Z =$

$1-\mathbb{P}(Z=0)=1-q_Z$, *čia* $Z \in \{X_1, X_2, Y_1, Y_2\}$. *Bernoulli atsitiktinio dydžio* Z *pasiskirstymo funkcija yra*

$$F_Z(z)=\mathbb{P}(Z \leqslant z)=\begin{cases}0, & \text{jei } z<0,\\ 1-p_z, & \text{jei } 0 \leqslant z<1,\\ 1, & \text{jei } z \geqslant 1.\end{cases}$$

Taip pat tarkime, kad $p_{X_1} \geqslant p_{Y_1}$ *bei* $p_{X_2} \geqslant p_{Y_2}$.

Nagrinėkime atsitiktinių dydžių porų X, Y *išgyvenamumo funkcijas*

$$\begin{aligned}S_X(x_1,x_2) &= \mathbb{P}(X_1>x_1, X_2>x_2)=\mathbb{P}(X_1>x_1)\mathbb{P}(X_2>x_2)\\ &= (1-\mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1))(1-\mathbb{P}(X_2 \leqslant x_2))\\ &= (1-F_{X_1}(x_1))(1-F_{X_2}(x_2))=(1-(1-p_{X_1}))(1-(1-p_{X_2}))\\ &= p_{X_1}p_{X_2} \geqslant p_{Y_1}p_{Y_2}=(1-(1-p_{Y_1}))(1-(1-p_{Y_2}))\\ &= (1-F_{Y_1}(y_1))(1-F_{Y_2}(y_2))\\ &= (1-\mathbb{P}(Y_1 \leqslant y_1))(1-\mathbb{P}(Y_2 \leqslant y_2))\\ &= \mathbb{P}(Y_1>y_1)\mathbb{P}(Y_2>y_2)=\mathbb{P}(Y_1>y_1, Y_2>y_2)=S_Y(y_1,y_2),\end{aligned}$$

čia $0 \leqslant x_1, x_2, y_1, y_2 < 1$. *Kai* $x_1, x_2, y_1, y_2 < 0$, *tai* $S_X(x_1,x_2)=S_Y(y_1,y_2)=1$. *Analogiškai, kai* $x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 1$, *tai* $S_X(x_1,x_2)=S_Y(y_1,y_2)=0$. *Taigi gavome, kad* $S_X(x_1,x_2) \geqslant S_Y(y_1,y_2)$, *todėl* $Y \prec_{uo} X$.

Nagrinėkime atsitiktinių dydžių porų X, Y *pasiskirstymo funkcijas*

$$\begin{aligned}F_X(x_1,x_2) &= \mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1, X_2 \leqslant x_2)=\mathbb{P}(X_1 \leqslant x_1)\mathbb{P}(X_2 \leqslant x_2)\\ &= F_{X_1}(x_1)F_{X_2}(x_2)=(1-p_{X_1})(1-p_{X_2})\\ &\leqslant (1-p_{Y_1})(1-p_{Y_2})=F_{Y_1}(y_1)F_{Y_2}(y_2)\\ &= \mathbb{P}(Y_1 \leqslant y_1)\mathbb{P}(Y_2 \leqslant y_2)=\mathbb{P}(Y_1 \leqslant y_1, Y_2 \leqslant y_2)\\ &= F_Y(y_1,y_2),\end{aligned}$$

čia $0 \leqslant x_1, x_2, y_1, y_2 < 1$. *Kai* $x_1, x_2, y_1, y_2 < 0$, *tai* $F_X(x_1,x_2)=F_Y(y_1,y_2)=0$. *Analogiškai, kai* $x_1, x_2, y_1, y_2 \geqslant 1$, *tai* $F_X(x_1,x_2)=F_Y(y_1,y_2)=1$. *Taigi gavome, kad* $F_X(x_1,x_2) \leqslant F_Y(y_1,y_2)$, *todėl* $Y \prec_{lo} X$. *Be to, kadangi* $F_X(x_1,x_2) \leqslant F_Y(y_1,y_2)$, *tai* $X \prec_c Y$.

3.6 Apibrėžimas ([14])**.** *Tarkime, kad* X, Y *yra vienmačiai atsitiktiniai dydžiai. Tada*

- X *ir* Y *yra PQD (angl. positive quadrant dependent), jei visiems* $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ *yra tenkinama nelygybė*

$$\mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) \geqslant \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y);$$

- *X ir Y yra NQD (angl. negative quadrant dependent), jei visiems $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ yra tenkinama nelygybė*

$$\mathbb{P}(X \leqslant x, Y \leqslant y) \leqslant \mathbb{P}(X \leqslant x)\mathbb{P}(Y \leqslant y);$$

- *X yra dominuojamas Y pagal nuostolių sustabdymo tvarką (angl. stop-loss order), t.y. $X \prec_{sl} Y$, jei visiems nuostoliams $d \geqslant 0$, $\mathbb{E}(X-d)_+ \leqslant \mathbb{E}(Y-d)_+$. Be to, jei $X \prec_c Y$, tai X yra dominuojamas Y pagal nuostolių sustabdymo tvarką, nes $f(x) = (x-d)_+$ yra iškila funkcija bet kuriam d.*

Sekanti teorema nusako 3.5 apibrėžime nurodytų tvarkų priklausomybę, kai atsitiktinių dydžių poros turi vienodus vienmačius marginalus [1]. Be to, toliau atsitiktinių dydžių poros $P = (X, Y)$ pasiskirstymo funkcijos $F_P(x, y)$ su fiksuotais marginalais $F_X(x), F_Y(y)$ priklausomybę pasiskirstymo funkcijų klasei $\Gamma(F_X, F_Y)$ žymėsime $F_P \in \Gamma(H)$.

3.1 Teorema ([14])**.** *Tarkime, kad P, R yra atsitiktinių dydžių poros su pasiskirstymo funkcijomis $F_P, F_R \in \Gamma(H)$. Tada*

$$P \prec_{uo} R \Leftrightarrow R \prec_{lo} P \Leftrightarrow P \prec_{sm} R \Leftrightarrow P \prec_c R.$$

Sekančiuose apibrėžimuose, kuriuose yra naudojama Joe [5] aksiomatika, yra įvedamos asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos sąvokos (Ferretti aksiomos).

3.7 Apibrėžimas ([14])**.** *Funkcionalas $\alpha : \Gamma(H) \to \mathbb{R}$ yra vadinamas asociacijos matu, jei jis tenkina sekančias savybes:*

1. *α yra apibrėžtas kiekvienai vienmačių atsitiktinių dydžių porai $P = (X, Y)$;*

2. *α yra simetrinis: $\alpha(X, Y) = \alpha(Y, X)$ (toliau žym. $\alpha(P) := \alpha(X, Y)$);*

3. *$\alpha(P) \leqslant \alpha(P^M)$, visiems $F_P \in \Gamma(H)$, čia F_P žymi atsitiktinių dydžių poros P pasiskirstymo funkciją, P^M – atsitiktnis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija yra $F_M(x, y) = \min(F_X(x), F_Y(y))$ (F_X, F_Y yra atsitiktinių dydžių poros P marginalai);*

4. *$\alpha(P^W) \leqslant \alpha(P)$, visiems $P \in \Gamma(H)$, čia F_P žymi atsitiktinių dydžių poros P pasiskirstymo funkciją, P^W – atsitiktnis dydis, kurio pasiskirstymo funkcija yra $F_W(x, y) = \max(F_X(x) + F_Y(y) - 1, 0)$ (F_X, F_Y yra atsitiktinių dydžių poros P marginalai);*

5. *jei $\{P\}_{n,\, n\in\mathbb{N}}$ yra dvimačių atsitiktinių vektorių seka, kuri konverguoja pagal pasiskirstymą (apibrėžimą galima rasti priede) į dvimatį atsitiktinį vektorių P, tai $\lim_{n\to\infty} \alpha(P_n) = \alpha(P)$.*

3.8 Apibrėžimas ([14]). *Funkcionalas $\delta : \Gamma(H) \to \mathbb{R}$ yra vadinamas priklausomybės matu, jei jis yra asociacijos matas bei tenkina sekančias savybes:*

6. *$\delta(P^{\perp}) \leqslant \delta(P)$, jei X ir Y yra PQD;*

7. *$\delta(P^{\perp}) \geqslant \delta(P)$, jei X ir Y yra NQD;*

čia $P^{\perp} = (X^{\perp}, Y^{\perp})$ yra $P = (X, Y)$ nepriklausomos kopijos, t.y. $X^{\perp}$, $Y^{\perp}$ yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai ir $X, X^{\perp}$ bei $Y, Y^{\perp}$ yra vienodai pasiskirstę.

3.9 Apibrėžimas ([14]). *Funkcionalas $\gamma : \Gamma(H) \to \mathbb{R}$ yra vadinamas konkordacijos matu, jei jis yra asociacijos matas bei tenkina sekančią savybę:*

8. *jei $P \prec_c R$, tai $\gamma(P) \leqslant \gamma(R)$,*

čia P, R žymi atsitiktinių dydžių poras.

Toliau nagrinėjamose teoremose yra įrodoma, kad tam tikri kvazi-monotoniškų funkcijų funkcionalai yra konkordacijos matai. Be to, tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ yra didėjanti, jei bet kuriems taškams $(x_1, x_2), (y_1, y_2)$, kai $x_1 \leqslant y_1, x_2 \leqslant y_2$, yra teisinga $f(x_1, x_2) \leqslant f(y_1, y_2)$.

3.2 Teorema ([14]). *Tarkime, kad funkcija $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}$ yra aprėžta, didėjanti ir tolydi iš dešinės. Funkcija f yra kvazi-monotoniška tada ir tik tada, jei bet kuriems aprėžtiems teigiamiems Borelio matams $\mu_1, \mu_2 \in \mathbb{R}_+^2$, tokiems kad $\mu_1 \leqslant \mu_2$ (pataškiui), egzistuoja integralai, kuriems teisinga nelygybė*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f d\mu_1 \leqslant \int_{\mathbb{R}_+^2} f d\mu_2.$$

Sekančioje teoremoje yra pristatomas kvazi-monotoniškų funkcijų apibūdinimas naudojant atsitiktinių dydžių porų iškilumo tvarką.

3.3 Teorema ([14]). *Tarkime, kad funkcija $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ yra aprėžta, didėjanti ir tolydi iš dešinės. Funkcija f yra kvazi-monotoniška tada ir tik tada, kai bet kuriems tolydiems atsitiktinių dydžių poroms $P = (X, Y)$ ir $R = (W, Z)$, $F_P, F_R \in \Gamma(H)$, yra teisinga nelygybė*

$$P \prec_c R \iff \int_{\mathbb{R}_+^2} f(F_X(x), F_Y(y)) dF_P(x, y) \leqslant \int_{\mathbb{R}_+^2} f(F_W(w), F_Z(z)) dF_R(w, z).$$

Sekantis rezultatas rodo, kad naudojant bet kurią simetrinę, tolydžią iš dešinės, didėjančią, aprėžtą, kvazi-monotonišką funkciją galima apibrėžti konkordacijos matą, kuris yra šios funkcijos tam tikras funkcionalas.

3.1 Pastaba ([14]). *Tarkime, kad* $f : [0,1]^2 \to \mathbb{R}$ *yra simetrinė, tolydi iš dešinės, didėjanti, aprėžta kvazi-monotoniška funkcija. Tada*

$$\int_{\mathbb{R}_+^2} f(F_X(x), F_Y(y))dF_P(x,y)$$

yra konkordacijos matas.

Sekančioje teoremoje yra pateikiamas sąryšis tarp atsitiktinių dydžių porų iškilumo tvarkos ir tam tikrų funkcijų (nuo šių atsitiktinių dydžių porų jungtinių pasiskirstymo funkcijų) funkcionalų nelygybės bei yra gaunama konkordacijos matų klasės charakterizacija.

3.4 Teorema ([14]). *Tarkime, kad* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *yra didėjanti, iškila į apačią funkcija ir* $F_P, F_R \in \Gamma(H)$. *Tada*

$$P \prec_c R \iff \int_{\mathbb{R}_+^2} f(F_P(x,y))dF_P(x,y) \leqslant \int_{\mathbb{R}_+^2} f(F_R(w,z))dF_R(w,z).$$

3.2 Pastaba ([14]). *Tarkime, kad* $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ *yra didėjanti, iškila į apačią funkcija bei nagrinėkime atsitiktinių dydžių porą* $P = (X,Y), F_P \in \Gamma(H)$. *Tada* $\int_{\mathbb{R}_+^2} f(F_P(x,y))dF_P(x,y)$ *yra konkordacijos matas.*

Sekančioje teoremoje yra nagrinėjama ar tam tikras funkcionalas, kuris yra apibrėžtas naudojant J. Dhaene, M. Goovaerts [6] darbe aprašytu rizikos matu, yra konkordacijos matas.

3.5 Teorema ([14]). *Nagrinėkime neneigiamų atsitiktinių dydžių porą* $P = (X,Y)$. *Tarkime, kad* $R(X) = \mathbb{E}g(X) = \int_0^{+\infty} g(S_X(t))dt$ *yra rizikos matas, kur* $g : [0,1] \to [0,1]$ *yra didėjanti, iškila į viršų funkcija bei* $g(0) = 0$, $g(1) = 1$. *Tada* $\alpha(P) = R(X+Y) - R(X) - R(Y)$ *yra asociacijos, priklausomybės ir konkordacijos matas.*

3.3 Asociacijos ir priklausomybės matų pavyzdžiai

Sekančioje teoremoje parodoma, kad tam tikras funkcionalas, sudarytas iš kvantilių funkcijų, yra konkordacijos matas.

3.6 Teorema. *Tarkime, kad* $R(X) = F_X^{-1}(p)$*, kur* F_X *yra atsitiktinio dydžio* X *pasiskirstymo funkcija ir* p *yra kvantilio lygmuo intervale* $(0, 1)$*. Taip pat tarkime, kad atsitiktinių dydžių* X, Y *pasiskirstymo funkcijos yra tolydžios. Tada atsitiktinių dydžių porai* $P = (X, Y)$ *funkcionalas* $\alpha(P) = R(X + Y) - R(X) - R(Y)$ *yra asociacijos ir priklausomybės matas, bet, bendru atveju, nėra konkordacijos matas.*

Įrodymas.

- Kadangi atsitiktiniai dydžių $X, Y, X+Y$ pasiskirstymo funkcijos yra tolydžios, tai kiekvienam $p \in (0, 1)$ egzistuoja kvantiliai $R(X), R(Y), R(X + Y)$. Taigi matas α yra apibrėžtas kiekvienai atsitiktinių dydžių porai (X, Y), kurių pasiskirstymo funkcijos yra tolydžios.

- Mato α simetriškumą galima gauti iš sudėties komutatyvumo:

$$\begin{aligned}\alpha(X_1, X_2) &= R(X_1 + X_2) - R(X_1) - R(X_2) = \\ &= R(X_2 + X_1) - R(X_2) - R(X_1) = \alpha(X_2, X_1).\end{aligned}$$

- Aksiomų 3 ir 4 įrodymai išplaukia iš fakto, kad Fréchet viršutinis ir apatinis rėžiai yra dvimatės pasiskirstymo funkcijos su atitinkamais marginalais F_X ir F_Y.

- Kadangi atsitiktinių dydžių $X, Y, X + Y$ pasiskirstymo funkcijos yra tolydžios, tai ir jų kvantilių funkcijos $R(X), R(Y), R(X + Y)$ yra taip pat tolydžios, todėl matas $\alpha(P)$ yra tolydus.

Taigi $\alpha(P)$ yra asociacijos matas.

- Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai X, Y yra PQD. Nagrinėkime atsitiktinių dydžių sumos $X + Y$ pasiskirstymo funkciją

$$\begin{aligned}F_{X+Y}(z) &= \iint_{x+y\leqslant z} dF_{X,Y}(x, y) \\ &\geqslant \iint_{x+y\leqslant z} dF_X(x) dF_Y(y) \\ &= \iint_{x+y\leqslant z} dF_X^{\perp}(x) dF_Y^{\perp}(y) \\ &= \iint_{x+y\leqslant z} dF_{X^{\perp},Y^{\perp}}(x, y) = F_{X^{\perp}+Y^{\perp}}(z).\end{aligned}$$

Gavome, kad $F_{X+Y}(z) \geqslant F_{X^\perp+Y^\perp}(z)$, todėl $R(X+Y) = F^{-1}_{X+Y}(p) \geqslant F^{-1}_{X^\perp+Y^\perp}(p) = R(X^\perp+Y^\perp)$. Kadangi $R(X) = R(X^\perp)$ ir $R(Y) = R(Y^\perp)$ (atsitiktiniai dydžiai $X, X^\perp$ ir $Y, Y^\perp$ yra vienodai pasiskirstę), tai $\alpha(P) \geqslant \alpha(P^\perp)$.

- Analogiškai, tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai X, Y yra NQD. Nagrinėkime atsitiktinių dydžių sumos $X+Y$ pasiskirstymo funkciją

$$
\begin{aligned}
F_{X+Y}(z) &= \iint_{x+y\leqslant z} dF_{X,Y}(x,y) \\
&\leqslant \iint_{x+y\leqslant z} dF_X(x)dF_Y(y) \\
&= \iint_{x+y\leqslant z} dF^\perp_X(x)dF^\perp_Y(y) \\
&= \iint_{x+y\leqslant z} dF_{X^\perp,Y^\perp}(x,y) = F_{X^\perp+Y^\perp}(z).
\end{aligned}
$$

Gavome, kad $F_{X+Y}(z) \leqslant F_{X^\perp+Y^\perp}(z)$, todėl $R(X+Y) = F^{-1}_{X+Y}(p) \leqslant F^{-1}_{X^\perp+Y^\perp}(p) = R(X^\perp+Y^\perp)$. Taigi $\alpha(P) \leqslant \alpha(P^\perp)$.

Taigi $\alpha(X)$ yra priklausomybės matas.

- Nagrinėkime atsitiktinių dydžių poras $P = (X,Y)$ ir $P' = (X',Y')$, čia $X, Y \sim U(0,1)$, $X', Y' \sim U(0,2)$ (X, Y ir X', Y' yra nepriklausomi, o $U(a,b)$ žymi tolygųjį pasiskirstymą intervale $[a,b]$ [11]). Tolygaus intervale $[a,b]$ atsitiktinio dydžio $Z \sim U(a,b)$ pasiskirstymo funkcija yra

$$
F(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x < a, \\ \frac{x-a}{b-a}, & \text{jei } x \in [a,b], \\ 1, & \text{jei } x > b, \end{cases}
$$

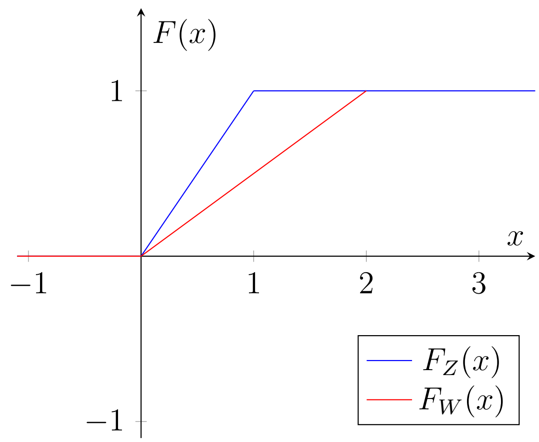
todėl atsitiktinių dydžių X, Y pasiskirstymo funkcija yra

$$
F_Z(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x < 0, \\ x, & \text{jei } x \in [0,1], \\ 1, & \text{jei } x > 1, \end{cases}
$$

čia $Z \in \{X, Y\}$, o atsitiktinių dydžių X', Y' pasiskirstymo funkcija yra

$$
F_W(x) = \begin{cases} 0, & \text{jei } x < 0, \\ \frac{x}{2}, & \text{jei } x \in [0,2], \\ 1, & \text{jei } x > 2, \end{cases}
$$

čia $W \in \{X', Y'\}$.



2 pav.: Atsitiktinių dydžių Z ir W pasiskirstymo funkcijos

Galima pastebėti, kad $F_P(\mathbf{t}) \leqslant F_{P'}(\mathbf{t})$ visiems $\mathbf{t} \in \mathbb{R}^2$, todėl, pagal 3.5 apibrėžimą, $P \prec_c P'$. Sumos $X + Y$ tankio funkcija yra randama naudojant sąsūką [18]

$$\begin{aligned} f_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{\infty} f_X(x) f_Y(z-x) dx \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \int_0^z 1 dx = z, & 0 \leqslant z < 1, \\ \int_{z-1}^1 1 dx = 2 - z, & 1 \leqslant z < 2, \\ 0, & z \geqslant 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{2}$$

Iš čia,

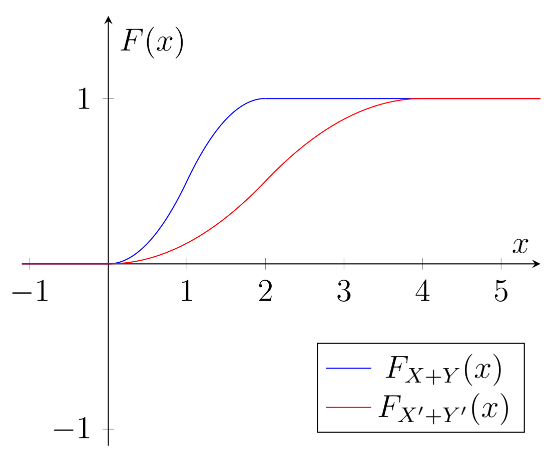
$$\begin{aligned} F_{X+Y}(z) &= \int_{-\infty}^{z} f_{X+Y}(x) dx = \\ &= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \int_0^z x dx = \frac{z^2}{2}, & 0 \leqslant z < 1, \\ \int_0^1 x dx + \int_1^z (2-x) dx = 2z - \frac{z^2}{2} - 1, & 1 \leqslant z < 2, \\ 1, & z \geqslant 2. \end{cases} \end{aligned} \tag{3}$$

Analogiškai,

$$f_{X'+Y'}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f'_X(x) f'_Y(z-x)dx$$
$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \int_0^z \frac{1}{4}dx = \frac{z}{4}, & 0 \leqslant z < 2, \\ \int_{z-2}^4 \frac{1}{4}dx = \frac{4-z}{4}, & 2 \leqslant z < 4, \\ 0, & z \geqslant 4. \end{cases}$$

Iš čia,

$$F_{X'+Y'}(z) = \int_{-\infty}^{z} f_{X'+Y'}(x)dx =$$
$$= \begin{cases} 0, & z < 0, \\ \int_0^z \frac{x}{4}dx = \frac{z^2}{8}, & 0 \leqslant z < 2, \\ \int_0^2 \frac{x}{4}dx + \int_2^z \frac{4-x}{4}dx = \frac{1}{2} + \frac{8z-z^2-12}{8}, & 2 \leqslant z < 4, \\ 1, & z \geqslant 4. \end{cases}$$



3 pav.: Atsitiktinių dydžių sumų $X+Y$ ir $X'+Y'$ pasiskirstymo funkcijos

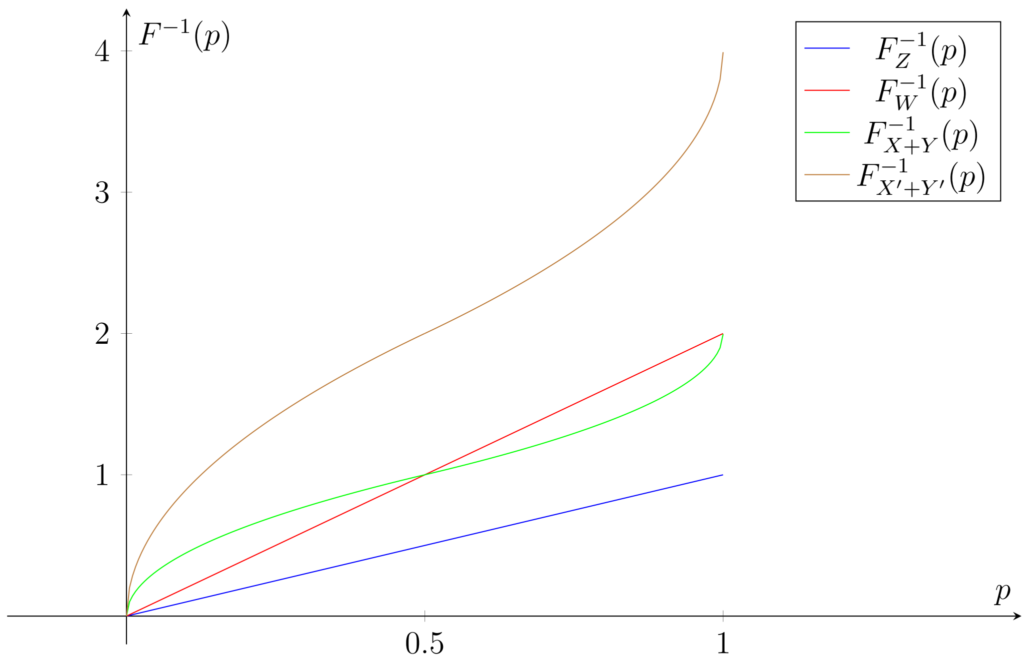
Taigi atitinkamų dydžių kvantiliai

$$F_Z^{-1}(p) = p, \text{ čia } Z \in \{X, Y\}, p \in (0,1),$$

$$F_{X+Y}^{-1}(p) = \begin{cases} \sqrt{2p}, & 0 \leqslant p < 0.5, \\ -\frac{-4+\sqrt{-8p+8}}{2}, & 0.5 \leqslant p \leqslant 1, \end{cases}$$

$$F_W^{-1}(p) = 2p, \text{ čia } W \in \{X', Y'\},$$

$$F_{X'+Y'}^{-1}(p) = \begin{cases} 2\sqrt{2p}, & 0 \leqslant p < 0.5, \\ -\frac{-8+\sqrt{-32p+32}}{2}, & 0.5 \leqslant p \leqslant 1. \end{cases}$$



4 pav.: Atsitiktinių dydžių $Z, W, X+Y, X'+Y'$ kvantilių funkcijos ($Z \in \{X, Y\}, W \in \{X', Y'\}$)

Nagrinėkime atvejį, kai $p = 0.75$. Tada

$$\begin{aligned} \alpha(X, Y) &= R(X+Y) - R(X) - R(Y) \\ &= F_{X+Y}^{-1}(0.75) - F_X^{-1}(0.75) - F_Y^{-1}(0.75) \\ &= -\frac{-4 + \sqrt{-8 \times 0.75 + 8}}{2} - 0.75 - 0.75 \\ &= -\frac{-4 + \sqrt{2}}{2} - 1.5 \ (\approx -0.21), \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \alpha(X', Y') &= R(X'+Y') - R(X') - R(Y') \\ &= F_{X'+Y'}^{-1}(0.75) - F_{X'}^{-1}(0.75) - F_{Y'}^{-1}(0.75) \\ &= -\frac{-8 + \sqrt{-32 \times 0.75 + 32}}{2} - 2 \times 0.75 - 2 \times 0.75 \\ &= 1 - \sqrt{2} \ (\approx -0.41). \end{aligned}$$

Gavome, kad $\alpha(X,Y) \geqslant \alpha(X',Y')$, kas prieštarauja 3.9 apibrėžimo savybei.

Taigi $\alpha(P)$ nėra yra konkordacijos matas. $\square$

Ketvirtame skyriuje yra nagrinėjami sukeičiami atsitiktiniai dydžiai, todėl toliau yra pateikiamas sukeičiamų atsitiktinių dydžių apibrėžimas, savybės bei pavyzdžiai.

3.10 Apibrėžimas ([3]). *Sakome, kad atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra sukeičiami, jei atsitiktinio vektoriaus $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ pasiskirstymo funkcija yra tokia pati, kaip ir atsitiktinio vektoriaus $(X_{\pi_1}, X_{\pi_2}, \ldots, X_{\pi_n})$ bet kuriai indeksų $\{1, 2, \ldots, n\}$ perstatai $(\pi_1, \pi_2, \ldots, \pi_n)$, t.y.*

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n) \stackrel{d}{=} (X_{\pi_1}, X_{\pi_2}, \ldots, X_{\pi_n}).$$

3.2 Pavyzdys. *Tarkime, kad urnoje yra 1 raudonos ir 2 baltos spalvų kamuoliukai. Kamuoliukai yra traukiami po vieną (į urną negrąžinami) bei yra stebima jų spalva. Apibrėžkime*

$$X_i = \begin{cases} 1, & \text{jei } i\text{-asis kamuoliukas yra raudonas,} \\ 0, & \text{kitu atveju.} \end{cases}$$

Nagrinėkime visų galimų baigčių tikimybes

$$\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = \frac{1}{3} \times 1 \times 1 = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3},$$

$$\mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{2}{3} \times \frac{1}{2} \times 1 = \frac{1}{3}.$$

Kadangi $\mathbb{P}(X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 1, X_3 = 0) = \mathbb{P}(X_1 = 0, X_2 = 0, X_3 = 1) = \frac{1}{3}$, tai atsitiktiniai dydžiai X_1, X_2, X_3 yra sukeičiami.

3.2 Teiginys ([3]). *Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę atsitiktiniai dydžiai. Tada $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra sukeičiami.*

Įrodymas. Tarkime, kad atsitiktinių dydžių X_i, $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$, pasiskirstymo funkcija yra $F(x)$. Kadangi atsitiktiniai dydžiai X_i yra nepriklausomi ir vienodai pasiskirstę, tai jungtinė pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{X_1, X_2, \ldots, X_n}(x_1, x_2, \ldots, x_n) \stackrel{nvp}{=} F(x_1) \times F(x_2) \times \cdots \times F(x_n). \tag{4}$$

Dėl daugybos komutatyvumo, pakeitus pasiskirstymo funkcijos argumentų $(x_1, x_2, \dots, x_n)$ tvarką, marginalių pasiskirstymo funkcijų sandauga bus lygi dešiniajai lygybės (4) pusei. $\square$

Iš 3.2 pavyzdžio galima pastebėti, kad sukeičiami atsitiktiniai dydžiai nebūtinai yra nepriklausomi. Sekančiame teiginyje įrodoma, kad sukeičiami atsitiktiniai dydžiai yra vienodai pasiskirstę.

3.3 Teiginys ([3])**.** *Tarkime, kad $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra sukeičiami atsitiktiniai dydžiai. Tada $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra vienodai pasiskirstę.*

Įrodymas. Nagrinėkime bet kurios indeksus $i \neq j$, $i, j \in \{1, 2, \dots, n\}$. Neprarasdami bendrumo tarkime, kad $i < j$. Be to, marginalo X_i pasiskirstymo funkcija yra

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_k \to \infty, k \in \{1,2,\dots,n\}, k \neq i} F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_i, \dots, x_j, \dots, x_n).$$

Sukeitus i-ąjį ir j-ąjį argumentus vietomis gauname

$$F_{X_i}(x_i) = \lim_{x_k \to \infty, k \in \{1,2,\dots,n\}, k \neq i} F_{X_1, X_2, \dots, X_n}(x_1, \dots, x_j, \dots, x_i, \dots, x_n).$$

Kadangi x_i yra j-ojoje pozicijoje, tai ši riba yra lygi $F_{X_j}(x_i)$. Taigi gavome, kad $F_{X_i}(x_i) = F_{X_j}(x_i)$, todėl X_i ir X_j yra vienodai pasiskirstę. Dėl atsitiktinio i ir j pasirinkimo, atsitiktiniai dydžiai $X_1, X_2, \dots, X_n$ yra vienodai pasiskirstę. $\square$

Sekančiose teoremose yra nagrinėjamas Hoeffding H koeficientas ir jo priklausomybė konkordacijos matų klasei (naudojant Scarsini ir Ferretti aksiomas).

3.7 Teorema. *Nagrinėkime atsitiktinių dydžių porą $P = (X, Y)$. Hoeffding H koeficientas*

$$H(X, Y) = \int_{\mathbb{R}^2} (F_{X,Y} - F_X F_Y)^2 dF_{X,Y}$$

nėra priklausomybės ir konkordacijos matas, kai X ir Y jungtinė pasiskirstymo funkcija priklauso pasiskirstymo funkcijų klasei $\Gamma(F_X, F_Y)$.

Įrodymas. Nagrinėkime 3.8 apibrėžimo 6 ir 7 aksiomas. Pažymėkime $P^\perp = (X^\perp, Y^\perp)$, čia $X^\perp, Y^\perp$ yra atsitiktinių dydžių X, Y nepriklausomos versijos, t.y. $X^\perp, Y^\perp$ yra nepriklausomi bei $X^\perp, X$ ir $Y^\perp, Y$ yra vienodai pasiskirstę. Tada

$$\begin{aligned} H(P^\perp) &= \int_{\mathbb{R}^2} (F_{X^\perp, Y^\perp} - F_{X^\perp} F_{Y^\perp})^2 dF_{X^\perp, Y^\perp} \\ &= \int_{\mathbb{R}^2} (F_{X^\perp} F_{Y^\perp} - F_{X^\perp} F_{Y^\perp})^2 dF_{X^\perp, Y^\perp} = 0 \leqslant \\ &\leqslant \int_{\mathbf{R}^2} (F_{X,Y} - F_X F_Y)^2 dF_{X,Y} = H(P), \end{aligned}$$

kadangi $(F_{X,Y} - F_X F_X)^2 \geqslant 0$ bei $F_{X,Y} \geqslant 0$ (pasiskirtymo funkcija yra teigiama). Gavome, kad $H(P^{\perp}) \leqslant H(P)$ yra teisinga, kai X, Y yra PQD ir NQD, todėl 6 aksiomos savybė nėra tenkinama. Taigi $H(P)$ nėra priklausomybės ir konkordacijos matas.

□

3.8 Teorema. *Nagrinėkime atsitiktinių dydžių porą $P = (X, Y)$. Hoeffding H koeficientas*

$$H(X,Y) = \int_{\mathbb{R}^2} (F_{X,Y} - F_X F_Y)^2 dF_{X,Y}$$

nėra konkordacijos matas Scarsini prasme, kai X ir Y jungtinė pasiskirstymo funkcija priklauso pasiskirstymo funkcijų klasei $\Gamma(F_X, F_Y)$.

Įrodymas. Nagrinėkime apibrėžimo 3.4 ženklų pasikeitimo aksiomą. Kadangi pasiskirstymo funkcijų reikšmės yra neneigiamos bei $(F_{X,Y} - F_X F_Y)^2 \geqslant 0$, tai $H(X,Y) \geqslant 0$ bet kuriems X, Y. Iš čia, $H(-X,Y) \geqslant 0$. Gavome, kad $H(-X,Y), H(X,Y) \geqslant 0$, kas prieštarauja ženklų pasikeitimo sąlygai $H(-X,Y) = -H(X,Y)$. □

4 Skaitiniai pavyzdžiai

Šiame skyriuje yra nagrinėjami 3 skyriuje aprašomų matų pavyzdžiai.

4.1 Pavyzdys. *Nagrinėkime tolygiai pasiskirsčiusius ir nepriklausomus intervale* $[0,1]$ *atsitiktinius dydžius* $X, Y \sim U(0,1)$*. Kadangi* X, Y *yra nepriklausomi, tai jungtinė pasiskirstymo funkcija*

$$F_{X,Y}(x,y) = F_X(x)F_Y(y) = \begin{cases} 0, & y < 0, x < 0, \\ xy, & 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ y, & x > 1, 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ x, & y > 1, 0 \leqslant x \leqslant 1, \\ 1, & x > 1, y > 1. \end{cases}$$

Toliau nagrinėkime atsitiktinių dydžių poros (X, Y) *priklausomybę. Kendall* τ *koeficientas*

$$\begin{aligned} \tau(X,Y) &= 4\int_{\mathbb{R}^2} F_{X,Y}(x,y)dF_{X,Y}(x,y) - 1 \\ &= 4\int_0^1\int_0^1 xydxdy = 4 \times \frac{1}{4} - 1 = 0. \end{aligned}$$

Hoeffding H *koeficientas*

$$\begin{aligned} H(X,Y) &= \int_{\mathbb{R}^2} (F_{X,Y} - F_XF_Y)^2 dF_{X,Y} \\ &= \int_0^1\int_0^1 (xy - xy)^2 dxdy = 0. \end{aligned}$$

Spearman ρ_S *koeficientas*

$$\begin{aligned} \rho_S(X,Y) &= 12\int_{\mathbb{R}^2} F_XF_Y dF_{X,Y} - 3 \\ &= 12\int_0^1\int_0^1 xydxdy - 3 = 12 \times \frac{1}{4} - 3 = 0 \end{aligned}$$

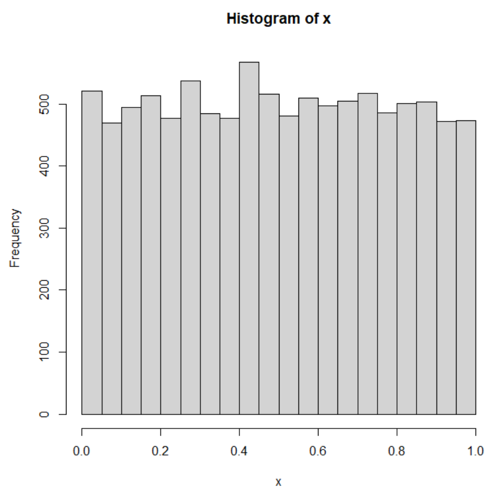
Gini G *koeficientas*

$$\begin{aligned} G(X,Y) &= 2\int_{\mathbb{R}^2} (|1 - F_X - F_Y| - |F_X - F_Y|)dF_{X,Y} \\ &= 2\int_0^1\int_0^1 (|1 - x - y| - |x - y|)dxdy = 0. \end{aligned}$$

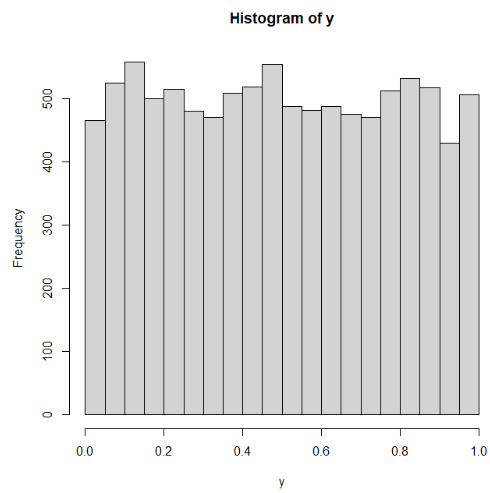
Galima pastebėti, kad kadangi atsitiktiniai dydžiai X, Y *yra nepriklausomi, tai* $\tau(X,Y) = H(X,Y) = \rho_S(X,Y) = G(X,Y) = 0.$

4.2 Pavyzdys. *Nagrinėkime nepriklausomus bei tolygiai intervale* $[0,1]$ *pasiskirsčiusius atsitiktinius dydžius* $X, Y \sim U(0,1)$ *ir jų realizacijas* x, y *(reikšmių skaičius yra* 10000*). Taip pat apibrėžkime seką* z *tokią, kad* $z_i := x_i + y_i$, $i \in \{1, 2, \ldots, 10000\}$.

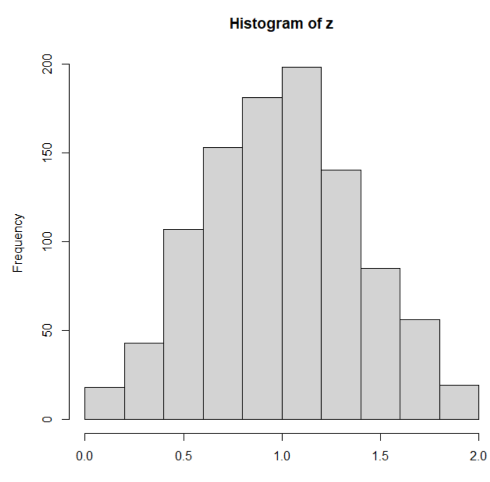
Galima pastebėti, kad 5 pav. histogramos yra panašios į pavyzdžio A.1 atsitiktinių dydžių X *ir* $X+Y$ *tankio funkcijas.*



(a) X realizacijų x histograma



(b) Y realizacijų y histograma



(c) x, y realizacijų sumos z histograma

5 pav.: X, Y realizacijų x, y ir jų sumos z histogramos

Toliau nagrinėkime generuotų atsitiktinio dydžio X *realizacijų* x *ir sekos* z *priklausomybę. Šiam tikslui yra skaičiuojami Kendall* τ, *Hoeffding* H, *Spearman* ρ_S, *Pearson* ρ_P *koeficientai naudojant R programinę įrangą ([15], [16],* *koeficientų skaičiavimo formules galima rasti priede). Rezultatai yra pateikiami 1 lentelėje.*

Koeficientas	Reikšmė
Kendall τ	$0,4922697$
Hoeffding H	$0,17$
Spearman ρ_S	$0,6907629$
Pearson ρ_P	$0,6988412$

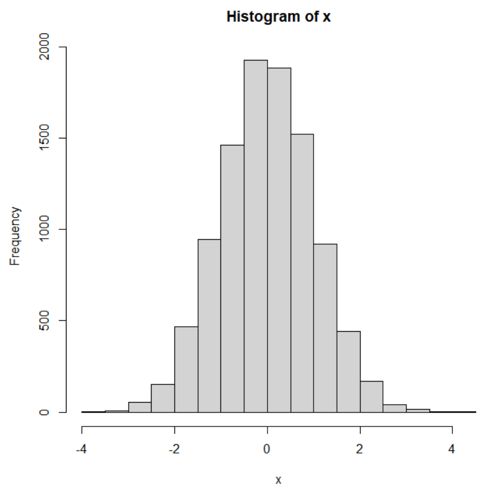
1 lentelė: Empirinės Kendall τ, Hoeffding H, Spearman ρ_S, Pearson ρ_P koeficientų reikšmės sumodeliuotoms (X, Y) realizacijoms (x, y)

Kendall τ, Pearson ρ_P ir Spearman ρ_S koreliacijos koeficientai rodo teigiamą ryšį tarp atsitiktinių dydžio X realizacijų x ir sekos z. Hoeffding H statistikos reikšmė $0,17$ rodo vidutinį ryšį. Remiantis gautais rezultatais, galima teigti, kad x, z yra priklausomos.

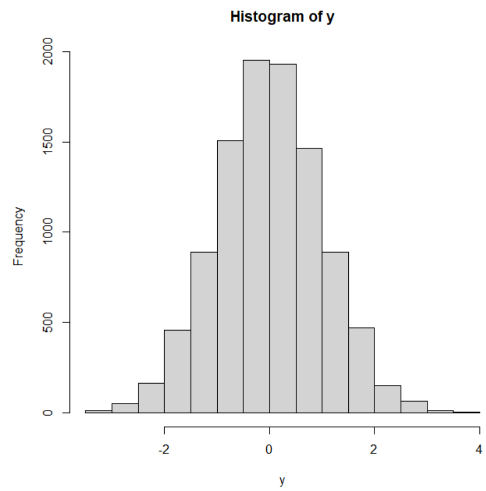
Koreliacija tarp atsitiktinio vektoriaus koordinačių matuoja tiesinį ryšį tarp jų verčių, t.y. pateikiama viena skaitinė vertė, nurodanti tiesinės priklausomybės tarp atsitiktinio vektoriaus koordinačių stiprumą ir kryptį. Koreliacijos reikšmės svyruoja nuo -1 iki 1, kur -1 rodo stiprų neigiamą tiesinį ryšį, 1 rodo stiprų teigiamą tiesinį ryšį, o 0 rodo, kad tiesinio ryšio nėra.

Koreliacija po kopulos modeliavimo atspindi priklausomybės struktūrą, kurią modeliuoja kopula. Tai reiškia, kad kopula gali užfiksuoti netiesinius ir potencialiai sudėtingesnius ryšius tarp atsitiktinio vektoriaus koordinačių. Kopulos yra ypač naudingos dirbant su daugiamačiais duomenimis bei gali būti naudingos finansiniam modeliavimui, rizikos valdymui ir kitose srityse, kuriose labai svarbu suprasti bendrą kelių kintamųjų elgesį.

4.3 Pavyzdys (Sukeičiamų atsitiktinių dydžių priklausomybė)**.** *Nagrinėkime dvimatį normalųjį pasiskirstymą su parametrais $\mu = (0, 0)$ ir $\Gamma = \begin{bmatrix} 1 & 0.4 \\ 0.4 & 1 \end{bmatrix}$ [7]. Šio dvimačio normaliojo pasiskirstymo marginalai yra vienodai normaliai pasiskirstę, todėl yra sukeičiami [7]. Taip pat generuokime 10000 dvimačių realizacijų (šių realizacijų matricąpaž. $u = (x, y)$, dvimačių realizacijų histogramą galima rasti priedo 11 pav.).*



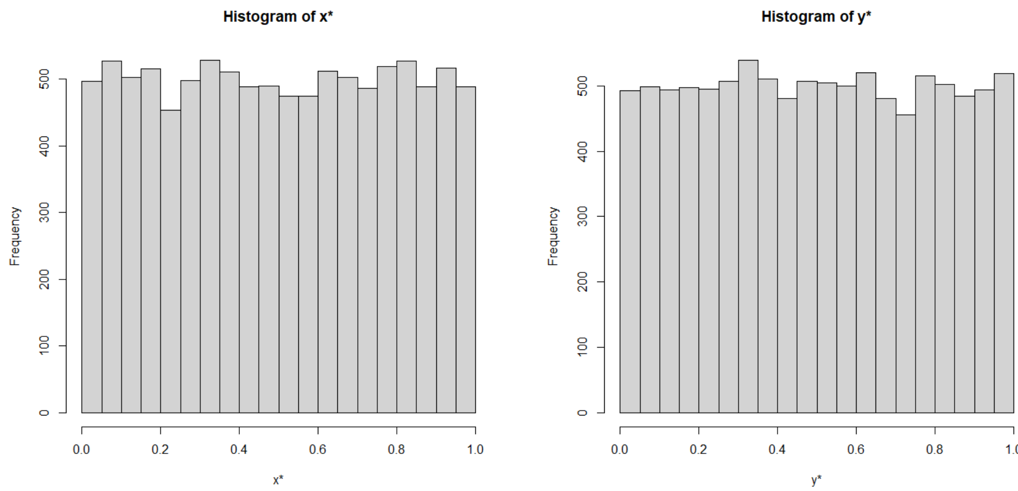
(a) X realizacijų x histograma



(b) Y realizacijų y histograma

6 pav.: X, Y realizacijų x, y histogramos

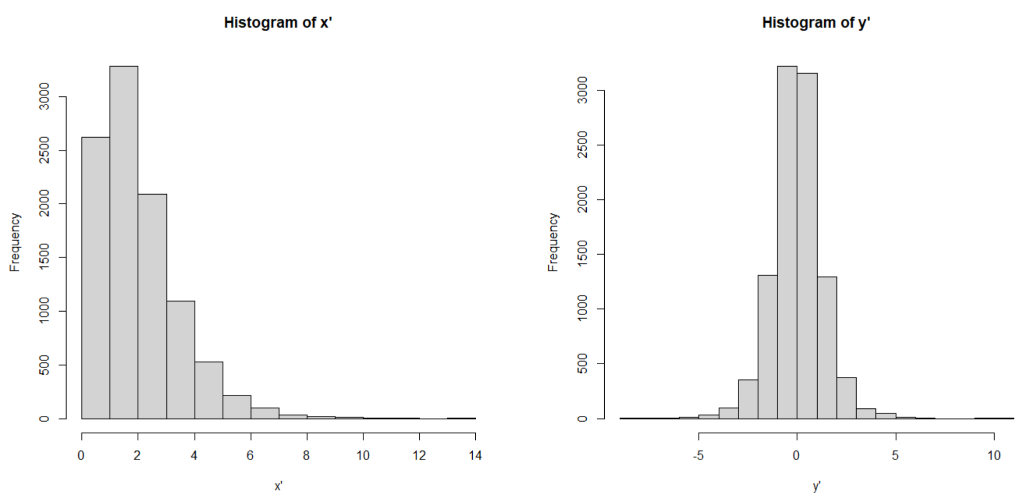
Atsitiktinių dydžių X ir Y realizacijų x ir y Spearman ρ_S koreliacijos koeficientas yra $0,3896929$, kas rodo pakankamai nestiprų tiesinį ryšį. Toliau pasinaudosime teiginiu, kad jei bet kurio tolydaus atsitiktinio dydžio W pasiskirstymo funkcija yra $F_W(w)$ bei egzistuoja atvirkštinė $F_W^{-1}(p)$ (t.y. egzistuoja unikalus w toks kad $F_W(w) = p$, $p \in (0,1)$), tai dydis $F_W(W)$ yra tolygiai pasiskirstęs intervale $(0,1)$ (įrodymą galima rasti priede). Realizacijoms x, y pritaikę transformaciją $F(x)$, čia $F(x)$ žymi vienmačio normalaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkciją, gauname naujas realizacijas x^*, y^*, kurių Spearman ρ_S koreliacijos koeficientas yra lygus realizacijų x ir y koreliacijos koeficientui. Iš tikrųjų, pritaikyta transformacija nepakeitė dydžių koreliacijos struktūros ir lieka tik tai, kas dažnai vadinama priklausomybės struktūra.



(a) X^* realizacijų x^* histograma (b) Y^* realizacijų y^* histograma

7 pav.: X^*, Y^* realizacijų x^*, y^* histogramos

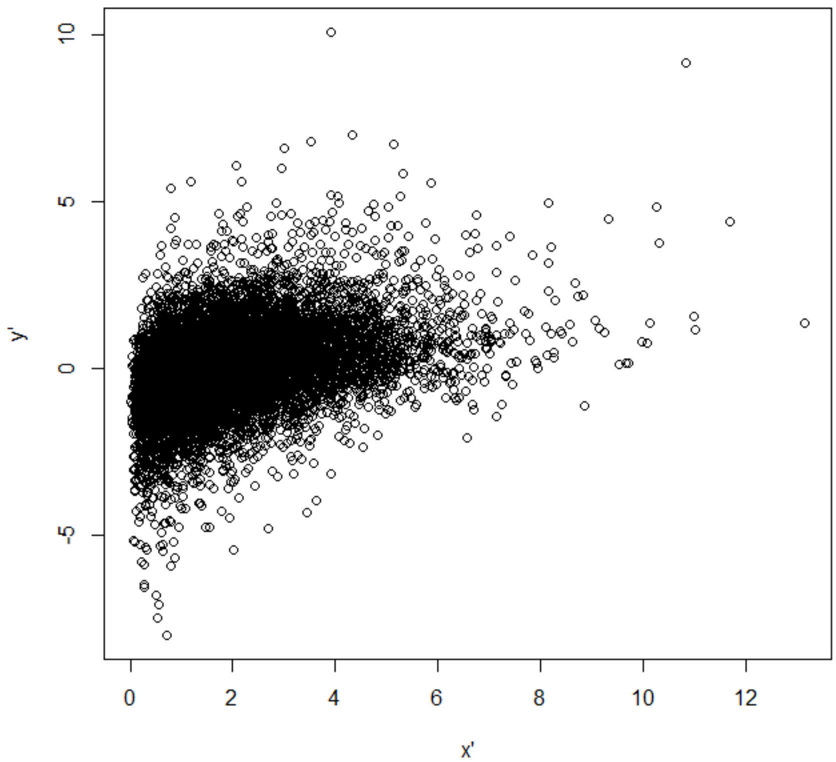
Toliau yra pasirenkami marginalų pasiskirstymai $Gamma(2, 1)$ *[20] bei* $Student(5)$ *[17] ir gaunamos naujos sekos* x', y'.



(a) X' realizacijų x' histograma (b) Y' realizacijų y' histograma

8 pav.: X', Y' realizacijų x', y' histogramos

Toliau yra pateikiamas modeliuojamų duomenų taškinė diagrama. Be abejo, tai nėra paprasta tiesinė priklausomybės struktūra.



9 pav.: Porų (x', y') taškinė diagrama

Taigi pradėdami nuo daugiamačio normalaus pasiskirstymo realizacijų, gavome naujas realizacijas su norima priklausomybės struktūra bei su laisvai pasirinktais marginalais.

5 Išvados

Šiame darbe yra įvertinta Hoeffding H koeficiento priklausomybė konkordacijos matų klasei remiantis tiek Ferretti, tiek Scarsini aksiomomis – abiem atvejais šis koeficientas nėra konkordacijos matas (pagal Ferreti aksiomas, Hoeffding H netenkina priklausomybės matų sąlygų, dėl ko nėra konkordacijos matas, o, pagal Scarsini aksiomas, šis matas netenkina ženklų pasikeitimo sąlygos). Be to, darbe yra įrodoma, kad tam tikras funkcionalas nuo kvantilių yra asociacijos ir priklausomybės matas, bet nėra konkordacijos matas (remiantis Ferretti aksiomomis). Taip pat yra išanalizuoti Kendall τ, Hoeffding H, Spearman ρ_S, Gini G ir Pearson ρ_P priklausomybės koeficientų skaičiavimo pavyzdžiai atsitiktiniams dydžiams ir generuotoms realizacijoms.

Tolimesniam darbo vystymui rekomenduočiau panagrinėti skirtingų matų priklausomybę konkordacijos matų klasei, pavyzdžiui, Gini G (Ferretti aksiomų atveju). Be to, rekomenduočiau išanalizuoti įvairių rizikos matų funkcionalų priklausomybę konkordacijos matų klasei. Taip pat siūlyčiau palyginti Scarsini ir Ferretti aksiomas, panagrinėti jų panašumus bei skirtumus. Beje, raginčiau ištirti skirtingų atsitiktinių dydžių arba generuotų realizacijų pavyzdžius bei įvairių priklausomybės koeficientų panašumus, jų privalumus ir trūkumus.

6 Literatūra

[1] A. H. Tchen. Inequalities for Distributions with Given Marginals. The Annals of Probability, Institute of Mathematical Statistics, vol. 8, 1980, pp. 814-827.

[2] A. Sklar. Random Variables, Distribution Functions, and Copulas: A Personal Look Backward and Forward. Institute of Mathematical Statistics, vol. 28, 1996, pp. 1–14.

[3] D. J. Aldous. Exchangeability and related topics. In: Hennequin, P.L. (eds) École d'Été de Probabilités de Saint-Flour XIII, 1985.

[4] Forbes žurnalo puslapis. `https://www.forbes.com/profile/warren-buffett/`.

[5] H. Joe. Multivariate Models and Dependence Concepts. Chapman & Hall, London, 1997.

[6] J. Dhaene, M. Goovaerts. Dependency of Risks and Stop-Loss Order. Astin Bulletin, 1996, pp. 201-212.

[7] M. A. Pinsky, S. Karlin. 8 - Brownian Motion and Related Processes. Introduction to Stochastic Modeling (Fourth Edition), Academic Press, 2011, pp. 391-446.

[8] M. Fréchet. Sur les tableaux de corrélation dont les marges sont données. Annales de l'Université de Lyon, Section A: Sciences mathématiques et astronomie 9, 1951, pp. 53-77.

[9] M. Fréchet. Sur la distance de deux lois de probabilité. Annales de l'ISUP, 1957, pp. 183-198.

[10] M. G. Kendall. A New Measure of Rank Correlation. Biometrika, vol. 30, no. 1/2, pp. 81–93, 1938.

[11] M. J. Evans, J. S. Rosenthal. Probability and Statistics: The Science of Uncertainty. 2nd ed. W.H. Freeman 2010.

[12] M. Scarsini. On Measures of Concordance. Università di Parma, Istituto di Matematica Finanziaria 'E. Levi', Ser. II, 1983.

[13] P. Embrechts, F. Lindskog, A. Mcneil. Modelling Dependence with Copulas and Applications to Risk Management. Handbook of Heavy Tailed Distributions in Finance, Chapter 8, pp. 329-384, 2003.

[14] P. Ferretti. Comparing bivariate risks: measures of dependence, concordance, diversification. Rendiconti per gli studi economici quantitativi, 2002, pp. 61-74.

[15] R cor funkcijos dokumentacijos puslapis. https://www.rdocumentation.org/packages/stats/versions/3.6.2/topics/cor

[16] R hoeffd funkcijos dokumentacijos puslapis. https://search.r-project.org/CRAN/refmans/Hmisc/html/hoeffd.html

[17] R. Li, S. Nadarajah. A review of Student's t distribution and its generalizations. Empirical Economics, 2018.

[18] R. N. Bracewell. The Fourier Transform and Its Applications. McGraw Hill, Circuits and systems, 2000.

[19] R. S. Witte, J. S. Witte. Statistics. J. Wiley & Sons, 9th ed., 2010.

[20] U. Eric, M. O. O. Oti, C. E. Francis. A Study of Properties and Applications of Gamma Distribution. African Journal of Mathematics and Statistics Studies, 2021.

[21] W. Hoeffding. A Non-Parametric Test of Independence. The Annals of Mathematical Statistics, Institute of Mathematical Statistics, vol. 19, pp. 546-557, 1948.

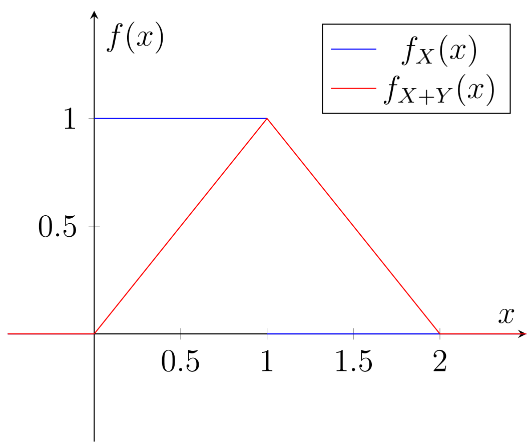
A Priedai

A.1 Apibrėžimas ([11])**.** *Nagrinėkime atsitiktinius dydžius* $X, X_1, X_2, \ldots$. *Sakome, kad atsitiktinių dydžių seka* $\{X_n\}$ *konverguoja pagal pasiskirstymą į atsitiktinį dydį* X*, jei visiems* $x \in \mathbb{R}$ *tokiems, kad* $\mathbb{P}(X = x) = 0$ *yra teisinga*

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}(X_n \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant x)$$

bei pažymėkime $X_n \xrightarrow{d} X$.

A.1 Pavyzdys. *Tarkime, kad atsitiktiniai dydžiai* $X, Y \sim U(0, 1)$. *Paveikslėlyje 10 yra pavaizduoti atsitiktinio dydžio* X *bei atsitiktinių dydžių* X, Y *sumos* $X + Y$ *(Teoremos 3.6 lygybė (2)) tankio funkcijos.*



10 pav.: Tankio funkcijos $f_X(x), f_{X+Y}(x)$

A.1 Teiginys. *Tarkime, kad tolydaus atsitiktinio dydžio* X *pasiskirstymo funkcija yra* $F(x)$. *Tada dydis* $F(X)$ *yra tolygiai pasiskirstęs intervale* $(0, 1)$.

Įrodymas.

$$F_{F(X)}(x) = \mathbb{P}(F(X) \leqslant x) = \mathbb{P}(X \leqslant F^{-1}(x)) = F(F^{-1}(x)) = x,$$

čia $F^{-1}(p) = \inf\{x \in \mathbb{R} : p \leqslant F(x)\}$. Gavome, kad dydžio $F(X)$ pasiskirstymo funkcija yra $F_{F(X)}(x) = x$, kuri taip pat yra tolygaus atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija. □

A.2 Apibrėžimas. *Empirinis Spearman* ρ_S *koreliacijos koeficientas [19] duomenims* $\{(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n\}$ *yra*

$$\rho_S = 1 - \frac{6 \sum_i d_i^2}{n(n^2 - 1)},$$

čia d_i *žymi duomenų* x_i, y_i *rangų skirtumą,* n *žymi duomenų porų skaičių.*

A.3 Apibrėžimas. *Empirinis Pearson ρ_P koreliacijos koeficientas [19] duomenims $\{(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n\}$ yra*

$$\rho_P = \frac{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})(y_i - \overline{y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (x_i - \overline{x})^2}\sqrt{\sum_{i=1}^n (y_i - \overline{y})^2}},$$

čia n žymi stebėjimų skaičių, x_i, y_i yra i-ieji stebėjimai, $\overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n x_i$ yra stebėjimų x vidurkis (analogiškai ir $\overline{y}$).

A.4 Apibrėžimas. *Empirinis Kendall τ koreliacijos koeficientas [10] duomenims $\{(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n\}$ yra*

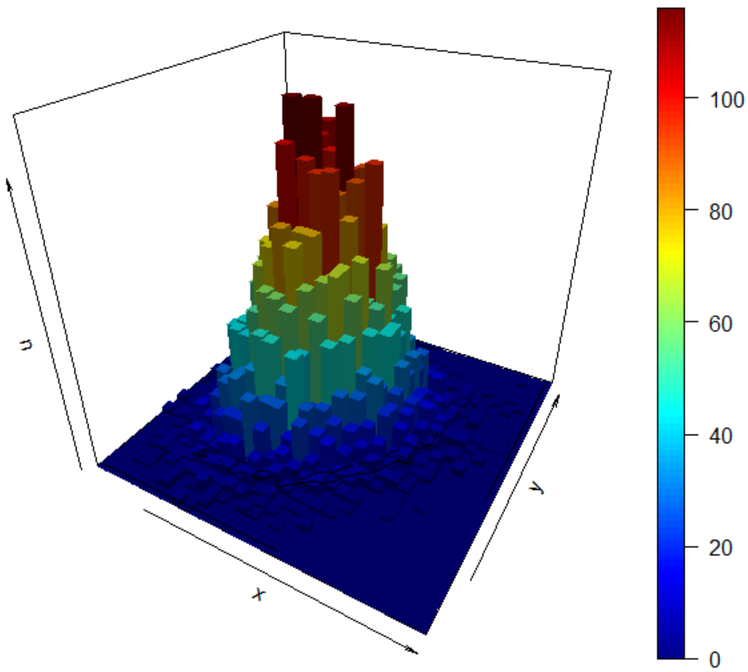
$$\tau = \frac{(\textit{suderintų porų skaičius}) - (\textit{nesuderintų porų skaičius})}{(\textit{visų porų skaičius})},$$

čia sakome, kad poros (x_i, y_i) ir (x_j, y_j) yra suderintos, jei $x_i > x_j$, $y_i > y_j$ arba $x_i < x_j$, $y_i < y_j$, $i < j$ (x_i, y_i žymi i-uosius stebėjimus).

A.5 Apibrėžimas. *Empirinis Hoeffding H koreliacijos koeficientas [21] duomenims $\{(x_i, y_i), i = 1, \ldots, n\}$ yra*

$$H = 30\frac{(n-2)(n-3)D_1 + D_2 - 2(n-2)D_3}{n(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)},$$

čia $D_1 = \sum_i (Q_i - 1)(Q_i - 2)$, $D_2 = \sum_i (R_i - 1)(R_i - 2)(S_i - 1)(S_i - 2)$, $D_3 = \sum_i (R_i - 2)(S_i - 2)(Q_i - 1)$, R_i yra x_i rangas, S_i yra y_i rangas, $Q_i = 1 + \#\{j : (x_j, y_j) < (x_i, y_i)\}$ (sakome, kad $(x_j, y_j) < (x_i, y_i)$, kai $x_j < x_i$ ir $y_j < y_i$), n žymi stebėjimų skaičių, x_i, y_i žymi i-uosius stebėjimus.



11 pav.: Realizacijų u histograma

R kodas

```
library(Hmisc)
library(REAT)
library(copula)
library(gplots)
library(psych)
library(MASS)
library(plot3D)

#generuojami dydžiai x ir y, skaičiuojama jų suma z = x + y
set.seed(123)
x <- runif(10000, 0, 1)
y <- runif(10000, 0, 1)
z <- x+y

#x, y, z histogramos
hist(x)
hist(y)
hist(z)

#skaičiuojami koreliacijos koeficientai
cor(x,z, method = "kendall")
cor(x,z, method = "pearson")
cor(x,z, method = "spearman")
hoeffd(x,z)

#generuojamas dvimačio normalaus a.d. realizacijos
set.seed(123)
m <- 2
n <- 10000
sigma <- matrix(c(1, 0.4,
                  0.4, 1), nrow=2)
u <- mvrnorm(n, mu=rep(0, m), Sigma=sigma ,empirical=T)

#realizacijų histograma
h2d <- hist2d(u[,1],u[,2],show=FALSE, same.scale=TRUE, nbins=c(30,30))

hist3D( h2d$x, h2d$y, h2d$counts, theta=30, phi=30, shade=0.5, contour = TRUE, zlab="n")
#pairs.panels(u)

#vektorių x ir y histogramos
hist(u[, 1], xlab = "x", main = "Histogram of x")
hist(u[, 2], xlab = "y", main = "Histogram of y")
cor(u[, 1], u[, 2], method = "spearman")
```

```
#vektorių x ir y tranformacija
u_transformed <- pnorm(u)

#transformuotų vektorių x ir y histogramos
hist(u_transformed[, 1], xlab = "x*", main = "Histogram of x*")
hist(u_transformed[, 2], xlab = "y*", main = "Histogram of y*")

#plot(u_transformed[, 1], u_transformed[, 2])
#gamma ir student skirstiniai
x1 <- qgamma(u_transformed[, 1],shape=2,scale=1)
x2 <- qt(u_transformed[, 2],df=5)

#vektorių x' ir y' histogramos
hist(x1, xlab = "x'", main = "Histogram of x'")
hist(x2, xlab = "y'", main = "Histogram of y'")

#priklausomybės grafikas
plot(x1,x2, xlab = "x'", ylab = "y'")
```