Matematikos ir informatikos fakultetas

VILNIAUS UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA

Investicinio portfelio formavimas iš atsinaujinančios energetikos įmonių grąžų

Formation of an Investment Portfolio from the Returns of Renewable Energy Companies

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Aurelija Baranauskaitė
VU el. p.: aurelija.baranauskaite@mif.stud.vu.lt

Vadovas: doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius
2024

Investicinio portfelio formavimas iš atsinaujinančios energetikos įmonių grąžų

Santrauka

Šiame baigiamajame magistro darbe nagrinėjamas finansinis turtas ir jo grupės, finansų rinkų rūšys, jų indeksai, taip pat investicinių portfelių formavimas, efektyvumo frontas. Koncentruojamasi į Harry Markowitz apibrėžtą Modernaus portfelio teoriją, minimalios dispersijos, maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelių formavimą. Praktinėje šio darbo dalyje nagrinėjami 2017 – 2022 metų dešimties atsinaujinančios energetikos įmonių akcijų duomenys, iš jų formuojami investiciniai portfeliai, sudaromas efektyvumo frontas įtraukiant nerizikingą aktyvą. Darbo tikslas išnagrinėti egzistuojančią portfelių formavimo Modernistinę teoriją, pateikti detalų efektyvumo fronto skaičiavimo algoritmą, teorinius teiginius iliustruoti konkrečių aktyvų portfelių formavimu, pateikti gautus rezultatus ir išvadas.

Raktiniai žodžiai: investicija, finansinis turtas, nerizikingi vertybiniai popieriai, akcijos, grąža, tikėtina grąža, investicinis portfelis, diversifikavimas, minimalios dispersijos portfelis, pelno – rizikos koeficientas, optimalus portfelis, efektyvumo frontas, Markowitz kulka.

Formation of an Investment Portfolio from the Returns of Renewable Energy Companies

Abstract

This Master's thesis analyzes financial assets and their groups, types of financial markets, and their indices, as well as the formation of investment portfolios and the efficient frontier. The focus is on the Modern Portfolio Theory defined by Harry Markowitz, formation of minimum dispersion and maximum Sharpe ratio portfolios. In the practical part, data on the stocks of renewable energy companies from 2017 to 2022 are analyzed, investment portfolios are formed, and an efficient frontier is constructed, including a risk-free asset. The aim of the thesis is to examine the existing portfolio formation Modernist theory, present a detailed algorithm for calculating the efficient frontier, illustrate theoretical statements through the formation of specific asset portfolios, and present the obtained results and conclusions.

Keywords: investment, financial assets, risk-free securities, stocks, return, expected return, investment portfolio, diversification, minimum variance portfolio, Sharpe ratio, optimal portfolio, efficiency frontier, Markowitz bullet.

Turinys

Įvadas

Vienas opiausių ekonominių iššūkių, su kuriuo šiomis dienomis susiduria kiekvienas, tai infliacija. Infliacija gali turėti įvairių pasekmių, pavyzdžiui, pinigų nuvertėjimas, dėl kurio yra patiriamas perkamosios galios sumažėjimas. Taigi, gyvenant aukštos infliacijos aplinkybėmis, kai sparčiai auga vidutinė prekių ir paslaugų kaina, dideli kainų svyravimai gali paveikti pinigų bei kito turto vertę, yra labai svarbu pasirūpinti finansiniu stabilumu ir apsaugoti turimas santaupas nuo nuvertėjimo. Vienas geriausių būdų – investavimas. Investavimas ne tik padeda apsisaugoti nuo santaupų nuvertėjimo, tačiau dažnu atveju net ir padeda investuoto turto vertę padidinti. Toliau šiame darbe nagrinėjamas investavimas bei investicinių portfelių formavimo būdai.

Kiekvienas investuotojas pagal individualius kriterijus renkasi, į ką investuoti. Šiame darbe nagrinėjamas investavimas į atsinaujinančios energetikos įmonių akcijas. Pasirinkta tirti būtent šį sektorių, kadangi dėl vis dažniau gvildenamų ekologijos, aplinkosaugos bei klimato kaitos klausimų atsinaujinanti energetika yra šiuo metu itin sparčiai besivystanti ir populiarėjanti sfera.

Pagrindinė investavimo priežastis yra siekis gauti kuo didesnę grąžą. Tačiau kiekvienas investuotojas susiduria su mažesne ar didesne rizika. Norint sumažinti riziką svarbu portfelį kuo labiau diversifikuoti. Diversifikavimo sąvoką savo darbuose išpopuliarino ekonomistas Harry Markowitz, kuris yra laikomas vienu iš Modernios portfelio formavimo teorijos pradininkų. Taip pat investicinio portfelio efektyvumui įvertinti yra naudojamas ir pelno – rizikos koeficientas, kurį 1966 metais pristatė ekonomistas William Forsyth Sharpe. Remiantis šiuo rodikliu galima įvertinti, ar prisiimta papildoma rizika atitinkamai suteiks ir didesnę grąža. Taigi diversifikuojant investicijas, remiantis Modernaus portfelio teorija bei pelno – rizikos koeficientu, yra sudaromi efektyvūs ir optimalūs investiciniai portfeliai, tad toliau, darbo praktinėje dalyje, yra nagrinėjamas šių teorijų pritaikymas investavime ir formuojami konkrečių aktyvų portfeliai.

Darbo tikslas – išnagrinėti egzistuojančią portfelių formavimo Modernistinę teoriją, pateikti detalų efektyvumo fronto skaičiavimo algoritmą, teorinius teiginius iliustruoti konkrečių aktyvų portfelių formavimu ir suformuluoti išvadas.

Darbo tikslui pasiekti iškelti uždaviniai:

- Atlikti mokslinės literatūros, analizuojančios portfelių formavimo Modernistinę teoriją ir efektyvumo frontą, apžvalgą.
- Išanalizuoti ir pateikti skirtingas portfelių formavimo teorijas.
- Iš atsinaujinančios energetikos įmonių akcijų suformuoti lygių svorių, minimalios dispersijos ir maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelius.

- Suformuoti gautų portfelių efektyvumo frontus ir palyginti rezultatus.

Darbo struktūra – darbas padalintas į tris pagrindines dalis. Pirmajame skyriuje nagrinėjamas finansinis turtas ir jo grupės, finansų rinkų rūšys, jų indeksai, rizika bei investuotojo polinkis į ją. Antrajame skyriuje analizuojamas investicinis portfelis, jo formavimo algoritmai, kai portfeliai sudaryti iš 2 aktyvų ir iš n aktyvų. Taip pat pateiktas detalus efektyvumo fronto skaičiavimo algoritmas, kai portfelis sudarytas tik iš rizikingų aktyvų bei įtraukiant vieną nerizikingą aktyvą. Trečiajame skyriuje, remiantis teoriniais teiginiais, iš pasirinktų dešimties atsinaujinančios energetikos įmonių akcijų formuojami lygių svorių, minimalios dispersijos ir maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfeliai bei palyginami pagrindiniai jų rodikliai. Taip pat suformuojamas efektyvumo frontas ir darbas pakartojamas įtraukiant nerizikingą aktyvą. Pabaigoje darbas apibendrinamas ir pateikiamos išvados.

Skaičiavimams atlikti ir duomenims atvaizduoti brėžiniuose naudota „Python" programavimo kalba bei programa „MS Excel".

1 Investavimas

Investicija – tai šiuo metu turimų lėšų ar kito turto eikvojimas, tikintis ateityje turto vertę padidinti, iš to uždirbti, gauti pelno. Investicija visada susijusi su tam tikrų resursų – laiko, pastangų, pinigų ar turto išlaidomis šiandien, tikintis, kad ateityje atsipirkimas bus didesnis, nei buvo investuota iš pradžių. [15]

Investicijoms naudojamas turtas dažniausiai yra skirstomas į šias dvi grupes:

- **materialusis turtas** *(angl. Real Assets)* – tai fizinis turtas, kuris dėl savo savybių turi vertę. Materialusis turtas apima žemę, pastatus, gamybos įrenginius, tauriuosius metalus, prekes, gamtos išteklius. Materialusis turtas paprastai yra stabilesnis, bet mažiau likvidus nei finansinis turtas. [12]

- **finansinis turtas** *(angl. Financial Assets)* – likvidus turtas, kurio vertė įgyjama iš sutartinės teisės arba nuosavybės reikalavimo. Skirtingai nuo materialaus turto, finansinis turtas nebūtinai turi fizinę vertę ar formą. Finansinis turtas kitaip dar gali būti apibūdinamas kaip „pinigų ekvivalentas". Finansiniam turtui dažniausiai yra priskiriami grynieji pinigai arba banko sąskaitoje laikomi pinigai, indėliai, akcijos, obligacijos, investiciniai fondai ir kiti turto reikalavimo teisę suteikiantys dokumentai. Finansinis turtas taip pat dar yra skirstomas į ilgalaikį ir trumpalaikį. [2]

1.1 Finansinis turtas ir finansų rinkos

Nors tiek materialusis turtas, tiek ir finansinis turtas gali būti investicine priemone, toliau šiame darbe nagrinėsiu ir plačiau apžvelgsiu tik finansinį turtą ir iš jo formuojamus investicinius portfelius.

Finansinis turtas gali būti suskirstytas į tris dideles grupes:

1) **Nerizikingi vertybiniai popieriai** – tai tokie vertybiniai popieriai, kurie beveik visada garantuoja investuotojui iš anksto sutartas pajamas, palūkanas, grąžą. Tai investicija, kuri suteikia grąžą per fiksuotas periodines palūkanas ir galimą pagrindinės sumos grąžinimą pasibaigus terminui. Nerizikingų vertybinių popierių pavyzdžiai:

   - indėliai – tai investavimo priemonė, kai pinigai yra laikomi kredito unijose, bankuose ir po tam tikro laikotarpio už juos yra išmokamos sukauptos palūkanos. Indėliai dažniausiai turi iš anksto nustatytą terminą ir palūkanas, tai nerizikinga investavimo priemonė, kadangi indėliai įprastai yra apdrausti.
   - iždo vekseliai – tai yra trumpalaikiai (dažniausiai iki vienerių metų) likvidūs vyriausybės vertybiniai popieriai, kurie turi nustatytą

nominaliąją vertę ir yra parduodami už kainą, lygią diskontuotajai nominaliajai vertei. Vyriausybė parduodama iždo vekselius skolinasi pinigus, o investuotojo uždirbamas pelnas yra skirtumas tarp pardavimo ir pirkimo kainų. Dividendai nėra mokami.[13]

- obligacijos – tai vyriausybės, finansinių institucijų ir įmonių leidžiami skolos vertybiniai popieriai. Obligacijų leidėjai vadinami emitentais. Investuotojai skolina lėšas emitentui, o šis įsipareigoja išpirkimo dieną išmokėti nominaliąją obligacijų vertę ir visą periodą reguliariai mokėti palūkanas už pasiskolintą sumą.

2) **Akcijos** – tai nuosavybės vertybiniai popieriai. Akcijos, priklausomai nuo jų dalies, jų savininkui suteikia teisę į įmonės valdymą (jis tampa įmonės bendrasavininku), dividendus iš įmonės pelno bei kitas išmokas. Akcijos yra viena iš populiariausių finansinio turto investicinių priemonių.

3) **Išvestiniai vertybiniai popieriai** – tai dokumentai, patvirtinantys teisę ar pareigą ateityje įsigyti ar perleisti tam tikro tipo turtą. Išvestiniai vertybiniai popieriai yra sudaryti iš kitų (pirminių) vertybinių popierių ir operuoja teisėmis į juos. Išvestinių vertybinių popierių pavyzdžiai:

   - opcionai *(angl. options)* – finansinis instrumentas, kuris vienai jo šaliai suteikia teisę (bet ne pareigą) ateityje pirkti arba parduoti tam tikrą turtą ar finansinį instrumentą, kitai šaliai tuo pačiu metu tai yra įsipareigojimas tą turtą parduoti arba jį nupirkti. Opcionas dar kitaip yra vadinamas pasirinkimo sandoriu. [7]
   - išankstiniai sandoriai *(angl. futures)* – tai įsipareigojimas ateityje (sutartą dieną) sutarta kaina pirkti arba parduoti tam tikrą kiekį turto. Perkant ar parduodant ateities sandorį bankui yra mokamas tarpininkavimo mokestis. [5]
   - apsikeitimo sandoriai *(angl. swaps)* – tai susitarimas, kai sutartam periodui šalys susitaria apsikeisti finansinėmis priemonėmis, pavyzdžiui, valiutomis, palūkanų normomis, vertybiniais popieriais. Sudarant sandorį galima keistis tos pačios rūšies ar skirtingomis finansinėmis priemonėmis.

Finansiniu turtu yra prekiaujama **finansų rinkose**. Šiose rinkose yra prekiaujama įvairiais aktyvais ne tik nacionaliniu, bet ir pasauliniu mastu. Finansų rinkų dalyviai vertindami prisiimamos rizikos lygį prekiauja įvairiu finansiniu turtu siekdami gauti pelno. Pagrindiniai finansų rinkos dalyviai yra įmonės, vyriausybės, namų ūkiai. Dažniausiai jiems tarpininkauja bankai, draudimo kompanijos, investiciniai fondai.

Taip pat egzistuoja skirtingos finansų rinkų rūšys. Yra išskiriamos dvi pagrindinės rūšys – pirminės ir antrinės finansų rinkos. Jos yra atskiriamos pagal vertybinių popierių pirkimo ir pardavimo sandorių eiliškumą.

- **Pirminė finansų rinka** – tai finansų rinkos dalis, kurioje emitentų naujai išleistus vertybinius popierius perka pirmieji investuotojai. Vertybiniai popieriai pirmą kartą patenka į rinką ir vyksta pirmoji transakcija, pardavimo pajamos atitenka emitentui. [8]

- **Antrinė finansų rinka** – tai perpardavimo rinka, kurioje prekiaujama anksčiau įsigytais (pirminėje rinkoje) vertybiniais popieriais.

Finansinės rinkos dar gali būti skirstomos ir į kitus porūšius, pavyzdžiui, yra išskiriamos: kapitalo, valiutų, pinigų, žaliavų, draudimo, ateities sandorių, išvestinių finansinių priemonių, kriptovaliutų rinkos.

Siekiant įvertinti ir atspindėti tam tikro sektoriaus rinkos pastovumą ir svyravimus yra skaičiuojami **rinkos indeksai**, jie padeda investuotojams įvertinti rinkos pokyčių dinamiką.

Pagrindiniai ir žinomiausi rinkos indeksai:

- **DJIA** *(The Dow Jones Industrial Average)* – kainos svertinio vidurkio indeksas. Apskaičiuojama naudojant 30 didžiausių ir paklausiausių JAV kompanijų akcijų kainas.

- **S&P 500** *(Standard and Poors)* – svertinis kapitalizacijos indeksas. Apskaičiuojama naudojant 500 pagrindinių JAV bendrovių, įtrauktų į JAV vertybinių popierių biržų sąrašą, akcijų kainas. Šis indeksas laikomas tiksliausiai atspindinčiu JAV akcijų rinkos būklę.

- **Nasdaq Composite** – rinkos kapitalizacijos svertinis indeksas. Apskaičiuojama naudojant daugiau kaip 3 300 bendrovių akcijų, kuriomis yra prekiaujama Nasdaq akcijų biržoje.

- **Russell2000** – apskaičiuojama naudojant 2 000 mažos kapitalizacijos JAV bendrovių akcijų kainas.

Toliau pateiksiu du pagrindinius (Kainos svertinio vidurkio, Svertinio kapitalizacijos) indeksų sudarymo principus.

Kainos **svertinio vidurkio indeksas** yra apskaičiuojamas taip

$$\textit{Svertinio vidurkio indeksas} = \frac{P_1 + \cdots + P_n}{d}, \tag{1}$$

čia $P_1, \ldots, P_n$ – įmonių akcijų kainos, d – dydis, kuris kinta.

O **svertinis kapitalizacijos indeksas** yra skaičiuojamas taip

$$\textit{Svertinis kapitalizacijos indeksas} = \frac{k_1 P_1 + \cdots + k_n P_n}{d}, \tag{2}$$

čia k_i – išleistų akcijų skaičius. Parametras d keičiasi tada, kai į skaičiavimus yra įtraukiamos naujos akcijos ir / arba išimamos senosios.

1.2 Investicijos pelningumas ir rizika

Taigi, individus tapti investuotojais skatina **grąža** (r). Tai yra pelnas, kuris yra uždirbamas iš investicijų. Tai gali būti palūkanos, dividendai, skirtumas tarp investuotos bei atsiimtos sumos ir t.t. Pelningumas, kitaip – investicijų grąža, nurodo, kiek pelno galima tikėtis iš investicijų.

Grąžą taip pat galima apibūdinti kaip funkciją (atsitiktinį dydį), apibrėžtą elementariųjų įvykių erdvėje ir įgyjančią realiąsias reikšmes ($r : \Omega \to \mathbb{R}$), čia $\Omega = \{s_1; s_2; \ldots; s_n\}$ – visos galimos baigtys.

Vieno aktyvo **istorinė grąža** laikotarpiu T yra skaičiuojama pagal aktyvo vertę laikotarpio pradžioje ir pasiektą vertę laikotarpio pabaigoje naudojant šią formulę

$$r_T = \frac{P_T - P_0}{P_0}, \tag{3}$$

čia P_0 yra aktyvo vertė laikotarpio $[0; T]$ pradžioje, o P_T to paties aktyvo pasiekta vertė momentu T. Taigi, aktyvo istorinė grąža yra šių verčių skirtumo ir pradinės aktyvo vertės santykis.

Žinant aktyvo istorinę grąžą galima skaičiuoti ir grąžos teorinį vidurkį t.y. **tikėtiną grąžą**

$$\mathbb{E}r = \sum_i p(s_i) r_i, \tag{4}$$

čia $p(s_i)$ – galimos baigties tikimybė, o r_i – baigties grąža. O grąžos teorinio vidurkio empirinis įvertis t.y. **vidutinė grąža** skaičiuojama pagal šią formulę

$$\bar{\mathbb{E}}r = \frac{r_1 + \cdots + r_n}{n}, \tag{5}$$

kai $r_1, \ldots, r_n$ – istorinės grąžos, apskaičiuotos remiantis formule (3).

Tačiau investuojant ir siekiant gauti grąžą, nėra žinoma, kas nutiks ateityje, todėl susiduriama ir su investicijų rizika – tikimybe prarasti investuotą turtą ar jo dalį, negauti tikėtinos grąžos.

Rizikai įvertinti naudojami statistiniai matai – **dispersija** (σ^2) arba **standartinis nuokrypis** (σ). Standartinis nuokrypis (šaknis iš dispersijos) yra skaičiuojamas naudojant šią formulę

$$\sigma = \sqrt{\sum_i p(s_i)(r_i - \mathbb{E}r)^2} = \sqrt{\sum_i r_i^2 p(s_i) - \mathbb{E}r^2}, \tag{6}$$

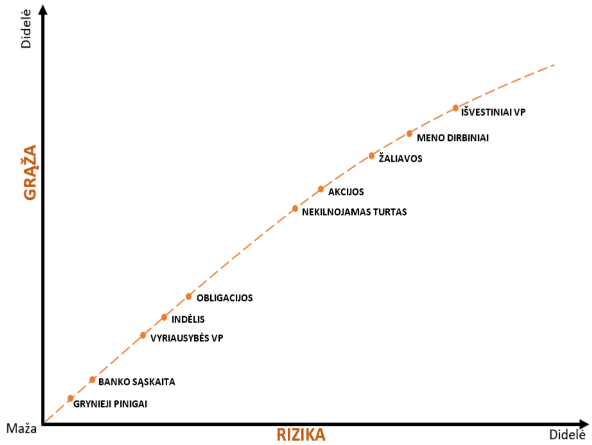
Kuo dispersija ar standartinis nuokrypis yra didesni, tuo didesnė ir rizika. Didesnis standartinis nuokrypis parodo didesnius galimus grąžos svyravimus, tai reiškia, kad investicija yra nepastovi ir priklausanti nuo kitų faktorių, todėl sunkiai prognozuojama.

Investavimo priemonės gali būti skirstomos pagal rizikingumą. Investicijos, kurių tikėtina grąža yra maža, dažniausiai yra mažiausiai rizikingos, o itin rizikingos investicijos gali žadėti ženkliai didesnę grąžą, tačiau yra didelė tikimybė patirti nuostolius ir prarasti investuotą turtą.

Mažai rizikingomis investicijomis laikomi Vyriausybės vertybiniai popieriai, indėliai, o pačios rizikingiausios investicijos yra į išvestinius vertybinius popierius, akcijas, žaliavas, metalus, tačiau kaip ir minėta, šios investicijos gali suteikti ir didžiausią grąžą.

Toliau paveikslėlyje 1 pavaizduota, kaip investicinės priemonės išsidėsto pagal tikėtiną grąžą ir rizikingumą.

1 pav.: Investicinės priemonės pagal tikėtiną grąžą ir rizikingumą [4]



1.3 Investuotojo polinkis į riziką

Kaip ir minėta, pagrindinė investavimo priežastis yra siekis gauti kuo didesnę grąžą. Tačiau kiekvienas investuotojas susiduria su mažesne ar didesne rizika bei turi rinktis. Įprastai prisiimant didelę riziką yra tikėtina ir didesnė grąža. Investuotojas pats renkasi, kokia rizika prie tam tikros tikėtinos grąžos jam yra priimtina, todėl yra skaičiuojamas **investuotojo rizikos tolerancijos koeficientas**, kuris ir parodo, koks rizikos lygis investuotojui yra priimtinas.

Rizikos tolerancijos koeficientas skaičiuojamas tokiu būdu

$$A = \frac{\mathbb{E}r - r_f}{0,5\sigma^2}. \tag{7}$$

Kuo rizikos tolerancijos koeficientas (A) yra didesnis, tuo investuotojas linkęs mažiau rizikuoti. Pagal tai investuotojai yra skirstomi į rizikos vengiančius, riziką mėgstančius ir neutralius rizikai.

Investuotojas yra:

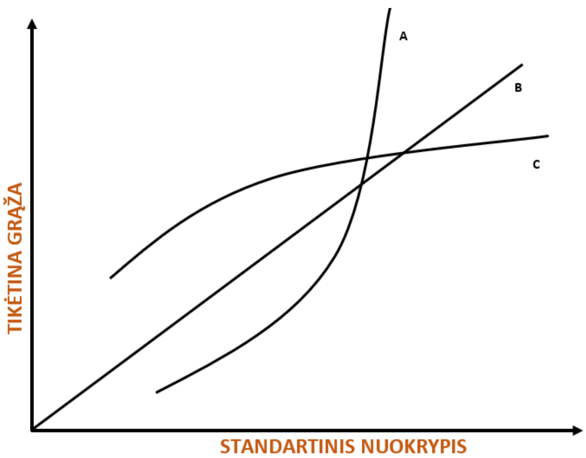
- rizikos vengiantis, jei $A > 0$.
- rizikai neutralus, jei $A = 0$.

- riziką mėgstantis, jei $A < 0$.

Taip pat, dėl skirtingo rizikos ir grąžos pasirinkimo, šių investuotojų grupių abejingumo kreivės yra skirtingos. **Abejingumo kreivė** – vartotojo pirmenybes rodanti diagrama, į kreivę sujungianti vartotojo pasirenkamus dviejų kriterijų derinius, teikiančius jam vienodą naudingumą. [9] Investavimo atveju tai kreivė, kuri apjungia skirtingos rizikos (standartinio nuokrypio) ir tikėtinos grąžos portfelių rinkinius, kurie konkrečiam investuotojui bus vienodai naudingi ir jis teiks vienodą pirmenybę juos besirinkdamas.

Toliau paveikslėlyje 2 pavaizduotos investuotojų su skirtingais rizikos tolerancijos koeficientais abejingumo kreivės.

2 pav.: Investuotojų abejingumo kreivės [16]



Abejingumo kreivės pasvirimo laipsnis (rizikos tolerancijos koeficientas (7)) parodo investuotojo prisiimtos rizikos lygį. A kreivė yra riziką mėgstančio investuotojo abejingumo kreivė, B – rizikai neutralaus, o C – rizikos vengiančio.

2 Investicinis portfelis

Šiame darbe **portfeliu** yra vadinamas vektorius $(b_1, b_2, \ldots, b_n)$. $A_1, A_2, \ldots, A_n$ – vertybinių popierių rinkinys, o b_i, $i = 1, \ldots, n$ suprantami kaip svoriai $\sum_{i=1}^{n} b_i = 1$, $A = b_1 A_1 + \cdots + b_n A_n$. Jei laikoma, kad $0 \leq b_i \leq 1$ – tai reiškia, jog nėra galimas pasiskolintų vertybinių popierių pardavimas. [14]

Investicinis portfelis – tai investuotojui priklausančių įvarių finansinių instrumentų (vertybiniai popieriai, akcijos, obligacijos ir t.t.) rinkinys. Šiam rinkiniui formuoti investuotojai renkasi skirtingas strategijas ir metodus. Dažnai siekdami sumažinti riziką – neatgauti investuoto turto ar negauti tikėtinos grąžos, investuotojai renkasi savo portfelį sudaryti iš kuo įvairesnių investicinių priemonių, kad portfelis nepriklausytų tik nuo vieno aktyvo, portfelio vertė mažiau reaguotų į trumpalaikius rinkos svyravimus ir pelnas (grąža) būtų stabilesnis, kitaip tariant – siekiama portfelį diversifikuoti.

Diversifikavimas – investicijų portfelio valdymo strategija, skirta mažinti rizikoms, vienu metu investuojant į skirtingą turtą, pavyzdžiui, į įvairių tipų vertybinius popierius, nekilnojamąjį turtą. Pagrindinė tokios investicijos ypatybė – skirtingų tipų turto vertės kitimas į tą pačią pusę (didėjimas / mažėjimas) turėtų būti mažai tikėtinas. [1]

Diversifikavimo sąvoką savo darbuose („Investicinio portfelio pasirinkimas: efektyvus investicijų diversifikavimas" – 1959, „Ilgalaikės investicijos" – 1972, „Vidurkio ir dispersijos analizė pasirenkant investicijų portfelį ir kapitalo rinkas" – 1987, „Rizikos ir pelno analizė: racionalaus investavimo teorija ir praktika" – 2013) [3] išpopuliarino ekonomistas Harry Markowitz. Jis yra laikomas vienu iš Modernios portfelio formavimo teorijos pradininkų. Harry Markowitz už pasiekimus ekonomikos srityje kuriant modernią portfelio teoriją 1990 metais buvo apdovanotas Nobelio ekonomikos premija. Jis taip pat pirmasis pasiūlė naudoti **efektyvaus portfelio** sąvoką – tai toks portfelis, kuris yra mažiausiai rizikingas esant duotam grąžos lygiui arba kuris yra pelningiausias tam tikros rizikos lygiui.

Harry Markowitz Modernaus portfelio teorija apibrėžė šiuos pagrindinius teiginius:

- Investuotojai yra rizikos vengiantys – už tam tikrą tikėtiną grąžą renkasi mažiau rizikingus portfelius.
- Būtina diversifikuoti investicinį portfelį siekiant geriausio rizikos ir grąžos santykio. Nors investicijos į vieną aktyvą grąža gali būti ženkliai didesnė, tokia investicija yra labai agresyvi rizikos požiūriu.
- Vertinant investicinio portfelio pelningumą, reikia vertinti viso portfelio riziką ir grąžą bendrai, nukreipiant dėmesį nuo atskirų akcijų rezultatų t.y. kaip konkreti investicija veikia bendrą portfelio riziką ir grąžą.
- Portfelis yra efektyvus, kai pasirinkus tą patį rizikos lygį bet kuris kitas portfelis negali suteikti didesnės grąžos. Arba bet kuris kitas tokios pačios grąžos portfelis nėra mažiau rizikingas.

Taigi, diversifikuojant investicijas ir remiantis Modernaus portfelio teorija, yra sudaromi efektyvūs ir optimalūs (žr. poskyrį 2.3) investiciniai portfeliai, toliau šiame darbe ir aptarsiu investicinio portfelio formavimą bei su tuo susijusius uždavinius.

2.1 Kovariacija ir koreliacija

Vertinant investicinius portfelius yra svarbu žinoti viso portfelio riziką, kaip tarpusavyje yra priklausomi aktyvai, kokio stiprumo ryšys portfelio aktyvus sieja. Šiuos dydžius įvertinti ir portfelio rizikai apskaičiuoti yra naudojamos statistinės charakteristikos – kovariacija ir koreliacija.

Kovariacija – dviejų susijusių atsitiktinių dydžių (investicinio portfelio atveju – finansinių instrumentų) tarpusavio skaitinė priklausomybė. Kovariacija parodo, kaip aktyvų pelningumo kitimo tendencijos yra priklausomos vienos nuo kitų.

Kovariacija tarp dviejų aktyvų A_i ir A_j yra apskaičiuojama taip

$$cov(r_{A_i}, r_{A_j}) = \sum_{n=1}^{k} p(n)(r_{A_i}(n) - \mathbb{E}r_{A_i})(r_{A_j}(n) - \mathbb{E}r_{A_j}), \tag{8}$$

čia $p(n)$ – tai tam tikros baigties (grąžos) tikimybė, $r_{A_i}(n)$ – aktyvo A_i grąža, o $\mathbb{E}r_{A_i}$ – tikėtina aktyvo A_i grąža.

Taip pat iš visų gautų portfelio akyvų kovariacijų yra konstruojama ir **kovariacijų matrica**

$$\sum = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} & \dots & \sigma_{1m} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} & \dots & \sigma_{2m} \\ \vdots & \vdots & \dots & \vdots \\ \sigma_{m1} & \sigma_{m2} & \dots & \sigma_{mm} \end{pmatrix}, \tag{9}$$

čia $\sigma_{ij} = cov(r_{A_i}, r_{A_j})$, kai $i, j = 1, 2, \dots, m$.

Kai kovariacija tarp dviejų finansinių instrumentų (aktyvų) yra:

- teigiama ($cov(r_{A_i}, r_{A_j}) > 0$), tai reiškia, jog abiejų aktyvų grąžos tuo pačiu metu kinta (auga ar krenta) ta pačia kryptimi;
- neigiama ($cov(r_{A_i}, r_{A_j}) < 0$), tai reiškia, jog abiejų aktyvų grąžos tuo pačiu metu kinta (auga ar krenta) priešingomis kryptimis;
- lygi nuliui ($cov(r_{A_i}, r_{A_j}) = 0$), tai reiškia, jog (pelningumas) akyvų grąžos viena nuo kitos nėra tiesiškai priklausomos ir aktyvai vadinami nekoreliuotais.

Koreliacija – tai statistinis ryšys tarp susijusių atsitiktinių dydžių (investicinio portfelio atveju – finansinių instrumentų). Koreliacijos koeficientas parodo, kokio stiprumo ryšys sieja aktyvus.

Koreliacija tarp dviejų aktyvų A_i ir A_j grąžų yra apskaičiuojama taip

$$corr(r_{A_i}, r_{A_j}) = \frac{cov(r_{A_i}, r_{A_j})}{\sigma_{A_i}\sigma_{A_j}}. \tag{10}$$

Koreliacijos reikšmės priklauso intervalui $[-1; 1]$. Jei:

- koreliacijos koeficientas lygus nuliui ($corr(r_{A_i}, r_{A_j}) = 0$), tai aktyvų grąžos nėra tiesiškai susijusios – kuo koreliacijos koeficientas toliau nuo 0, tuo koreliacija stipresnė;

- koreliacijos koeficientas teigiamas ($corr(r_{A_i}, r_{A_j}) > 0$), tai vieno aktyvo grąžai didėjant, kito aktyvo grąža taip pat didėja;

- koreliacijos koeficientas neigiamas ($corr(r_{A_i}, r_{A_j}) < 0$), tai vieno aktyvo grąžai didėjant, kito aktyvo grąža mažėja.

2.2 Minimalios dispersijos portfelis

Kaip aprašyta poskyryje 1.2, dispersija yra naudojama rizikai įvertinti, ji parodo investicijų pastovumą bei grąžos svyravimus. Kadangi remiantis Modernaus portfelio teorija investuotojai yra rizikos vengiantys, tai minimalios dispersijos (rizikos) portfelis jiems turėtų būti patrauklus siekiant mažos rizikos esant tam tikram grąžos lygiui.

2.2.1 Kai portfelis sudarytas iš 2 aktyvų

Toliau pateiktas teiginys ir įrodymas, kada portfelio, sudaryto iš 2 aktyvų atveju, dispersija (6) yra minimali.

Teiginys 2.1 *Portfelio $B = bA_1 + (1-b)A_2$ dispersija ($\sigma^2(b)$) yra mažiausia, kai*

$$b = \frac{\sigma_{A_2}^2 - cov(r_{A_1}, r_{A_2})}{\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2 - 2cov(r_{A_1}, r_{A_2})},$$

čia $\mu_{A_1} < \mu_{A_2}$ ir $\sigma_{A_1} < \sigma_{A_2}$.

Įrodymas 2.1 *Pirmiausia raskime dispersijos ($\sigma^2(b)$) išvestinę ir prilyginkime gautą išraišką 0*

$$\begin{aligned} \left(\sigma^2(b)\right)' &= \left(b^2\sigma_{A_1}^2 + (1-b)^2\sigma_{A_2}^2 + 2b(1-b)cov(r_{A_1}, r_{A_2})\right)' \\ &= 2b\sigma_{A_1}^2 - 2(1-b)\sigma_{A_2}^2 + (2-4b)cov(r_{A_1}, r_{A_2}) = 0. \end{aligned} \tag{11}$$

Supaprastinę ir išsprendę gauname, kad lygtis (11) įgyja 0 reikšmę, kai

$$b = \frac{\sigma_{A_2}^2 - cov(r_{A_1}, r_{A_2})}{\sigma_{A_1}^2 + \sigma_{A_2}^2 - 2cov(r_{A_1}, r_{A_2})}.$$

Tuomet, norėdami įsitikinti, kad tai minimali reikšmė, raskime funkcijos $\sigma^2(b)$ antrąją išvestinę

$$\left(\sigma^2(b)\right)'' = 2\sigma_{A_1}^2 + 2\sigma_{A_2}^2 - 4cov(r_{A_1}, r_{A_2}) = 2\sigma_{A_1-A_2}^2.$$

Kadangi gauname, jog $\left(\sigma^2(b)\right)'' > 0$, tai reiškia, jog remiantis pakankama ekstremumo sąlyga, taškas, kuriame išvestinė $\sigma^2(b)'$ įgyja reikšmę 0, yra funkcijos minimumo taškas, kai funkcija $\left(\sigma^2(b)\right)'' > 0$ iškila žemyn. ▲

2.2.2 Kai portfelis sudarytas iš n aktyvų

Toliau pateiktas teiginys ir įrodymas, kada portfelio, sudaryto iš n aktyvų, atveju dispersija (6) yra minimali.

Teiginys 2.2 *Portfelio $B = b_1A_1 + \cdots + b_nA_n$ dispersija $\sigma_B^2 = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$ yra minimali, kai*

$$\mathbb{B}^T = \frac{\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T},$$

čia Σ^{-1} – kovariacijų matricos atvirkštinė, $\mathbb{1} = (1, \ldots, 1)$.

Įrodymas 2.2 *Raskime funkcijos $\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$ (dispersijos) minimumą, kai*

$$\mathbb{1}\mathbb{B}^T = (1, \ldots, 1)\begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix} = b_1 + \cdots + b_n = 1.$$

Šiam veiksmui atlikti bus naudojamas Lagranžo daugiklių metodas [6]. Pirmiausia sudarykime Lagranžo funkciją

$$\begin{aligned} L(b_1, \ldots, b_n, \lambda) &= L(\mathbb{B}, \lambda) = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T - \lambda\left(\mathbb{1}\mathbb{B}^T - 1\right) = \\ &= \sum_{i=1}^{n} b_i^2\sigma_i^2 + 2\sum_{i<j} b_ib_j cov(r_i, r_j) - \lambda(b_1 + \cdots + b_n - 1). \end{aligned} \tag{12}$$

Toliau sudarytajai funkcijai $L(\mathbb{B}, \lambda)$ (12) raskime dalines išvestines – skaičiuokime išvestinę pagal b_1. Tada darbą tęsiame su kitais kintamaisiais $b_2, \ldots, b_n, \lambda$. Visas gautas funkcijos dalines išvestines prilyginkime nuliui. Gauname lygčių sistemą, kurios matricinis pavidalas yra

$$\begin{cases} 2\Sigma\mathbb{B}^T - \lambda\mathbb{1}^T = (0, \ldots, 0)^T, \\ \mathbb{1}\mathbb{B}^T - 1 = 0. \end{cases} \tag{13}$$

Iš pirmųjų n sistemos (13) lygčių gauname, kad

$$\mathbb{B}^T = \frac{\lambda}{2}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T.$$

Tuomet šią išraišką įrašome į paskutiniąją sistemos (13) lygtį

$$1 = \mathbb{1}\mathbb{B}^T = \mathbb{1}\frac{\lambda}{2}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \quad \Rightarrow \quad \lambda = \frac{2}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T}.$$

Taigi, gauname

$$\mathbb{B}^T = \frac{\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T}. \tag{14}$$

Tuomet, kad įsitikintume, jog gauta reikšmė (14) yra minimumas, prisiminkime matematinės analizės kursą ir antros eilės diferencialo testą. Funkcijos su n kintamųjų $f(x_1, ..., x_n)$ pirmos eilės diferencialas yra lygus

$$\Delta x_1 f'_{x_1} + \cdots + \Delta x_n f'_{x_n}.$$

O antros eilės šios funkcijos diferencialą galime užrašyti taip

$$(\Delta x_1)^2 f''_{x_1,x_1} + \cdots + (\Delta x_n)^2 f''_{x_n,x_n} + 2\Delta x_1 \Delta x_2 f''_{x_1,x_2} + \cdots + 2\Delta x_{n-1}\Delta x_n f''_{x_{n-1},x_n}.$$

Toliau, prisiminę kvadratinės formos sąvoką, šį diferencialą užrašome kvadratine forma

$$(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n) \begin{pmatrix} f''_{x_1,x_1} & \cdots & f''_{x_1,x_n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ f''_{x_n,x_1} & \cdots & f''_{x_n,x_n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \Delta x_1 \\ \vdots \\ \Delta x_n \end{pmatrix},$$

čia $(\Delta x_1, \ldots, \Delta x_n)$ yra argumentų pokyčiai.

Remdamiesi antros eilės diferencialo testu galime teigti – jei funkcijos $f(x_1, \ldots, x_n)$ antros eilės diferencialas taške x_0 yra griežtai teigiamas, tai iš to seka, kad funkcija $f(x_1, \ldots, x_n)$ įgyja minimumą nagrinėjamame taške.

Taigi, sudarykime savo turimai funkcijai (12) antros eilės diferencialą

$$d^2\sigma_B^2 = (\Delta b_1, \ldots, \Delta b_n) 2\Sigma \begin{pmatrix} \Delta b_1 \\ \vdots \\ \Delta b_n \end{pmatrix} \tag{15}$$

ir parodykime, jog $d^2\sigma_B^2 > 0$. Pagrindimas, jog gautas taškas (14) yra minimumas, remiasi išvestinių matrica (kai ij pozicijoje yra išvestinė pagal i–ąjį ir j–ąjį kintamuosius) $L''(\mathbb{B}, \lambda)_{\mathbb{B},\mathbb{B}} = 2\Sigma$.

Panagrinėkime atvejį, kai $L(b_1, b_2, \lambda) = b_1^2\sigma_1^2 + b_2^2\sigma_2^2 + 2b_1b_2cov(r_1, r_2) - \lambda(b_1 + b_2 - 1)$.

Skaičiuokime šios funkcijos $L(b_1, b_2, \lambda)$ išvestines pagal b_1, b_2, λ ir prilyginkime nuliui. Gauname lygčių sistemą, kurios matricinis pavidalas pateiktas toliau

$$\begin{cases} L'_{b_1}(b_1, b_2, \lambda) = 2b_1\sigma_1^2 + 2b_2cov(r_1, r_2) - \lambda = 0, \\ L'_{b_2}(b_1, b_2, \lambda) = 2b_2\sigma_2^2 + 2b_1cov(r_1, r_2) - \lambda = 0, \\ L'_{\lambda}(b_1, b_2, \lambda) = b_1 + b_2 - 1 = 0. \end{cases} \tag{16}$$

Iš dviejų pirmųjų lygčių gauname

$$2\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(r_1, r_2) \\ cov(r_1, r_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \end{pmatrix} - \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Toliau skaičiuokime antras išvestines funkcijai $L(b_1, b_2, \lambda)$

$$\begin{cases} L''_{b_1,b_1}(b_1, b_2, \lambda) = 2\sigma_1^2, & L''_{b_1,b_2}(b_1, b_2, \lambda) = 2cov(r_1, r_2), \\ L''_{b_2,b_1}(b_1, b_2, \lambda) = 2cov(r_1, r_2), & L''_{b_2,b_2}(b_1, b_2, \lambda) = 2\sigma_2^2. \end{cases} \quad (17)$$

Gautą lygčių sistemą taip pat galime užrašyti matriciniu pavidalu

$$2\begin{pmatrix} \sigma_1^2 & cov(r_1, r_2) \\ cov(r_1, r_2) & \sigma_2^2 \end{pmatrix}.$$

Taigi pastebime, jog gautoji matrica $L''(b_1, b_2, \lambda) = 2\Sigma$.

Grįžkime prie mūsų nagrinėjamo antros eilės diferencialo (15) – pastebime, jog antros eilės diferencialas (15) yra tas pats kas dispersija σ_B^2*, todėl galime teigti, jog* $d^2\sigma_B^2 > 0$ *ir iš to seka, kad taškas (14) yra minimumas.* ▲

2.3 Maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelis

Investicinio portfelio efektyvumui įvertinti taip pat yra naudojamas ir **pelno – rizikos koeficientas**, kuris dar yra vadinamas **Šarpo rodikliu** *(angl. Sharpe ratio)*, toliau darbe vartojamas šis rodiklio pavadinimas. Rodiklis buvo pavadintas pagal ekonomisto William Forsyth Sharpe pavardę, kuris 1966 metais ir pristatė šį rodiklį. W. F. Sharpe yra vienas iš CAPM *(ang. Capital asset pricing model)* kūrėjų ir 1990 metais buvo apdovanotas Nobelio premija už pasiekimus ekonomikos srityje.

Šarpo rodiklis yra apskaičiuojamas taip

$$S = \frac{\mu - r_f}{\sigma}, \quad (18)$$

čia μ – tikėtina portfelio grąža, r_f – nerizikinga palūkanų norma, o σ – tiriamo portfelio standartinis nuokrypis (rizikos įvertis).

Šarpo rodiklis padeda įvertinti investicijų efektyvumą, kokybę ir atsižvelgiant į rizikos lygį vertina investicinio portfelio grąžą virš nerizikingos grąžos (grąža gaunama iš nerizikingų investicijų, dažniausiai tai Vyriausybių vertybiniai popieriai (obligacijos)). Šiuo rodikliu yra matuojama grynoji investicinio portfelio grąža, kuri yra lyginama su to portfelio rizikingumu. Todėl remiantis šiuo rodikliu galima įvertinti, ar prisiimta papildoma rizika atitinkamai suteiks ir didesnę grąžą.

Kuo šis rodiklis yra didesnis, tuo investuotojui portfelis yra patrauklesnis. Todėl portfelis, kurio Šarpo rodiklis yra maksimalus (didžiausias) yra vadinamas **optimaliu portfeliu**.

2.3.1 Kai portfelis sudarytas iš 2 aktyvų

Toliau pateiktas teiginys ir įrodymas, kada portfelio, sudaryto iš 2 aktyvų, Šarpo rodiklis įgyja maksimalią reikšmę.

Teiginys 2.3 *Portfelio $B = bA_1 + (1-b)A_2$ Šarpo rodiklis*

$$S(b) = \frac{\mu_B - r_f}{\sigma_B} = \frac{\tilde{\mu}_B}{\sigma_B}$$

yra didžiausias, kai

$$b = \frac{\tilde{\mu}_{A_1}\sigma^2_{A_2} - \tilde{\mu}_{A_2}cov(r_{A_1}, r_{A_2})}{\tilde{\mu}_{A_1}(\sigma^2_{A_2} - cov(r_{A_1}, r_{A_2})) + \tilde{\mu}_{A_2}(\sigma^2_{A_1} - cov(r_{A_1}, r_{A_2}))}.$$

Įrodymas 2.3 *Tarkime, jog funkcija $f(x)$ yra teigiama ir x_0 yra jos maksimumo taškas intervale $[a, b]$. Tai reiškia, jog bet kokiam $y \in [a, b]$, teisinga nelygybė $f(y) \leq f(x_0)$. Logaritmas yra monotoniškai didėjanti funkcija, todėl kai $z \leq w$, tai $\log z \leq \log w$. Kadangi $f(y) \leq f(x_0)$ ir $\log z \leq \log w$, tai bet kokiam $y \in [a, b]$ gauname, jog $\log f(y) \leq \log f(x_0)$. Taigi x_0 taip pat yra funkcijos $\log f(x)$, kai $f(x) > 0$, maksimumo taškas. Toliau įrodyme laikykime, kad teigiamos funkcijos f ekstremumai sutampa su šios funkcijos logaritmo ekstremumais.*

Turime, kad $f'(x) = 0$ tada ir tik tada, kai $(lnf(x))' = \frac{f'(x)}{f(x)} = 0$. Toliau ieškokime funkcijos logaritmo išvestinės ir prilyginkime gautą išraišką 0

$$\left(ln\frac{\tilde{\mu}_B}{\sigma_B}\right)' = \frac{\tilde{\mu}'_B}{\tilde{\mu}_B} - \frac{\frac{1}{2}\left(\sigma^2_B\right)'}{\sigma^2_B} = \frac{\tilde{\mu}'_B\sigma^2_B - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_B\left(\sigma^2_B\right)'}{\tilde{\mu}_B\sigma^2_B} = 0.$$

Ši išvestinė lygi 0 tada ir tik tada, kai

$$\tilde{\mu}'_B\sigma^2_B - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_B\left(\sigma^2_B\right)' = 0.$$

Pirmiausia atlikime šiuos tarpinius skaičiavimus, kurie bus naudojami įrodyme

$$\tilde{\mu}_B = b\mu_{A_1} + (1-b)\mu_{A_2} - r_A;$$

$$(\tilde{\mu}_B)' = \mu_{A_1} - \mu_{A_2};$$

$$\sigma^2_B = bA_1 + (1-b)A_2 = (b, (1-b)\begin{pmatrix}\sigma^2_{A_1} & cov(r_{A_1}, r_{A_2})\\ cov(r_{A_1}, r_{A_2}) & \sigma^2_{A_2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}b\\ 1-b\end{pmatrix};$$

$$\sigma^2_B = b^2\sigma^2_{A_1} + (1-b)^2\sigma^2_{A_2} + 2b(1-b)cov(r_{A_1}, r_{A_2});$$

$$\left(\sigma^2_B\right)' = 2b\sigma^2_{A_1} - 2(1-b)\sigma^2_{A_2} + (2-4b)cov(r_{A_1}, r_{A_2}).$$

Toliau, pritaikykime atliktus skaičiavimus

$$\begin{aligned}&\tilde{\mu}'_B\sigma^2_B - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_B\left(\sigma^2_B\right)' =\\ &(\mu_{A_1} - \mu_{A_2})(b^2\sigma^2_{A_1} + (1-b)^2\sigma^2_{A_2} + 2b(1-b)cov(r_{A_1}, r_{A_2}))\\ &-(b\mu_{A_1} + (1-b)\mu_{A_2} - r_f)(b\sigma^2_{A_1} - (1-b)\sigma^2_{A_2}\\ &+(1-2b)cov(r_{A_1}, r_{A_2})) = 0.\end{aligned} \tag{19}$$

Supaprastinę ir pertvarkę reiškinį (19) gauname, kad

$$\begin{aligned}
&\tilde{\mu}'_B\sigma_B^2 - \frac{1}{2}\tilde{\mu}_B\left(\sigma_B^2\right)' = \\
&- b(\tilde{\mu}_{A_1}(\sigma_{A_2}^2 - cov(r_{A_1}, r_{A_2})) + \tilde{\mu}_{A_2}(\sigma_{A_1}^2 - cov(r_{A_1}, r_{A_2}))) \\
&+ (\tilde{\mu}_{A_1}\sigma_{A_2}^2 - \tilde{\mu}_{A_2}cov(r_{A_1}, r_{A_2})) = 0.
\end{aligned} \tag{20}$$

Išsprendę lygtį (20) gauname, kad ji įgyją 0 reikšmę, kai

$$b = \frac{\tilde{\mu}_{A_1}\sigma_{A_2}^2 - \tilde{\mu}_{A_2}cov(r_{A_1}, r_{A_2})}{\tilde{\mu}_{A_1}(\sigma_{A_2}^2 - cov(r_{A_1}, r_{A_2})) + \tilde{\mu}_{A_2}(\sigma_{A_1}^2 - cov(r_{A_1}, r_{A_2}))}.$$

Tuomet pastebime, kad išvestinės ženklas keičiasi iš „+" į „−", būtent šiame taške, kuriame išvestinė lygi 0, todėl galime teigti, jog tai yra funkcijos maksimumas. ▲

2.3.2 Kai portfelis sudarytas iš n aktyvų

Toliau pateiktas teiginys ir įrodymas, kada portfelio sudaryto iš n aktyvų atveju Šarpo rodiklis įgauna maksimalią reikšmę.

Teiginys 2.4 *Portfelio $B = b_1A_1 + \cdots + b_nA_n$ Šarpo rodiklis*

$$S_B(\mathbb{B}) = \frac{\mathbb{B}\mu^T - r_f}{\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}} \tag{21}$$

yra didžiausias, kai portfelio svoriai yra

$$\mathbb{B}^T = \frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T},$$

čia $\mu = (\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_n})$ yra aktyvų tikėtinų grąžų vektorius, o rizikos premijų vektorius – $\tilde{\mu} = (\mu_{A_1} - r_f, \ldots, \mu_{A_n} - r_f)$.

Įrodymas 2.4 *Raskime funkcijos $\frac{\mathbb{B}\mu^T - r_f}{\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}}}$ maksimumą, kai $\mathbb{1}\mathbb{B}^T = 1$. Šiam veiksmui atlikti taip pat bus naudojamas Lagranžo daugiklių metodas [6]. Pirmiausia sudarykime Lagranžo funkciją*

$$L(b_1, \ldots, b_n, \lambda) = L(\mathbb{B}, \lambda) = \frac{\mathbb{B}\mu^T - r_f}{\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}} + \lambda\left(\mathbb{1}\mathbb{B}^T - 1\right). \tag{22}$$

Toliau sudarytai funkcijai $L(\mathbb{B}, \lambda)$ (22) raskime dalines išvestines – skaičiuokime išvestinę pagal b_1, tada darbą tęskime su kitais kintamaisiais $b_2, \ldots, b_n$ t.y. randame funkcijos $L(\mathbb{B}, \lambda)$ išvestinę pagal $\mathbb{B}$

$$L'_{\mathbb{B}}(\mathbb{B}, \lambda) = \left(\frac{\mathbb{B}\mu^T - r_f}{\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}}\right)'_{\mathbb{B}} = \frac{\mu^T\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T} - \left(\mathbb{B}\mu^T - r_f\right)\frac{\Sigma\mathbb{B}^T}{\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}}}{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T} + \lambda\mathbb{1}^T.$$

Toliau darbą tęsiame su λ. Visas gautas funkcijos dalines išvestines prilyginkime nuliui. Gauname lygčių sistemą, kurios matricinis pavidalas pateiktas toliau

$$\begin{cases} \mu^T\left(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T\right) - \left(\mathbb{B}\mu^T - r_f\right)\Sigma\mathbb{B}^T + \lambda\mathbb{1}^T\left(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T\right)^{\frac{3}{2}} = (0,\ldots,0)^T, \\ \mathbb{1}\mathbb{B}^T - 1 = 0. \end{cases} \tag{23}$$

Pirmąsias n *sistemos (23) lygtis padauginę iš* $\mathbb{B}$ *ir padaliję iš* $\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$ *gauname*

$$\mathbb{B}\mu^T - \left(\mathbb{B}\mu^T - r_f\right) + \mathbb{B}\mathbb{1}^T\lambda\left(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T\right)^{\frac{1}{2}} = 0. \tag{24}$$

Pertvarkę ir supaprastinę reiškinį (24) gauname, jog

$$\lambda = \frac{-r_f}{(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{1}{2}}}. \tag{25}$$

Tuomet išraišką (25) įrašome į pirmąją sistemos (23) lygtį

$$\mu^T\left(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T\right) - \left(\mathbb{B}\mu^T - r_f\right)\Sigma\mathbb{B}^T + \frac{-r_f}{(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T)^{\frac{1}{2}}}\mathbb{1}^T\left(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T\right)^{\frac{3}{2}} =$$

$$= \mu^T\left(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T\right) - \left(\mathbb{B}\mu^T - r_f\right)\Sigma\mathbb{B}^T - r_f\mathbb{1}^T\left(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T\right) = 0$$

$$\Rightarrow \quad \left(\mathbb{B}\mu^T - r_f\right)\Sigma\mathbb{B}^T = \left(\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T\right)\left(\mu^T - r_f\mathbb{1}^T\right)$$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{B}^T = \frac{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}{\mathbb{B}\mu^T - r_f}\Sigma^{-1}\left(\mu - r_f\mathbb{1}\right)^T.$$

Iš paskutiniosios sistemos (23) lygties gauname

$$\mathbb{1}\frac{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}{\mathbb{B}\mu^T - r_f}\Sigma^{-1}\left(\mu - r_f\mathbb{1}\right)^T = 1 \Rightarrow \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T = \frac{\mathbb{B}\mu^T - r_f}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\left(\mu - r_f\mathbb{1}\right)^T}$$

Taigi,

$$\mathbb{B}^T = \frac{\Sigma^{-1}\left(\mu - r_f\mathbb{1}\right)^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}(\mu - r_f\mathbb{1})^T}. \tag{26}$$

Kad įsitikintume, jog gauta reikšmė (26) yra maksimumas, imkime bet kokį kitą tašką, pavyzdžiui

$$\tilde{\mathbb{B}}^T = \frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T} + \Delta^T,$$

kai $\Delta = (\delta_1,\ldots,\delta_n) \in \mathbb{R}^n$. *Gauname, jog Šarpo rodiklis šiame taške yra*

$$S_B\left(\tilde{\mathbb{B}}\right) = \frac{\tilde{\mathbb{B}}\tilde{\mu}^T}{\sqrt{\tilde{\mathbb{B}}\Sigma\tilde{\mathbb{B}}^T}} = \frac{\tilde{\mu}^T\left(\frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T} + \Delta\right)}{\sqrt{\left(\frac{\tilde{\mu}\Sigma^{-1}}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T} + \Delta\right)\Sigma\left(\frac{\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T} + \Delta^T\right)}} = \tag{27}$$

$$= \frac{\frac{\tilde{\mu}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T} + \Delta\tilde{\mu}^T}{\sqrt{\frac{\tilde{\mu}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T}{(\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T)^2} + \frac{\Delta^T\tilde{\mu}+\Delta\tilde{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T} + \Delta\Sigma\Delta^T}}.$$

Taigi, Šarpo rodiklis yra maksimalus taške $\mathbb{B}^T$*, jei*

$$S_B\left(\tilde{\mathbb{B}}\right) < S_B\left(\mathbb{B}\right), \tag{28}$$

kai Δ *yra bet koks pasirinktas* $(\delta_1, \ldots, \delta_n) \neq (0, \ldots, 0)$*. Tuomet palyginę gautas išraiškas* (21), (36) *ir jas pertvarkę gauname*

$$\frac{\tilde{\mu}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T} + \Delta\tilde{\mu}^T < \sqrt{\left(\frac{\tilde{\mu}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T} + \Delta\tilde{\mu}^T\right)^2 - (\Delta\tilde{\mu}^T)^2 + \Delta\Sigma\Delta^T\tilde{\mu}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T}.$$

Taigi nelygybė (28) *yra teisinga, jei*

$$\left(\Delta\tilde{\mu}^T\right)^2 < \Delta\Sigma\Delta^T\tilde{\mu}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T.$$

Taip yra todėl, nes nelygybės $x < \sqrt{x^2+\epsilon}$ *yra teisinga su visais* $x \in \mathbb{R}$ *ir* $\epsilon > 0$*: jei* $x \leq 0$*, tai nelygybė* $x < \sqrt{x^2+\epsilon}$ *akivaizdi; jei* $x \geq 1$*, tai* $x^2 < x^2+\epsilon$ *taip pat teisinga; jei* $0 < x < 1$*, tai* $x < x\sqrt{1+\frac{\epsilon}{x^2}} \quad \Rightarrow \quad 1 < \sqrt{1+\frac{\epsilon}{x^2}}$.

Taip pat nesunku pastebėti, jog kovariacijų matrica

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{A1} & cov(r_{A_1}, r_{A_2}) & \ldots & cov(r_{A_1}, r_{A_n}) \\ cov(r_{A_1}, r_{A_2}) & \sigma^2_{A2} & \ldots & cov(r_{A_2}, r_{A_n}) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(r_{A_1}, r_{A_n}) & cov(r_{A_2}, r_{A_n}) & \ldots & \sigma^2_{An} \end{pmatrix}$$

yra teigiamai apibrėžta. Taip turime todėl, kad portfelio $B = b_1A_1 + \cdots + b_nA_n$, $\mathbb{1}\mathbb{B}^T = 1$ *dispersija tikrai*

$$\sigma^2 = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T > 0,$$

su bet kokiais svoriais $\mathbb{B} \neq (0, \ldots, 0)$*, jei atsitiktiniai dydžiai* $r_{A_1}, \ldots, r_{A_n}$ *nėra išsigimę, t.y. aktyvai* $A_1, \ldots, A_n$ *yra rizikingi.*

Kadangi turime, jog neišsigimusių atsitiktinių dydžių kovariacijų matrica yra teigiamai apibrėžta, todėl

$$\left(\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T\right)^2\tilde{\mathbb{B}}\Sigma\tilde{\mathbb{B}}^T = \Delta\Sigma\Delta^T\left(\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T\right)^2 + 2\Delta\tilde{\mu}^T\left(\mathbb{1}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T\right) + \tilde{\mu}\Sigma^{-1}\tilde{\mu}^T > 0.$$

Kadangi $ax^2 + bx + c > 0 \quad \Rightarrow \quad b^2 - 4ac < 0$*, tai gauta reikšmė (26) yra maksimumas.* ▲

Teiginiai 2.2, 2.1, 2.3, 2.4 ir įrodymai 2.2, 2.1, 2.3, 2.4 parengti remiantis *A. Grigučio medžiaga „Portfeliai sudaryti iš rizikingų aktyvų"* [14].

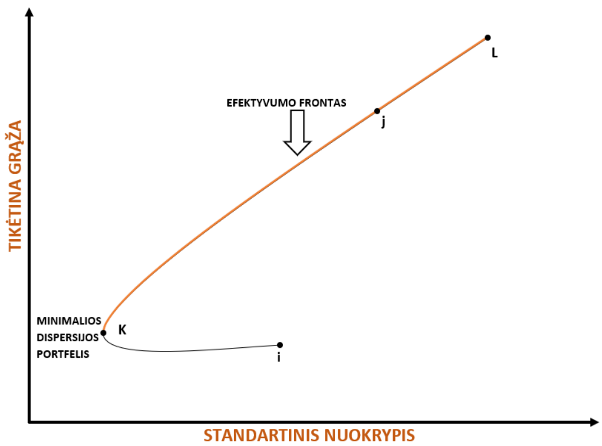
2.4 Efektyvumo frontas

Kaip ir minėta anksčiau, Modernaus portfelio teorija teigia, kad investuotojai yra rizikos vengiantys ir už tam tikrą tikėtiną grąžą renkasi mažiau rizikingus portfelius, todėl investuotojai turėtų rinktis tik tuos portfelius, kurie yra ant efektyvumo fronto linijos, kadangi jie yra pranašesni. Portfelis (aktyvas) A_1 yra laikomas **pranašesniu** už kitą portfelį (aktyvą) A_2, jei $\sigma_{A_1} \geq \sigma_{A_2}$ ir $\mu_{A_1} \leq \mu_{A_2}$. Jei $\mathbb{B}$ yra portfelių aibė, tai portfelis $B \in \mathbb{B}$ yra laikomas efektyviu aibės $\mathbb{B}$ atžvilgiu, jei neegzistuoja kitas už B pranašesnis portfelis.

Efektyvumo frontas tai tokia pelningumo ir rizikos kombinacijų aibė, kuriai priklauso efektyvūs portfeliai. Portfeliai, kurie priklauso efektyvumo frontui dar yra vadinami **efektyviai diversifikuotais**.

Toliau paveikslėlyje 3 pavaizduoti visi įmanomi portfeliai sudaryti iš dviejų aktyvų i, j bei efektyvumo frontas.

3 pav.: Dviejų aktyvų efektyvumo frontas *(sudaryta autorės)*



Paveikslėlyje 3 kreivė, kuriai priklauso taškai i ir j ir plotas po ja vaizduoja visas galimas pelningumo ir rizikos kombinacijas (portfelius) iš dviejų aktyvų i ir j. Atkarpa tarp taškų K ir L – tai efektyvumo frontas. O taškas K – tai mažiausios dispersijos portfelis.

2.4.1 Portfelio iš rizikingų aktyvų efektyvumo frontas

Tais atvejais, kai portfelis yra sudarytas tik iš rizikingų aktyvų, rizikos (σ) ir tikėtinos grąžos (μ) sąryšis yra kvadratinis (t.y. $\sigma = \sqrt{a\mu^2 + b\mu + c}$) ir įprastai vaizduojamas kaip **Markowitz kulka**. Kadangi sąryšis yra kvadratinis (kreivė hiperbolės formos), tai, esant tam tikram rizikos lygiui, Markowitz kulkai priklauso du portfeliai su skirtingomis tikėtinomis grąžomis.

Akivaizdu, jog rizikos vengiantis investuotojas esant vienodoms sąlygoms, pirmenybę teiks didesniam atlygiui už tą patį rizikos lygį. Visi tokie efektyvūs portfeliai priklauso tik viršutinei hiperbolės daliai, kuri ir yra laikoma efektyvumo frontu (žr. pav. 4).

Kai portfelis yra sudarytas daugiau nei iš dviejų aktyvų, tuomet efektyvumo frontą galime rasti sprendžiant grąžos maksimizavimo uždavinį, kai rizika $\sigma_B^2 = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T = \sigma_0^2$ fiksuota, o aktyvų svoriai $b_1 + \cdots + b_n = \mathbb{1}\mathbb{B}^T = 1$. Šis uždavinys su fiksuota rizika yra ekvivalentus rizikos minimizavimui, kai grąža yra fiksuota $\boldsymbol{\mu}\mathbb{B}^T = \mu_0$. Šiam uždaviniui spręsti taip pat yra naudojamas ir Lagranžo daugiklių metodas [6].

Teiginys 2.5 *Portfelio $B = b_1A_1 + \cdots + b_nA_n$ dispersija $\sigma_B^2 = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$, kai $\boldsymbol{\mu}\mathbb{B}^T = \mu_0$ ir $\mathbb{1}\mathbb{B}^T = 1$, yra minimali, jei*

$$\mathbb{B}^T = \left(\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T, \Sigma^{-1}\mathbb{1}^T\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \\ \mathbb{1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \end{pmatrix}^{-1}\begin{pmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Įrodymas 2.5 *Pirmiausia sudarykime Lagranžo funkciją*

$$L(\mathbb{B}, \lambda_1, \lambda_2) = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T + \lambda_1\left(\boldsymbol{\mu}\mathbb{B}^T - \mu_0\right) + \lambda_2\left(\mathbb{1}\mathbb{B}^T - 1\right) \tag{29}$$

ir raskime jos dalines išvestines. Radę funkcijos $L(\mathbb{B}, \lambda_1, \lambda_2)$ (29) dalines išvestines pagal $\mathbb{B}$, $\lambda 1$, λ_2 jas prilyginkime nuliui

$$\begin{cases} 2\Sigma\mathbb{B}^T + \lambda_1\boldsymbol{\mu}^T + \lambda_2\mathbb{1}^T = (0, \ldots, 0)^T, \\ \boldsymbol{\mu}\mathbb{B}^T - \mu_0 = 0, \\ \mathbb{1}\mathbb{B}^T - 1 = 0. \end{cases} \tag{30}$$

Pirmąsias n sistemos (30) lygčių pertvarkę gauname, kad

$$\mathbb{B}^T = -\frac{\lambda_1}{2}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{\lambda_2}{2}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T. \tag{31}$$

Šią išraišką (31) galime užrašyti kompaktiškiau

$$\mathbb{B}^T = \left(\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T, \Sigma^{-1}\mathbb{1}^T\right)\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{2} \\ -\frac{\lambda_2}{2} \end{pmatrix}. \tag{32}$$

Toliau gautą lygybę (31) *padauginame iš $\boldsymbol{\mu}$ ir iš $\mathbb{1}$, gauname*

$$\begin{cases} -\frac{\lambda_1}{2}\boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{\lambda_2}{2}\boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T = \mu_0, \\ -\frac{\lambda_1}{2}\mathbb{1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{\lambda_2}{2}\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T = 1. \end{cases}$$

Tiesinių lygčių sistemą galime užrašyti matriciniu pavidalu

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \\ \mathbb{1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{2} \\ -\frac{\lambda_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Išsprendę gauname, jog

$$\begin{pmatrix} -\frac{\lambda_1}{2} \\ -\frac{\lambda_1}{2} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \\ \mathbb{1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{pmatrix} \tag{33}$$

taip pat galiausiai gautą išraišką (33) įrašome į (32) *ir gauname, jog*

$$\mathbb{B}^T = \left(\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T, \Sigma^{-1}\mathbb{1}^T\right) \begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \\ \mathbb{1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \end{pmatrix}^{-1} \begin{pmatrix} \mu_0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Matrica

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \\ \mathbb{1}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T & \mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T \end{pmatrix}$$

nėra išsigimusi (determinantas $\neq 0$*). Šios matricos determinantas bus didesnis už nulį*

$$\left(\boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T\right)\left(\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T\right) - \left(\boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T\right)^2 > 0,$$

nes su visais a*,* $b \in \mathbb{R}$ *ir* $b \neq 0$ *yra teisinga ši nelygybė*

$$(a\boldsymbol{\mu} + b\mathbb{1})\,\Sigma^{-1}\,(a\boldsymbol{\mu} + b\mathbb{1})^T = a^2\boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T + 2ab\boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T + b^2\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T > 0.$$

Taigi šios kvadratinės nelygybės diskriminantas yra neigiamas, matrica nėra išsigimusi

$$4b^2\left(\boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T\right)^2 - 4b^2\left(\boldsymbol{\mu}\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T\right)\left(\mathbb{1}\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T\right) < 0.$$

Gautas taškas $\mathbb{B}^T$ *(38) yra minimumo taškas, kadangi sudarytosios funkcijos* $L(\mathbb{B}, \lambda_1, \lambda_2)$ *antros eilės diferencialas yra teigiamas (antros eilės diferencialo testas), nes* $L''_{\mathbb{B},\mathbb{B}}(\mathbb{B}, \lambda_1, \lambda_2) = 2\Sigma$*. (Pagrindimas nagrinėtas poskyryje 2.2.2.)*
▲

2.4.2 Portfelio iš rizikingų ir vieno nerizikingo aktyvų efektyvumo frontas

Tais atvejais, kai į portfelį, sudarytą iš rizikingų aktyvų, įtraukiamas vienas nerizikingas aktyvas, Markowitz kulkos forma tampa tiesine. Kai atsiranda galimybė į portfelį įtraukti nerizikingą aktyvą, tuomet galimybių aibė tampa didesne nei sudarant tik iš rizikingų aktyvų, o jos viršutinė riba – efektyvumo frontas, yra tiesė, išeinanti iš ordinačių ašies ties nerizikingo turto grąžos verte ir liečianti tik rizikingo turto galimybių aibę (žr. pav. 4). Esant tam tikram rizikos lygiui kiekvienas portfelis, priklausantis tiesiniam efektyvumo frontui, (t.y. kai įtrauktas nerizikingas aktyvas) turi didesnę ar tokią pačią tikėtiną grąžą lyginant su bet kokiu portfeliu priklausančiu hiperboliniam efektyvumo frontui.

Tarkime, kad rizikingo portfelio tikėtina grąža yra didesnė už r_f. Pažymėkime b_f nerizikingo aktyvo r_f svorį portfelyje, tuomet turime, jog

$$\mathbb{B}^T\mathbb{1} + b_f = 1.$$

Tikėtiną portfelio, sudaryto iš rizikingų ir vieno nerizikingo aktyvų, grąžą galime užrašyti taip

$$\mu_B = \mathbb{B}^T\boldsymbol{\mu} + b_f r_f = \mathbb{B}^T\boldsymbol{\mu} + r_f\left(1 - \mathbb{B}^T\mathbb{1}\right) = r_f + \mathbb{B}^T\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right).$$

Kadangi r_f yra fiksuota nerizikinga palūkanų norma, norėdami sudaryti efektyvumo frontą portfeliui $B = b_1A_1 + \cdots + b_nA_n + b_fF$ turime minimizuoti portfelio dispersiją $\mathbb{B}^T\Sigma\mathbb{B}$ t.y. turime rasti tokius svorius $\mathbb{B} = (b_1, \ldots, b_n)$, su kuriais dispersija $\sigma_B^2 = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$ yra minimali, kai tikėtina grąža fiksuota tai reiškia, kad

$$\tilde{\mu}_B = \tilde{\boldsymbol{\mu}}\mathbb{B}^T = \mu_0 - r_f = \tilde{\mu}_0,$$

kai $\tilde{\mu}_B = \mu_B - r_f$ ir $\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}$.

Taigi, gauname tokį optimizavimo uždavinį:

$$\min_{\mathbb{B}} \quad \mathbb{B}^T\Sigma\mathbb{B}, \quad taip, \quad kad$$

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}\mathbb{B}^T = \tilde{\mu}_B.$$

Teiginys 2.6 *Portfelio $B = b_1A_1 + \cdots + b_nA_n + b_fF = 1$ efektyvumo frontas yra tiesė*

$$\boldsymbol{\mu} = r_f + \sigma\sqrt{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)},$$

kai $\sigma \geq 0$ ir $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{A_1}, \ldots, \mu_{A_n})$.

Įrodymas 2.6 *Pastebime, jog sąlyga $\mathbb{B}^T\mathbb{1} = 1$ (portfelio akyvų svorių suma turi būti lygi vienetui) jau yra įtraukta į lygybę*

$$\tilde{\mu}_B = \mu_B - r_f = \mathbb{B}^T\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right) = \tilde{\boldsymbol{\mu}}\mathbb{B}^T.$$

Nerizikingam aktyvui galime skirti bet kokią norimą portfelio dalį. Portfelio dispersija nesikeičia, nes r_f yra nerizikinga norma.

Kaip ir anksčiau, naudodamiesi Lagranžo daugiklių metodu [6] sudarykime Lagranžo funkciją

$$L(\mathbb{B}, \lambda) = \mathbb{B}^T\Sigma\mathbb{B} - \lambda\left(\mathbb{B}^T\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right) - \left(\mu_0 - r_f\right)\right). \tag{34}$$

Toliau sudarytai funkcijai $L(\mathbb{B}, \lambda)$ (34) raskime dalines išvestines – skaičiuokime išvestinę pagal b_1 ir tada darbą tęskime su kitais kintamaisiais $b_2, \ldots, b_n$ t.y. randame funkcijos $L(\mathbb{B}, \lambda)$ dalinę išvestinę pagal $\mathbb{B}$. Toliau *darbą tęsiame su λ. Visas gautas funkcijos dalines išvestines prilyginkime nuliui. Gauname lygčių sistemą, kurios matricinis pavidalas pateiktas toliau*

$$\begin{cases} 2\Sigma\mathbb{B}^T - \lambda\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T = (0, \ldots, 0)^T, \\ \mathbb{B}^T\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right) - (\mu_0 - r_f) = 0. \end{cases} \tag{35}$$

Supaprastinę iš pirmųjų n sistemos (35) lygčių gauname, kad

$$\mathbb{B}^T = \frac{\lambda}{2}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T. \tag{36}$$

Toliau panaudoję gautą $\mathbb{B}^T$ išraišką gauname

$$(\mu_0 - r_f) = \left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)\mathbb{B}^T = \frac{\lambda}{2}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)$$

ir galiausiai randame, jog

$$\lambda = \frac{2\left(\mu_0 - r_f\right)}{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)}. \tag{37}$$

Galime λ išraišką įrašyti į (36) ir gauname, jog

$$\mathbb{B}^T = (\mu_0 - r_f)\left(\frac{\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T}{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T}\right). \tag{38}$$

Norėdami įrodyti, jog gautas taškas (38) yra minimumas, turime remtis išvestinių matrica (kai ij pozicijoje yra išvestinė pagal i–ąjį ir j–ąjį kintamuosius) $L''(\mathbb{B}, \lambda)_{\mathbb{B},\mathbb{B}} = 2\Sigma$. (Pagrindimas nagrinėtas poskyryje 2.2.2.) Dabar išreikškime dispersiją σ^2 optimaliais svoriais

$$\sigma^2 = \mathbb{B}^T\Sigma\mathbb{B} =$$

$$= (\mu - r_f)^2\,\frac{\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T}{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)}\Sigma\,\frac{\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T}{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)} =$$

$$= \frac{(\mu - r_f)^2}{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)}.$$

Galiausiai, perrašykime šią funkciją taip

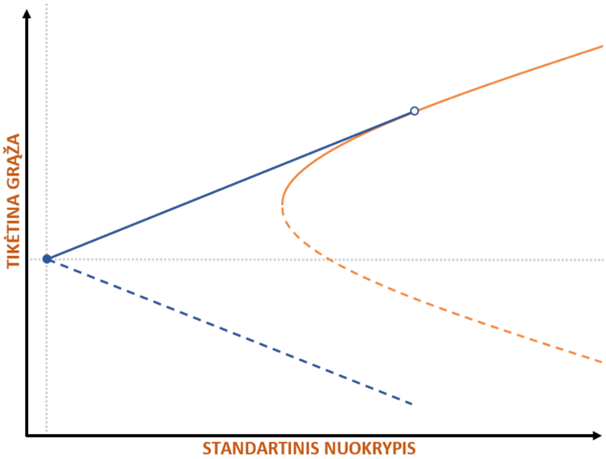
$$|\mu - r_f| = \sigma\sqrt{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)}$$

$$\Downarrow$$

$$\mu = r_f \pm \sigma\sqrt{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)}, \quad \sigma \geq 0.$$

Taigi, matome, jog atveju, kai į portfelį yra įtrauktas nerizikingas aktyvas, Markowitz kulka yra tiesinė funkcija, kurios viršutinė dalis yra efektyvumo frontas. ▲

4 pav.: Portfelio iš rizikingų aktyvų ir įtraukus nerizikingą aktyvą efektyvumo frontai [10]



Paveikslėlyje 4 Markowitz kulka, kai portfelis sudarytas tik iš rizikingų aktyvų, pažymėta oranžine spalva – ištisine linija žymimas efektyvumo frontas. Mėlyna spalva ištisine linija žymimas portfelio iš rizikingų ir vieno nerizikingo aktyvų efektyvumo frontas. Mėlynos ir oranžinės spalvos punktyrinės linijos žymi neefektyvius portfelius, kadangi bet koks kitas portfelis virš simetrijos ašių turi didesnę tikėtiną grąžą esant tam pačiam rizikos lygiui. Mėlynas taškas žymi nerizikingą palūkanų normą, o mėlynas tuščiaviduris taškas tai optimalus portfelis.

Toliau, pateikiamas teiginys apie šio optimalaus portfelio liestinę, kuris suformuluotas ir įrodytas *A. Grigučio medžiagoje „Portfeliai sudaryti iš rizikingų aktyvų"* [14].

Teiginys 2.7 *Tegul $B = bA_1 = (1-b)A_2$. Parametrinės kreivės (σ_B, μ_B), $b \in [0,1]$ liestinė optimaliame taške M yra*

$$\mu = \frac{\mu_M - r_f}{\sigma_M}\sigma + r_f.$$

Įrodymas 2.7 *Tiesė*

$$\mu - \mu_M = \tan\alpha\,(\sigma - \sigma_M)$$

yra kreivės liestinė. Čia (σ_M, μ_M) lietimosi taškas, α – kampas tarp tiesės ir σ ašies, M – optimalus portfelis, kurio Šarpo rodiklis yra maksimalus. Toliau remiantis teiginiu (2.4) apie maksimalų Šarpo rodiklį gauname

$$\sigma_M = \sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T} = \frac{\sqrt{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1})\,\Sigma^{-1}\,(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1})^T}}{|(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1})\,\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T|},$$

$$\mu_M = \mathbb{B}\boldsymbol{\mu}^T = \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1})\,\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T}{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1})\,\Sigma^{-1}\mathbb{1}^T},$$

$$\tan\alpha = \frac{d\mu}{d\sigma} = \frac{d\mu/db}{d\sigma/db} = \frac{(1,-1)\boldsymbol{\mu}^T\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}}{(1,-1)\Sigma\mathbb{B}^T}.$$

Tuomet turime

$$\mu - \mathbb{B}\boldsymbol{\mu}^T = \frac{(1,-1)\boldsymbol{\mu}^T\sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}}{(1,-1)\Sigma\mathbb{B}^T}\left(\sigma - \sqrt{\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}\right).$$

Tuo atveju, kai $\sigma = 0$, tai

$$\mu = \mathbb{B}\boldsymbol{\mu}^T - \frac{(1,-1)\boldsymbol{\mu}^T\mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T}{(1,-1)\Sigma\mathbb{B}^T} =$$

$$= \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1})\,\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T} - \frac{(1,-1)\boldsymbol{\mu}^T\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T}{(1,-1)\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T\mathbb{1}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T}.$$

Toliau pastebime, kad $(1,-1)\boldsymbol{\mu}^T = (1,-1)\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T$. Taigi,

$$\mu = \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1})\,\Sigma^{-1}\boldsymbol{\mu}^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T} - \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1})\,\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T}{\mathbb{1}\Sigma^{-1}\left(\boldsymbol{\mu} - r_f\mathbb{1}\right)^T} = r_f.$$

Gauname, jog liestinė eina per tiesės tašką $(0, r_f)$. [14]

Poskyriai 2.4.1 – 2.4.2 parengti remiantis G. Gundersen „Geometry of the Efficient Frontier" [10] bei A. Grigučio medžiaga „Portfeliai sudaryti iš rizikingų aktyvų" [14].

3 Praktinė dalis

Šioje darbo dalyje remiantis Modernistine portfelio formavimo teorija (kuri nagrinėjama šio darbo pirmojoje dalyje) iš pasirinktų įmonių akcijų sudaromi lygių svorių, minimalios dispersijos ir maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfeliai, lyginami gautų portfelių rodikliai, sudaromas efektyvumo frontas įtraukiant nerizikingą aktyvą. Skaičiavimams atlikti ir duomenims atvaizduoti brėžiniuose naudota „Python" programavimo kalba (5) bei programa „MS Excel".

3.1 Duomenys

Praktinėje darbo dalyje nagrinėjamos 10 atsinaujinančių energetikos įmonių akcijos ir jų istorinės grąžos. Duomenys gauti naudojantis informacija pateikta *yahoo.finance* internetiniame puslapyje. Tiriamas laikotarpis – 5 metai (nuo 2017-01-01 iki 2022-12-31). Įmonės pasirinktos atsitiktine tvarka.

- **Brookfield Renewable Partners** (BEP) – 2011 metais įkurta bendrovė, kuri specializuojasi investavimu į atsinaujinančios energijos projektus visame pasaulyje – vėjo jėgaines, saulės elektrines, hidroelektrines.

- **Canadian Solar** (CSIQ) – 2001 metais įkurta bendrovė, kuri gamina saulės fotovoltonius modulius bei vykdo didelius projektus, susijusius su saulės energija. Didžioji dalis gamyklų yra Kanadoje ir Kinijoje, kitos gamyklos – Indonezijoje, Vietname ir Brazilijoje.

- **Enphase Energy** (ENPH) – 2006 metais įkurta bendrovė, kuri daugiausiai gamina privatiems klientams skirtus saulės mikroinverterius, baterijų energijos kaupiklius ir elektromobilių įkrovimo stoteles. Pagrindinė būstinė – Fremonte, Kalifornijoje.

- **First Solar** (FSLR) – 1999 metais įkurta bendrovė yra pirmaujanti JAV saulės technologijų bendrovė, kuri skatina kovą su klimato kaita ir gamina ekologiškai efektyvius saulės modulius. Tarp dešimties didžiausių pasaulyje saulės modulių gamintojų išsiskiria tuo, kad tai vienintelė JAV įsikūrusi bendrovė, kuri negamina Kinijoje.

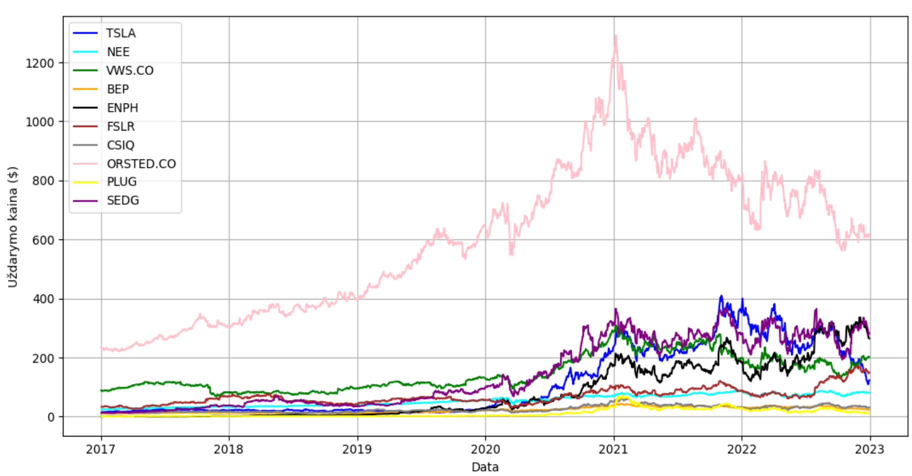
- **NextEra Energy** (NEE) – 1925 metais įkurta bendrovė, kuri užsiima elektros energijos gamyba ir platinimu. Tai viena didžiausių JAV energetikos bendrovių, taip pat yra pirmaujanti atsinaujinančios energijos gamintoja. Apima įvairius atsinaujinančios energetikos projektus, įskaitant vėjo jėgaines ir saulės elektrines.

- **Orsted** (ORSTED.CO) – 1972 metais įkurta Danijos bendrovė. Tai pirmaujanti ir didžiausia Danijoje švarios energetikos bendrovė, kurianti ir eksploatuojanti atsinaujinančiosios energijos projektus, įskaitant vėjo ir saulės energijos parkus, baterijų saugyklas ir vandenilio įrenginius.
- **Plug Power** (PLUG) – 1997 metais įkurta JAV bendrovė, kuri kuria vandenilio kuro elementų sistemas, kurios pakeičia įprastus akumuliatorius elektra varomose transporto priemonėse.
- **SolarEdge Technologies** (SEDG) – 2006 metais įkurta Izraelio bendrovė, gerina saulės energijos gamybos, vartojimo ir valdymo būdus įvairiose srityse ir pramonės šakose, gamina optimizuotas inverterių sistemas.
- **Tesla** (TSLA) – 2003 metais įkurta JAV bendrovė, kuri gamina elektrinius automobilius bei energijos saugojimo produktus, kurie leidžia vartotojams saugoti perteklinę energiją, saulės baterijų sistemas.
- **Vestas Wind Systems** (VWS.CO) – 1945 metais įkurta Danijos bendrovė, kuri gamina, pardavinėja ir montuoja vėjo jėgaines. Tai viena iš pagrindinių vėjo jėgainių gamintojų pasaulyje.

Taip pat, sudarant efektyvumo frontą, įtraukiamas ir nerizikingas aktyvas **BIL** (SPDR Bloomberg 1–3 Month T–Bill ETF) – tai trumpalaikiai JAV vyriausybės vertybiniai popieriai, kurių tikėtina grąža 0,98%, o standartinis nuokrypis 0% (kadangi nerizikingas).

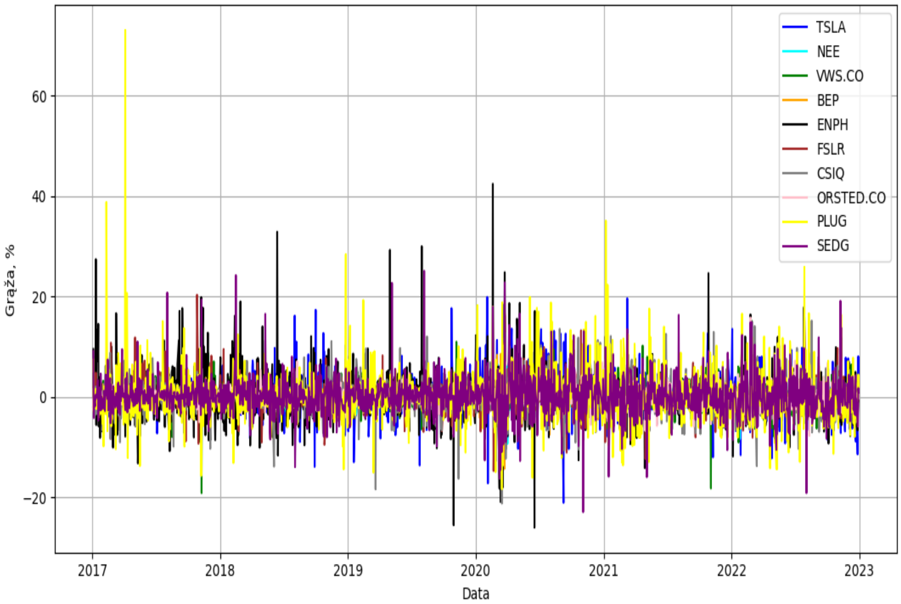
Toliau paveikslėlyje 5 pavaizduotos šių įmonių akcijų uždarymo kainos laikotarpiu nuo 2017 iki 2022. Nuo 2020 metų vidurio stebimas spartesnis beveik visų pasirinktų akcijų kainų kilimas. ORSTED.CO uždarymo kainos visu laikotarpiu ženkliai aukštesnės nei kitų pasirinktų įmonių.

5 pav.: Pasirinktų akcijų kainos *(sudaryta autorės)*



Paveikslėlyje 6 pavaizduotos šių akcijų istorinės grąžos. Joms skaičiuoti naudojami istoriniai duomenys taikant formulę (3), kuri apibrėžta anksčiau šiame darbe. Galima pastebėti, kad visų akcijų grąžos labai svyruoja visu nagrinėjamu laikotarpiu, didžiausi grąžos svyravimai PLUG akcijų.

6 pav.: Pasirinktų akcijų grąžos *(sudaryta autorės)*



Norint palyginti kiekvienos iš įmonių akcijas, remiantis anksčiau nagrinėtomis formulėmis, apskaičiuoti pagrindiniai akcijų rodikliai – metiniai aritmetiniai grąžų vidurkiai (4), standartiniai nuokrypiai (6), Šarpo rodikliai (21). Rezultatai pateikti lentelėje 1.

1 lentelė: Metiniai pasirinktų akcijų rodikliai

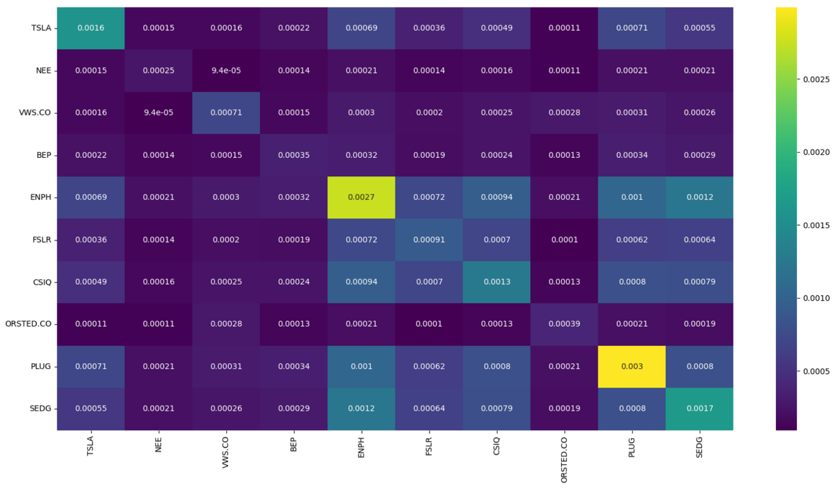
	$\overline{r}$, %	$\overline{\sigma}$	**Šarpo rodiklis**
BEP	17,0	28,5	0,60
CSIQ	29,7	55,0	0,54
ENPH	122,1	80,9	1,51
FSLR	35,2	46,7	0,75
NEE	22,2	24,9	0,89
ORSTED.CO	20,3	30,7	0,66
PLUG	71,4	84,7	0,84
SEDG	69,4	62,8	1,11
TSLA	53,3	60,8	0,88
VWS.CO	21,7	41,1	0,53

Remiantis lentelėje 1 pateiktais duomenimis, galima pastebėti, kad didžiausia grąža ir Šarpo rodiklis (kuris yra virš 1) yra ENPH, SEDG akcijų. Standartiniai nuokrypiai svyruoja nuo 24,9% net iki 84,7%. Didžiausias standartinis nuokrypis PLUG akcijų (tai patvirtina ir paveikslėlyje 6 stebėti svyravimai). Aukštas standartinis nuokrypis reiškia, jog investicija yra nepastovi ir priklausanti nuo kitų faktorių, todėl sunkiai prognozuojama. Kitas didelis standartinis nuokrypis yra ENPH akcijų – net 80,9%. Tačiau šios akcijos investuotojui patrauklios dėl didelės grąžos. Galime teigti, jog grąža viršys prisiimtą riziką investuojant į ENPH akcijas, tai parodo Šarpo rodiklis, kuris yra didžiausias iš nagrinėtų – net 1,55. Mažiausia grąža BEP akcijų, o mažiausias Šarpo rodiklis – CSIQ.

Toliau, remiantis formulėmis (8) ir (10) sudarytos kovariacijų ir koreliacijų matricos.

Iš kovariacijų matricos (paveikslėlis 7), galima pastebėti, jog visos reikšmės matricoje yra teigiamos, tai reiškia, jog visos pasirinktų įmonių grąžos tuo pačiu metu kinta (auga ar krenta) ta pačia kryptimi (visi aktyvai yra iš to paties sektoriaus – atsinaujinančios energetikos įmonės). Visos reikšmės kovariacijų matricoje labai mažos ir artimos 0. Kai kovariacijos tarp aktyvų lygios nuliui, tuomet laikoma, jog jų gražos viena nuo kitos nėra tiesiškai priklausomos ir aktyvai vadinami nekoreliuotais.

7 pav.: Kovariacijų matrica *(sudaryta autorės)*

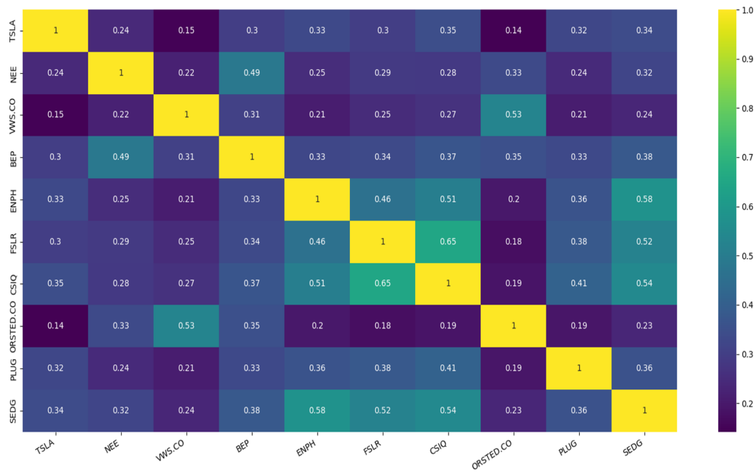


Remiantis koreliacijų matrica (paveikslėlis 8), galima pastebėti, kad tarp visų aktyvų koreliacija yra teigiama. ORSTED.CO akcijos yra mažiausiai koreliuotos su kitomis pasirinktomis akcijomis. Pati mažiausia koreliacija tarp ORSTED.CO ir TSLA. Tarp pasirinktų aktyvų didžiausią koreliaciją turi CSIQ ir FSLR, SEDG ir ENPH.

Svarbu diversifikuojant portfelį investuoti į aktyvus, kurių koreliacija maža, kad aktyvų tarpusavio priklausomybė (ryšys) būtų kuo silpnesnis –

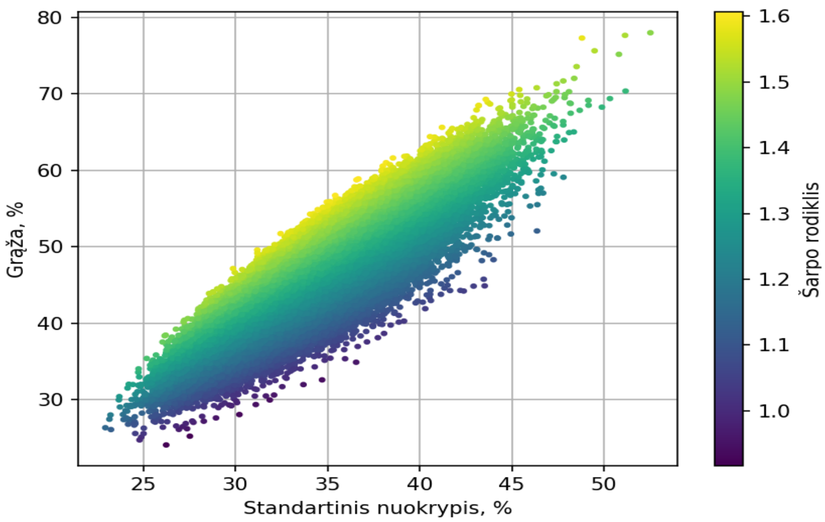
tuomet vieno aktyvo grąžoms krentant tikimybė, jog kito aktyvo grąžos taip pat kris yra mažesnė (kris nebūtinai). Įtraukiant į portfelį aktyvus, kurių koreliacija yra maža, taip yra sumažinama portfelio rizika.

8 pav.: Koreliacijų matrica *(sudaryta autorės)*



Iš pasirinktų 10 įmonių akcijų modeliuoti 100 000 atsitiktinių portfelių, kurie pavaizduoti paveikslėlyje 9. Portfeliai modeliuoti atsitiktinai generuojant tolygiai pasiskirsčiusius akcijų svorius portfeliuose. Remiantis grafiku galima pastebėti, jog prisiimant didesnę riziką (t.y. kuo didesnis standartinis nuokrypis) galima ir didesnė grąža. Taip pat kiekvienam portfeliui skaičiuotas Šarpo rodiklis (21), kuris žymimas spalvomis nuo tamsiai violetinės (0) iki geltonos (1,6).

9 pav.: 100 000 atsitiktinai sumodeliuotų portfelių *(sudaryta autorės)*



3.2 Lygių svorių portfelis

Naudojant **naivaus diversifikavimo** *(angl. Naive diversification)* metodą rastas lygių svorių portfelis sudarytas iš pasirinktų akcijų. Remiantis Modernaus portfelio teorija, svarbu investicinį portfelį diversifikuoti, vienas iš būdų – naivus diversifikavimas. Tai supaprastintas požiūris į portfelio diversifikavimą, kai svoriai paskirstomi lygiomis dalimis, neįvertinus pasirinkto turto specifinių savybių, rizikos ir koreliacijos. Nors tokie portfeliai gali būti ir labai rizikingi, tačiau yra naujų tyrimų, kurie rodo, jog šis supaprastintas diversifikavimas kai kuriais atvejais gali būti toks pats veiksmingas kaip ir kiti įmantrūs optimizavimo modeliai. [11].

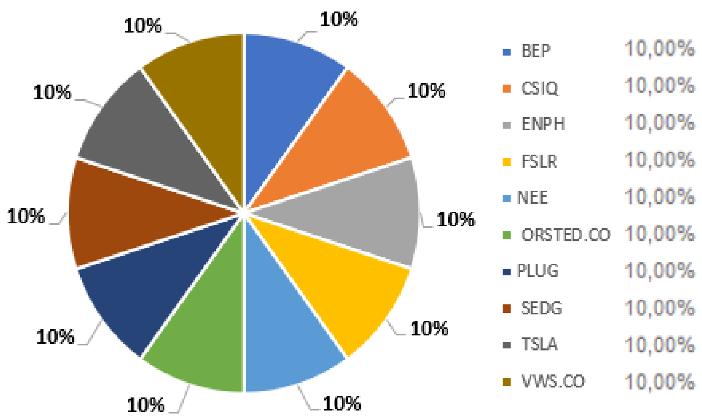
Šiuo atveju tiek tikėtina grąža, tiek ir Šarpo rodiklis yra didesni nei minimalios dispersijos portfelio atveju, todėl investuotojui naudingesnis lygių svorių portfelis.

2 lentelė: Lygių svorių portfelio rodikliai

$\overline{r}$, **%**	46,25
$\overline{\sigma}$, **%**	33,51
Šarpo rodiklis	1,38

Šio portfelio svoriai pateikti skritulinėje diagramoje 10. Į portfelį įtrauktos visų 10 įmonių akcijos lygiomis dalimis.

10 pav.: Lygių svorių portfelio svoriai *(sudaryta autorės)*

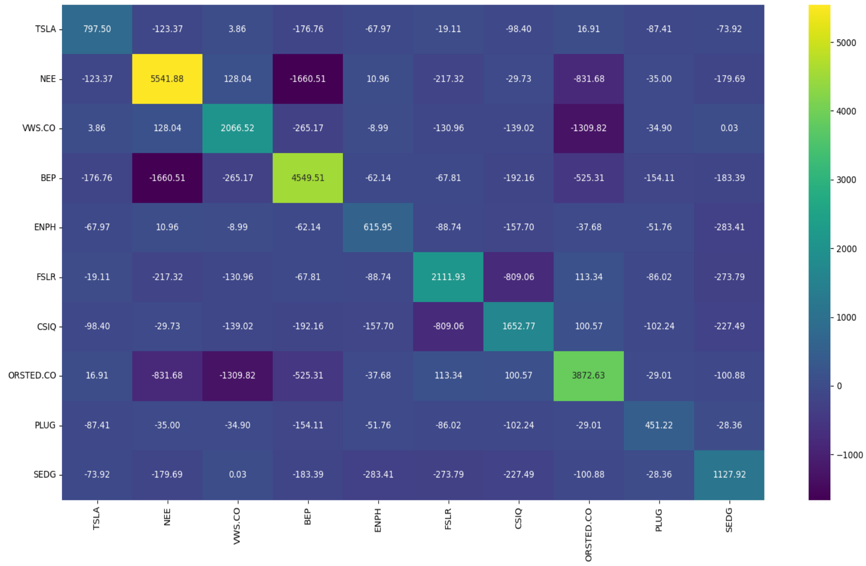


3.3 Minimalios dispersijos portfelis

Remiantis teorinėje dalyje aprašytu ir įrodytu teiginiu 2.2, apskaičiuotas dispersijos funkcijos ($\sigma^2 = \mathbb{B}\Sigma\mathbb{B}^T$) minimumas ir taip rastas minimalios dispersijos portfelis sudarytas iš pasirinktų akcijų. Šiems skaičiavimas atlikti reikalinga kovariacijų matricos atvirkštinė (Σ^{-1}), kurios išraiška yra pateikta paveikslėlyje 11.

Minimalios dispersijos portfeliui rasti naudotas programavimo kalbos „Python" paketas *scipy.optimize*, kuriame taip pat remiamasi kovariacijų matricos atvirkštine.

11 pav.: Kovariacijų matricos atvirkštinė *(sudaryta autorės)*



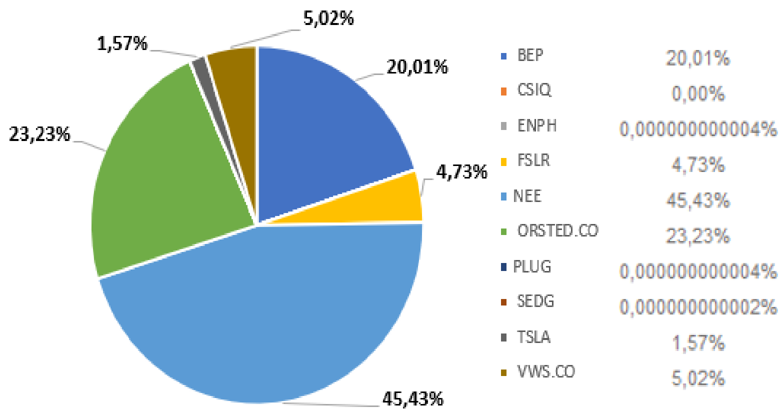
Pagrindiniai gauto minimalios dispersijos portfelio rodikliai pateikti lentelėje 3. Šiuo atveju Šarpo rodiklis yra žemiausias lyginant su lygių svorių bei maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfeliais. Tokį portfelį investuotojas rinksis, kai bus siekiama minimalios rizikos.

3 lentelė: Minimalios dispersijos portfelio rodikliai

$\overline{r}$, %	21,81
$\overline{\sigma}$, %	20,93
Šarpo rodiklis	1,04

Šio minimalios dispersijos portfelio svoriai pateikti skritulinėje diagramoje 12. Į portfelį įtrauktos net 9 skirtingų įmonių akcijos, tai patvirtina Modernaus portfelio teoriją, jog būtina kuo labiau diversifikuoti investicinį portfelį siekiant geriausio rizikos ir grąžos santykio. CSIQ akcijos liko neįtrauktos į portfelį (dėl stiprios koreliacijos su kitų akcijų grąžomis), o ENPH, PLUG ir SEDG dalys portfelyje yra itin mažos dėl didelės rizikos (dispersijos). Portfelyje didžiausią dalį sudaro NEE, ORETSD.CO ir BEP, nes jų dispersija palyginus maža.

12 pav.: Minimalios dispersijos portfelio svoriai *(sudaryta autorės)*



3.4 Maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelis

Remiantis teorinėje dalyje aprašytu ir įrodytu teiginiu 2.4, apskaičiuotas Šarpo rodiklio maksimumas ($S_B(\mathbb{B})$) ir taip rastas maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelis sudarytas iš pasirinktų akcijų. Šiems skaičiavimams atlikti taip pat reikalinga kovariacijų matricos atvirkštinė (Σ^{-1}), kurios išraiška yra pateikta paveikslėlyje 11.

Maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfeliui rasti naudotas programavimo kalbos „Python" paketas *scipy.optimize*, kuriame taip pat remiamasi kovariacijų matricos atvirkštine.

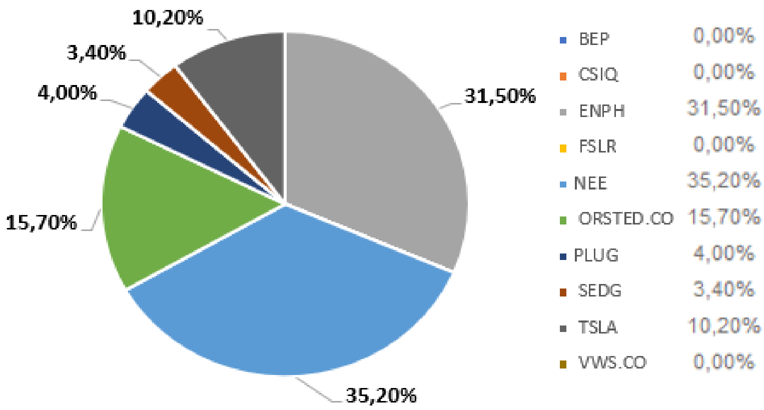
Pagrindiniai gauto maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelio rodikliai pateikti lentelėje 4. Šiuo atveju tikėtina grąža yra didžiausia lyginant su lygių svorių bei minimalios dispersijos portfeliais, tuo pačiu rizika taip pat yra didžiausia, tačiau grąža viršija prisiimtą riziką – tai parodo Šarpo rodiklis, kuris lygus 1,65.

4 lentelė: Maksimalaus pelno – rizikos portfelio rodikliai

$\overline{r}$, %	60,14
$\overline{\sigma}$, %	36,36
Šarpo rodiklis	1,65

Šio maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelio svoriai pateikti skritulinėje diagramoje 13. Į portfelį įtrauktos tik 6 skirtingų įmonių akcijos. BEP, CSIQ, FSLR, VWS.CO akcijos liko neįtrauktos į portfelį dėl gan žemų Šarpo rodiklių ir gan stiprios koreliacijos su kitų akcijų grąžomis. Portfelyje didžiausią dalį sudaro ENPH, NEE akcijos.

13 pav.: Maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelio svoriai *(sudaryta autorės)*



3.5 Efektyvumo frontas

Paveikslėlyje 14 pavaizduoti visi anksčiau gauti portfeliai:

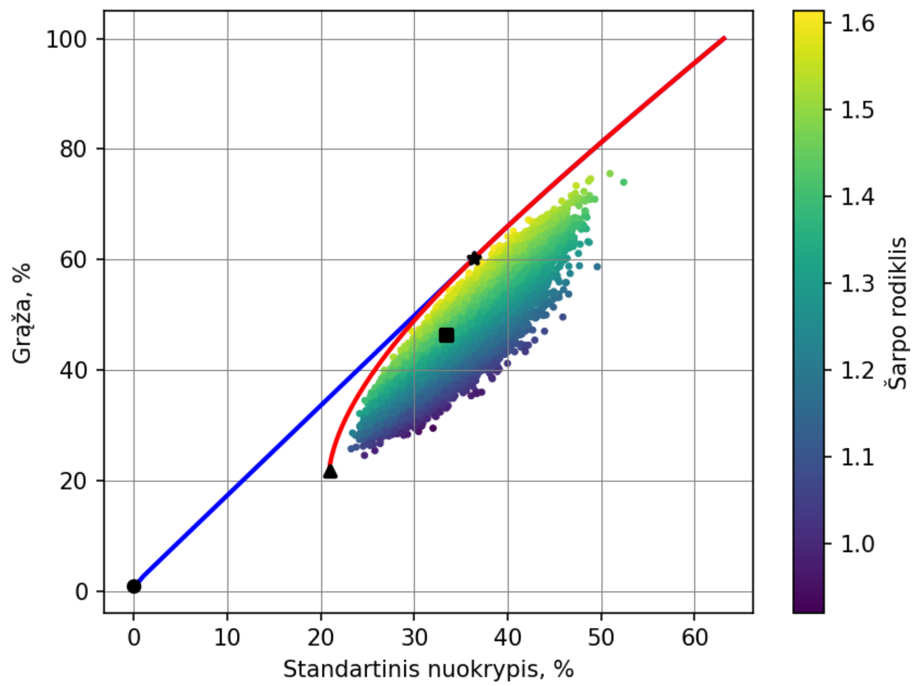
- lygių svorių portfelis pažymėtas kvadratu (■);
- minimalios dispersijos portfelis pažymėtas trikampiu (▲);
- maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelis pažymėtas žvaigždute (⋆).

Taip pat raudona kreive pažymėtas įmanomų portfelių, sudarytų iš 10 pasirinktų įmonių akcijų, efektyvumo frontas. Visi portfeliai priklausantys efektyvumo frontui yra optimalūs ir rizikos vengiantys investuotojai esant vienodoms sąlygoms pirmenybę teiks šiems portfeliams priklausomai nuo naudingumo funkcijos. Kadangi pasirinktos įmonių akcijos yra rizikingos, efektyvumo frontas yra hiperbolės formos (matoma iš teiginio 2.5).

Toliau, tarp pasirinktų įmonių akcijų yra įtraukiamas ir nerizikingas aktyvas BIL. Šis nerizikingas aktyvas paveikslėlyje (14) pažymėtas tašku (•). Mėlynos spalvos kreive pažymėtas efektyvumo frontas, kai nerizikingas aktyvas yra įtrauktas. Efektyvumo frontas prasideda nuo ordinačių ašies, ties BIL grąžos verte (0,98%). Kaip ir apžvelgta teorinėje darbo dalyje, efektyvumo fronto forma šiuo atveju tampa tiesine.

Efektyvumo frontai (hiperbolinis ir tiesinis) liečiasi tik optimaliame taške (žymimame žvaigždute) t.y. taške, kuriame yra maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelis (tai patvirtina teiginį 2.7).

14 pav.: Efektyvumo frontas *(sudaryta autorės)*



4 Išvados

Darbe nagrinėjamos investicijų rūšys, investavimas, Modernistinė portfelių formavimo teorija bei efektyvumo frontas. Atlikus mokslinės literatūros analizę ir praktiškai pritaikius teorinius teiginius formuojant portfelius iš 10 pasirinktų atsinaujinančios energetikos įmonių akcijų ir sudarant efektyvumo frontus galima daryti šias išvadas:

- Modernistinė portfelių formavimo teorija teigia, kad investuotojai yra rizikos vengiantys ir už tam tikrą tikėtiną grąžą renkasi mažiau rizikingus portfelius. Taip pat siekiant geriausio rizikos ir grąžos santykio būtina diversifikuoti portfelį.
- Portfeliai, kurie priklauso efektyvumo frontui yra laikomi efektyviai diversifikuotais. Portfelis, priklausantis efektyvumo frontui, yra pranašesnis už bet kurį kitą portfelį, kuris nepriklauso efektyvumo frontui.
- Kai portfeliai sudaryti tik iš rizikingų aktyvų, jų efektyvumo frontas yra hiperbolės formos (dar vadinamas Markowitz kulka), o jei į portfelių formavimą yra įtraukiamas ir nerizikingas aktyvas, tuomet efektyvumo fronto forma tampa tiesine.
- Analizuojant 2017 m. – 2022 m. pasirinktų atsinaujinančios energetikos įmonių akcijų pagrindinius rodiklius galima daryti prielaidą,

jog investicija į šias akcijas būtų gan rizikinga dėl didelių dispersijos svyravimų.

- Naivus diversifikavimas yra paprasčiausias diversifikavimo metodas, kai investuojamas į visus aktyvus lygiomis dalimis, bet pagal naujausius tyrimus šis metodas gali būti toks pats veiksmingas kaip ir kiti sudėtingesni optimizavimo modeliai. Tačiau atliktas tyrimas šio fakto nepatvirtino, nes lyginant lygių svorių portfelį su gautu Maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfeliu, lygių svorių portfelio Šarpo rodiklis ir grąža yra mažesni.

- Palyginus suformuotus lygių svorių ir minimalios dispersijos portfelius, Šarpo rodiklio reikšmė didesnė lygių svorių portfelyje.

- Tarp suformuotų portfelių didžiausia dispersija (rizika) maksimalaus pelno – rizikos rodiklio portfelyje, tačiau Šarpo rodiklis šiuo atveju taip pat aukščiausias – grąža viršija prisiimtą riziką.

- Į minimalios dispersijos portfelį įtraukos 9 iš 10 atsinaujinančios energetikos įmonių akcijos, tai reiškia, jog šis portfelis yra labiau diversifikuotas nei maksimalaus Šarpo rodiklio portfelis (įtraukos 6). Tai patvirtina teiginį, jo norint sumažinti riziką reikia kuo labiau diversifikuoti portfelį.

- Aktyvai dėl didelės dispersijos (rizikos) ar dėl stiprios koreliacijos formuojant portfelį gali būti į jį neįtraukiami siekiant sumažinti portfelio riziką.

Literatūra

[1] Diversifikavimas | blog.swedbank.lt. https://blog.swedbank.lt/zodynelis/diversifikavimas.

[2] Finansinis turtas | blog.swedbank.lt. https://blog.swedbank.lt/zodynelis/finansinis-turtas.

[3] Harry Max Markowitz - Visuotinė lietuvių enciklopedija. https://www.vle.lt/straipsnis/harry-max-markowitz/.

[4] Investavimas | „Swedbank" Asmeninių finansų institutas. https://blog.swedbank.lt/sites/default/files/files/6p_medziaga_moksleiviui.pdf?from=manofi.

[5] Išvestinių finansinių priemonių sandorių aprašas. https://www.seb.lt/sites/default/files/document/IFP-sandoriu-aprasas.pdf.

[6] Lagrange'o daugiklių metodas - Visuotinė lietuvių enciklopedija. https://www.vle.lt/straipsnis/lagrange-o-daugikliu-metodas/.

[7] Pasirinkimo sandoris – Vikipedija. https://lt.wikipedia.org/wiki/Pasirinkimo_sandoris.

[8] Primary market - wikipedia. https://en.wikipedia.org/wiki/Primary_market.

[9] Ekonominio naudingumo skaičiuoklėje pateiktų formulių aprašymai. https://vpt.lrv.lt/uploads/vpt/documents/files/mp/env_aprasymai.pdf, 2021.

[10] Geometry of the Efficient Frontier. https://gregorygundersen.com/blog/2022/01/09/geometry-efficient-frontier/, 2022.

[11] Naive diversification vs. optimization. https://www.investopedia.com/articles/stocks/11/naive-diversification-vs-optimization.asp, 2022.

[12] James Chen. What Are Real Assets vs. Other Asset Types? https://www.investopedia.com/terms/r/realasset.asp, 2021.

[13] Andrius Grigutis. Iždo vekseliai, opcionai, rinkų indeksai. https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg/Destymas/Investiciju_teorija/Skaidres/3.%20Izdo%20vekseliai,%20rinku%20indeksai.pdf, 2018.

[14] Andrius Grigutis. Portfeliai sudaryti iš rizikinų aktyvų. https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg/Destymas/Investiciju_teorija/Teorijos%20konspektai/Rizikingu_aktyvu_portfelis.pdf, 2018.

[15] Adam Hayes. Investment Basics Explained With Types to Invest in. https://www.investopedia.com/terms/i/investment.asp, 2023.

[16] Deimantė Vasiliauskaitė. Optimalaus vertybinių popierių portfelio sudarymo ypatumai. https://epublications.vu.lt/object/elaba:3493086/, 2004.

5 Priedai

```
import yfinance as yf
import matplotlib.pyplot as plt
import numpy as np
import seaborn as sns
import scipy.optimize as optimize
import pandas as pd
from pandas_datareader import data
from datetime import datetime

#Data import
bil = 'BIL'
bil_data = yf.download(bil, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
tsla = 'TSLA'
tsla_data = yf.download(tsla, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
nee = 'NEE'
nee_data = yf.download(nee, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
vws = 'VWS.CO'
vws_data = yf.download(vws, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
bep = 'BEP'
bep_data = yf.download(bep, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
enph = 'ENPH'
enph_data = yf.download(enph, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
fslr = 'FSLR'
fslr_data = yf.download(fslr, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
csiq = 'CSIQ'
csiq_data = yf.download(csiq, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
orsted = 'ORSTED.CO'
orsted_data = yf.download(orsted, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
plug = 'PLUG'
plug_data = yf.download(plug, start='2017-01-01', end='2022-12-31')
sedg = 'SEDG'
sedg_data = yf.download(sedg, start='2017-01-01', end='2022-12-31')

#Daily returns
bil_data['Daily_Return'] = bil_data['Adj Close'].pct_change()*100
tsla_data['Daily_Return'] = tsla_data['Adj Close'].pct_change()*100
nee_data['Daily_Return'] = nee_data['Adj Close'].pct_change()*100
vws_data['Daily_Return'] = vws_data['Adj Close'].pct_change()*100
bep_data['Daily_Return'] = bep_data['Adj Close'].pct_change()*100
enph_data['Daily_Return'] = enph_data['Adj Close'].pct_change()*100
fslr_data['Daily_Return'] = fslr_data['Adj Close'].pct_change()*100
```

```
csiq_data['Daily_Return'] = csiq_data['Adj Close'].pct_change()*100
orsted_data['Daily_Return'] = orsted_data['Adj Close'].pct_change()*100
plug_data['Daily_Return'] = plug_data['Adj Close'].pct_change()*100
sedg_data['Daily_Return'] = sedg_data['Adj Close'].pct_change()*100

#Metines aritmetines grazos
vid_graza_bil = bil_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_tsla = tsla_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_nee = nee_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_vws = vws_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_bep = bep_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_enph = enph_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_fslr = fslr_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_csiq = csiq_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_orsted = orsted_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_plug = plug_data['Daily_Return'].mean()*252
vid_graza_sedg = sedg_data['Daily_Return'].mean()*252

#Standard deviation
std_dev_bil = np.std(bil_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_tsla = np.std(tsla_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_nee = np.std(nee_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_vws = np.std(vws_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_bep = np.std(bep_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_enph = np.std(enph_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_fslr = np.std(fslr_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_csiq = np.std(csiq_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_orsted = np.std(orsted_data['Daily_Return'].dropna())
*np.sqrt(252)
std_dev_plug = np.std(plug_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)
std_dev_sedg = np.std(sedg_data['Daily_Return'].dropna())*np.sqrt(252)



#Sharp ratio
sharpe_ratio_tsla = (vid_graza_tsla / std_dev_tsla)
sharpe_ratio_nee = (vid_graza_nee / std_dev_nee)
sharpe_ratio_vws = (vid_graza_vws / std_dev_vws)
sharpe_ratio_bep = (vid_graza_bep / std_dev_bep)
sharpe_ratio_enph = (vid_graza_enph / std_dev_enph)
sharpe_ratio_fslr = (vid_graza_fslr / std_dev_fslr)
sharpe_ratio_csiq = (vid_graza_csiq / std_dev_csiq)
sharpe_ratio_orsted = (vid_graza_orsted / std_dev_orsted)
sharpe_ratio_plug = (vid_graza_plug / std_dev_plug)
```

```
sharpe_ratio_sedg = (vid_graza_sedg / std_dev_sedg)

#Covariance, Correlation, Inverse covariance matrix
end = datetime(2022, 12, 31)
start = datetime(2017, 1, 1)
tickers = ('TSLA', 'NEE', 'VWS.CO', 'BEP', 'ENPH', 'FSLR', 'CSIQ',
'ORSTED.CO','PLUG', 'SEDG')
df = pd.DataFrame()

for ticker in tickers:
    data = yf.download(ticker, start, end)
    df[ticker] = data["Close"]

df=df.dropna()
df.dropna().plot(figsize = (20, 16))
df.pct_change()

#Koreliaciju matrica
df.pct_change().corr()
sns.heatmap(df.pct_change().corr(), cmap='viridis', annot = True)
plt.legend().remove()
plt.show()

#Kovariaciju matrica
df.pct_change().cov()
print(df.pct_change().cov())
sns.heatmap(df.pct_change().cov(), cmap='viridis', annot = True)
plt.legend().remove()
plt.show()
df.pct_change().var()
print(df.pct_change().var())

#Atvirstine kovariaciju matrica
inverse_matrix = np.linalg.inv(df.pct_change().cov())
row_labels = ['TSLA', 'NEE', 'VWS.CO', 'BEP', 'ENPH', 'FSLR', 'CSIQ',

'ORSTED.CO','PLUG', 'SEDG']
col_labels = ['TSLA', 'NEE', 'VWS.CO', 'BEP', 'ENPH', 'FSLR', 'CSIQ',
'ORSTED.CO','PLUG', 'SEDG']
print(inverse_matrix)
sns.heatmap(inverse_matrix , cmap='viridis', annot = True, fmt=".2f",
xticklabels=col_labels, yticklabels=row_labels)
plt.legend().remove()
plt.show()
```

```
#Portfeliu formavimas
data = yf.download(['TSLA', 'NEE', 'VWS.CO', 'BEP', 'ENPH', 'FSLR',
'CSIQ',
'ORSTED.CO','PLUG', 'SEDG'], start='2017-01-01', end='2022-12-31')

close = data['Adj Close']
returns = close.pct_change()*100
metines = returns.mean()*252
std = np.std(returns, ddof=1)*np.sqrt(252)
Sharpe = metines/std


#100 000 portfeliu atsitiktinis modeliavimas
def pos_port(returns_):
    returns_p = []
    std_p = []
    sharpe_p = []
    weights_p = []
    for i in range(100000):
        w = np.random.random(10)
        w /= np.sum(w)
        weights_p.append(w)
        return_port = np.sum(returns_.mean() * w) * 252
        returns_p.append(return_port)
        std_port = np.sqrt(np.dot(w.T,
        np.dot(returns_.cov(), w))) * np.sqrt(252)
        std_p.append(std_port)
        sharpe_port = return_port / std_port
        sharpe_p.append(sharpe_port)

    returns_df = pd.DataFrame(returns_p)
    std_df = pd.DataFrame(std_p)
    return returns_df, std_df

#Lygiu svoriu portfelio formavimas
ones = np.ones((10,), dtype=int)
w_equal = ones / 10
r_equal = np.sum(returns.mean() * w_equal) * 252
std_equal = np.sqrt(np.dot(wt_equal.T, np.dot(returns.cov(
    ), w_equal))) * np.sqrt(252)
sharpe_equal = r_equal / std_equal
print(w_equal)
print(r_equal)
```

```
print(std_equal)
print(sharpe_equal)


#Minimalios dispersijos porfelio formavimas
def min_var_port(returns_min_var):
    def minimize_vol(weights):
        vol = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(returns_min_var.cov(),
         weights))) * np.sqrt(252)
        return vol
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x)- 1})
    bounds = ((0, 1), (0, 1), (0, 1), (0, 1), (0, 1), (0, 1),
    (0, 1), (0, 1), (0, 1), (0, 1))
    optimal_vol = optimize.minimize(minimize_vol, 10 * [1./10, ],
method='SLSQP', bounds=bounds, constraints=constraints)
    return optimal_vol

w_var = min_var_port(returns)['x']
min_std = min_var_port(returns)['fun']
min_var_r = np.sum(returns.mean()*min_var_port(returns['x'])*252
sharpe_var = min_var_r/min_std
print(w_var)
print(min_std)
print(min_var_r)
print(sharpe_var)

# Maksimalaus Sharp rodiklio portfelio formavimas
def max_sharpe_port(returns_max_sharpe):
    def maximize_sharpe_ratio(weights):
        return_port = np.sum(returns_max_sharpe.mean() * weights)
         * 252
        std_portfolio = np.sqrt(np.dot(weights.T,
        np.dot(returns_max_sharpe.cov(), weights))) * np.sqrt(252)
        sharpe_port = return_port / std_port
        return-sharpe_port
    constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x: np.sum(x)- 1})
    bounds = ((0, 1), (0, 1), (0, 1), (0, 1), (0, 1)
    (0, 1), (0,1), (0, 1), (0, 1), (0, 1))
    optimal_sharpe=optimize.minimize(maximize_sharpe_ratio,
    10 * [1./10, ],
    method='SLSQP', bounds=bounds, constraints=constraints)
    return optimal_sharpe
```

```
max_sh_weights = max_sharpe_port(returns)['x'].round(3)
max_sh_returns = np.sum(returns.mean() * max_sh_weights) * 252
max_sh_std = np.sqrt(np.dot(max_sh_weights.T, np.dot(
   returns.cov(), max_sh_weights))) * np.sqrt(252)
sharpe_sh = max_sh_returns/max_sh_std
print(max_sh_weights)
print(max_sh_returns)
print(max_sh_std)
print(sharpe_sh)

# Efektyvumo frontas
def ef_frontier(return_min, returns__, returns_df_e):
    t_returns = np.linspace(return_min, returns_df_e, 60)

    def minimize_vol(weights):
        vol = np.sqrt(np.dot(weights.T, np.dot(returns__.cov(),
        weights))) * np.sqrt(252)
        return vol

    bounds = ((0, 1), (0, 1), (0, 1), (0, 1), (0, 1),
    (0, 1), (0,1), (0, 1), (0, 1), (0, 1))
    min_vol = []
    for t in t_returns:
        constraints = ({'type': 'eq', 'fun': lambda x:
        np.sum(returns__.mean() * x) * 252 - t},{'type': 'eq', 'fun':
        lambda x: np.sum(x) - 1})
        optimal = optimize.minimize(minimize_vol, 10 * [1. / 10, ],
         method='SLSQP', bounds=bounds, constraints=constraints)
        min_vol.append(optimal['fun'])

    min_vol = np.array(min_vol)
    t_returns = np.array(t_returns)
    return min_vol, t_returns


max_eff = 75
min_eff = 0
min_vol_, t_returns = ef_frontier(min_var_r, returns, max_eff)

plt.scatter(std_df_, returns_df_, c=(returns_df_/ std_df_),
cmap='viridis', marker='o', s=5, zorder=-1, edgecolors='black')
plt.grid(True, zorder=1)
plt.colorbar(label='Sarpo rodiklis')
plt.plot(min_vol_, t_returns, color='black', linewidth=2, zorder=-1)
```

```
plt.scatter(std_equal, r_equal, marker='*', s=60,
color='red', linewidths=4)
plt.scatter(min_std, min_var_r, marker='v', s=60,
color='red', linewidths=4)
plt.scatter(max_sh_std, max_sh_returns, marker='s', s=60,
color='red', linewidths=4)
plt.xlabel('Standartinis nuokrypis')
plt.ylabel('Graza')
plt.show()
```