ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Donata Kavaliauskaitė

Oilerio sandaugų reikšmių pasiskirstymas analizinių funkcijų erdvėje

Magistro darbas

Darbo vadovė
doc. dr. R. Kačinskaitė

Šiauliai, 2010

TURINYS

ŽYMĖJIMAI

d, j, k, l, m, n, N	- natūralieji skaičiai
p	- pirminis skaičius
$\mathbb{N}$	- natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{Z}$	- sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	- realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{C}$	- kompleksinių skaičių aibė
i	- menamasis vienetas: $i = \sqrt{-1}$
$s = \sigma + it$	- kompleksiniai kintamieji
$\Re s = \sigma$	- kompleksinio kintamojo s realioji dalis
$\Im s = t$	- kompleksinio kintamojo s menamoji dalis
$\text{meas}\{A\}$	- aibės A Lebego matas
$H(D)$	- analizinių srityje D funkcijų erdvė
$\xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}}$	- silpnas konvergavimas
$\mathcal{B}(S)$	- erdvės S Borelio aibių klasė
$\mathbb{E}X$	- atsitiktinio elemento X vidurkis
γ	- vienetinis apskritimas, t. y. $\{s \in \mathbb{C} : \|s\| = 1\}$
B	- dydis aprėžtas konstanta (O didysis atitikmuo)
$A \bigtriangleup A_\tau$	- aibių A ir A_τ simetrinis skirtumas
m_H	- Haro matas
ρ	- metrika analizinių funkcijų $H(D)$ erdvėje
I_A	- aibės A indikatoriaus funkcija
$\Gamma(s)$	- Oilerio gama funkcija, apibrėžta formule $\Gamma(s) = \int\limits_0^\infty e^{-x}x^{s-1}$, pusplokštumėje $\sigma > 0$

Teoremos, lemos ir formulės visame darbe yra numeruojamos iš eilės, neatsižvelgiant į skyrių ar poskyrių numeraciją.

ĮVADAS

Analizinėje skaičių teorijoje vienas iš pagrindinių objektų yra dzeta funkcijų reikšmių pasiskirstymo tyrimas. Tai kompleksinio kintamojo funkcijos, kurios tam tikroje plokštumėje $\mathbb{C}$ yra išreiškiamos Dirichlė (Dirichlet) eilutėmis. Kai kurios iš jų gali būti užrašomos Oilerio (Euler) sandaugomis.

Pati žinomiausia iš dzeta funkcijų yra Rymano (Riemann) dzeta funkcija $\zeta(s)$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ išreiškiama eilute bei sandauga

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

$\zeta(s)$ funkcijų reikšmių pasiskirstymą pirmieji nagrinėjo H. Boras (Bohr) ir B. Jesenas (Jessen) apie 1930 m. Vėliau jų gautus rezultatus praplėtė ir pagerino A. Gošas (Ghosh), B. Bagči (Bagchi), K. Macumoto (Mathumoto), J. Štoidingas (Steuding) ir eilė kitų matematikų. Lietuvoje šioje srityje dirba(-o) A. Laurinčikas, E. Stankus, R. Garunkštis, R. Kačinskaitė, R. Šleževičienė (Steuding), D. Šiaučiūnas, J. Genys, V. Garbaliauskienė, R. Macaitienė ir kiti.

Mes savo darbe nagrinėsime Oilerio sandaugas $L(s)$.

Oilerio sandaugos $L(s)$ yra apibrėžiamos formule

$$L(s) = e^{iw} \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_{1p} p^{-s}) \ldots (1 - \alpha_{dp} p^{-s})}. \tag{1}$$

α_{jp} yra kompleksiniai skaičiai, $w \in \mathbb{R}$, d – natūralusis skaičius, $1 \leq j \leq d$, ir p žymi pirminį skaičių. Taip pat jas galima išreikšti Dirichlė eilute

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^s}. \tag{2}$$

Tarkime, kad yra tenkinamos šios hipotezės [1]:

(I) $L(s)$ turi Oilerio sandaugas (1) tokias, kad tam tikriems fiksuotiems $\theta \in [0; \frac{1}{2})$ ir $j = 1, \ldots, d$,

$$|\alpha_{jp}| \leq p^{\theta}; \tag{3}$$

(II) sąryšis

$$\sum_{p \leq X} \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{jp}|^2 = O(X^{1+\varepsilon}) \tag{4}$$

galioja kiekvienam $\varepsilon > 0$;

(III) $L(s)$ turi analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$ kaip baigtinės eilės meromorfinė funkcija su baigtiniu polių, priklausančių tiesei $\Re s = 1$, skaičiumi ir tenkinančią funkcinę lygtį

$$G(s)L(s) = \overline{G(\overline{1-s})}\,\overline{L(\overline{1-s})}, \tag{5}$$

kur

$$G(s) = Q^s \prod_{h=1}^{n} \Gamma(\lambda_h s + \mu_h)$$

ir $Q > 0$, $\lambda_h > 0$, $\Re(\mu_h) \geq 0$;

(IV) $L(s)$ koeficientai turi tenkinti lygybę

$$\sum_{p \leq X} \frac{a_j(p)\overline{a_k(p)}}{p} = \delta n_{jk} \log\log X + c + O\left(\frac{1}{\log X}\right) \tag{6}$$

tam tikroms teigiamoms konstantoms n_{jk} ir $X \geq 2$.

Iš (II) hipotezės išplaukia, kad $L(s)$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\Re s > 1$ ir kaip Oilerio sandaugos, ir kaip Dirichlė eilutė. (I) sąlyga parodo, kad $L(s) \neq 0$, kai $\Re s > 1$. Iš (III) hipotezės išplaukia, kad sandauga $G(s)L(s)$ yra holomorfinė, išskyrus tam tikrus simetriškai išsidėsčiusius polius, išilgai tiesių $\Re s = 0$ ir $\Re s = 1$. Pagal Fragmeno-Lindeliofo (Phragmén-Lindelöf) prielaidą funkcija $L(s)$ turės polinominį augimą kiekvienoje vertikalioje juostoje. (5) funkcinė lygtis turi būti normuojama taip, kad 1 būtų šaknis. Sandaugos $G(s)L(s)$ reikšmė yra reali kritinėje tiesėje $\Re s = \frac{1}{2}$.

Magistro darbo tikslas – įrodyti ribinę teoremą silpno tikimybinio mato konvergavimo prasme Oilerio sandaugoms analizinių funkcijų erdvėje.

Prisiminsime, kad silpnasis tikimybinių matų P_n konvergavimas į matą P reiškia, kad

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int f dP$$

kiekvienai realiai tolydžiai apibrėžtai funkcijai f erdvėje S. Šis faktas dar yra žymimas $P_n \Rightarrow P$.

Kaip buvo pažymėta ankščiau, pagal (I) ir (III) hipotezes, Oilerio sandaugos $L(s)$ yra analizinės pusplokštumėje $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1 + \theta\}$.

Pažymėkime meas$\{A\}$ mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą, ir tegul, kai $T > 0$,

$$\nu_T(\ldots) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0, T] : \ldots\},$$

kur vietoj taškų įrašomos sąlygos, kurias tenkina τ. $\mathcal{B}(S)$ pažymime erdvės S Borelio aibių klasę.

Kad galėtume suformuluoti ribinę teoremą funkcijai $L(s)$, reikalinga tam tikra topologinė struktūra.

Pažymime γ vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje, t. y., $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, ir

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Pagal Tichonovo (Tichonov) teoremą (žr. 2 skyrius, 2 teorema) begaliniamatis toras Ω su sandaugos topologija ir pataškine daugyba yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Taigi, egzistuoja tikimybinis Haro (Haar) matas m_H erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Todėl gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra $\omega \in \Omega$ projekcija į koordinatinę erdvę γ_p. Haro matas m_H tore Ω yra tikimybinių Haro matų m_{Hp} sandauga atitinkamose koordinatinėse erdvėse γ_p, t. y.,

$$m_H\{\omega : \omega \in A\} = \prod_p m_H\{\omega : \omega(p) \in A_p\},$$

kur A_p yra aibės $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ projekcija į γ_p. Taigi $\{\omega(p) : p \text{ yra pirminis}\}$ yra nepriklausomų, kompleksines reikšmes įgijančių atsitiktinių elementų seka, apibrėžiama tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Imkime

$$\omega(m) = \prod_{p^r \| m} \omega^r(p), \tag{7}$$

kur $p^r \| m$ reiškia, kad $p^r | m$, bet $p^{r+1} \nmid m$. Tokiu būdu gauname funkcijos $\omega(p)$ pratęsimą į visą natūraliųjų skaičių aibę kaip pilnai multiplikatyvią unimoduliariąją funkciją $g : \mathbb{N} \to \gamma$ ir $|\omega(m)| = 1$.

Pažymime $H(D)$ analizinių srityje D funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą formulėmis

$$L(s, \omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)\omega(k)}{k^s} = \prod_p \prod_{j=1}^{d} \left(1 - \frac{\omega(p_m)\alpha_{jp_m}}{p_m^s}\right)^{-1}, \quad s \in D, \quad \omega \in \Omega.$$

P pažymėkime atsitiktinio elemento $L(s, \omega)$ skirstinį, t. y.,

$$P(A) = m_H\{\omega \in \Omega : L(s, \omega) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

1 teorema. *Tarkime, kad funkcija $L(s)$ tenkina (I) – (IV) hipotezes. Tada tikimybinis matas*

$$P_T(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0, T] : L(s + i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

silpnai konverguoja į P, kai $T \to \infty$.

1. ŽINOMOS TEOREMOS

Šiame skyriuje pateiksime žinomus matematinius rezultatus, kuriuos naudosime įrodydami pagrindinį darbo tvirtinimą.

Šiame skyriuje pateiktų teoremų įrodymus arba detalesnes nuorodas galima rasti nurodytuose atitinkamuose literatūros šaltiniuose.

2 teorema (Tichonovo). *Bet kokių kompaktiškų topologinių erdvių Dekarto sandauga sandaugos topologijos atžvilgiu yra kompaktas.*

Tai – 5.1.4 teorema iš [2].

3 teorema. *Tarkime, kad atsitiktiniai elementai $X_1, X_2, \dots$ yra ortogonalūs ir*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_m|^2 \ln^2 m < \infty.$$

Tada eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m$$

konverguoja beveik tiktai.

Tai – 1.2.9 teorema iš [2].

4 teorema. *Jeigu Dirichlė eilutė konverguoja taške $s_0 = \sigma_0 + it$, tada ji konverguoja kiekviename taške s, kai $\sigma > \sigma_0$, tolygiai pusplokštumės $\sigma > \sigma_0$ kompaktuose.*

Tai – 2.1.3 išvada iš [2].

5 teorema. *Tarkime Dirichlė eilutė*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s}$$

su multiplikatyviais koeficientais $g(m)$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$. Tada šioje pusplokštumėje galioja sąryšis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{g(m)}{m^s} = \prod_p \sum_{\alpha=0}^{\infty} \frac{g(p^\alpha)}{p^{\alpha s}}.$$

Tai – 2.3.3 išvada iš [2].

6 teorema (Kolmogorovo (Kolmogorov)). *Tegul $X_1, X_2, \dots$ yra nepriklausomi atsitiktiniai elementai. Jeigu eilutės*

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}X_m \quad ir \quad \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_m - \mathbb{E}X_m)^2$$

konverguoja, tada eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} X_m$$

konverguoja beveik tikrai.

Tai – 1.2.11 teorema iš [2].

7 teorema. *Tegul* $\{Q_n\}$ *yra tikimybinių matų seka erdvėje* $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$, *o* $\{g_n(k_1, ..., k_m)\}$ *yra atitinkamų Furjė (Fourier) transformacijų seka. Tarkime, kad kiekvienai sveikųjų skaičių* $(k_1, ..., k_m)$ *aibei egzistuoja riba*

$$g(k_1, ..., k_m) = \lim_{n\to\infty} g_n(k_1, \ldots, k_m).$$

Tada egzistuoja tikimybinis matas Q *erdvėje* $(\gamma^m, \mathcal{B}(\gamma^m))$ *toks, kad* $Q_n \Rightarrow Q$. *Be to,* $\{g_n(k_1, ..., k_m)\}$ *yra mato* Q *Furjė transformacija.*

Tai – 1.3.19 teorema iš [2].

8 teorema. *Tegul* $h : S \to S_1$ *yra tolydžioji funkcija. Tada* $P_n \Rightarrow P$ *reiškia, kad* $P_n h^{-1} \Rightarrow Ph^{-1}$.

Tai – 1.1.16 teorema iš [2].

9 teorema (Birchofo-Kinčino (Birkhoff-Kchinchine)). *Tegul* T *yra išmatuojama, matą išsauganti ergodinė transformacija erdvėje* $(\widetilde{\Omega}, \mathcal{F}, m)$. *Tada kiekvienam* $f \in L^1(\Omega, \mathcal{F}, m)$, *beveik visiems* $\omega \in \widetilde{\Omega}$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega) = \mathbb{E}(f).$$

Tai – 1.6.6 teorema iš [2].

10 teorema (Stirlingo (Stirling) formulė).

$$|\Gamma(s)| = \sqrt{2\pi} |t|^{\sigma-1/2} e^{-\frac{\pi|t|}{2}} (1 + B|t|^{-1}), \ |t| \geqslant t_0,$$

kur B *yra aprėžtas pagal* s *juostoje* $c_{23} \leq \sigma \leq c_{24}$.

Tai – 3.2.21 formulė iš [2].

11 teorema (Melino (Mellin) perstatymo formulė). *Tegul* a *ir* b *yra teigiami skaičiai. Tada yra teisinga formulė*

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(s) a^{-s} ds = e^{-a}.$$

Tai – 5.4.1 lema iš [2].

12 teorema (Montelo (Montel)). *Jeigu analizinių funkcijų srityje G šeima yra tolygiai aprėžta kiekviename G kompaktiškame poaibyje, tada ji yra kompaktas.*

Tai – 5.5.2 teorema iš [5].

13 teorema. $P_n \Rightarrow P$ *tada ir tik tada, jeigu kiekviename posekyje* $\{P_{n'}\}$ *yra kitas posekis* $\{P_{n''}\}$ *toks, kad* $P_{n''} \Rightarrow P$.

Tai – 1.1.9 teorema iš [2].

14 teorema (reziduumų). *Jei funkcija f(z) yra analizinė uždaroje srityje* $\overline{D}$ *išskyrus baigtinį skaičių izoliuotųjų ypatingųjų taškų* $z_1, z_2, ..., z_n$ *srities D viduje, tai*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\delta D} = \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Tai – 5.10 teorema iš [3].

15 teorema (Koši (Cauchy) integralinė formulė). *Jei funkcija* $f(z)$ *yra vienareikšmė ir analizinė srityje* G, o $\mathcal{L}$ yra *uždaroji ištiesinamoji Žordano kreivė, priklausanti sričiai* G *kartu su vidine sritimi* D, *tai*

$$\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\mathcal{L}} \frac{f(z)dz}{z-a} = \begin{cases} f(a), & \text{kai} \quad a \in D, \\ 0, & \text{kai} \quad a \in G \backslash \overline{D}. \end{cases}$$

Tai – 3.12 teorema iš [3].

16 teorema (Koši-Švarco (Cauchy-Schwarz) nelygybė). *Bet kurioms mačiosioms realiosioms arba kompleksinėms funkcijoms f ir g, apibrėžtoms mačioje erdvėje* $(S, \mathcal{B}(S))$, *teisinga nelygybė*

$$\int\limits_{S} |f(s)g(s)|\mu(ds) \leq \left(\int\limits_{S} |f(s)|^2\mu(ds)\right)^{1/2} \left(\int\limits_{S} |g(s)|^2\mu(ds)\right)^{1/2}.$$

Teorema iš [4].

17 teorema (Čebyšovo (Chebyshev) nelygybė). *Tegul X yra realią reikšmę įgyjantis atsitiktinis dydis,* $h : \mathbb{R} \to [0, \infty)$ *yra neneigiama funkcija ir* $a > 0$. *Tada*

$$P\{\omega \in \Omega : h(X) \geq a\} \leq \frac{1}{a}\mathbb{E}h(X).$$

Tai – 3.7 lema iš [3].

18 teorema (pirmoji Prochorovo (Prokhorow)). *Jeigu tikimybinių matų* $\{P\}$ *šeima yra suspausta, tada ji yra reliatyviai kompaktiška.*

Tai – 1.1.12 teorema iš [2].

19 teorema (antroji Prochorovo). *Tarkime S yra separabili pilna metrinė erdvė. Jeigu tikimybinių matų $\{P\}$ šeima erdvėje $(S, \mathcal{B}(S))$ yra reliatyviai kompaktiška, tada ji yra suspausta.*

Tai – 1.1.13 teorema iš [2].

20 teorema. *Tegul G yra jungi sritis kompleksinėje plokštumoje. Tada $H(G)$ yra pilnai separabili metrinė erdvė.*

Tai – 3.15 teorema iš [5].

2. PAGALBINIAI REZULTATAI

Šiame skyriuje įrodysime teiginius, kurie reikalingi pagrindinės – pirmosios – teoremos įrodymui.

2.1. $H(D)$-reikšmio atsitiktinio elemento apibrėžimas

21 lema. *Funkcija $L(s,\omega)$, kai $s \in D$ ir $\omega \in \Omega$, apibrėžiama eilute*

$$L(s,\omega) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)\omega(k)}{k^s} \tag{8}$$

yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Įrodymas. Jeigu $\omega(k) \equiv 1$, tada $L(s,\omega) = L(s)$, kai $\sigma > 1$.

Tegul $\sigma_1 > 1 + \theta$ yra fiksuotas skaičius ir, kai $k \in \mathbb{N}$,

$$\xi_k = \xi_k(\omega) = \frac{a(k)\omega(k)}{k^{\sigma_1}}.$$

Tada $\{\xi_k\}$ yra kompleksines reikšmes įgyjančių atsitiktinių elementų seka erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Nesunku rasti, kad

$$\begin{aligned} \mathbb{E}\xi_k\overline{\xi}_n &= \frac{a(k)\overline{a(n)}}{k^{\sigma_1}n^{\sigma_1}} \int_{\Omega} \omega(k)\overline{\omega(n)}dm_H \\ &= \begin{cases} \frac{|a(k)|^2}{k^{2\sigma_1}}, & \text{jeigu} \quad k = n, \\ 0, & \text{jeigu} \quad k \neq n. \end{cases} \end{aligned}$$

Tai reiškia, kad seka $\{\xi_k\}$ yra paporiui ortogonalių atsitiktinių elementų seka. Kadangi $\sigma_1 > 1 + \theta$ ir $|\omega(k)| = 1$, tai

$$\mathbb{E}|\xi_k|^2 = \frac{|a(k)|^2}{k^{2\sigma_1}}.$$

Iš čia ir iš (I) hipotezės gauname, kad eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_k|^2(\log k)^2 = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a(k)|^2}{k^{2\sigma_1}}(\log k)^2$$

konverguoja. Taigi, pagal 3 teoremą eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \xi_k$$

konverguoja beveik tikrai, t. y. eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)\omega(k)}{k^{\sigma_1}}$$

konverguoja beveik visiems $\omega \in \Omega$ Haro mato m_H atžvilgiu. Iš čia ir 4 teoremos seka, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$, (8) eilutė konverguoja tolygiai pusplokštumės $\sigma > \sigma_1$ kompaktiniuose poaibiuose. Parinkime

$$\sigma_1 = 1 + \theta + \frac{1}{l}, \quad \text{kai } l \in \mathbb{N},$$

o A_l pažymėkime aibę tokių $\omega \in \Omega$, kad (8) eilutė konverguotų tolygiai pusplokštumės $\sigma > \frac{1}{2} + \theta + \frac{1}{l}$ kompaktiniuose poaibiuose. Tada, visiems $l \in \mathbb{N}$, turime, kad $m_H(A_l) = 1$. Dabar tegul

$$A = \bigcap_{l=1}^{\infty} A_l.$$

Tada $m_H(A) = 1$ ir su $\omega \in \Omega$, lemos eilutė konverguoja tolygiai kompaktiniuose aibės D poaibiuose. Kadangi kiekvienas nagrinėjamos eilutės narys yra $H(D)$-reikšmė funkcija, tai lema įrodyta.

22 lema. *Beveik visiems $\omega \in \Omega$, sandauga*

$$\prod_p \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{\alpha_{jp_m}\omega(p_m)}{p^s}\right)^{-1} \tag{9}$$

konverguoja tolygiai kompaktiniame aibės D poaibyje, ir galioja lygybė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{a(k)\omega(k)}{k^s} = \prod_p \prod_{j=1}^{m} \left(1 - \frac{\alpha_{jp_m}\omega(p_m)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Įrodymas. Atsižvelgiant į sąlygas koeficientams α_{jp_m} ir (7), (9) sandaugą galima užrašyti tokiu pavidalu

$$\prod_p \left(1 + \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_{jp_m}\omega^j(p)}{p^{js}}\right).$$

Pusplokštumėje $\sigma > 1$ tiek eilutė, tiek sandauga, esančios lemos tvirtinime konverguoja absoliučiai bet kuriam $\omega \in \Omega$, ir atsižvelgiant į 5 teoremą, galioja lemos lygybė. Belieka įrodyti, kad sandauga konverguoja tolygiai beveik visiems $\omega \in \Omega$ kompaktiniuose D poaibiuose.

Tarkime, kiekvienam pirminiam p

$$x_p(s, \omega) = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\alpha_{jp_m}\omega^j(p_m)}{p^{js}} \tag{10}$$

ir

$$y_p(s, \omega) = \frac{\alpha_{jp_m}\omega(p_m)}{p^s}.$$

Tada

$$L(s,\omega) = \prod_p (1 + x_p(s,\omega)).$$

Atsižvelgdami į tolygųjį eilučių konvergavimą srityje D, gauname, kad $x_p(s,\omega)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas kiekvienam p. Taikydami (I) hipotezę, panašiu būdu kaip 21 lemoje, randame, kad eilutė

$$\sum_p |x_p(s,\omega)|^2$$

konverguoja tolygiai kompaktiniame D poaibyje. Taigi, norint gauti beveik tikrą (9) sandaugos konvergavimą, belieka parodyti, kad eilutė

$$\sum_p x_p(s,\omega) \tag{11}$$

konverguoja beveik tikrai.

Pagal (I) hipotezę

$$|x_p(s,\omega) - y_p(s,\omega)| \quad \leq \quad \sum_{j=2}^{\infty} \frac{|\alpha_{jp_m}|}{p^{j\sigma}} = B \sum_{j=2}^{\infty} \frac{1}{p^{j\theta - j\sigma}} = B \frac{1}{p^{2\theta - 2\sigma}}.$$

Taigi eilutė

$$\sum_p |x_p(s,\omega) - y_p(s,\omega)|$$

konverguoja tolygiai kompaktiniuose D poaibiuose visiems $\omega \in \Omega$. Todėl (11) eilutės elgesio nagrinėjimas gali būti pakeistas eilutės

$$\sum_p y_p(s,\omega) \tag{12}$$

nagrinėjimu.

$y_p(s,\omega)$ yra nepriklausomų $H(D)$-reikšmių atsitiktinių elementų seka. Ji seka iš projekcijos $\omega(p)$ apibrėžimo, kai $\mathbb{E} y_p(s) = 0$. Be to, iš (I) hipotezės

$$\mathbb{E}|y_p(s)|^2 = \frac{|\alpha_{pj}(p)|^2}{p^{2\sigma}} = B \frac{1}{p^{2\theta - 2\sigma}},$$

taigi

$$\sum_p \mathbb{E}|y_p(s)|^2 (\log p)^2 < \infty, \quad s \in D.$$

Vadinasi, pagal 6 teoremą (Kolmogorovo), (12) eilutė konverguoja beveik visiems $\omega \in \Omega$, kiekvienam fiksuotam $s \in D$. Atsižvelgiant į konverguojančios Dirichlė eilutės savybes, konvergavimas yra tolygus kompaktiniuose aibės D poaibiuose beveik visiems $\omega \in \Omega$. Iš čia gauname, kad (12) eilutė konverguoja tolygiai beveik visiems $\omega \in \Omega$ kompaktiniuose aibės D poaibiuose. Tai įrodo lemą.

2.2. Ribinės teoremos Dirichlė daugianariams

Tegul $a(n) \in \mathbb{C}$,

$$p_N(s) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a(n)}{n^s}.$$

Imkime bet kokią kompleksinės plokštumos $\mathbb{C}$ sritį G, joje apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{T,p_N}(A) = \nu_{T,N}(p_N(s+i\tau) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(G)).$$

23 lema. *Egzistuoja tikimybinis matas P_{p_N} erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)), m_H)$ toks, kad matas P_{T,p_N} silpnai konverguoja į P_{p_N}, kai $T \to \infty$.*

Įrodymas. Tegul $p_1, \dots, p_d$ yra skirtingi pirminiai, kurie dalija

$$\prod_{\substack{n=1 \\ a(n)\neq 0}}^{N} n, \tag{13}$$

ir

$$\Omega_d = \prod_{j=1}^{d} \gamma_{p_j},$$

kur $\gamma_{p_j} = \gamma$, visiems $j = 1, \dots, d$. Apibrėžiame funkciją $h : \Omega_d \to H(G)$ formule

$$h(x_1, \dots, x_d) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a(n)}{n^s} \Bigg(\prod_{\substack{p_m^{\beta_j} x_j \| n \\ j \leq d}} x_j^{\beta_j} \Bigg)^{-1}, \quad (x_1, \dots, x_d) \in \Omega_d,$$

kur β_j yra skaičiaus n pirminių daliklių p_m laipsniai.

Neabejotinai, funkcija h yra tolydi aibėje Ω_d, ir

$$p_N(s+i\tau) = h(p_1^{i\tau}, \dots, p_d^{i\tau}). \tag{14}$$

Dabar apibrėšime tikimybinį matą

$$Q_T(A) = \nu_T(\tau \in [0,T] : (p_1^{i\tau}, \dots, p_d^{i\tau}) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(\Omega_d).$$

Kai $n_1, \dots, n_d \in \mathbb{N}$, mato Q_T Furjė transformacija $g_T(n_1, \dots, n_d)$ yra išreiškiama formule

$$\begin{aligned} g_T(n_1, \dots, n_d) &= \int_{\Omega_d} x_1^{n_1} \dots x_d^{n_d} dQ_T \\ &= \frac{1}{T} \int_0^T \prod_{j=1}^{d} p_j^{i\tau n_j} d\tau \end{aligned}$$

$$= \begin{cases} 1, & \text{jeigu} \quad (n_1, \ldots, n_d) = (0, \ldots, 0), \\ \frac{\exp\{iT\sum_{j=1}^d n_j \log p_j\}-1}{iT\sum_{j=1}^d n_j \log p_j}, & \text{jeigu} \quad (n_1, \ldots, n_d) \neq (0, \ldots, 0). \end{cases}$$

Kadangi pirminių skaičių logaritmai yra tiesiškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių lauko, tai randame, kad

$$\lim_{T\to\infty} g_T(n_1, \ldots, n_d) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu} \quad (n_1, \ldots, n_d) = (0, \ldots, 0), \\ 0, & \text{jeigu} \quad (n_1, \ldots, n_d) \neq (0, \ldots, 0). \end{cases} \tag{15}$$

Taigi pagal 7 teoremą matas Q_T silpnai konverguoja į Haro matą m_H erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, kai $T \to \infty$. Atsižvelgiant į funkcijos h tolydumą, (14) formulę ir 8 teoremą, gauname, kad tikimybinis matas P_{T,p_N} silpnai konverguoja į Haro matą $m_H h^{-1}$, kai $T \to \infty$. Tai įrodo lemą.

Tegul $g(n)$, $n \in \mathbb{N}$, yra pilnai multiplikatyvi aritmetinė funkcija, $|g(n)| = 1$ ir

$$p_N(s, g) = \sum_{n=1}^{N} \frac{a(n)g(n)}{n^s}.$$

Apibrėžiame tikimybinį matą $\widetilde{P}_{T,p_N}(A)$ formule

$$\widetilde{P}_{T,p_N}(A) = \nu_T(\tau \in [0, T] : p_N(s + i\tau, g) \in A), \quad A \in \mathcal{B}(H(G)).$$

Dabar parodysime, kad matas $m_H h^{-1}$ yra nepriklausomas nuo g.

24 lema. *Abu tikimybiniai matai* P_{T,p_N} ir $\widetilde{P}_{T,p_N}$ *silpnai konverguoja į tą patį matą, kai* $T \to \infty$.

Įrodymas. Tegul $p_1, \ldots, p_d$ yra tokie pat kaip 23 lemos įrodyme. Apibrėžiame funkciją $h_1 : \Omega_d \to \Omega_d$ formule

$$h_1(x_1, \ldots, x_d) = (x_1 e^{-i\eta_1}, \ldots, x_d e^{-i\eta_d}),$$

kur $\eta_j = \arg g(p_j)$, $j = 1, \ldots, d$.

Pagal 21 lemą tikimybiniai matai P_{T,p_N} ir $\widetilde{P}_{T,p_N}$ silpnai konverguoja atitinkamai į matus $m_H h^{-1}$ ir $m_H \widetilde{h}^{-1}$, kur funkcija $\widetilde{h}$ yra apibrėžiama panašiu būdu kaip h. Paprasta parodyti, kad

$$\begin{aligned} \widetilde{h}(x_1, \ldots, x_d) &= \sum_{n=1}^{N} \frac{a(n)}{n^s} \prod_{\substack{p_m^{\beta_j} \\ j \le d}} e^{i\beta_j\eta_j} x_j^{-\beta_j} \\ &= \sum_{n=1}^{N} \frac{a(n)g(n)}{n^s} \Bigg(\prod_{\substack{p_m^{\beta_j} \\ j \le d}} x^{\beta_j} \Bigg)^{-1} \end{aligned}$$

$$= \quad h(h_1(x_1, \ldots, x_d)).$$

Taigi,

$$m_H \widetilde{h}^{-1} = m_H(h(h_1))^{-1} = m_H(h_1)^{-1}h^{-1}. \tag{16}$$

Kadangi Haro matas m_H yra invariantiškas poslinkio atžvilgiu, aibėje Ω_d turime, kad $m_H h_1^{-1} = m_H$. Iš čia ir (16) išplaukia

$$m_H \widetilde{h}^{-1} = m_H h^{-1}.$$

Lema yra įrodyta.

2.3. Ergodiniai elementai

Tegul $a_\tau = \{p^{-i\tau} : p \text{ yra pirminis}\}$, kai $\tau \in \mathbb{R}$. Apibrėžiame transformaciją φ_τ aibėje Ω, imdami

$$\varphi_\tau(\omega) = a_\tau \omega, \tag{17}$$

kai $\omega \in \Omega$. Tada φ_τ yra išmatuojama, matą išsauganti transformacija erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$.

Priminsime, kad aibė $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra vadinama invariantine aibe transformacijos φ_τ atžvilgiu, jeigu aibės A ir $A_\tau = \varphi_\tau(A)$ skiriasi viena nuo kitos nulių m_H-matų aibe, t. y.,

$$m_H(A \triangle A_\tau) = 0,$$

kur $\triangle$ žymi simetrinį aibių A ir A_τ skirtumą. Vienparametrinė grupė yra vadinama ergodine, jeigu jos σ-kūnas sudarytas tik iš aibių, turinčių Haro matą lygų 0 arba 1.

25 lema. *Transformacija $\{\varphi_\tau : \tau \in \mathbb{R}\}$ yra ergodinė.*

Įrodymas. Tegul $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ yra tokia, kad $m_H(A \triangle A_\tau) = 0$. Parodysime, kad $m_H(A) = 0$ arba $m_H(A) = 1$.

Tarkime, χ yra aibės Ω netrivialus charakteris ir imkime

$$\omega(r) = \frac{\omega(l)}{\omega(k)},$$

kur $\omega \in \Omega$, r yra teigiamas racionalusis skaičius, ir $r = \frac{l}{k}$, $(l, k) = 1$. Tada gauname, kad funkcija $\omega \in \Omega$ gali būti pratęsta į teigiamų racionaliųjų skaičių aibę. Tegul $\chi_r : \Omega \to \gamma$ yra apibrėžiamas lygybe $\chi_r(\omega) = \omega(r)$, $\omega \in \Omega$. Tada χ_r yra aibės Ω charakteris kiekvienam fiksuotam racionaliąjam skaičiui r. Kita vertus, bet kuriam charakteriui χ iš aibės Ω egzistuoja toks teigiamas racionalusis r, kad $\chi = \chi_r$, nes aibės Ω dualioji grupė apibrėžiama kaip tiesioginė suma $\bigoplus_p \mathbb{Z}_p$, kur $\mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}$ bet kuriems pirminiams p.

I_A pažymėkime aibės A indikatoriaus funkciją. Kadangi aibė A yra invariantinė, tai

$$I_A(a_\tau \omega) = I_A(\omega) \tag{18}$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$ Haro mato m_H atžvilgiu.

Tegul χ yra kuris nors aibės Ω netrivialusis charakteris. Kaip buvo pažymėta anksčiau, egzistuoja toks racionalusis skaičius r, kad $\chi = \chi_r$. Iš čia ir χ_r apibrėžimo seka, kad

$$\chi(a_\tau) = r^{-i\tau}.$$

Taigi, galime rasti $\tau = \tau_0$ tokį, kad $\chi(a_{\tau_0}) \neq 1$.

Atsižvelgiant į Furjė transformacijos apibrėžimą ir Haro mato savybes, indikatoriaus funkcijos I_A Furjė transformacija $\widetilde{I}_A$ yra

$$\begin{aligned} \widetilde{I}_A(\chi) &= \int_\Omega \chi(\omega) I_A(\omega) m_H(d\omega) \\ &= \int_\Omega \chi(\omega) I_A(a_{\tau_0}\omega) m_H(d\omega) \\ &= \chi(a_{\tau_0}) \int_\Omega \chi(\omega) I_A(\omega) m_H(d\omega) \\ &= \chi(a_{\tau_0}) \widetilde{I}_A. \end{aligned}$$

Kadangi $\chi(a_{\tau_0}) \neq 1$ parinkus τ_0, iš čia gauname, kad $\widetilde{I}_A(\chi) = 0$ visiems netrivialiesiems aibės Ω charakteriams.

Dabar tegul χ_0 yra aibės Ω trivialusis charakteris, t. y., $\chi_0(\omega) = 1$ visiems $\omega \in \Omega$. Tarkime, kad $\widetilde{I}_A(\chi_0) = u$. Kadangi lygybės

$$\int_\Omega \chi(\omega) m_H(d\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu} \quad \chi = \chi_0, \\ 0, & \text{jeigu} \quad \chi \neq \chi_0, \end{cases}$$

tenkinamos ir $\widetilde{I}_A(\chi) = 0$ bei $\widetilde{I}_A(\chi_0) = u$, tai randame, kad

$$\widetilde{I}_A(\chi) = u \int_\Omega \chi(\omega) m_H(d\omega) = u\widetilde{I}_A(\chi) = u(\chi)$$

kiekvienam aibės Ω charakteriui χ. Funkcija $I_A(\omega)$ yra vienareikšmiškai apibrėžiama jos Furjė transformacija, todėl $I_A(\omega) = u$ beveik visiems $\omega \in \Omega$. Kadangi $I_A(\omega)$ yra aibės A indikatorius, todėl gauname, kad $u = 0$ arba $u = 1$. Taigi, $I_A(\omega) = 0$ beveik visiems $\omega \in \Omega$ arba $I_A(\omega) = 1$ beveik visiems $\omega \in \Omega$. Taigi, $m_H(A) = 0$ arba $m_H(A) = 1$. Lema yra įrodyta.

26 lema. *Tegul $\sigma > \frac{1}{2} + \theta$. Tada*

$$\int_0^T |L(\sigma + it, \omega)|^2 dt = BT, \quad T \to \infty,$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$.

Įrodymas. Tegul, kai $n \in \mathbb{N}$,

$$\xi_n(\sigma, \omega) = \frac{a(n)\omega(n)}{n^\sigma}.$$

Kadangi seka $\xi_n(\sigma, \omega)$ apibrėžia paporinių ortogonalių atsitiktinių elementų seką su antru momentu

$$\mathbb{E}|\xi_n(\sigma, \omega)|^2 = \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}},$$

tada atsitiktinis kintamasis $\xi(\sigma, \omega)$ yra

$$\xi(\sigma, \omega) = \Big|\sum_{n=1}^{\infty} \xi_n(\sigma, \omega)\Big|^2 = |L(\sigma, \omega)|^2$$

ir

$$\mathbb{E}\xi(\sigma, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|\xi_n(\sigma, \omega)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{|a(n)|^2}{n^{2\sigma}} < \infty. \tag{19}$$

Paskutinės eilutės konvergavimas seka iš (I) hipotezės. Lengva pastebėti, kad

$$\begin{aligned} \xi(\sigma, \varphi_\tau(\omega)) &= |\xi(\sigma, a_\tau \omega)|^2 = |\xi(\sigma + i\tau, \omega)|^2 \\ &= |L(\sigma, a_\tau \omega)|^2 = |L(\sigma + it, \omega)|^2 \end{aligned} \tag{20}$$

kiekvienai transformacijai apibrėžiamai (17) formule. Kadangi Haro matas m_H yra invariantas, lygybė $m_H(\varphi_\tau(A)) = m_H(A)$ tenkinama kiekvienam $A \in \mathcal{B}(\Omega)$ ir kiekvienam $\tau \in \mathbb{R}$. Taigi, $|L(\sigma + it, \omega)|^2$ yra stipriai stacionarus procesas. Jis taip pat yra ir ergodinis procesas. Dabar tai parodysime.

Tegul Q yra tikimybinis matas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$, kuris apibrėžtas atsitiktiniam procesui $|L(\sigma + i\tau, \omega)|^2$. Tegul A yra funkcijos $|L(\sigma + i\tau, \omega)|^2$ invariantinė aibė, t. y.,

$$Q(A \triangle A_\tau) = 0. \tag{21}$$

Turime, kad

$$A' = \{\omega \in \Omega : |L(\sigma + i\tau, \omega)|^2 \in A\} = \{\omega \in \Omega : |L(\sigma, a_\tau \omega)|^2 \in A\}$$

ir

$$A'_u \;=\; \{\omega \in \Omega : |L(\sigma + i\tau, \omega)|^2 \in A_u\} = \{\omega \in \Omega : |L(\sigma + i\tau + iu, \omega)|^2 \in A\}$$

$$= \quad \{\omega \in \Omega : |L(\sigma + i\tau, a_u\omega)|^2 \in A\},$$

čia naudojame pažymėjimą $A_u = \varphi_u(A)$ su transformacija φ_u apibrėžta pagal (17) formulę. Taigi, $A'_u = \varphi_u(A')$. Kadangi $(A \triangle A_u)' = A' \triangle A'_u$ ir, atsižvelgiant į (21) formulę,

$$m_H(A' \triangle A'_u) = m_H((A \triangle A_u)') = Q(A \triangle A_u) = 0.$$

Tai reiškia, kad A' yra invariantinė aibė φ_τ atžvilgiu. Pagal 25 lemą grupė $\{\varphi_\tau\}$ yra ergodinė. Taigi, $m_H(A') = 0$ arba $m_H(A') = 1$. Iš čia seka, kad $Q(A) = 0$ arba $Q(A) = 1$, t. y. procesas $|L(\sigma + i\tau, \omega)|^2$ yra ergodinis. Iš (19) ir (20) formulių gauname, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(\sigma + i\tau, \omega)|^2 d\tau = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \xi(\sigma, \varphi_\tau(\omega)) d\tau = \mathbb{E}\xi(\sigma, \omega) < \infty$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Tai įrodo lemą.

2.4. Aproksimavimas pagal vidurkį

Tegul $\sigma_1 > 1 + \theta$ ir, kai $-\sigma_1 \leq \sigma \leq \sigma_1$, apibrėžiame funkciją

$$l_N(s) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) N^s, \quad N \in \mathbb{N},$$

kur $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija. Be to, kai $\sigma + \sigma_1 > 1 + \theta$,

$$L_N(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L(s + z) l_N(z) \frac{dz}{z}. \tag{22}$$

Pagal Stirlingo formulę (10 teorema) ir (III) hipotezę, funkcijos $L(s)$ integralas gali būti aproksimuojamas $L_N(s)$ vidurkiu.

27 lema. *Tegul K yra srities D kompaktinis poaibis. Tada*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K} |L(s + i\tau) - L_N(s + i\tau)| d\tau = 0.$$

Įrodymas. Tegul $\sigma_1 = \Re z$. Kadangi $\sigma + \sigma_1 > 1$, funkcija $L(s + z)$ gali būti išreiškiama absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute

$$L(s + z) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)}{n^{s+z}}.$$

Kai $n, N \in \mathbb{N}$, tegul

$$b_N(n) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{l_N(z)}{n^z} \frac{dz}{z}.$$

Kadangi, pagal 10 lemą

$$b_N(n) = B\frac{1}{n^{\sigma_1}}\int_{-\infty}^{\infty}|l_N(\sigma_1+it)|dt = \frac{B}{n^{\sigma_1}}.$$

Vadinasi, eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)b_N(n)}{n^s}$$

konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > 1-\sigma_1$. Taigi, sukeitę sumą ir integralą $L_N(s)$ apibrėžime randame, kad

$$\begin{aligned}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}L(s+z)l_N(z)\frac{dz}{z} &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\frac{l_N(z)}{n^z}\frac{dz}{z}\\ &= \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)b_N(n)}{n^s},\end{aligned}$$

ir

$$L_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)b_N(n)}{n^s}. \tag{23}$$

Pagal Melino perstatymo formulę (11 teorema), turime

$$b_N(s) = \frac{1}{2\pi i\sigma_1}\int_{\sigma_1-i\infty}^{\sigma_1+i\infty}\Gamma\big(\frac{z}{\sigma_1}\big)\big(\frac{N}{n}\big)^z dz = \exp\Big\{-\big(\frac{m}{n}\big)^{\sigma_1}\Big\}.$$

Todėl (23) lygybę galime užrašyti

$$L_N(s) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{a(n)}{n^s}\exp\Big\{-\Big(\frac{m}{n}\Big)^{\sigma_1}\Big\}, \tag{24}$$

kur eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > 1+\theta$.

Dabar pakeiskime integralo $L_N(s)$ kontūrą. Pointegralinis reiškinys turi paprastus polius taškuose $z=0$ ir $z=1-s$. Kai $\varepsilon>0$, $\sigma_2 = \frac{1}{2}+\theta+\frac{\varepsilon}{2}$. Tada pagal 14 teoremą (reziduumų),

$$\begin{aligned}L_N(s) &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2-\sigma+i\infty}L(s+z)l_N(z)\frac{dz}{z}\\ &\quad+(\mathrm{Res}_{z=0}+\mathrm{Res}_{z=1-s})\big(L(s+z)\frac{l_N(z)}{z}\big)\\ &= \frac{1}{2\pi i}\int_{\sigma_2-\sigma-i\infty}^{\sigma_2-\sigma+i\infty}L(s+z)l_N(z)\frac{dz}{z}+L(s)+\frac{l_N(1-s)}{1-s}.\end{aligned} \tag{25}$$

Tegul F yra uždaras kontūras srityje D ir aibės K uždarinys. δ pažymime atstumą nuo F iki aibės K. Pagal Koši integralinę formulę (15 teorema) turime

$$\sup_{s\in K}|L(s+i\tau)-L_N(s+i\tau)| \le \frac{1}{2\pi\sigma}\int_F|L(z+i\tau)-L_N(z+i\tau)||dz|.$$

Aišku, pakankamai dideliam T,

$$\frac{1}{T}\int_0^T\sup_{s\in K}|L(s+i\tau)-L_N(s+i\tau)|d\tau$$

$$
\begin{aligned}
&= B\frac{1}{\delta T}\int_F |dz| \int_0^{2T} |L(\Re z + i\tau) - L_N(\Re z + i\tau)| d\tau \\
&= B\frac{|F|}{\delta T} + \sup_{\sigma, s \in \mathbb{C}} \int_0^{2T} |L(\sigma + it) - L_N(\sigma + it)| dt. \qquad (26)
\end{aligned}
$$

Kontūras F gali būti parinktas taip, kad, kai $s \in F$, galiotų nelygybės

$$
\sigma \geq 1 + \theta + \frac{3\varepsilon}{4} \quad \text{ir} \quad \delta \geq \frac{\varepsilon}{4}.
$$

Iš (25) formulės randame

$$
\begin{aligned}
&L(\sigma + it) - L_N(\sigma + it) \\
&= B\int_{-\infty}^{\infty} |L(\sigma_2 + it + i\tau)||l_N(\sigma_2 - \sigma + i\tau)| d\tau + \frac{B|l_N(1 - \sigma - it)|}{|1 - \sigma - it|}.
\end{aligned}
$$

Pagal Koši-Švarco nelygybę (16 teorema) ir kvadrato vidurkį, kai $\sigma > 1 + \theta$,

$$
\int_0^T |L(\sigma + it)| dt = B\sqrt{T}\left(\int_0^T |L(\sigma + it)| dt\right)^{1/2} = BT, \qquad (27)
$$

iš čia seka, kad

$$
\begin{aligned}
&\frac{1}{T}\sup_{\sigma, s \in F}\int_0^{2T} |L(\sigma + it) - L_N(\sigma + it)| dt \\
&= B\sup_{s, \sigma \in F}\int_{-\infty}^{\infty} |l_N(\sigma_2 - \sigma + i\tau)|\big(2 + \frac{2|\tau|}{T}\big) d\tau + \frac{B}{T}\sup_{s, \sigma \in F}\int_0^{2T} \frac{|l_N(1 - \sigma + it)|}{|1 - \sigma - it|} dt \\
&= B\sup_{\sigma \in I}\int_{-\infty}^{\infty} |l_N(\sigma + it)|(1 + |\tau|) d\tau + o(1), \quad T \to \infty, \qquad (28)
\end{aligned}
$$

kur $I = [\frac{1}{2} - \theta + \frac{3\varepsilon}{2}, -\frac{\varepsilon}{4}]$. Iš Stirlingo formulės (10 teorema) ir $l_N(s)$ apibrėžimo, gauname

$$
\lim_{N \to \infty}\sup_{\sigma \in I}\int_{-\infty}^{\infty} |l_N(\sigma + it)|(1 + |\tau|) d\tau = 0.
$$

Paskutinė lygybė drauge su (26) ir (28) duoda lemos tvirtinimą.

2.5. Ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms eilutėms

Pirmiausia prisiminkime kompakto apibrėžimą. Tarkime G yra sritis aibėje $\mathbb{C}$. Funkcijų, reguliarių srityje G, šeima, yra kompaktinė srityje G, jeigu kiekviena šios šeimos seka apima posekį, kuris tolygiai konverguoja kiekviename kompaktiniame poaibyje $K \subset G$.

Kai $N \in \mathbb{N}$, apibrėžkime $\omega \in \Omega$ ir $s \in D$

$$
L_N(s, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a(n)\omega(n)}{n^s} \exp\left(-\frac{n}{N}\right)^{\sigma_1}.
$$

Kadangi eilutė $L_N(s)$, apibrėžta (24) formule konverguoja absoliučiai, tai $L_N(s,\omega)$ taip pat konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > 1+\theta$. Apibrėžkime tikimybinius matus

$$P_{T,N}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : L_N(s+i\tau) \in A\}$$

ir

$$\widetilde{P}_{T,N}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : L_{N,M}(s+i\tau,\omega) \in A\},$$

$A \in \mathcal{B}(H(D))$. Įrodysime, kad abu matai silpnai konverguoja į tą patį matą, tai $T \to \infty$.

28 lema. *Egzistuoja tikimybinis matas P_N^* erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ toks, kad abu matai $P_{T,N}$ ir $\widetilde{P}_{T,N}$ sipnai konverguoja į P_N^*, kai $T \to \infty$.*

Įrodymas. Tegul, kai $M, N \in \mathbb{N}$ ir $\omega \in \Omega$ bei $s \in D$,

$$L_{N,M}(s) = \sum_{n=1}^{M} \frac{a(n)}{n^s} \exp\left(-\left(\frac{n}{N}\right)^{\sigma_1}\right)$$

ir

$$L_{N,M}(s,\omega) = \sum_{n=1}^{M} \frac{a(n)\omega(n)}{n^s} \exp\left(-\left(\frac{n}{N}\right)^{\sigma_1}\right).$$

Apibrėžiame du tikimybinius matus $P_{T,N,M}$ ir $\widetilde{P}_{T,N,M}$ erdvėje $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ formulėmis

$$P_{T,N,M}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : L_{N,M}(s+i\tau) \in A\}$$

ir

$$\widetilde{P}_{T,N,M}(A) = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : L_{N,M}(s+i\tau,\omega) \in A\},$$

kai $A \in \mathcal{B}(H(D))$.

Pagal 24 lemą abu matai $P_{T,N,M}$ ir $\widetilde{P}_{T,N,M}$ silpnai konverguoja į tą patį matą $P_{N,M}$, kai $T \to \infty$.

Pirmiausia parodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{N,M}\}$ yra suspausta fiksuotam N.

Tegul η yra atsitiktinis elementas tolygiai pasiskirstęs intervale $[0,1]$, apibrėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje $(\Omega_0, \mathcal{B}(\Omega_0), \mathbb{P})$. Tegul

$$X_{T,N,M}(s) = L_{N,M}(s+i\eta T). \tag{29}$$

Pagal 23 lemą,

$$X_{T,N,M} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} X_{N,M}, \tag{30}$$

kur $X_{N,M} = X_{N,M}(s)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas su skirstiniu $P_{N,M}$.

Tarkime $\{K_j\}$ yra aibės D kompaktinių poaibių seka, tenkinanti sąlygas:

1) $K_j \subset K_{j+1}$ su kiekvienu $j \in \mathbb{N}$,

2) jeigu K yra kompaktas ir $K \subset D$, tada $K \subset K_j$ kai kuriems $j \in \mathbb{N}$, ir $D = \bigcup\limits_{j=1}^{\infty} K_j$.

Tarkime ρ yra metrika indukuojanti analizinių funkcijų $H(D)$ erdvės topologiją ir apibrėžiama tokiu būdu

$$\rho(f_1, f_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \cdot \frac{f_1, f_2}{1 + \rho_n(f_1, f_2)}, \quad f_1, f_2 \in H(D),$$

čia $\rho(f_1, f_2) = \sup\limits_{s \in K_n} |f_1 - f_2|$.

Pagal Čebyšovo nelygybę (17 teoremą)

$$\mathbb{P}\big(\sup_{s \in K_j} |X_{T,N,M}(s)| > M_j\big) \leq \frac{1}{M_j T} \int_0^T \sup_{s \in K_j} |L_{N,M}(s + i\tau)| d\tau < \infty. \tag{31}$$

Taigi,

$$\limsup_{T \to \infty} \mathbb{P}\big(\sup_{s \in K_j} |X_{T,N,M}(s)| > M_j\big) \leq \frac{1}{M_j} \sup_{s \in K_j} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_j} |L_{N,M}(s + i\tau)| d\tau. \tag{32}$$

Kadangi eilutė $L_N(s)$ konverguoja aibėje D, tada

$$\sup_{N \geq 1} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s \in K_j} |L_{N,M}(s + i\tau)| d\tau \leq R_j < \infty, \tag{33}$$

kur $R_j > 0$ yra konstanta priklausanti nuo K_j. Jeigu ε yra laisvai parenkamas teigiamas skaičius, tada galime imti

$$M_j = \frac{R_j \varepsilon^j}{\varepsilon}. \tag{34}$$

Atsižvelgiant į (31) ir (33),

$$\limsup_{T \to \infty} \mathbb{P}\big(\sup_{s \in K_j} |X_{T,N,M}(s) > M_j|\big) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{35}$$

Dabar apibrėžiame funkciją $h : H(D) \to \mathbb{R}$ formule

$$h(f) = \sup_{s \in K_j} |f(s)|, \quad f \in H(D).$$

Funkcija h yra tolydi, taikome (30) ir 8 teoremą bei gauname

$$\sup_{s \in K_j} |X_{T,N,M}(s)| \xrightarrow[T \to \infty]{\mathcal{D}} \sup_{s \in K_j} |X_{N,M}(s)|.$$

Taigi, atsižvelgiant į (35), randame, kad

$$\mathbb{P}\left(\sup_{s \in K_j} |X_{N,M}(s)| > M_j\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^j}. \tag{36}$$

Tegul

$$H_\varepsilon = \{f \in H(D) : \sup_{s\in K_j} |f(s)| \leq M_j,\ j \geq 1\}.$$

Pagal 12 teoremą (Montelo) funkcijų H_ε šeima yra tolygiai apibrėžta kiekviename kompakte $K \subset D$, ir tokiu būdu H_ε yra kompaktas. Taikydami (36), turime

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X_{N,M}(s) \in H_\varepsilon) &\geq 1 - \sum_{j=1}^{\infty} \mathbb{P}\big(\sup_{s\in K_j} |X_{N,M}(s)| > M_j\big) \\ &\geq 1 - \varepsilon \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{2^j} = 1 - \varepsilon. \end{aligned}$$

Kadangi $P_{N,M}$ yra atsitiktinio elemento $X_{N,M}$ skirstinys, tai

$$P_{N,M}(H_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon \quad \text{visiems} \quad M, N \in \mathbb{N}.$$

Tokiu būdu turime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{N,M}\}$ yra suspausta ir pagal pirmąją Prochorovo teoremą (18 teorema) ji yra reliatyviai kompaktiška.

Iš funkcijų $L_{N,M}(s)$ ir $L_N(s)$ apibrėžimų turime, kad, kai $\sigma > 1 + \theta$,

$$\lim_{M\to\infty} L_{N,M}(s) = L_N(s).$$

Kadangi $L_N(s)$ konverguoja absoliučiai, konvergavimas yra tolydus pusplokštumėje $\sigma \geq 1 + \theta$. Taigi randame, kad

$$\begin{aligned} &\lim_{M\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \text{meas}\{\tau \in [0, T] : \rho(L_{N,M}(s + i\tau), L_N(s + i\tau)) \geq \varepsilon\} \\ &\leq \lim_{M\to\infty} \limsup_{t\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int_0^T \rho(L_{N,M}(s + i\tau), L_N(s + i\tau)) d\tau = 0, \end{aligned} \tag{37}$$

kiekvienam $\varepsilon > 0$.

Dabar tegul

$$Y_{T,N}(s) = L_N(s + i\theta T).$$

Panašiu būdu kaip anksčiai, gauname, kad

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(\rho(X_{T,N,M}(s), Y_{T,N}(s)) \geq \varepsilon) = 0. \tag{38}$$

Tegul $\{P_{N,M_k}\}$ yra šeimos $\{P_{N,M}\}$ poaibis toks, kad P_{N,M_k} silpnai konverguoja į tam tikrą matą P_N^*. Tada

$$X_{N,M_k} \xrightarrow[M_k\to\infty]{\mathcal{D}} P_N^*. \tag{39}$$

Kadangi $H(D)$ yra separabili (20 teorema), iš čia ir iš (30), išpaukia, kad

$$Y_{T,N} \xrightarrow[T\to\infty]{\mathcal{D}} P_N^*. \tag{40}$$

Taigi, egzistuoja matas P_N^* toks, kad $P_{T,N}$ silpnai konverguoja į P_N^*, kai $T \to \infty$. (40) sąryšis parodo, kad matas P_N^* yra nepriklausomas nuo posekio $\{P_{N,M_k}\}$ pasirinkimo. Kadangi šeima $\{P_{N,M}\}$ yra reliatyviai kompaktiška, pagal 13 teoremą, gauname, kad $P_{N,M}$ silpnai konverguoja į P_N^*, kai $M \to \infty$, t. y.,

$$X_{N,M} \underset{T\to\infty}{\xrightarrow{\mathcal{D}}} P_N^*. \tag{41}$$

Pritaikę tuos pačius argumentus atsitiktiniams elementams $L_{N,M}(s + i\eta T, \omega)$ ir $L_N(s + i\eta T, \omega)$, įrodome, jog matas $\widetilde{P}_{T,N}$ silpnai konverguoja į P_N^*, kai $T \to \infty$. Todėl gauname lemos tvirtinimą.

Tegul Ω_1 yra aibės Ω poaibis toks, kad, kai $\omega \in \Omega$, eilutė $L(s, \omega)$ apibrėžiama (8) formule tolygiai konverguoja kompaktiniame aibės D poaibyje, ir kai $\sigma > 1 + \theta$, teisingas įvertis

$$\int_0^T |L(\sigma + it, \omega)|^2 dt = BT.$$

Tada iš 21 ir 27 lemų seka, kad $m(\Omega_1) = 1$.

29 lema. *Tegul K yra kompaktinis aibės D poaibis. Tada, kai $\omega \in \Omega_1$,*

$$\lim_{N\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T \sup_{s\in K} |L(s + i\tau, \omega) - L_N(s + i\tau, \omega)| d\tau = 0.$$

Pakartojus tuos pačius argumentus kaip ankstesnėje lemoje, gauname įrodymą.

3. TEOREMOS ĮRODYMAS

Iš 28 lemos seka, kad lieka įrodyti, kad matai P_N^* ir P_T sutampa, t. y. $P_N^* = P_T$.

Tegul $A \in \mathcal{B}(H(D))$ yra mato P_N^* tolydumo aibė. Tada pagal 28 lemą, kai $\omega \in \Omega$, turime

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T(\tau \in [0,T] : L(s+i\tau,\omega) \in A) = P^*(A). \tag{42}$$

Fiksuojame aibę A ir erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžiame atsitiktinį elementą η formule

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu} \quad L(\sigma,\omega) \in A, \\ 0, & \text{jeigu} \quad L(\sigma,\omega) \notin A. \end{cases}$$

Tada,

$$\mathbb{E}\eta = \int_\Omega \eta dm_H = m_H\{\omega : L(s,\omega) \in A\} = P_T(A) < \infty. \tag{43}$$

Pagal 25 lemą ir 9 teoremą randame, kad

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T \eta(\varphi_\tau(\omega))d\tau = \mathbb{E}\eta \tag{44}$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Iš η ir φ_τ apibrėžimų seka, kad

$$\frac{1}{T}\int_0^T \eta(\varphi_\tau(\omega))d\tau = \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : L(s+i\tau,\omega) \in A\}.$$

Iš čia, (43) ir (44) gauname

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : L(s+i\tau,\omega) \in A\} = P_T(A)$$

beveik visiems $\omega \in \Omega$. Taigi, pagal (42) formulę

$$P_T(A) = P_N^*(A)$$

bet kurioms tolydžiosioms mato P_N^* aibėms A. Kadangi tolydumo aibė sudaro apibrėžiančią klasę, gauname, kad

$$P_T(A) = P_N^*(A)$$

visoms aibėms $A \in \mathcal{B}(H(D))$. Teorema yra įrodyta.

4. IŠVADOS

Magistro darbe nagrinėjamos Oilerio sandaugų, apibrėžiamų formule

$$L(s) = e^{iw} \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_{1p} p^{-s}) \dots (1 - \alpha_{dp} p^{-s})}$$

statistinės savybės, čia α_{jp} yra kompleksiniai skaičiai, $w \in \mathbb{R}$, d – natūralusis skaičius, $1 \leq j \leq d$ ir p žymi pirminį skaičių. Įrodome, kad Oilerio sandaugoms, tenkinančioms tam tikras hipotezes, teisinga ribinė teorema tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme analizinių funkcijų erdvėje $H(D)$. Ribinis matas teoremoje pateiktas išreikštine forma. Nustatyta, kad jis yra atsitiktinio elemento, susijusio su Oilerio sandaugomis $L(s)$, skirstinys.

SUMMARY

Value-distribution of Euler products in the space of analytic functions

The Master work is devoted to the value-distribution of Euler products $L(s)$, defined by formula

$$L(s) = e^{iw} \prod_p \frac{1}{(1-\alpha_{1p}p^{-s})\ldots(1-\alpha_{dp}p^{-s})}.$$

Here α_{jp} are complex numbers, $\omega \in \mathbb{R}, d$ is natural number, $1 \leq j \leq d$ and p denote by the prime number.

It is know that, if the function $L(s)$ satisfies some hypotheses, then it converges in the half-plane $\sigma > 1+\theta,\ \theta \in \left[0; \frac{1}{2}\right)$.

In this work, limit theorem in the sense of the weak convergence of probability measures for the Euler product $L(s)$ in the space of analytic functions is proved. More precisely, if $D = \{s \in \mathbb{C} : \sigma > 1+\theta\}$ and $H(D)$ denotes the space of analytic on D functions equipped with the topology of uniform convergence on compacta, then it is proved that the probability measure

$$\frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0, \mathrm{T}] : \mathrm{L(s + i\tau) \in A}\right\},$$

$A \in \mathcal{B}(H(D))$ converges weakly to the distribution of explicitly given $H(D)$-valued random element as $T \to \infty$.

The master work consists of the introduction, 4 chapters, conclusion and bibliography.

In Chapter 1 we survey well-known theorems on probability theory, analytic numbers theory, theory of functions of complex-variable, and latter they in the proof of main statement are applied.

Chapter 2 is devoted to auxiliary results, i. e. we define $H(D)$-valued random elements, prove the limit theorems for Dirichlet polynomials, apply the elements from ergodic theory, approximate by mean, and prove limit theorems for absolutely convergent series.

In Chapter 3 we prove the main statement of the work.

LITERATŪRA

[1] E. Bombieri, A. Hejhal. *On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products. Duke Math. J.* **80**(3), 821–862, 1995.

[2] A. Laurinčikas. *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function.* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[3] A. Nagelė, L. Papreckienė. *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija.* Žara, Vilnius, 1996.

[4] V. Rudinas. *Matematinės analizės pagrindai.* Mokslas, Vilnius, 1987.

[5] J. Steuding. *Value-Distirbution of L-Functions.* Springer Verlag, Berlin, Heidelberg, 2007.