ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS
MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
MATEMATIKOS KATEDRA

Donata Blonskytė

Pusiau reliatyvistinės radialinės Šriodingerio lygties su kuloniniu potencialu sprendinių struktūra

Magistro darbas

Darbo vadovas:
prof. Donatas Jurgaitis

ŠIAULIAI, 2010

TURINYS

ĮVADAS

Nagrinėdami realius mus supančius reiškinius dažnai norime juos ne tik suprasti kokybiškai, bet ir išsiaiškinti kiekybinius dėsningumus – gauti tam tikrų dydžių skaitines vertes. Tam neretai kokybinio modelio nepakanka – dar reikia sugalvoti, kokiu būdu analizines lygtis paversti skaitinio išvedimo rezultatais. Statistiniais atvejais tai paprasta. Pavyzdžiui, į dujų būsenos lygtį įrašę dominančius skaičius suskaičiuojame atsakymą, ir kompiuterio šiam darbui net nereikia, nebent norėtume gauti didelę skaičių lentelę.

Visai kitokia situacija yra su realiomis situacijomis, kai fizikiniai (mechaniniai, elektroniniai ar net biologiniai) dydžiai keičiasi proceso eigoje. Tada šių dydžių priklausomybes galima atvaizduoti diferencialinių lygčių pagalba. Dėl šios priežasties diferencialinių lygčių ar jų sistemų sprendimas, sprendinių struktūros tyrimas yra klasikinis ir vienas iš pagrindinių matematinės analizės uždavinių [3].

Paprastoji diferencialinė lygtis – lygtis, kuri sieja nepriklausomą kintamąjį, nežinomą, ieškomąją funkciją ir jos išvestines. Bendras n-tos eilės paprastosios diferencialinės lygties pavidalas yra toks:

$$F\left(x, y'(x), y''(x), \ldots, y^{(n)}(x)\right) = 0,$$

čia x – nepriklausomas kintamasis, $y(x)$ – ieškomoji funkcija, y', y'', ..., $y^{(n)}$ – ieškomosios funkcijos išvestinės.

Jei į diferencialinę lygtį įeina kelių kintamųjų funkcija ir jos dalinės išvestinės, tai ji vadinama diferencialine lygtimi dalinėmis išvestinėmis [1].

Realūs procesai dažniausiai aprašomi paprastosiomis arba dalinių išvestinių diferencialinėmis lygtimis ir jų sistemomis. Apskritai realūs procesai aprašomi dalinių išvestinių diferencialinėmis lygtimis ir svarbiausia yra tai, ka šios diferencialinės lygtys yra netiesinės. Netiesinių dalinių išvestinių diferencialinių lygčių teorija šiuo metu yra labai jauna ir tokių lygčių sprendimo metodų nėra daug.

Kita labai svarbi diferencialinių lygčių teorijos problema yra išsigimstančios diferencialinės lygtys ir jų sistemos. Išsigimstančiomis vadinamos diferencialinės lygtys ar jų sistemos, kada jų koeficientai tam tikruose taškuose turi ypatingumų arba, kitaip sakant, tam tikruose taškuose pradingsta diferencialinės lygties aukščiausios eilės išvestinė, o diferencialinių lygčių sistemos atveju dingsta pagrindinė diferencialinių lygčių sistemos dalis. Šiais atvejais sakome, kad išsigimsta diferencialinės lygties ar diferencialinių lygčių sistemos eilė.

Šiuo metu pilnai sukurta analizinė išsigimstančių paprastųjų diferencialinių lygčių teorija. Ji susideda iš dviejų dalių:

1 dalis: analizinė reguliariai išsigimstančių paprastųjų diferencialinių lygčių teorija;

2 dalis: analizinė įreguliariai arba stipriai išsigimstančių paprastųjų diferencialinių lygčių teorija.

Išsigimstančių paprastųjų diferencialiniųs lygčių, kurių koeficientai prie aukščiausios eilės išvestinės virsta nuliu, arba koeficientai prie kitų ieškomosios funkcijos išvestinių ar pačios ieškomosios funkcijos turi ypatingumų, sprendimas yra labai sudėtingas, reikalaujantis daug kruopštaus, ilgo ir sunkaus darbo uždavinys.

Reguliariai išsigimstančių diferencialinių lygčių (jos dar vadinamos Fukso klasės lygtimis) sprendiniai yra tolydžios, analizinės funkcijos išsigimimo taškų aplinkoje. Jeigu išsigimimas laipsninis, tai išsigimstančių diferencialinių lygčių sprendinių struktūra labai priklauso nuo išsigimimo laipsnio, t.y. nuo laipsninės funkcijos rodiklio .

Magistro darbe nagrinėsime konkrečią išsigimstančią paprastąją diferencialinę lygtį, kurios tyrimas aktualus ir svarbus fizikoje.

1. UŽDAVINIO FORMULAVIMAS

Magistro darbe nagrinėjama tokia ketvirtos eilės tiesinė paprastoji diferencialinė lygtis:

$$C_1 DU_\alpha + \frac{d^2}{dr^2}U_\alpha + C_2 r\left(\frac{d}{dr}V\right)\left(\frac{d}{dr}\frac{U_\alpha}{r}\right) - \frac{l(l+1)}{r^2}U_\alpha + (CE_\alpha - CV - CV_{sl})U_\alpha = 0\,, \qquad (1)$$

čia r – nepriklausomas kintamasis, U – ieškomoji funkcija, l – konstanta, C, C_1, C_2, α – fizikinės konstantos, E_α − energija.

Paprastumo ir tumpumo dėlei U_α toliau darbe žymėsime *u(r)* arba tiesiog *u*.

$$DU_\alpha = \frac{d^4}{dr^4}U_\alpha - \frac{2l(l+1)}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}U_\alpha + \frac{4l(l+1)}{r^3}\frac{d}{dr}U_\alpha + \left(\frac{l^2(l+1)^2 - 6l(l+1)}{r^4}\right)U_\alpha\;, \qquad (2)$$

čia

$$C = \frac{2m}{h^2}, C_1 = \left(\frac{h}{2mc}\right)^2, C_2 = \frac{1}{2mc^2}\,, \qquad (3)$$

$$V_{sl}(r) = -\frac{K}{r}V'(r)\,, \qquad (4)$$

čia $V_{sl}(r)$ – potencialas, h – mažoji Planko konstanta, m – masė.

Ieškosime (1) lygties sprendinių tenkinančių sąlygas:

$$u(\infty)=0, \qquad (5)$$

$$u(0)=0. \qquad (6)$$

Diferencialinė lygtis (1) su sąlygomis (5), (6) paprastųjų diferencialinių lygčių teorijoje vadinama kraštiniu uždaviniu, o (5) ir (6) sąlygos - kraštinėmis sąlygomis.

Magistro darbe spręsime suformuluotąjį kraštinį uždavinį [5] su Kulono potencialu, kuris yra toks:

$$V(r) = \frac{V_0}{r}, \qquad (7)$$

čia V_0 – fiksuota potencialo reikšmė.

(1) diferencialinę lygtį spręsime apibendrintų laipsninių eilučių metodu. Gausime laipsnines eilutes, kurios formaliai tenkina duotąją diferencialinę lygtį. Jeigu įrodysime formaliosios laipsninės eilutės konvergavimą, tai reikš, kad laipsninės eilutės konvergavimo srityje rasti kraštinio uždavinio sprendiniai. Šių laipsninių eilučių konvergavimą tirsime mažorantų metodu. Jis išdėstytas monografijoje [2].

2. UŽDAVINIO SPRENDIMAS

Į (1) diferencialinę lygtį surašome (2), (3), (4) išraiškas ir gauname tokią ketvirtos eilės paprastąją diferencialinę lygtį:

$$\left(\frac{h}{2mc}\right)^2\left[\frac{d^4}{dr^4}U_\alpha-\frac{2l(l+1)}{r^2}\frac{d^2}{dr^2}U_\alpha+\frac{4l(l+1)}{r^3}\frac{d}{dr}U_\alpha+\frac{l^2(l+1)^2-6l(l+1)}{r^4}U_\alpha\right]+$$
$$+\frac{d^2}{dr^2}U_\alpha+\frac{1}{2mc^2}\left[r\left(\frac{d}{dr}V\right)\left(\frac{d}{dr}\frac{U_\alpha}{r}\right)\right]-\frac{l(l+1)}{r^2}U_\alpha+\left(\frac{2m}{h^2}E_\alpha-\frac{2m}{h^2}V-\frac{2m}{h^2}\frac{K}{r}V'(r)\right)\cdot$$
$$\cdot U_\alpha=0.$$

Sugrupuojame narius prie vienodos eilės išvestinių, atliekame kitus elementarius matematinius pertvarkius ir turime:

$$\left(\frac{h}{2mc}\right)^2\frac{d^4}{dr^4}U_\alpha-\left[\left(\frac{h}{2mc}\right)^2\frac{2l(l+1)}{r^2}-1\right]\frac{d^2}{dr^2}U_\alpha+\left[\frac{1}{2mc^2}r\left(\frac{d}{dr}V\right)\frac{1}{r}+\frac{4l(l+1)}{r^3}\left(\frac{h}{2mc}\right)^2\right]\cdot$$
$$\cdot\frac{d}{dr}U_\alpha+\left[\frac{l^2(l+1)^2-6l(l+1)}{r^4}\left(\frac{h}{2mc}\right)^2-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2m}{h^2}E_\alpha-\frac{2m}{h^2}V-\frac{2m}{h^2}\frac{K}{r}V'(r)\right]U_\alpha=0.$$

Išvestines, užrašytas kaip diferencialų santykius, pakeiskime paprastesniais žymenimis

$$u'=\frac{d}{dr}U_\alpha,\quad u''=\frac{d^2}{dr^2}U_\alpha,\quad u'''=\frac{d^3}{dr^3}U_\alpha,\quad u^{(4)}=\frac{d^4}{dr^4}U_\alpha.$$

Po šių pažymėjimų nagrinėjamąją diferencialinę lygtį užrašome kaip tokią ketvirtos eilės diferencialinę lygtį

$$\left(\frac{h}{2mc}\right)^2u^{(4)}-\left[\left(\frac{h}{2mc}\right)^2\frac{2l(l+1)}{r^2}-1\right]u''+\left[\frac{1}{2mc^2}+\frac{4l(l+1)}{r^3}\left(\frac{h}{2mc}\right)^2\right]u'+$$
$$+\left[\frac{l^2(l+1)^2-6l(l+1)}{r^4}\left(\frac{h}{2mc}\right)^2-\frac{l(l+1)}{r^2}+\frac{2m}{h^2}E_\alpha-\frac{2m}{h^2}V-\frac{2m}{h^2}\frac{k}{r}V'(r)\right]u=0. \quad (8)$$

Diferencijuojame (7) lygtį ir randame potencialo išvestinę

$$V'(r)=-\frac{V_0}{r^2}.$$

ir gautąją potencialo išvestinės išraišką įrašę į (8) lygtį, gauname tokią diferencialinę lygtį

$$\left(\frac{h}{2mc}\right)^2 u^{(4)} - \left[\left(\frac{h}{2mc}\right)^2 \frac{2l(l+1)}{r^2} - 1\right]u'' + \left[\frac{1}{2mc^2}\left(-\frac{V_0}{r^2}\right) + \frac{4l(l+1)}{r^3}\left(\frac{h}{2mc}\right)^2\right]u' +$$
$$+\left[\frac{l^2(l+1)^2 - 6l(l+1)}{r^4}\left(\frac{h}{2mc}\right)^2 - \frac{l(l+1)}{r^2} + \frac{2m}{h^2}E_\alpha - \frac{2m}{h^2}\frac{V_0}{r} - \frac{2m}{h^2}\frac{k}{r}\left(-\frac{V_0}{r^2}\right)\right]u = 0.$$

Sutraukę panašiuosius narius bei narius be kintamojo r pažymėję konstantomis, turime

$$C_1\left(u^{(4)} - \frac{2l(l+1)}{r^2}u'' + \frac{4l(l+1)}{r^3}u' + \left(\frac{l^2(l+1)^2 - 6l(l+1)}{r^4}\right)u\right) + u'' +$$
$$+ C_2 r\left(-\frac{V_0}{r^2}\right)\frac{u'}{r} - \frac{l(l+1)}{r^2}u + \left(CE_\alpha - C\frac{V_0}{r} - C\frac{k}{r}\left(-\frac{V_0}{r^2}\right)\right)u = 0,$$

čia C, C_1, C_2 yra konstantos, kurios aprašytos (3).

Atlikę pertvarkius, pastarąją diferencialinę lygtį, užrašome patogiu tolimesniems tyrimams pavidalu [7] turime, kad

$$C_1 u^{(4)} - C_1\frac{2l(l+1)}{r^2}u'' + \frac{4l(l+1)}{r^3}C_1 u' + \frac{l^2(l+1)^2 - 6l(l+1)}{r^4}C_1 u + u'' -$$
$$- C_2\frac{V_0}{r^2}u' - \frac{l(l+1)}{r^2}u + CE_\alpha u - C\frac{V_0}{r}u - C\frac{kV_0}{r^3}u = 0.$$

Skaitiklyje esančius reiškinius, kuriuose dominuoja fizikinė konstanta l, pažymėkime taip

$$l(l+1) = A,$$
$$l^2(l+1)^2 = A^2,$$
$$2l(l+1) = 2A,$$
$$4l(l+1) = 4A,$$
$$6l(l+1) = 6A.$$

Tada, gautas išraiškas surašome į pastarąją diferencialinę lygtį ir gauname

$$C_1 u^{(4)} - C_1 \frac{2A}{r^2} u'' + C_1 \frac{4A}{r^3} u' + \frac{A^2 - 6A}{r^4} C_1 u + u'' - \frac{C_2 V_0}{r^2} u' - \frac{A}{r^2} u + CE_\alpha u - \frac{CV_0}{r} u - \\ - C \frac{KV_0}{r^3} u = 0. \tag{10}$$

Dėl to, kad (10) diferencialinėje lygtyje yra dalyba iš nepriklausomo kintamojo r, kuris artėja į nulį, mums reikia, kad vardiklyje neliktų r, tuo tikslu (10) diferencialinę lygtį dauginame panariui iš kintamojo r ketvirtuoju laipsniu ir turime

$$C_1 u^{(4)} - C_1 \frac{2A}{r^2} u'' + C_1 \frac{4A}{r^3} u' + \frac{A^2 - 6A}{r^4} C_1 u + u'' - \frac{C_2 V_0}{r^2} u' - \frac{A}{r^2} u + CE_\alpha u - \frac{CV_0}{r} u - \\ - C \frac{KV_0}{r^3} u = 0 \Big| \cdot r^4.$$

Naujoji diferencialinė lygtis yra tokia

$$r^4 C_1 u^{(4)} - 2Ar^2 C_1 u'' + 4ArC_1 u' + \left(A^2 - 6A\right) C_1 u + r^4 u'' - r^2 C_2 V_0 u' - Ar^2 u + CE_\alpha r^4 u - \\ - CV_0 r^3 u - CKV_0 ru = 0. \tag{11}$$

Kadangi bakalauro darbe [7] nepavyko analitiškai ir pilnai išspręsti šios išsigimstančios diferencialinės lygties, t.y. tiesiogiai gauti diferencialinės lygties sprendinius laipsninėmis nepriklausomo kintamojo r laipsnių eilutėmis, tai šiame darbe bandysime išspręsti šią problemą ir pirmiausia pasinaudosime tokiu keitiniu

$$u(r) = \varphi(r)\varphi_0(r). \tag{12}$$

(12) sandaugą diferencijuojame keturis kartus pagal nepriklausomą kintamąjį r ir gauname tokias išvestinių išraiškas

$$u'(r) = \varphi'(r)\varphi_0(r) + \varphi(r)\varphi_0{}'(r),$$

$$u''(r) = \varphi''(r)\varphi_0(r) + \varphi'(r)\varphi_0'(r) + \varphi'(r)\varphi_0'(r) + \varphi(r)\varphi''_0(r),$$

$$u'''(r) = \varphi'''(r)\varphi_0(r) + \varphi''(r)\varphi_0'(r) + \varphi''(r)\varphi_0'(r) + \varphi'(r)\varphi''_0(r) + \varphi'(r)\varphi''_0(r) + \varphi''(r)\varphi_0'(r) + \varphi'(r)\varphi_0''(r) +$$
$$+ \varphi(r)\varphi_0'''(r),$$

Sutraukę panašius narius, gauname tokią trečiosio išvestinės išraišką

$$u'''(r) = \varphi'''(r)\varphi_0(r) + 3\varphi''(r)\varphi_0'(r) + 3\varphi'(r)\varphi''_0(r) + \varphi(r)\varphi_0'''(r)$$

Diferencijuojame pastarąją lygybę dar kartą ir turime

$$u^{(4)}(r) = \varphi^{(4)}(r)\varphi_0(r) + \varphi'''(r)\varphi_0'(r) + 3\varphi'''(r)\varphi_0'(r) + 3\varphi''(r)\varphi_0''(r) + 3\varphi''(r)\varphi_0''(r) + \varphi'(r)\varphi_0'''(r) +$$
$$+ \varphi(r)\varphi^{(4)}{}_0(r) + \varphi'(r)\varphi_0'''(r)$$

Galutinė ketvirtosios išvestinės išraiška yra tokia

$$u^{(4)}(r) = \varphi^{(4)}(r)\varphi_0(r) + 4\varphi'''(r)\varphi_0'(r) + 4\varphi''(r)\varphi_0''(r) + 4\varphi'(r)\varphi_0'''(r) + \varphi(r)\varphi^{(4)}{}_0(r)\,.$$

Gautąsias ieškomosios funkcijos išvestinių išraiškas per naujų ieškomųjų funkcijų išvestines, įrašę į nagrinėjamą diferencialinę lygtį (11), turime, kad

$$r^4 C_1\left[\varphi^{(4)}\varphi_0 + 4\varphi'''\varphi_0' + 4\varphi''\varphi_0'' + 4\varphi'\varphi_0''' + \varphi\varphi_0{}^4\right] - r^2 C_1 2A\left[\varphi''\varphi_0 + 2\varphi'\varphi_0' + \varphi\varphi_0{}''\right] +$$
$$+ rC_1 4A\left[\varphi'\varphi_0 + \varphi\varphi_0{}'\right] + A^2 - 6AC_1\varphi\varphi_0 + (\varphi''\varphi_0 + 2\varphi'\varphi_0{}' + \varphi\varphi_0{}'') - r^2 C_2 V_0\left[\varphi'\varphi_0 + \varphi\varphi_0{}'\right] -$$
$$- r^2 A\varphi\varphi_0 + r^4 CE_\alpha\varphi\varphi_0 - r^4 CV_0\varphi\varphi_0 - rCKV_0\varphi\varphi_0 = 0$$

Pastarojoje lygtyje, pritaikę kintamųjų atskyrimo metodą, gauname dvi ketvirtos eilės diferencialines lygtis naujosioms ieškomosioms funkcijoms konkrečiai vienai φ_0 ir kitai φ rasti. Tos lygtys yra tokios:

$$r^4 C_1\varphi^{(4)}\varphi_0 + 4r^4 C_1\varphi_0'\varphi''' + \left(r^4 C_1 4\varphi_0'' - r^2 C_1 2A\varphi_0 + \varphi_0\right)\varphi'' + \left(r^4 C_1 4\varphi_0''' - r^2 C_1 4A\varphi_0' +\right.$$
$$\left. + rC_1 4A\varphi_0 + 2\varphi_0{}' - r^2 C_2 V_0\varphi_0\right)\varphi' + \left(r^4 C_1\varphi_0{}^{(4)} - r^2 C_1 2A\varphi_0'' + rC_1 4A\varphi_0' + \right. \tag{13}$$
$$\left. + \left(A^2 - 6A\right)C_1\varphi_0 + r^4\varphi_0'' - r^2 C_2 V_0\varphi_0' - r^2 A\varphi_0 + r^4 CE_\alpha\varphi_0 - r^3 CV_0\varphi_0 - rCKV_0\varphi_0\right)\varphi = 0$$

ir

$$
\begin{aligned}
&r^4C_1\varphi\varphi^{(4)}{}_0+r^4 4C_1\varphi'\varphi_0'''+\left(r^4C_14\varphi''-r^2C_12A\varphi+r^4\varphi\right)\varphi_0''+\\
&+\left(r^4C_14\varphi'''-r^2C_14A\varphi'+rC_14A\varphi+r^42\varphi'-r^2C_2V_0\varphi\right)\varphi_0'+\left(r^4C_1\varphi^{(4)}-r^2C_12A\varphi''+\right.\\
&\left.+rC_14A\varphi'+\left(A^2-6A\right)C_1\varphi+r^4\varphi''-r^2C_2V_0\varphi'-r^2A\varphi+r^4CE_\alpha\varphi-r^3CV_0\varphi-rCKV_0\varphi\right)\varphi_0=0
\end{aligned}
\tag{14}
$$

$$
r^4C_1\varphi\varphi^{(4)}{}_0-r^2C_2V_0\varphi\varphi_0'-r^3C_2V_0\varphi\varphi_0-rCKV_0\varphi\varphi_0=H,
$$

H – atskyrimo konstanta.

(13) diferencialinės lygties sprendinių ieškosime tokia apibendrinta laipsnine eilute:

$$
\varphi_0(r)=\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho_i}\varphi_{0k}\,. \tag{15}
$$

čia ρ yra parametras i=1,2,3…, φ_{0k} kai k=0,1,2,… yra nežinomi koeficientai, kuriuos reikia rasti.

Šią laipsninę eilutę diferencijuojame keturis kartus ir turime, kad

$$
\varphi_0'(r)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-1}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right),
$$

$$
\varphi_0''(r)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-2}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2,
$$

$$
\varphi_0'''(r)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-3}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3,
$$

$$
\varphi_0{}^{(4)}(r)=\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)(k+\rho-3)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-4}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4.
$$

Funkcijos $\varphi_0(r)$ išvestinių išraiškas įrašę į (13) lygtį, gauname tokią lygtį

$$
r^4C_1\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k}\varphi^{(4)}+r^4 4C_1\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-1}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)\varphi'''+
$$

$$+\left[r^4C_1 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-2}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 - r^2C_1 2A\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k} + + r^4\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k}\right]\varphi'' +$$

$$+\left[r^4C_1 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-3}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^3 - r^2C_1 4A\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-1}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right) -\right.$$

$$\left. - rC_1 4A\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k} + r^4 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-1}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - r^2C_2V_0\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k}\right]\varphi' +$$

$$+\left[r^4C_1\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)(k+\rho-3)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-4}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^4 -\right.$$

$$- r^2C2A\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-2}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 + rC_1 4A\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-1}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right) +$$

$$+\left(A^2-6A\right)C_1\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k} + r^4\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)(k+\rho-1)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-2}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right)^2 -$$

$$- r^2C_2V_0\sum_{k=0}^{\infty}(k+\rho)\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho-1}\varphi_{0k}\left(\frac{1}{\alpha}\right) - r^2A\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k} + r^4CE_\alpha\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k} -$$

$$\left. - r^3CV_0\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k} - rCKV_0\sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k}\right]\varphi = 0 \qquad (16)$$

Norint gauti rekurentinę formulę (15) laipsninės eilutės koeficientams φ_{0k} rasti reikia surinkti narius prie skirtingų $\frac{r}{\alpha}$ laipsnių ir juos prilyginti nuliui. Mažiausias $\frac{r}{\alpha}$ laipsnis yra $\rho-4$ ir prilyginę nuliui koeficientą prie jo turime

$$\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\rho-4} : C_1\rho(\rho-1)(\rho-2)(\rho-3)\varphi_{0k} = 0\,. \qquad (17)$$

Iš pastarosios lygties gauname ρ reikšmes, kurios yra:

$\rho = 0$, $\rho = 1$, $\rho = 2$, $\rho = 3$, $C_1 \neq 0$, φ_{0k} − bet koks.

Prilyginę nuliui koeficientą prie $\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\rho-3}$ gauname

$$C_1\rho(\rho+1)\rho(\rho-1)(\rho-2)\varphi_{01} + 4C_1\rho(\rho-1)(\rho-2)\varphi_{00} = 0 \qquad (18)$$

Iškeliame bendrus dauginamuosius prieš skliaustus ir gauname

$$C_1\rho(\rho-1)(\rho-2)\left[(\rho+1)\varphi_{01} + 4\varphi_{00}\right] = 0;$$

Kadangi

$$C_1 \neq 0\,,\;\; \rho \neq 0\,,\;\; \rho \neq 1,\;\; \rho \neq 2,$$

tai

$$(\rho+1)\varphi_{01} + 4\varphi_{00} = 0\,.$$

Iš paskutiniosios lygybės laipsninės eilutės (16) antrąjį koeficientą φ_{01} išreiškiame per pirmąjį koeficientą φ_{00} ir ta išraiška yra tokia

$$\varphi_{01} = -\varphi_{00}\,.$$

Prilyginę nuliui koeficientą prie $\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\rho-2}$ gauname

$$C_1(\rho+2)(\rho+1)\rho(\rho-1)\varphi_{02} + 4C_1(\rho+1)\rho(\rho-1)\varphi_{01} + 4C_1\rho(\rho-1)\varphi_{00} - 2CA\rho(\rho-1)\varphi_{00} + \\ + \rho(\rho-1)\varphi_{00} = 0.$$

Iškeliame bendrus dauginamuosius priš skliaustus ir turime

$$\rho(\rho-1)\left[C_1(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{02} + 4C_1(\rho+1)\varphi_{01} + 4C_1\varphi_{00} - 2CA\varphi_{00} + \varphi_{00}\right] = 0\,; \tag{19}$$

Iš to seka, kadangi $\rho \neq 0$, $\rho \neq 1$, tai

$$C_1(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{02} + 4C_1(\rho+1)\varphi_{01} + 4C_1\varphi_{00} - 2CA\varphi_{00} + \varphi_{00} = 0\,;$$

Padarome elementarius pertvarkymus, gauname

$$C_1(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{02} + 4C_1(\rho+1)\varphi_{01} + (4C_1 - 2CA + 1)\varphi_{00} = 0\,; \tag{20}$$

Iš (20) lygties gauname φ_{02} išraiška per φ_{01} ir φ_{00} ir ji yra tokia:

$$\varphi_{02} = \frac{-4C_1(\rho+1)\varphi_{01} - (4C_1 - 2CA + 1)\varphi_{00}}{C_1(\rho+2)(\rho+1)}\,.$$

Toliau renkame narius prie $\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\rho-1}$, prilyginame nuliui koeficientą prie šio laipsnio ir gauname tokia lygtį

$$C_1(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\rho\varphi_{03} + 4C_1(\rho+2)(\rho+1)\rho\varphi_{02} + 4C_1(\rho+1)\rho\varphi_{01} - 2CA(\rho+1)\rho\varphi_{01} + \\ + (\rho+1)\rho\varphi_{01} + 4C_1\rho\varphi_{00} - C_1 4A\rho\varphi_{00} + 2\rho\varphi_{00} + C_1 4A\rho\varphi_{00} - C_2V_0\rho\varphi_{00} = 0 \tag{21}$$

Iš (21) , po nesudėtingų pertvarkymų, gauname φ_{03} išraišką per φ_{02} , φ_{01} ir φ_{00} ir ta išraiška yra tokia:

$$\varphi_{03} = \frac{-4C_1(\rho+2)(\rho+1)\rho\varphi_{02} - (4C_1(\rho+1)\rho - 2CA(\rho+1)\rho + (\rho+1)\rho)\varphi_{01} -}{C_1(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\rho}$$
$$\frac{-(4C_1\rho - C_1 4A\rho + 2\rho + C_1 4A\rho - C_2V_0\rho)\varphi_{00}}{C_1(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\rho}$$

Prilyginę nuliui koeficientą prie laipsnio $\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{\rho}$ gauname koeficiento φ_{04} išraišką ir ji tokia

$$\begin{aligned}
&C_1(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{04} + 4C_1(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{03} + 4C_1(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{02} - \\
&-2CA(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{02} + (\rho+2)(\rho+1)\varphi_{02} + 4C_1(\rho+1)\varphi_{01} - C_1 4A(\rho+1)\varphi_{01} + 2(\rho+1)\varphi_{01} + \\
&+C_1 4A(\rho+1)\varphi_{01} - C_2V_0(\rho+1)\varphi_{01} + C_1\varphi_{00} - C_1 2A\varphi_{00} + \varphi_{00} + C_1 4A\varphi_{00} - \\
&-C_2V_0\varphi_{00} + (A^2-6A)C_1\varphi_{00} - A\varphi_{00} + CE_\alpha\varphi_{00} - CV_0\varphi_{00} - CKV_0\varphi_{00} = 0.
\end{aligned}$$

Atliekame elementarius matematinius pertvarkymus ir gauname:

$$\begin{aligned}
&C_1(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{04} + 4C_1(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{03} + \\
&+[4C_1(\rho+2)(\rho+1) - 2CA(\rho+2)(\rho+1) + (\rho+2)(\rho+1)]\varphi_{02} + \\
&+[4C_1(\rho+1) - C_1 4A(\rho+1) + 2(\rho+1) + C_1 4A(\rho+1) - C_2V_0(\rho+1)]\varphi_{01} + \\
&+[C_1 - C_1 2A + 1 + C_1 4A - C_2V_0 + (A^2-6A)C_1 - A + CE_\alpha - CV_0 - CKV_0]\varphi_{00} = 0
\end{aligned} \tag{22}$$

Taigi iš (22) gauname laipsninės eilutės (15) koeficiento φ_{04} išraiška per φ_{03}, φ_{02}, φ_{01} ir φ_{00}

$$\varphi_{04} = \frac{-4C_1(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)\varphi_{03} - [4C_1(\rho+2)(\rho+1) - 2CA(\rho+2)(\rho+1) + (\rho+2)(\rho+1)]\varphi_{02} -}{C_1(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)}$$
$$\frac{-[4C_1(\rho+1) - C_1 4A(\rho+1) + 2(\rho+1) + C_1 4A(\rho+1) - C_2V_0(\rho+1)]\varphi_{01} -}{C_1(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)}$$
$$\frac{-[C_1 - C_1 2A + 1 + C_1 4A - C_2V_0 + (A^2-6A)C_1 - A + CE_\alpha - CV_0 - CKV_0]\varphi_{00}}{C_1(\rho+4)(\rho+3)(\rho+2)(\rho+1)}.$$

Iš pastarųjų lygčių t.y. (17), (18), (20), (21) ir (22) gauname rekurentinę formulę, ieškomosios laipsninės eilutės (15) koeficientams $\varphi_{0k,k=1,2,3,\ldots}$ rasti. Rekurentinės formulės pavidalas yra toks

$$C_1(k+\rho)(k+\rho-1)(k+\rho-2)(k+\rho-3)\varphi_{0k} - 4C_1(k-1+\rho)(k+\rho-2)(k+\rho-3)\varphi_{0(k-1)} +$$

$$
\begin{aligned}
&+C_1 4(k+\rho-2)(k+\rho-3)\varphi_{0(k-2)} - C2A(k+\rho-2)(k+\rho-3)\varphi_{0(k-2)} + \\
&+(k+\rho-2)(k+\rho-3)\varphi_{0(k-1)} + 4C_1(k+\rho-3)\varphi_{0(k-3)} - \\
&-C_1 4A(k+\rho-3)\varphi_{0(k-3)} + 2(k+\rho-3)\varphi_{0(k-3)} + C_1 4A(k+\rho-3)\varphi_{0(k-3)} - \\
&-C_2 V_0(k+\rho-3)\varphi_{0(k-3)} + C_1\varphi_{0(k-4)} - C_1 2A\varphi_{0(k-4)} + \varphi_{0(k-4)} + \\
&+C_1 4A\varphi_{0(k-4)} - C_2 V_0\varphi_{0(k-4)} + (A^2-6A)C_1\varphi_{0(k-4)} - A\varphi_{0(k-4)} + \\
&+CE_\alpha\varphi_{0(k-4)} - CV_0\varphi_{0(k-4)} - CKV_0\varphi_{0(k-4)} = 0;
\end{aligned}
\tag{23}
$$

Kai $k = 0,1,2,...$, o $\varphi_{0k} \equiv 0$, kai $k < 0$.

Iš rekurentinės lygybės (23) visi laipsninės eilutės (15) koeficientai φ_{0k}, kai k=1,2,3,… randami vienareikšmiškai pagal laisvai pasirinktą pirmąjį eilutės koeficientą φ_{00}.

(14) lygties sprendinių ieškosime tokia laipsnine eilute

$$
\varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (r)^{k+\mu_i}\phi_k, \tag{24}
$$

Šią eilutę diferencijuojame keturis kartus pagal kintamąjį r ir gauname

$$
\varphi'(r) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(r)^{k+\mu-1}\phi_k;
$$

$$
\varphi''(r) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(r)^{k+\mu-2}\phi_k;
$$

$$
\varphi'''(r) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(r)^{k+\mu-3}\phi_k;
$$

$$
\varphi^{(4)}(r) = \sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)(r)^{k+\mu-4}\phi_k.
$$

Gautas išvestinių išraiškas įrašome į (14) lygtį ir gauname tokią lygybę

$$
r^4 C_1\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k\varphi^{(4)}{}_0 + r^4 4C_1\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(r)^{k+\mu-1}\phi_k\varphi_0''' +
$$

$$
+\left(r^4 C_1 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(r)^{k+\mu-2}\phi_k - r^2 C_1 2A\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k + r^4\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k\right)\varphi_0'' +
$$

$$
\begin{aligned}
&+\Bigg(r^4C_1 4\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(r)^{k+\mu-3}\phi_k - r^2C_1 4A\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(r)^{k+\mu-1}\phi_k + \\
&+rC_1 4A\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k + r^4 2\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(r)^{k+\mu-1}\phi_k - r^2C_2V_0\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k\Bigg)\varphi_0' + \\
&+\Bigg(r^4C_1\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)(r)^{k+\mu-4}\phi_k - \\
&-r^2C_1 2A\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(r)^{k+\mu-2}\phi_k + rC_1 4A\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(r)^{k+\mu-1}\phi_k + \\
&+\left(A^2-6A\right)C_1\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k + r^4\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(k+\mu-1)(r)^{k+\mu-2}\phi_k - r^2C_2V_0\sum_{k=0}^{\infty}(k+\mu)(r)^{k+\mu-1}\phi_k - \\
&-r^2A\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k + r^4CE_\alpha\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k - r^3CV_0\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k - rCKV_0\sum_{k=0}^{\infty}(r)^{k+\mu}\phi_k\Bigg)\varphi_0 = 0
\end{aligned} \tag{25}
$$

Surenkame narius prie skirtingų r laipsnių ir prilyginę juos nuliui gausime laipsninės eilutės (24) koeficientus ϕ_k, kai k=0,1,2,… .

Koeficientas prie $(r)^{\mu-4}$, kai $k=0$ yra toks:

$$C_1\mu(\mu-1)(\mu-2)(\mu-3)\phi_0\varphi_0 = 0, \tag{26}$$

čia $C_1 \neq 0$, $\mu=0$, $\mu=1$, $\mu=2$, $\mu=3$, o ϕ_0 - bet koks.

Surinkę narius prie $(r)^{\mu-3}$, kai $k=1$ gauname

$$C_1(\mu+1)\mu(\mu-1)(\mu-2)\phi_1 + C_1 4\mu(\mu-1)(\mu-2)\phi_0 = 0; \tag{27}$$

Iškeliame (27) lygtyje bendrą dauginamąjį prieš skliaustus gauname

$$C_1\mu(\mu-1)(\mu-2)\left[(\mu+1)\phi_1 + 4\phi_0\right] = 0;$$

Pasirinkime konkrečią μ reikšmę, tada $\mu \neq 0,\quad \mu \neq 1,\quad \mu \neq 2$, o ϕ_0 galima išreikšti per ϕ_1 ir atvirkščiai

$$(\mu+1)\phi_1 + 4\phi_0 = 0.$$

Iš pastarosios lygybės turime, kad

$$\phi_1 = -\phi_0.$$

Toliau renkame narius prie $(r)^{\mu-2}$, kai $k=2$, gauname

$$
\begin{aligned}
&C_1(\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)\phi_2 + C_1 4(\mu+1)\mu(\mu-1)\phi_1 + C_1 4\mu(\mu-1)\phi_0 - C_1 2A\mu(\mu-1)\phi_0 + \\
&+\mu(\mu-1)\phi_0 = 0;
\end{aligned} \tag{28}
$$

Iš (28) lygties gauname ϕ_2 išraišką per ϕ_1 ir ϕ_0

$$\phi_2 = \frac{-C_1 4(\mu+1)\mu(\mu-1)\phi_1 - C_1 4\mu(\mu-1)\phi_0 + C_1 2A\mu(\mu-1)\phi_0 - \mu(\mu-1)\phi_0}{C_1(\mu+2)(\mu+1)\mu(\mu-1)}.$$

Prilyginę nuliui koeficientą prie $(r)^{\mu-1}$, kai $k = 3$, gauname

$$\begin{aligned}&C_1(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)\mu\phi_3 + C_1 4(\mu+2)(\mu+1)\mu\phi_2 + C_1 4(\mu+1)\mu\phi_1 - C_1 2A(\mu+1)\mu\phi_1 + (\mu+1)\mu\phi_1 + \\ &+4C_1\mu\phi_0 - C_1 4A\mu\phi_0 + C_1 4A\mu\phi_0 - C_2 V_0\mu\phi_0 = 0.\end{aligned} \tag{29}$$

Iš (29) lygties gauname ϕ_3 išraišką per ϕ_0, ϕ_1 ir ϕ_2

$$\begin{aligned}\phi_3 = &\frac{-C_1 4(\mu+2)(\mu+1)\mu\phi_2 - (C_1 4(\mu+1)\mu - C_1 2A(\mu+1)\mu + (\mu+1)\mu)\phi_1}{C_1(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)\mu} \\ &\frac{-(4C_1\mu - C_1 4A\mu + C_1 4A\mu - C_2 V_0\mu)\phi_0}{C_1(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)\mu}.\end{aligned}$$

Prilyginę nuliui koeficientą prie $(r)^{\mu}$, gauname

$$\begin{aligned}&C_1(\mu+4)(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)\phi_4 + C_1 4(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)\phi_3 + C_1 4(\mu+2)(\mu+1)\phi_2 - \\ &- C_1 2A(\mu+2)(\mu+1)\phi_2 + (\mu+2)(\mu+1)\phi_2 + 4C_1(\mu+1)\phi_1 - C_1 4A(\mu+1\phi_1 + C_1 4A(\mu+1)\phi_1 - \\ &- C_2 V_0(\mu+1)\phi_1 + C_1\phi_0 - C_1 2A\phi_0 + \phi_0 + C_1 4A\phi_0 - C_2 V_0\phi_0 + (A^2 - 6A)C_1\phi_0 - \\ &- A\phi_0 + CE_\alpha\phi_0 - CV_0\phi_0 - CKV_0\phi_0 = 0.\end{aligned} \tag{30}$$

Iš (30) lygties gauname išraišką ϕ_4 per ϕ_0, ϕ_1, ϕ_2 ir ϕ_3, kurio išraiška yra

$$\begin{aligned}\phi_4 = &\frac{-C_1 4(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)\phi_3 - (C_1 4(\mu+2)(\mu+1) - C_1 2A(\mu+2)(\mu+1) + (\mu+2)(\mu+1))\phi_2}{C_1(\mu+4)(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)} \\ &\frac{-(4C_1(\mu+1) - C_1 4A(\mu+1 + C_1 4A(\mu+1) - C_2 V_0(\mu+1))\phi_1 -}{C_1(\mu+4)(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)} \\ &\frac{-(C_1 - C_1 2A + 1 + C_1 4A - C_2 V_0 + (A^2 - 6A)C_1 - A + CE_\alpha - CV_0 - CKV_0)\phi_0}{C_1(\mu+4)(\mu+3)(\mu+2)(\mu+1)}.\end{aligned}$$

Ieškomosios laipsninės eilutės (25) koeficientai ϕ_k, kai k=0,1,2,…, randami iš šios rekurentinės formulės

$$\begin{aligned}
&C_1(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\phi_k + C_1 4(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\phi_{k-1} + \\
&+ C_1 4(k+\mu)(k+\mu-1)\phi_{k-2} - C_1 2A(k+\mu)(k+\mu-1)\phi_{k-2} + \\
&+ (k+\mu)(k+\mu-1)\phi_{k-2} + 4C_1(k+\mu-3)\phi_{k-3} - C_1 4A(k+\mu-3)\phi_{k-3} + \\
&+ C_1 4A(k+\mu-3)\phi_{k-3} - C_2 V_0(k+\mu-3)\phi_{k-3} + C_1\phi_{k-4} - \\
&- C_1 2A\phi_{k-4} + r^4\phi_{k-4} + C_1 4A\phi_{k-4} - C_2 V_0\phi_{k-4} + \left(A^2-6A\right)C_1\phi_{k-4} - \\
&- A\phi_{k-4} + CE_\alpha\phi_{k-4} - CV_0\phi_{k-4} - CKV_0\phi_{k-4} = 0.
\end{aligned} \tag{31}$$

Iš šios rekurentinės formulės visi (24) laipsninės eilutės koeficientai randami pagal laisvai parenkamą pirmąjį koeficientą ϕ_k.

Sudauginę (15) ir (24) laipsnines eilutes gauname nagrinėjamos diferencialinės lygties (1) formaliųjų sprendinių išraiškas laipsninėmis eilutėmis

$$U_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k}\sum_{k=0}^{\infty} r^{k+\mu}\phi_k. \tag{32}$$

Gautąjį rezultatą suformuluoskime kaip teoremą.

Teorema. *Diferencialinės lygties (1) formalūs sprendiniai išreiškiami tokia laipsninių eilučių sandauga:*

$$U_\alpha(r) = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{r}{\alpha}\right)^{k+\rho}\varphi_{0k}\sum_{k=0}^{\infty} r^{k+\mu}\phi_k,$$

kurioje laipsninės eilutės koeficientai φ_{0k}, kai $k = 0,1,2...$, randami iš rekurentinės formulės (23), o laipsninės eilutės koeficientai ϕ_k, kai $k = 0,1,2...$, randami iš rekurentinės formulės (31). Jose parametras ρ randamas iš lygties (17), o parametras μ randamas iš (26) lygties.

3. FORMALIŲJŲ LAIPSNINIŲ EILUČIŲ ĮEINANČIŲ Į SPRENDINIUS KONVERGAVIMO TYRIMAS

Tai atliksime mažorantų metodu, kuris išdėstytas monografijoje [4].

Eilutė, kurios konvergavimą tirsime yra tokia:

$$\varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (r)^{k+\mu_i} \phi_k \tag{1*}$$

Parametras μ_i įtakos konvergavimui neturi, todėl pakanka ištirti tokios laipsninės eilutės konvergavimą:

$$\sum_{k=0}^{\infty} r^k \phi_k \tag{1**}$$

Tirsime laipsninės eilutės (1**) konvergavimą taško $r = 0$ aplinkoje.

(1**) laipsninės eilutės modulių eilutė yra tokia:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|r^k\right| \left|\phi_k\right|. \tag{2*}$$

Jeigu (2*) teigiamų narių eilutė konvertuoja, tai (1**) laipsninė eilutė konverguoja absoliučiai ir tolygiai. Jeigu modulių eilutė (2*) diverguoja, o pati laipsninė eilutė (1**) konverguoja, tai (1**) konverguoja reliatyviai.

Tarkime, kad (2*) laipsninės eilutės mažorantė yra

$$\sum_{k=0}^{\infty} N^k |r|^k. \tag{3*}$$

Modulių eilutės nariai yra mažesni už mažorantinės eilutės narius, t.y.

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left|r^k\right| \left|\phi_k\right| \leq \sum_{k=0}^{\infty} N^k |r|^k.$$

Mažorantinė eilutė yra geometrinė progresija, o ji konverguoja jeigu yra nykstamai mažėjanti, t.y. jos vardiklis yra mažesnis už 1 [6]. Turime, kad

$$\sum_{k=0}^{\infty} N^k |r|^k = \sum_{k=0}^{\infty} \left(N|r|\right)^k = \frac{1}{1 - N|r|},$$

čia $\sum_{k=0}^{\infty} \left(N|r|\right)^k$ – begalinė nykstamai mažėjanti geometrinė progresija, o

$\frac{1}{1-N|r|}$ – nykstamai mažėjančios geometrinės progresijos suma, ir ji bus tokia, kada

$$|r| < \frac{1}{N}.$$

Įrodėme kad mažorantinė eilutė (3*) konverguoja intervale

$$-\frac{1}{N} < r < \frac{1}{N} ,$$

jeigu laipsninės eilutės koeficientų moduliams galioja įvertis

$$|\phi_k| \langle N^k , k = 0,1,2,...$$

Iš rekurentinės koeficientų ϕ_k formulės (31), pagal matematinę indukciją reikia įrodyti, kad nelygybė

$$|N_k| \geq \phi^k \tag{4*}$$

galioja visiems k, kai $k = 0,1,2,...$.

Iš rekurentinės lygybės (31) turime, kad

$$\begin{aligned}
&C_1(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\phi_k + C_1 4(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\phi_{k-1} + \\
&+\left[C_1 4(k+\mu)(k+\mu-1) - C_1 2A(k+\mu)(k+\mu-1) + (k+\mu)(k+\mu-1)\right]\phi_{k-2} + \\
&+\left[4C_1(k+\mu-3) - C_1 4A(k+\mu-3) + C_1 4A(k+\mu-3) - C_2 V_0 (k+\mu-3)\right]\phi_{k-3} + \\
&+\left[C_1 - C_1 2A + r^4 + C_1 4A - C_2 V_0 + \left(A^2 - 6A\right)C_1 - A + CE_\alpha - CV_0 - CKV_0\right]\phi_{k-4} = 0
\end{aligned}$$

arba

$$\begin{aligned}
\phi_k = &\frac{-C_1 4(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\phi_{k-1} -}{C_1(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)} \\
&\frac{-\left[C_1 4(k+\mu)(k+\mu-1) - C_1 2A(k+\mu)(k+\mu-1) + (k+\mu)(k+\mu-1)\right]\phi_{k-2} -}{C_1(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)} \\
&\frac{-\left[4C_1(k+\mu-3) - C_1 4A(k+\mu-3) + C_1 4A(k+\mu-3) - C_2 V_0(k+\mu-3)\right]\phi_{k-3} -}{C_1(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)} \\
&\frac{-\left[C_1 - C_1 2A + r^4 + C_1 4A - C_2 V_0 + \left(A^2 - 6A\right)C_1 - A + CE_\alpha - CV_0 - CKV_0\right]\phi_{k-4}}{C_1(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)}
\end{aligned}$$

Pažymime

$$\mathrm{H}(\mu,k) = C_1(k+\mu)(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3).$$

Tada

$$\phi_k = \frac{1}{H(\mu,k)}\Big[-C_1 4(k+\mu-1)(k+\mu-2)(k+\mu-3)\phi_{k-1} -$$
$$-\big[C_1 4(k+\mu)(k+\mu-1) - C_1 2A(k+\mu)(k+\mu-1) + (k+\mu)(k+\mu-1)\big]\phi_{k-2} -$$
$$-\big[4C_1(k+\mu-3) - C_1 4A(k+\mu-3) + C_1 4A(k+\mu-3) - C_2 V_0(k+\mu-3)\big]\phi_{k-3} -$$
$$-\big[C_1 - C_1 2A + r^4 + C_1 4A - C_2 V_0 + \left(A^2 - 6A\right)C_1 - A + CE_\alpha - CV_0 - CKV_0\big]\phi_{k-4}\Big]$$

Atliekame pertvarkius su moduliais, t.y. pasinaudojame modulio savybėmis, kad sumos modulis neviršija modulių sumos ir sandaugos modulis lygus modulių sandaugai ir gauname tokią nelygybę

$$\begin{aligned}|\phi_k| \le \frac{1}{|H(\mu,k)|}\Big[&|-C_1 4||(k+\mu-1)||(k+\mu-2)||(k+\mu-3)||\phi_{k-1}| -\\ -\Big[&|C_1 4||(k+\mu)||(k+\mu-1)| - |C_1 2A||(k+\mu)||(k+\mu-1)| + |(k+\mu)||(k+\mu-1)|\Big]|\phi_{k-2}| -\\ -\Big[&|4C_1||(k+\mu-3)| - |C_1 4A||(k+\mu-3)| + |C_1 4A||(k+\mu-3)| - |C_2 V_0||(k+\mu-3)|\Big]|\phi_{k-3}| -\\ -\Big[&|C_1| - |C_1 2A| + 1 + |C_1 4A| - |C_2 V_0| + \left|\left(A^2 - 6A\right)C_1\right| - |A| + |CE_\alpha| - |CV_0| - |CKV_0|\Big]|\phi_{k-4}|\Big]\end{aligned} \quad (5^*)$$

Darome prielaidą, kad

$$\left|\phi_b < N^b\right|$$

kai $b = 0,1,...,k-1$.

Kadangi pirmasis koeficientas ϕ_0 parenkamas laisvai, bet ϕ_0 modulis turi būti mažesnis už vienetą t.y. $|\phi_0| < 1$.

Vadinasi įvertis (4*) yra teisingas visiems k ir laipsninė eilutė konverguoja absoliučiai ir tolygiai, kai konverguoja modulių eilutė, t.y. intervale $-\frac{1}{N} < r < \frac{1}{N}$.

Laipsninės eilutės (15) konvergavimas įrodomas analogiškai ir ji konvertuos intervale $-\frac{1}{N} < r < \frac{1}{N}$.

IŠVADOS

Magistro darbe išnagrinėjome radialinės pusiau reliatyvistinės ketvirtos eilės diferencialinės lygties su kuloniniu potencialu, sprendinių struktūrą.

Šią lygtį sprendėme apibendrintų laipsninių eilučių metodu. Ieškomąją funkciją u skleidėme laipsninėmis eilutėmis:

$$\varphi_0(r) = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{r}{\alpha} \right)^{k+\rho_i} \varphi_{0k} \qquad \text{ir} \qquad \varphi(r) = \sum_{k=0}^{\infty} (r)^{k+\mu_i} \phi_k \,.$$

Gavome laipsniniu eilučių koeficientų radimo rekurentines formules.

Mažorantų metodu įrodėme, kad laipsninės eilutės, kurios įeina į sprendinio išraišką konverguoja absoliučiai ir tolygiai nulinio taško aplinkoje.

LITERATŪRA

1. Golokvosčius P. "Diferencialinės lygtys". Vadovėlis aukštosioms mokykloms. Vilnius. Leidykla TEV. 2000.
2. Янушаускас.А.И. " Аналитическая теория эллиптических уравнений". Новосибирск. Исдателъство Наука. 1979.
3. Stanislovaitė G. „Dalinių išvestinių sistemos su eilės išsigimimu sprendimas". Bakalauro darbas. Šiauliai. 2005.
4. Bulota K., Survila P. „ Algebra ir skaičių teorija" 2 dalis. Vilnius, „Mokslas", 1977.
5. Janavičius A. J., Jurgaitis D. „Apie Saxon-Woods potencialo tikrines reikšmes ir funkcijas" Šiauliai University.
6. Kvedaras B., Sapogovas M. „Skaičiavimo metodai", Vilnius, 1999.
7. Blonskytė D. „Radialinės, pusiau realiatyvistinės ketvirtos eilės diferencialinės lygties sprendinių struktūra". Bakalauro darbas. Šiauliai. 2008.

The structure of the solutions of semi-relativistic radial Shrodinger equation with coulomb potential

SUMMARY

The fourth succession's ordinary differential equation was explored, its assertions were constructed in to absolutely and gradually convergent degree rows.