VILNIAUS UNIVERSITETAS

Justina Jachimavičienė

PSEUDOPARABOLINĖS LYGTIES SU NELOKALIOSIOMIS INTEGRALINĖMIS SĄLYGOMIS SPRENDIMAS BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODU

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2013

Disertacija rengta 2008–2012 metais Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos institute.

Mokslinis vadovas:

prof. habil. dr. Mifodijus Sapagovas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika – 01 P)

VILNIUS UNIVERSITY

Justina Jachimavičienė

SOLUTION OF A PSEUDOPARABOLIC EQUATION WITH NONLOCAL INTEGRAL CONDITIONS BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Doctoral dissertation

Physical Sciences, Mathematics (01 P)

Vilnius, 2013

Doctoral dissertation was prepared at Institute of Mathematics and Informatics of Vilnius University in 2008–2012.

Scientific supervisor

Prof. Dr. Habil. Mifodijus Sapagovas (Vilnius University, Physical Sciences, Mathematics – 01 P)

Reziumė

Disertacijoje nagrinėjamas trečiosios eilės pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis sprendimas baigtinių skirtumų metodu. Tokio tipo diferencialinėms lygtims per pastaruosius du dešimtmečius mokslinėje literatūroje skiriama daug dėmesio dėl jų praktinio taikymo ir šių lygčių specifikos, nagrinėjant teorinius klausimus ir skaitinius sprendimo metodus. Atlikto disertacinio darbo rezultatai praplečia ir papildo iki šiol kitų autorių gautus rezultatus pseudoparabolinių lygčių su nelokaliosiomis integralinėmis kraštinėmis sąlygomis skaitinių metodų srityje.

Disertaciją sudaro įvadas, keturi skyriai, bendrosios išvados, literatūros sąrašas ir autorės publikacijų sąrašas.

Įvadiniame skyriuje aprašyta tiriamoji problema ir temos objektas, išanalizuotas temos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, uždaviniai, naudojama tyrimų metodika, mokslinis darbo naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai ir darbo rezultatų aprobavimas.

Pirmajame skyriuje išnagrinėta trečiosios eilės vienmatė pseudoparabolinė lygtis su dviejų tipų nelokaliosiomis sąlygomis. Šiems uždaviniams spręsti sudarytos skirtuminės schemos, kurių stabilumas tiriamas, taikant skirtuminių operatorių su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūrą.

Antrajame skyriuje tiesinėms trečiosios eilės vienmatėms ir dvimatėms pseudoparabolinėms lygtims su integralinėmis sąlygomis sudarytos ir išnagrinėtos padidinto tikslumo skirtuminės schemos.

Trečiajame skyriuje išnagrinėta dvimatė pseudoparabolinė lygtis su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis viena koordinačių kryptimi. Tokiam uždaviniui spręsti pritaikytas ir išnagrinėtas lokaliai vienmatis metodas, ištirtos šio metodo stabilumo sąlygos.

Ketvirtajame skyriuje išnagrinėtos trisluoksnės skirtuminės schemos vienmatei pseudoparabolinei lygčiai su įvairiomis, taip pat ir nelokaliosiomis, sąlygomis. Išnagrinėtos trisluoksnių išreikštinių skirtuminių schemų stabilumo sąlygos.

Abstract

The thesis presents the analysis of a third-order pseudoparabolic equation with nonlocal conditions solved by a finite difference method. This type of differential equations attracted much attention in the scientific literature during the last two decades due to practical application of these equations, and the aims of the specifics of theoretical issues and numerical solution methods. The results of the research pursued in the thesis extend and complement the results obtained so far by other authors in the field of pseudoparabolic equations with nonlocal integral boundary conditions by the numerical method.

The thesis consists of the introduction, four chapters, general conclusions, the list of references, and the list of author's publications.

In the introduction, the topicality of the problem is defined, the goals and tasks of the research are formulated, the scientific novelty of the dissertation, the methodology of research, the practical value and significance of the results are presented.

The first chapter analyzes the third-order one-dimensional pseudoparabolic equations with two types of nonlocal conditions. The stability of difference schemes for this problem was studied using the analysis of the spectrum structure of a difference operator with nonlocal conditions.

In the second chapter, the analysis of the increased accuracy difference schemes for third-order one-dimensional and two-dimensional pseudoparabolic equations with integral conditions has been made.

The third chapter considers a two-dimensional pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions in one coordinate direction. This problem was solved by a locally one-dimensional method. The stability of a difference scheme has been investigated based on the spectrum structure.

The fourth chapter investigates three-layer difference schemes for one-dimensional pseudoparabolic equations with various, including nonlocal, conditions. Also, the conditions for the stability of three-layer explicit difference schemes have been explored.

TURINYS

Iliustracijų sąrašas

Lentelių sąrašas

Įvadas

Problemos formulavimas

Disertacijoje tiriamos skirtuminės schemos trečiosios eilės pseudoparabolinėms lygtims su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis.

Darbo aktualumas

Per paskutinius dešimtmečius plačiai nagrinėta pseudoparabolinė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} - k\frac{\partial \Delta u}{\partial t} - \Delta u = f(x). \tag{0.1}$$

Išspausdinta daug svarbių rezultatų, susijusių su šios lygties sprendinio egzistavimu, vienatimi ir kitomis sprendinio savybėmis (E. DiBenedetto ir kiti [28, 29], B.D. Coleman ir kiti [23], A. Bouziani [7], R.E. Showalter ir T.W. Ting [83]).

(0.1) lygtis atvėrė naujas galimybes matematiškai modeliuojant įvairius fizikinius procesus. G. Barenblatt ir kiti [3], E. DiBenedetto ir M.Pierre [28], B.D. Coleman ir kiti [23] šią lygtį naudojo kaip skysčių sklidimo porėtose terpėse modelį. Tokią pat lygtį, kaip dviejų temperatūrų šilumos laidumo modelį, 1968 m. išnagrinėjo P.J. Chen ir M.E. Gurtin [16], kur $T = u - k\Delta u$ – termodinaminė temperatūra, o $u(x, t)$ – šilumos laidumo temperatūra. Panašų modelį po šešerių metų nagrinėjo T.W. Ting [87].

Įvadas

Pseudoparabolinėmis lygtimis taip pat aprašomi ilgųjų bangų sklidimo [4, 36], skysčių tekėjimo porėtose terpėse [42] modeliai. G. Barenblatt, V. Entov ir V. Ryzkin naudodami pseudoparabolines lygtis aprašė skysčių tekėjimo uolienomis modelius [2]. Pseudoparabolinės lygtys gali būti naudojamos ir kaip reguliarizatoriai blogai sąlygotuose difuzijos uždaviniuose [38], taip pat populiacijos paplitimo uždaviniams nagrinėti [64].

I. Fan ir I.S. Pop nagrinėja pseudoparabolinę lygtį [34]

$$u_t + \nabla F(u) = \nabla(H(u)\nabla u) + \tau \Delta u_t$$

su kraštine sąlyga $u|_{\partial\Omega} = 0$, $\Omega \in (0, T)$. Šio uždavinio sprendinio egzistavimą autoriai įrodo, naudodami Rothe metodą, o įvesdami Gryno funkciją, įrodo sprendinio vienatį. Taip pat, atlikdami skaitinius eksperimentus įvertina sprendinio paklaidą.

Y. Fan ir I.S. Pop 2011 m. pasirodžiusiame staripsnyje *"Equivalent formulations and numerical schemes for a class of pseudo-parabolic equations"* [35] įrodo pseudoparabolinės lygties su klasikine kraštine sąlyga sprendinio silpnąja prasme egzistavimą ir vienatį. Jie įveda tris skirtingas sprendinio silpnąja prasme formuluotes.

Sprendinio silpnąja prasme egzistavimas ir vienatis netiesinei pseudoparabolinei lygčiai taip pat nagrinėjamas straipsniuose [66, 50], tuo tarpu, sprendinio silpnąja prasme egzistavimas išsigimusių diferencialinių lygčių atvejais nagrinėjamas straipsniuose [13, 59, 60].

Pseudoparabolinės lygties su kito tipo kraštinėmis sąlygomis sprendinio egzistavimas ir vienatis taip pat nagrinėti straipsniuose [15, 63, 68, 82, 83].

M. Ptashnyk nagrinėja pseudoparabolinę lygtį su konvekcija [67]

$$\partial_t u - \nabla \cdot (a(x)\partial_t \nabla u) + c(t, x, u) \cdot \nabla u - \nabla \cdot (d(t, x, u)\nabla u) = f(t, x, u).$$

Tokios lygties su pradine ir klasikine kraštine sąlygomis sprendinio egzistavimas įrodomas naudojant Rothe diskretizavimo metodą. Uždavinys su konvekcija nagrinėjamas ir [85] straipsnyje.

2008 m. M. Yang nagrinėjo pseudoparabolinį uždavinį trimačiu atveju [91]

$$u_t - \Delta u_t - \mu \Delta u = f(X,t), \quad \Omega \times (0,T],$$
$$u = 0, \quad \partial\Omega \times (0,T],$$
$$u(X,0) = u_0(X), \quad x \in \Omega,$$

čia $\Omega = (0,1)^3$ su kontūru $\partial\Omega$ ir $X = (x,y,z)$, $\mu > 0$. Šį uždavinį autorius sprendžia, naudodamas baigtinių elementų metodą. Baigtinių elementų schemas tokio tipo uždaviniamas spręsti nagrinėja daugelis autorių [30, 31, 32, 39, 55]. M. Yang taip pat įrodo konvergavimą normoje H_1.

Po keturių metų M. Yang nagrinėjo analogišką uždavinį ir įrodė konvergavimą normoje L^2 [92].

Pseudoparabolinėms lygtims taikomi ir kiti skaitiniai metodai: Rymano ir Rymano-Hilberto uždaviniai nagrinėjami [26, 27] straipsniuose.

1973 m. W.H. Ford ir T.W. Ting straipsnyje *"Stability and Convergence of Difference Approximations to Pseudoparabolic Partial Differential Equations"* [37] nagrinėja tiesinę pseudoparabolinę lygtį

$$(a(x,t)u_{tx})_x + (b(t,x)u_x)_x - q(t,x)u = r(t,x)u_t, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,\ 0 \leqslant t \leqslant T,$$

su klasikinėmis sąlygomis:

$$u(t,0) = f(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$u(t,1) = g(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$

čia $(a,b,r,q) \in C^3(\overline{R})$. Tai vienas pirmųjų straipsnių, kuriame trečiosios eilės pseudoparabolinei lygčiai teoriškai išnagrinėtas baigtinių skirtumų metodas. Skirtuminio uždavinio sprendinio egzistavimas ir vienatis, bei metodo konvergavimas įrodyti, nagrinėjant skirtuminių lygčių sistemos matricų spektro savybes.

Po metų, W.H. Ford ir T.W. Ting išspausdino straipsnį [38], kuriame baigtinių skirtumų metodą pritaikė ir išnagrinėjo netiesinei pseudoparabolinei lygčiai su klasikinėmis sąlygomis.

Įvadas

Disertacijoje nagrinėjamas pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis sprendimas baigtinių skirtumų metodu.

Uždaviniai su nelokaliosiomis sąlygomis yra viena iš sparčiai besivystančios diferencialinių lygčių teorijos ir skaitinių metodų dalių. Nelokaliosios sąlygos atsiranda tada, kai ieškomo sprendinio ar jo išvestinės reikšmės kraštiniuose taškuose yra susijusios su reikšmėmis kituose srities kraštiniuose ar vidiniuose taškuose. Praktiniu požiūriu, nelokaliosios sąlygos atsiranda tada, kai negalima tiesiogiai išmatuoti duomenų nagrinėjamo uždavinio srities krašte. Kai nelokaliosiose sąlygose yra kraštinis taškas, tai tokias sąlygas vadiname nelokaliosiomis kraštinėmis sąlygomis.

Diferencialines lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis 1963 m. vienas pirmųjų pradėjo nagrinėti J.R. Cannon [14]. Jis nagrinėjo parabolinę lygtį su sąlygomis

$$\begin{aligned} &u(x,0) = u_0(x), \\ &u(0,t) = \varphi_1(t), \\ &\int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x = \varphi_2(t). \end{aligned}$$

Šiame uždavinyje nelokalioji integralinė sąlyga yra formuluojama vietoje vienos kraštinės sąlygos.

Kiek vėliau, 1964 m., L.I. Kamyninas nagrinėjo šilumos sklidimo modelį, kurį aprašė paraboline lygtimi ir panaudojo tokią integralinę sąlygą [51]

$$\int_a^b g(x,t)u(x,t)\mathrm{d}x = E(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Parabolines lygtis su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis taip pat nagrinėja A. Bouziani [8, 58], A.V. Gulin [40], N.I. Ionkin [45], S. Mesloub [56, 58], N.I. Yurchuk [93], R. Čiegis [19, 20, 21], S. Pečiulytė [65], M. Sapagovas [72, 74, 75, 76], A. Štikonas [21, 65] ir kiti autoriai.

1976 m. A.F. Čudnovskij monografijoje "*Teplofizika pochv*" [18] suformuluotas nelokalusis pseudoparabolinis uždavinys

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x}\Big[D(W)\frac{\partial W}{\partial x} + A\frac{\partial^2 W}{\partial t \partial x}\Big], \quad 0 \leqslant x \leqslant H,$$

$$
\begin{aligned}
&W(x,0) = \varphi(x),\\
&\frac{\partial W(H,t)}{\partial x} = 0,\\
&\frac{\partial}{\partial t}\int_0^H W(x,t)\mathrm{d}x = f(t),
\end{aligned}
$$

čia $W(x,t)$ – drėgmės kiekis dirvožemyje, H – gylis, o $\frac{\partial}{\partial t}\int_0^H W(x,t)\mathrm{d}x$ – drėgmės kitimo greitis. Monografijoje pateikiama skaitinio modeliavimo dirvožemio drėgmės dinamikos uždaviniuose apžvalga. Toks uždavinys pirmą kartą buvo suformuluotas 1969 m. to paties autoriaus [17]. Panašios tematikos uždavinys nagrinėjamas ir Rusijoje 1999 m. apgintoje M.M. Tembotovos disertacijoje [86]. Nelokaliosios sąlygos, turinčios fizikinę prasmę dirvos drėkinimo uždaviniuose, taip pat nagrinėjamos ir kitų autorių [61, 62, 81, 88].

2003 m. A. Bouziani darbe *"Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with a nonlocal boundary condition"* [9] nagrinėja pseudoparabolinę lygtį su integraline sąlyga

$$
\begin{aligned}
&\mathcal{L}\theta = \frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{\partial}{\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) - \eta\frac{\partial^2}{\partial t\partial x}\left(a(x,t)\frac{\partial\theta}{\partial x}\right) = h(x,t,\theta,\frac{\partial\theta}{\partial x}),\\
&\ell\theta = \theta(x,0) = \theta_0(x),\\
&\theta(\alpha,t) = \mu(t),\\
&\int_\alpha^\beta \theta(x,t)\mathrm{d}x = E(t).
\end{aligned}
$$

Šiame straipsnyje įrodomas sprendinio stipriąja prasme egzistavimas ir vienatis tiesiniu atveju. Po to netiesiniu atveju, taikant iteracinius procesus, įrodomas sprendinio silpnąja prasme egzistavimas ir vienatis.

A. Bouziani ir N. Merazga nagrinėja pusiau tiesinę trečios eilės pseudoparabolinę lygtį su integralinėmis sąlygomis [11]. Šio uždavinio sprendinio egzistavimą, vienatį bei kitas sprendinio savybes jie įrodo naudodami Rothe laiko diskretizavimo metodą. Tokio tipo uždaviniai turi praktinius taikymus dirvožemio šiluminėje fizikoje, kur pusiau tiesinė lygtis

$$
\frac{\partial v}{\partial t} - \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} - \eta\frac{\partial^3 v}{\partial x^2\partial t} = F(x,t,v), \quad (x,t)\in(0,1)\times[0,T],
$$

apibūdina drėgmės dinamiką podirvio sluoksnyje, o nelokaliosiomis sąlygomis

$$\int_0^1 v(x,t)\mathrm{d}x = E(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\int_0^1 xv(x,t)\mathrm{d}x = G(t), \quad 0 \leqslant t \leqslant T$$

yra aprašomi drėgmės momentai [10].

2007 m. D.Q. Dai ir Y. Huang straipsnyje *"Nonlocal boundary problems for a third-order one-dimensional nonlinear pseudoparabolic equation"* [25] nagrinėja netiesinį pseudoparabolinį uždavinį:

$$u_t - (a(x,t)u_{xt})_x = h(x,t,u,u_x,u_{xx}), \quad \alpha < x < \beta, 0 < t < T,$$

$$u(x,0) = u_0(x), \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta,$$
$$u(\alpha,t) = 0,$$
$$\int_\alpha^\beta u(x,t)\mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$\int_\alpha^\beta xu(x,t)\mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T.$$

Straipsnyje autoriai įrodo šio uždavinio sprendinio egzistavimą ir vienatį įprastose Sobolevo erdvėse. Netiesiniam uždaviniui spręsti jie naudoja iteracinį metodą:

$$\begin{cases} u_t^{n+1} - (au_{xt}^{n+1})_x = h(x,t,u^n,u_x^n,u_{xx}^n), \quad \alpha < x < \beta, \quad 0 < t < T, \\ u^{n+1}(x,0) = u_0(x), \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta, \\ \int_\alpha^\beta u^{n+1}(x,t)\mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \\ \int_\alpha^\beta xu^{n+1}(x,t)\mathrm{d}x = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \end{cases}$$

kurio kiekviename žingsnyje sprendžiama tiesinė parabolinė lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis.

Vienmatę netiesinę pseudoparabolinę lygtį su mišriomis nelokaliosiomis sąlygomis nagrinėja W. Jiang ir M. Cui [49]. Apytikslį uždavinio sprendinį jie skaičiuoja reprodukuojančio branduolio erdvėse. Toks metodas, kaip tikslinamasis algoritmas, gali būti naudojamas netiesiniams uždaviniams su integralinėmis sąlygomis spręsti [90].

2009 m. M. Beshtokov apgintoje disertacijoje nagrinėja tiesinį pseudoparabolinį uždavinį [6]

$$L(u) \equiv u_{xxt} + d(x,t)u_t + \eta(x,t)u_{xx} + a(x,t)u_x + b(x,t)u = -q(x,t),$$

$$u(0,t) = \beta_1(t)u(l,t) + \int_0^t \rho(t,\tau)u(l,\tau)\mathrm{d}\tau, \quad 0 \leqslant t \leqslant T,$$
$$u_x(0,t) = 0, \quad 0 \leqslant t \leqslant T, \quad u(x,0) = u_0(x), \quad 0 \leqslant x \leqslant l,$$

kuriame nelokalioji integralinė sąlyga kraštiniuose taškuose yra suformuluota laiko atžvilgiu. Disertacijoje nagrinėjami tiek vienmačiai, tiek daugiamačiai uždaviniai. Gauti aprioriniai įverčiai, iš kurių seka skirtuminių schemų sprendinio egzistavimas, vienatis ir stabilumas.

Šis uždavinys priklauso parabolinių lygčių su atmintimi klasei.

Tyrimo objektas

Disertacijos tyrimo objektas – trečiosios eilės vienmatės ir dvimatės tiesinės diferencialinės pseudoparabolinės lygtys su nelokaliosiomis sąlygomis.

Darbo tikslas ir uždaviniai

Disertacijos tikslas – išnagrinėti vienmatės ir dvimatės pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis sprendimą skirtuminiais metodais, ištirti gautų skirtuminių schemų stabilumo sąlygas, priklausomai nuo parametrų nelokaliosiose sąlygose.

Siekiant numatyto tikslo, buvo sprendžiami šie uždaviniai:

- išnagrinėti baigtinių skirtumų metodą vienmatei pseudoparabolinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis, ištirti apytikslio sprendinio egzistavimą, vienatį ir skirtuminės schemos stabilumą;

- išnagrinėti dvimatės pseudoparabolinės lygties su integralinėmis sąlygomis sprendimą lokaliai vienmačiu metodu;
- ištirti lokaliai vienmačių skirtuminių schemų pseudoparabolinei lygčiai stabilumą;
- sudaryti ir išnagrinėti padidinto tikslumo skirtuminę schemą vienmatei pseudoparabolinei lygčiai su integralinėmis sąlygomis;
- ištirti išreikštines skirtumines schemas pseudoparabolinei lygčiai.

Tyrimų metodika

Darbe taikomas analizinis skirtuminių lygčių sprendinių tyrimo metodas. Nagrinėjama skirtuminių operatorių spektro struktūra. Sprendžiant dvimatę pseudoparabolinę lygtį su nelokaliosiomis sąlygomis pritaikytas lokaliai vienmatis metodas. Taip pat taikomi skaitinio eksperimento ir matematinio modeliavimo metodai. Atliekant skaitinius eksperimentus buvo naudojami Mathcad, Maple ir MathLab programų paketai.

Darbo mokslinis naujumas ir jo reikšmė

Daugelyje darbų mokslininkai nagrinėja pseudoparabolines lygtis su klasikinėmis sąlygomis. Šioje disertacijoje išnagrinėta pseudoparabolinė lygtis su nelokaliosiomis sąlygomis. Disertacijoje pritaikytas ir išnagrinėtas baigtinių skirtumų metodas vienmatei pseudoparabolinei lygčiai su nelokaliosiomis sąlygomis. Tuo tarpu iki šiol baigtinių skirtumų metodas pseudoparabolinei lygčiai buvo išnagrinėtas tik su klasikinėmis sąlygomis.

Išnagrinėta dvimatė pseudoparabolinė lygtis ir jos sprendimas taikant lokaliai vienmatį metodą. Šis metodas suteikia galimybę dvimatį uždavinį suvesti į vienmačius ir taip supaprastinti uždavinio sprendimą.

Taip pat išnagrinėtos pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis trisluoksnės išreikštinės skirtuminės schemos. Šie rezultatai praplečia ir papildo iki šiol kitų mokslininkų gautus rezultatus, nagrinėjant skirtumines schemas pseudoparaboliniams uždaviniams.

Darbo rezultatų praktinė reikšmė

Disertacijoje gauti rezultatai gali būti panaudojami nagrinėjant diferencialinio ir skirtuminio uždavinių sprendinio egzistavimą ir vienatį, skirtuminių lygčių sistemų sprendimui iteraciniais metodais bei skirtuminių schemų pseudoparabolinėms lygtims stabilumui tirti.

Pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis matematiniai modeliai gali būti taikomi sprendžiant praktinius uždavinius, susijusius su gruntinių vandenų dinamika.

Ginamieji teiginiai

- Vienmatės tiesinės pseudoparabolinės lygties su dviejų tipų nelokaliosiomis sąlygomis skirtuminių schemų stabilumo nagrinėjimo būdas: skirtuminio operatoriaus spektro tyrimo metodika.
- Vienmatės ir dvimatės pseudoparabolinės lygties skirtuminės schemos su aproksimavimo paklaida $O(\tau^2 + h^2)$, šių schemų stabilumo sąlygos.
- Lokaliai vienmatės schemos, jų stabilumas dvimatei pseudoparabolinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis viena koordinačių kryptimi.
- Išreikštinės skirtuminės schemos pseudoparabolinei lygčiai su klasikinėmis ir nelokaliosiomis sąlygomis.

Darbo rezultatų aprobavimas

Disertacijos rezultatai paskelbti 5 straipsniuose, iš jų 2 mokslinės publikacijos yra "Web of Science" duomenų bazėje, 2 mokslinės publikacijos – Lietuvos periodiniuose leidiniuose ir recenzuojamuose leidiniuose ir 1 mokslinė publikacija – Lietuvoje vykusioje tarptautinės konferencijos pranešimų medžiagoje (Web of Science ISI Proceedings).

Tarpiniai disertacijos rezultatai pristatyti šiose Lietuvos ir tarptautinėse konferencijose:

- J. Jachimavičienė, M. Sapagovas. The finite-difference method for the solution of pseudoparabolic equation with nonlocal integral conditions. 14$^{\text{th}}$ International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, 2009 m. gegužės 27-30, Daugpilis, Latvija.
- J. Jachimavičienė, M. Sapagovas. Pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis sprendimas baigtinių skirtumų metodu. Lietuvos matematikų draugijos L konferencija, MII, 2009 m. birželio 18-19, Vilnius.
- J. Jachimavičienė. The finite-difference method for a third-order pseudoparabolic equation with integral conditions. International Conference on Differential equations and their applications dedicated to professor M. Sapagovas 70th anniversary, 2009 m. rugsėjo 10-12, Panevėžys, Lietuva.
- J. Jachimavičienė, M. Sapagovas. Local one-dimensional difference sheme for pseudoparabolic equation with nonlocal conditions. 15$^{\text{th}}$ International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, 2010 m. gegužės 26-29, Druskininkai, Lietuva.
- J. Jachimavičienė, M. Sapagovas. The stability of the difference schemes for pseudoparabolic equation subject to nonlocal conditions (with applications to underground water flow). 16$^{\text{th}}$ International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, 2011 m. gegužės 25-28, Sigulda, Latvija.
- J. Jachimavičienė, M. Sapagovas. The stability of the difference shemes for pseudoparabolic equation subject to nonlocal conditions. 17$^{\text{th}}$ International Conference on Mathematical Modelling and Analysis, 2012 m. birželio 6-9, Talinas, Estija.

- J. Jachimavičienė. Pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis skirtuminių schemų stabilumas. Lietuvos matematikų draugijos LIII konferencija, KU, 2012 m. birželio 11-12, Klaipėda, Lietuva.

Disertacijos struktūra

Disertaciją sudaro įvadas, penki skyriai, išvados ir literatūros sąrašas. Skyriai yra suskirstyti į poskyrius, o kai kurie poskyriai – į skirsnius. Disertacijoje naudojama numeracija "skyrius.poskyris", "poskyris.skirsnys", "skyrius.teiginys", "skyrius.paveikslėlis", "skyrius.lentelė". Formulių numeracija yra atskira kiekviename skyriuje, t.y. "poskyris.numeris".

Įvade aprašytas problemos formulavimas, išanalizuotas temos aktualumas, išdėstyti darbo tikslai, uždaviniai, naudojama tyrimų metodika, mokslinis darbo naujumas ir gautų rezultatų reikšmė, pateikti ginamieji teiginiai, darbo rezultatų aprobavimas, disertacijos struktūra.

Pirmajame skyriuje nagrinėjama trečios eilės vienmatė pseudoparabolinė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t \geqslant 0$$

su skirtingomis nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis:

a) pirmuoju atveju:

$$\begin{cases} \int\limits_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x = \mu_1(t), \\ \int\limits_0^1 x\, u(x,t)\mathrm{d}x = \mu_2(t), \end{cases}$$

b) antruoju atveju:

$$\begin{cases} u(0,t) = \gamma_1 \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_1(t), \\ u(1,t) = \gamma_2 \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_2(t). \end{cases}$$

Šiems uždaviniams nagrinėjamas baigtinių skirtumų metodas, formuluojamos sprendinio vienaties ir egzistavimo sąlygos. Užrašytos skirtuminės schemos ir, taikant skirtuminio operatoriaus spektro struktūros tyrimą, išnagrinėtas šių skirtuminių schemų stabilumas specialioje normoje.

Antrajame skyriuje nagrinėjama trečios eilės vienmatė ir dvimatė pseudoparabolinė lygtis su integralinėmis sąlygomis. Šio skyriaus pagrindinis tikslas – sudaryti ir išnagrinėti padidinto tikslumo skirtumines schemas žingsnio τ atžvilgiu. Įrodoma, kad skirtuminė lygtis aproksimuoja diferencialinę lygtį su paklaida $O(h^2 + \tau^2)$ bet kokioms τ ir h reikšmėms.

Trečiajame skyriuje nagrinėjama dvimatė pseudoparabolinė lygtis

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\Big) + f(x, y, t),$$

su integralinėmis sąlygomis viena koordinačių kryptimi

$$\begin{aligned}
&u(0, y, t) = \gamma_1 \int_0^1 u(x, y, t)\mathrm{d}x + \mu_1(y, t),\\
&u(1, y, t) = \gamma_2 \int_0^1 u(x, y, t)\mathrm{d}x + \mu_2(y, t),\\
&u(x, 0, t) = \mu_3(x, t), \quad u(x, 1, t) = \mu_4(x, t),\\
&u(x, y, 0) = \varphi(x, y),
\end{aligned}$$

čia funkcijos $f,\ \varphi,\ \mu_i,\ i = 1, 2, 3, 4$, yra žinomos, o $\gamma_1,\ \gamma_2,\ \eta > 0$ yra duotos konstantos. Šiame skyriuje pateikiamas dvimačio uždavinio sprendimo algoritmas, taikant lokaliai vienmatį metodą. Gauti rezultatai panaudoti sprendinio egzistavimo ir vienaties sąlygoms formuluoti. Taip pat nagrinėjamas skirtuminių schemų stabilumas, priklausomai nuo parametrų $\gamma_1,\ \gamma_2$.

Ketvirtajame disertacijos skyriuje nagrinėjamos trisluoksnės išreikštinės skirtuminės schemos vienmatei pseudoparabolinei lygčiai tiek su klasikinėmis, tiek su nelokaliosiomis sąlygomis. Tiek teoriškai, tiek taikant skaitinius eksperimentus išnagrinėtas tokių skirtuminių schemų stabilumas.

Išvadose apibendrinti tyrimų rezultatai.

Padėka

Nuoširžiai dėkoju disertacinio darbo vadovui prof. habil. dr. Mifodijui Sapagovui už vadovavimą disertaciniam darbui, skirtą laiką ir pastangas; prof. dr. Artūrui Štikonui ir doc. dr. Sigitai Pečiulytei už vertingas pastabas ir patarimus koreguojant disertaciją; Vytauto Didžiojo universiteto Matematikos ir statistikos katedros bei Matematikos ir informatikos instituto Skaičiavimo metodų skyriaus kolektyvams už pagalbą ir moralinį palaikymą. Dėkoju UAB "IKEA Trading Services" už suteiktas galimybes siekti mokslo aukštumų. Ačiū visiems artimiesiems ir draugams už visokeriopą paramą, pagalbą ir supratimą.

1 skyrius

Baigtinių skirtumų metodas vienmatei pseudoparabolinei lygčiai su nelokaliosiomis sąlygomis

Per paskutinius du dešimtmečius diferencialinės lygtys su nelokaliosiomis sąlygomis tapo vienu svarbiausiu atradimu matematikoje. Tokio tipo uždaviniai plačiai taikomi fizikoje, chemijoje, biologijoje, biotechnologijoje, ekologijoje [6, 11, 14, 17, 72]. Tačiau šie uždaviniai taip pat įdomūs ir iš matematinės pusės. Palyginus nauja sritis, susijusi su tokio tipo uždaviniais, tai diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis sąlygomis tikrinių reikšmių uždaviniai. Šiame skyriuje tikrinių reikšimių uždavinį nagrinėsime kaip metodą, skirtuminių schemų pseudoparabolinei lygčiai su integralinėmis sąlygomis stabilumui išnagrinėti. Šiame skyriuje taip pat išnagrinėsime du pseudoparabolinius uždavinius su skirtingomis integralinėmis sąlygomis baigtinių skirtumų metodu.

Nustatysime neišreikštinių skirtuminių schemų stabilumą.

1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime trečiosios eilės pseudoparabolinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial^3 u}{\partial t \partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ t \geqslant 0 \tag{1.1}$$

su pradine sąlyga

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{1.2}$$

ir integralinėmis sąlygomis

$$\int\limits_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x = \mu_1(t), \tag{1.3}$$

$$\int\limits_0^1 x\, u(x,t)\mathrm{d}x = \mu_2(t), \tag{1.4}$$

čia μ_1, μ_2 žinomos funkcijos.

Pagrindinis tikslas – (1.1)–(1.4) uždavinio skirtuminės schemos stabilumo tyrimas.

(1.1)–(1.4) diferencialinį uždavinį aproksimuosime skirtuminių lygčių sistema

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} &= \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \\ &+ \eta\Big(\frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i-1}^{n} - 2u_i^{n} + u_{i+1}^{n}}{h^2}\Big) \cdot \frac{1}{\tau} + f_i^{n+1},\end{aligned} \tag{1.5}$$

$$u_i^0 = \varphi_i, \tag{1.6}$$

$$l_1\Big(u^{n+1}\Big) \equiv h\Big(\frac{u_0^{n+1} + u_N^{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^{n+1}\Big) = \mu_1^{n+1}, \tag{1.7}$$

$$l_2\Big(u^{n+1}\Big) \equiv h\Big(\frac{u_N^{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} ihu_i^{n+1}\Big) = \mu_2^{n+1}, \tag{1.8}$$

$$n = 0, 1, \ldots, M-1,\ i = 1, \ldots, N-1,\ h = 1/N,\ \tau = \frac{T}{M}.$$

Nagrinėdami šį pseudoparabolinį uždavinį, užrašysime (1.5)–(1.8) skirtuminės schemos sprendimo algoritmą. Įrodysime, kad egzistuoja šios sistemos sprendinys ir jis yra vienintelis. Ištirsime skirtuminės schemos stabilumą, naudodami perėjimo matricos, kuri yra nesimetrinė, spektrą. Įrodysime, kad visos perėjimo matricos tikrinės reikšmės yra realios ir teigiamos.

2. Skirtuminės schemos sprendimo algoritmas

Pirmiausia rasime (1.5)–(1.8) uždavinio sprendinį. Kiekvienai fiksuotai reikšmei n, užrašysime tokią lygčių sistemą

$$bu_{i-1}^{n+1} + au_i^{n+1} + bu_{i+1}^{n+1} = F_i^n, \tag{2.1}$$

$$l_1(u^{n+1}) = F_0^n, \quad l_2(u^{n+1}) = F_N^n, \tag{2.2}$$

čia

$$F_i^n = \tau f_i^{n+1} + u_i^n - \frac{\eta}{h^2}\Big(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n\Big), \quad F_0^n = \mu_1^{n+1}, \quad F_N^n = \mu_2^{n+1},$$

$$b = -\frac{\tau+\eta}{h^2}; \quad a = 1 + \frac{2(\tau+\eta)}{h^2}.$$

Užrašysime šią lygčių sistemą matriciniu pavidalu

$$Au^{n+1} = f, \tag{2.3}$$

čia A yra $(N+1)$-osios eilės matrica

$$A = \begin{pmatrix} \frac{h}{2} & h & h & h & \dots & h & \frac{h}{2} \\ b & a & b & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b & a & b \\ 0 & h & h & \dots & h & h & \frac{h}{2} \end{pmatrix}.$$

(2.1)–(2.2) skirtuminės lygčių sistemos sprendinio ieškosime tokiu pavidalu

$$u_i^{n+1} = c_1(u_i^{n+1})^1 + c_2(u_i^{n+1})^2 + (u_i^{n+1})^0, \quad i = \overline{0, N}, \tag{2.4}$$

čia c_1, c_2 priklauso nuo n, o $(u_i^{n+1})^1, (u_i^{n+1})^2, (u_i^{n+1})^0$ yra žemiau pateiktų lygčių sistemų sprendiniai

$$\begin{cases} b(u_{i-1}^{n+1})^1 + a(u_i^{n+1})^1 + b(u_{i+1}^{n+1})^1 = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ (u_0^{n+1})^1 = 1, \ (u_N^{n+1})^1 = 0, \end{cases} \tag{2.5}$$

$$\begin{cases} b(u_{i-1}^{n+1})^2 + a(u_i^{n+1})^2 + b(u_{i+1}^{n+1})^2 = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ (u_0^{n+1})^2 = 0, \ (u_N^{n+1})^2 = 1, \end{cases} \tag{2.6}$$

$$\begin{cases} b(u_{i-1}^{n+1})^0 + a(u_i^{n+1})^0 + b(u_{i+1}^{n+1})^0 = f_i^n, \quad i = \overline{1, N-1}, \\ (u_0^{n+1})^0 = 0, \ (u_N^{n+1})^0 = 0. \end{cases} \tag{2.7}$$

Norint surasti koeficientus c_1 ir c_2, (2.4) išraišką įstatysime į (2.2) nelokaliąsias sąlygas

$$\begin{cases} l_1\Big((u^{n+1})^1\Big)c_1 + l_1\Big((u^{n+1})^2\Big)c_2 = F_0^n - l_1\Big((u^{n+1})^0\Big), \\ l_2\Big((u^{n+1})^1\Big)c_1 + l_2\Big((u^{n+1})^2\Big)c_2 = F_N^n - l_2\Big((u^{n+1})^0\Big). \end{cases} \tag{2.8}$$

Tokios sistemos sprendinys yra

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0^n - l_1(u^{n+1})^0 & l_1(u^{n+1})^2 \\ F_N^n - l_2(u^{n+1})^0 & l_2(u^{n+1})^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1(u^{n+1})^1 & l_1(u^{n+1})^2 \\ l_2(u^{n+1})^1 & l_2(u^{n+1})^2 \end{vmatrix}}, \quad c_2 = \frac{\begin{vmatrix} l_1(u^{n+1})^1 & F_0^n - l_1(u^{n+1})^0 \\ l_2(u^{n+1})^1 & F_N^n - l_2(u^{n+1})^0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} l_1(u^{n+1})^1 & l_1(u^{n+1})^2 \\ l_2(u^{n+1})^1 & l_2(u^{n+1})^2 \end{vmatrix}}.$$

Suradę koeficientus c_1 ir c_2, galime apskaičiuoti (2.4) sprendinį.

1.1 lema. *Visoms $\eta \geqslant 0, \tau > 0, h > 0$ reikšmėms,* (2.1)–(2.2) *sistema turi vienintelį* (2.4) *sprendinį.*

Įrodymas. Vienintelis (2.8) sistemos sprendinys egzistuoja tada ir tik tada, jei tenkinama sąlyga:

$$D = l_1\Big((u^{n+1})^1\Big) \cdot l_2\Big((u^{n+1})^2\Big) - l_1\Big((u^{n+1})^2\Big) \cdot l_2\Big((u^{n+1})^1\Big) \neq 0.$$

Toliau (2.1) lygtį užrašykime tokiu būdu

$$u_{i-1} - 2(1+\gamma)u_i + u_{i+1} = -\frac{F_i^n}{b},$$

čia

$$\gamma = \frac{h^2}{2(\tau+\eta)} > 0.$$

Pažymėkime

$$\mathrm{ch}(\beta h) = 1 + \gamma, \quad \beta > 0.$$

Tada (2.5)–(2.6) sistemos sprendiniai yra

$$(u_i^{n+1})^1 = \frac{\mathrm{sh}(\beta h(N-i))}{\mathrm{sh}(\beta)}, \tag{2.9}$$

$$(u_i^{n+1})^2 = \frac{\mathrm{sh}(\beta h i)}{\mathrm{sh}(\beta)}. \tag{2.10}$$

Įstatę $(u_i^{n+1})^1$ ir $(u_i^{n+1})^2$ išraiškas į (1.7)–(1.8) nelokaliąsias sąlygas, gauname

$$\begin{aligned} l_1\Big((u^{n+1})^1\Big) &= l_1\Big((u^{n+1})^2\Big) = \frac{\mathrm{th}(\beta/2)}{\beta B_h}, \\ l_2\Big((u^{n+1})^1\Big) &= \frac{1}{\beta^2 A_h} - \frac{1}{\beta\,\mathrm{sh}(\beta) B_h}, \\ l_2\Big((u^{n+1})^2\Big) &= \frac{1}{\beta\,\mathrm{th}(\beta) B_h} - \frac{1}{\beta^2 A_h}, \end{aligned} \tag{2.11}$$

čia

$$A_h = \frac{4}{\beta^2 h^2}\,\mathrm{sh}^2\Big(\frac{\beta h}{2}\Big), \quad B_h = \frac{2}{\beta h}\,\mathrm{th}\Big(\frac{\beta h}{2}\Big).$$

Kai βh yra pakankamai mažas teigiamas skaičius, tada $A_h \approx 1$, $B_h \approx 1$.

Iš (2.11) gauname

$$D = \Big(\frac{1}{\beta\,\mathrm{th}(\beta) B_h} + \frac{1}{\beta\,\mathrm{sh}(\beta) B_h} - \frac{2}{\beta^2 A_h}\Big)\frac{\mathrm{th}(\beta/2)}{\beta B_h}$$

arba

$$D = \frac{(\beta/2)A_h - \mathrm{th}(\beta/2)B_h}{(\beta^3/2)A_h B_h^2}.$$

Kadangi $(\beta/2) > \mathrm{th}(\beta/2)$ ir $A_h > B_h$ visoms reikšmėms $\beta \in (0,\infty)$, tada gauname $D > 0$. Taigi, tokiu būdu galime surasti vienintelės c_1, c_2 reikšmes. Iš to seka, kad lema įrodyta. $\square$

3. Skirtuminės schemos stabilumas

Panagrinėkime (1.5)–(1.8) sistemos stabilumą.

$(n+1)$-ajame sluoksnyje užrašykime šią schemą tokiu būdu

$$Bu^{n+1} = Cu^n + \tau f^{n+1}, \tag{3.1}$$

kur $u_i^{n+1} = (u_1^{n+1}, u_2^{n+1}, \dots, u_{N-1}^{n+1})^T$, o matricos B ir C yra $(N-1)$-osios eilės matricos. Jei egzistuoja matrica B^{-1}, tai skirtuminę schemą galime užrašyti tokiu būdu:

$$u^{n+1} = Su^n + \tau B^{-1} f^{n+1}. \tag{3.2}$$

Matrica S yra perėjimo matrica. (3.2) skirtuminės schemos pakankama stabilumo sąlyga gali būti užrašoma tokiu būdu [69, 72]

$$\|S\| \leqslant 1 + c_0\tau. \tag{3.3}$$

Čia konstanta c_0 nepriklauso nuo τ ir h. Kai matrica S yra simetrinė, tuomet galime apibrėžti

$$\|S\| = \rho(S) = \max_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |\lambda(S)|. \tag{3.4}$$

Tačiau mūsų atveju, matrica S yra nesimetrinė. Tai yra būdinga skirtuminėms schemoms su nelokaliosiomis sąlygomis.

Apibrėžkime normą bet kokiai matricai M

$$\|M\|_* = \|H^{-1}MH\|_2,$$
$$\|u\|_* = \|H^{-1}u\|_2,$$

čia

$$\|A\|_2 = \sqrt{\max_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |\lambda_i(AA^*)|}, \quad \|u\|_2 = \sqrt{h \sum_{i=1}^{N-1} u_i^2}.$$

H yra matrica, kurios stulpeliai – tiesiškai nepriklausomi tikriniai vektoriai, atitinkantys matricos S tikrinius vektorius. Pastebėsime, kad, jei matrica S yra paprastosios struktūros matrica, t.y. tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių skaičius sutampa su matricos eile, tuomet gauname $\|S\|_* = \rho(S)$ [72].

Toks nesimetrinės matricos normos apibrėžimas suteikia galimybę spręsti apie skirtuminės schemos stabilumą, nagrinėjant matricos S spektrą, o tai svarbu skirtuminės schemos su nelokaliosiomis sąlygomis stabilumo įrodymui.

Taigi, naudodamiesi nesimetrinės matricos normos apibrėžimu $\|S\|_* = \rho(S)$, toliau tirsime matricos S spektrą ir išnagrinėsime (1.5)–(1.8) skirtuminės schemos stabilumą.

Šiai skirtuminei schemai naudosime stabilumo sąlygą

$$|\lambda(S)| < 1. \tag{3.5}$$

Plačiau žiūrėti straipsnius [12, 72].

Užrašykime (1.5), (1.7), (1.8) sistemą kitokiu pavidalu.

Pirmiausia užrašykime kitu pavidalu tokią sistemą

$$-\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \bar{f}_i, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{3.6}$$

$$h\Big(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i\Big) = \bar{f}_0, \tag{3.7}$$

$$h\Big(\frac{u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} ih\, u_i\Big) = \bar{f}_N. \tag{3.8}$$

Tuo tikslu iš (3.7), (3.8) nelokaliųjų sąlygų, kaip dviejų lygčių sistemos su nežinomaisiais u_0^{n+1}, u_N^{n+1}, išreiškiame šiuos nežinomuosius dydžiais u_i^{n+1}, $i = \overline{1, N-1}$:

$$u_0 = -2\sum_{i=1}^{N-1}(1 - ih)u_i + \frac{2}{h}\bar{f}_0 - \frac{2}{h}\bar{f}_N, \quad u_N = -2\sum_{i=1}^{N-1} ih\, u_i + \frac{2}{h}\bar{f}_N. \tag{3.9}$$

Įrašę u_0 ir u_N (3.9) išraiškas į (3.6) lygtis, kai $i = 1$ ir $i = N-1$, gauname sistemą

$$\begin{cases} h^{-2}\Big(2\sum\limits_{i=1}^{N-1}(1 - ih)u_i + 2u_1 - u_2\Big) = \bar{f}_1 - \dfrac{2}{h^3}\bar{f}_0 + \dfrac{2}{h^3}\bar{f}_N, \\ -\dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \bar{f}_i, \qquad i = 2, 3, \ldots, N-2, \\ h^{-2}\Big(-u_{N-2} + 2u_{N-1} + 2\sum\limits_{i=1}^{N-1} ih\, u_i\Big) = \bar{f}_{N-1} - \dfrac{2}{h^3}\bar{f}_N. \end{cases} \tag{3.10}$$

(3.10) lygčių sistema su dviem papildomais kintamaisiais $u_0, \ u_N$ iš (3.9) formulių yra ekvivalenti (3.6)–(3.8) lygčių sistemai.

Toliau (3.10) lygčių sistemą perrašykime matriciniu pavidalu

$$\Lambda u = \bar{F}, \tag{3.11}$$

čia $u = (u_1, u_2, \ldots, u_{N-1})^T$, F – $(N-1)$-osios eilės vektorius, o

$$\Lambda = h^{-2} \begin{pmatrix} 4-2h & 1-4h & 2-6h & \ldots & 4h & 2h \\ -1 & 2 & -1 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 2 & -1 \\ 2h & 4h & 6h & \ldots & 1-4h & 4-2h \end{pmatrix}. \tag{3.12}$$

Grįžkime prie (1.5), (1.7), (1.8) sistemos. Dabar ją galime užrašyti tokiu pavidalu

$$Eu^{n+1} = Eu^n - \tau \Lambda u^{n+1} - \eta \Lambda u^{n+1} + \eta \Lambda u^n + \tau f^{n+1},$$

arba

$$\Big(E + \tau\Lambda + \eta\Lambda\Big) u^{n+1} = \Big(E + \eta\Lambda\Big) u^n + \tau f^{n+1}, \tag{3.13}$$

čia E yra vienetinė matrica, o Λ apibrėžta formule (3.12).

Iš čia gauname

$$u^{n+1} = \Big(E + \tau\Lambda + \eta\Lambda\Big)^{-1} \Big(E + \eta\Lambda\Big) u^n + \tau \Big(E + \tau\Lambda + \eta\Lambda\Big)^{-1} f^{n+1}$$

arba

$$u^{n+1} = Su^n + B^{-1} f^{n+1}, \tag{3.14}$$

čia

$$S = \Big(E + \tau\Lambda + \eta\Lambda\Big)^{-1} \Big(E + \eta\Lambda\Big). \tag{3.15}$$

Iš čia gauname

$$\lambda_k(S) = \frac{\big(1 + \eta\lambda_k(\Lambda)\big)}{\big(1 + (\tau + \eta)\lambda_k(\Lambda)\big)}, \tag{3.16}$$

nes matricos S ir Λ turi tą pačią tikrinių vektorių sistemą.

4. Matricos S spektro struktūros tyrimas

Skirtuminės schemos stabilumui išnagrinėti ištirsime skirtuminio operatoriaus su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūrą. Kitaip tariant, surasime matricos S tikrines reikšmes, kurios sutampa su šio skirtuminio operatoriaus

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0, \quad i = 1, \ldots, N-1, \tag{4.1}$$

$$h\Big(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i\Big) = 0, \tag{4.2}$$

$$h\Big(\frac{u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} ih\, u_i\Big) = 0 \tag{4.3}$$

tikrinėmis reikšmėmis.

Per pastaruosius dešimtmečius tikrinių reikšmių uždaviniai tiek vienmačiams ir dvimačiams diferencialiniams, tiek skirtuminiams opreratoriams su nelokaliosiomis sąlygomis išnagrinėti daugelyje darbų [1, 22, 44, 48, 74, 77, 80, 84]. Straipsniuose [12, 41, 44, 47, 74, 84] nagrinėjama skirtuminio operatoriaus spektro struktūra ir antrosios eilės parabolinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis skirtuminių schemų stabilumas.

Taikydami tą pačią techniką kaip ir [47, 74, 77] straipsniuose, nagrinėsime (4.1)–(4.3) uždavinio spektrą.

1.2 lema. *Tikrinių reikšmių uždavinys* (4.1)–(4.3) *yra ekvivalentus* $(N-1)$-*osios eilės matricos* Λ *algebriniam tikrinių reikšmių uždaviniui:*

$$\Lambda u = \lambda u \tag{4.4}$$

su (3.12) *formulėje apibrėžta matrica* Λ.

Įrodymas. Iš (4.1)–(4.3) sistemos gauname (4.4) lygtį, tokiu pat būdu kaip iš (3.6)–(3.8) sistemos buvo gauta (3.11) lygtis. Procedūrą atlikus priešinga tvarka ir įvedus du papildomus kintamuosius (žr. formulę (3.9))

$$u_0 = -2\sum_{i=1}^{N-1}(1 - ih)u_i, \qquad u_N = -2\sum_{i=1}^{N-1} ih\, u_i$$

iš (4.4) uždavinio išvedame (4.1)–(4.3) sistemą. Lema įrodyta. □

1.1 išvada. (4.1)–(4.3) tikrinių reikšmių uždavinys turi $N-1$ tikrinę reikšmę.

Rasime (4.1)–(4.3) uždavinio tikrines reikšmes. Užrašykime (4.1) skirtuminę lygtį tokiu būdu

$$u_{i-1} - 2\Big(1 - \frac{\lambda h^2}{2}\Big)u_i + u_{i+1} = 0.$$

Pradžioje ieškosime tokių tikrinių reikšmių $\lambda > 0$, kurioms teisinga nelygybė

$$\Big|1 - \frac{\lambda h^2}{2}\Big| \leqslant 1. \tag{4.5}$$

Pažymėkime

$$\cos \alpha h = 1 - \frac{\lambda h^2}{2}.$$

Iš čia randame

$$\lambda = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha h}{2}.$$

1.1 teorema. *Visos* (4.1)–(4.3) *skirtuminio operatoriaus tikrinės reikšmės, tenkinančios* (4.5) *nelygybę, yra surandamos pagal formulę*

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha_k h}{2}, \tag{4.6}$$

kurioje α_k yra lygties

$$\sin \frac{\alpha}{2} = 0 \tag{4.7}$$

šaknys arba lygties

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha}{2} = \frac{N}{2} \sin \alpha h \tag{4.8}$$

šaknys.

Įrodymas. Bendrasis (4.1) lygties sprendinys yra

$$u_i = c_1 \cos \alpha i h + c_2 \sin \alpha i h, \tag{4.9}$$

čia c_1 ir c_2 – pasirenkamos konstantos. Įstatę šį sprendinį į (4.2)–(4.3) nelokaliąsias sąlygas ir atlikę elementarius pertvarkymus, gauname

$$\begin{cases} c_1 \dfrac{\sin\alpha}{\alpha} + c_2 \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha} = 0, \\ c_1\Big(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha} - \dfrac{1-\cos\alpha}{\alpha^2 A_2}\Big) + c_2\Big(\dfrac{\sin\alpha}{\alpha^2 A_2} - \dfrac{\cos\alpha}{\alpha}\Big) = 0, \end{cases} \tag{4.10}$$

čia $A_2 = (\sin\alpha h)/\alpha h$. Sprendinys (4.9) yra netrivialus tada ir tik tada, kai (4.10) sistemos determinantas yra lygus nuliui. Suradus determinantą, gauname

$$\frac{2(1-\cos\alpha)}{\alpha A_2} - \sin\alpha = 0 \tag{4.11}$$

arba

$$\sin\frac{\alpha}{2}\left(\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{\sin\alpha h}{2h}\right) = 0,$$

o tai yra ekvivalentu dviems atskiroms (4.7), (4.8) lygtims. Teorema įrodyta. $\square$

1.2 teorema. *Visos* (4.1)–(4.3) *skirtuminio uždavinio tikrinės reikšmės yra realios ir teigiamos.*

Įrodymas. (4.7) lygties šaknys yra $\alpha_k = 2k\pi$. Kai $k = 1, 2, \ldots, [N/2]$, gauname $[N/2]$ teigiamas skirtingas reikšmes

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2}\sin^2 k\pi h, \tag{4.12}$$

čia

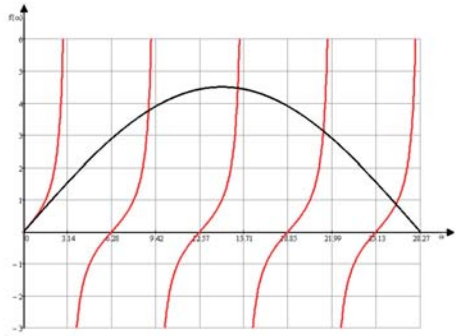
$$k = \begin{cases} 1, 2, \ldots, N/2, & N - \text{lyginis}, \\ 1, 2, \ldots, (N-1)/2, & N - \text{nelyginis}. \end{cases}$$

Toliau nagrinėsime (4.8) lygties šaknis. Pažymėkime

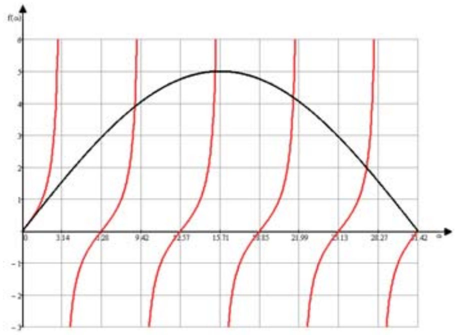
$$\Phi(\alpha) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} - \frac{N}{2}\sin\alpha h.$$

Tai yra periodinė funkcija, kurios periodas $2\pi N$, t.y.

$$\Phi(2\pi N + \alpha) = \Phi(\alpha).$$



1.1 pav. Funkcijų $y_1 = \mathrm{tg}(\frac{\alpha}{2})$, $y_2 = \frac{N}{2} \sin \alpha h$ grafikai, kai $N = 9$, $h = 1/N$. Intervale $(2k\pi, (2k+1)\pi), k = 1, 2, 3, 4$, funkcija $\varPhi(\alpha) = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} - \frac{N}{2} \sin \alpha$ turi 4 šaknis.



1.2 pav. Funkcijų $y_1 = \mathrm{tg}(\frac{\alpha}{2})$, $y_2 = \frac{N}{2} \sin \alpha h$ grafikai, kai $N = 10$, $h = 1/N$. Intervale $(2k\pi, (2k+1)\pi), k = 1, 2, 3, 4$, funkcija $\varPhi(\alpha) = \mathrm{tg}\,\frac{\alpha}{2} - \frac{N}{2} \sin \alpha h$ turi 4 šaknis.

Be to yra teisinga lygybė

$$\varPhi(\pi N + \alpha) = -\varPhi(\pi N - \alpha).$$

Taigi, ieškosime (4.8) lygties šaknų tik intervale $\alpha \in (0, \pi N)$. Nesunku pastebėti, kad kiekviename $(2k\pi, (2k+1)\pi), k = 1, 2, \dots, [(N-1)/2]$ intervale yra vienintelė (4.8) lygties šaknis α_k (žr., 1.1, 1.2 pav.). Taigi, tikrinės reikšmės λ_k yra

$$\lambda_k = \frac{4}{h^2} \sin^2 \frac{\alpha_k h}{2}, \tag{4.13}$$

čia

$$k = \begin{cases} 1, 2, \dots, N/2 - 1, & N - \text{lyginis}, \\ 1, 2, \dots, (N-1)/2, & N - \text{nelyginis}, \end{cases}$$

o α_k yra (4.8) lygties šaknys, $\alpha_k \in (2k\pi, (2k+1)\pi)$.

Vadinasi, visais atvejais yra $N - 1$ tikrinė reikšmė aprašyta (4.12)–(4.13) formulėmis. Remiantis 1.1 lema ir 1.1 išvada galime teigti, kad radome visas (4.1)–(4.3) uždavinio tikrines reikšmes. Teorema įrodyta. $\square$

1.2 išvada. Visos (4.1)–(4.3) uždavinio tikrinės reikšmės yra skirtingos. Vadinasi, $\varLambda$ (o tuo pačiu ir matrica S) yra paprastosios struktūros matrica.

5. Skirtuminės schemos stabilumo tyrimo tęsinys

Grįžkime prie (3.2) skirtuminės schemos. Iš 1.2 teoremos galime suformuluoti (1.5)–(1.8) skirtuminės schemos pagrindinį rezultatą.

1.3 teorema. (1.5)–(1.8) *skirtuminė schema yra stabili su visomis parametrų* $\eta > 0$, $\tau > 0$, $h > 0$ *reikšmėmis.*

Įrodymas. Iš (3.16) išraiškos, 1.2 teoremos ir 1.2 išvados seka, kad

$$0 < \lambda(S) < 1.$$

O iš šios nelygybės seka, kad skirtuminė schema yra stabili. □

6. Kitos nelokaliosios sąlygos

Toliau nagrinėsime (1.1) pseudoparabolinę lygtį su (1.2) pradine sąlyga, o vietoje (1.3)–(1.4) sąlygų imsime kiek kitokias integralines sąlygas

$$u(0,t) = \gamma_1 \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_1(t), \tag{6.1}$$

$$u(1,t) = \gamma_2 \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_2(t). \tag{6.2}$$

Vienmatės parabolinės lygties uždaviniai su tokiomis nelokaliosiomis sąlygomis yra nagrinėjami straipsniuose [33, 74]. Per pastaruosius du dešimtmečius pasirodė nemažai straipsnių, susijusių su šia sritimi. Skaitiniai metodai pseudoparabolinei lygčiai su integralinėmis sąlygomis yra palyginti nauja sritis diferencialinių lygčių skaitinių metodų tematikoje.

Šiuo atveju diferencialinį uždavinį (1.1), (1.2), (6.1), (6.2) aproksimuosime skirtuminių lygčių sistema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} + \\ + \eta\left(\frac{u_{i-1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^{n+1}}{h^2} - \frac{u_{i-1}^{n} - 2u_i^{n} + u_{i+1}^{n}}{h^2}\right)\frac{1}{\tau} + f_i^n, \tag{6.3}$$

$$u_i^0 = \varphi_i, \tag{6.4}$$

$$u_0^{n+1} = \gamma_1 h\Big(\frac{u_0^{n+1}+u_N^{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^{n+1}\Big) + \mu_1^{n+1}, \quad n=\overline{1, M-1}, \tag{6.5}$$

$$u_N^{n+1} = \gamma_2 h\Big(\frac{u_0^{n+1}+u_N^{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^{n+1}\Big) + \mu_2^{n+1}, \quad n=\overline{1, M-1}. \tag{6.6}$$

Pirmiausia rasime (6.3)–(6.6) uždavinio sprendinį. Kiekvienai fiksuotai reikšmei n užrašysime šią lygčių sistemą tokiu būdu

$$\begin{cases} bu_{i-1}^{n+1} + au_i^{n+1} + bu_{i+1}^{n+1} = F_i^n, \quad i=\overline{1, N-1} \\ u_0^{n+1} - \gamma_1 l(u^{n+1}) = F_0^n, \\ u_N^{n+1} - \gamma_2 l(u^{n+1}) = F_N^n, \end{cases} \tag{6.7}$$

čia

$$F_i^n = \tau f_i^n + u_i^n - \frac{\eta}{h^2}(u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n),$$

$$F_0^n = \mu_1^n, \quad F_N^n = \mu_2^n,$$

$$l(u^{n+1}) = h\Big(\frac{u_0^{n+1}+u_N^{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i^{n+1}\Big),$$

$$b = -\frac{\eta+\tau}{h^2}, \quad a = 1 + \frac{2(\eta+\tau)}{h^2}.$$

Šią lygčių sistemą užrašysime matriciniu pavidalu

$$Au^{n+1} = f, \tag{6.8}$$

kuriame

$$A = \begin{pmatrix} 1-\frac{\gamma_1 h}{2} & -\gamma_1 h & -\gamma_1 h & -\gamma_1 h & ... & -\gamma_1 h & -\frac{\gamma_1 h}{2} \\ b & a & b & 0 & ... & 0 & 0 \\ 0 & b & a & b & ... & 0 & 0 \\ ... & ... & ... & ... & ... & ... & ... \\ 0 & 0 & 0 & ... & b & a & b \\ -\frac{\gamma_2 h}{2} & -\gamma_2 h & -\gamma_2 h & ... & -\gamma_2 h & -\gamma_2 h & 1-\frac{\gamma_h}{2} \end{pmatrix}.$$

Ieškosime (6.7) skirtuminės lygčių sistemos sprendinio, užrašyto (2.4) formule. Todėl spręsime (2.5)–(2.7) sistemas, o konstantas c_1 ir c_2 surasime iš sistemos

$$\begin{cases} c_1 - \Big(c_1\gamma_1 l(u^{n+1})^1 + c_2\gamma_1 l(u^{n+1})^2 + \gamma_1 l(u^{n+1})^0\Big) = F_0^n, \\ c_2 - \Big(c_1\gamma_2 l(u^{n+1})^1 + c_2\gamma_2 l(u^{n+1})^2 + \gamma_2 l(u^{n+1})^0\Big) = F_N^n. \end{cases}$$

Tokios sistemos sprendinys yra

$$c_1 = \frac{\begin{vmatrix} F_0^n + \gamma_1 l(u^{n+1})^0 & -\gamma_1 l(u^{n+1})^2 \\ F_N^n + \gamma_2 l(u^{n+1})^0 & 1 - \gamma_2 l(u^{n+1})^2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \gamma_1 l(u^{n+1})^1 & -\gamma_1 l(u^{n+1})^2 \\ -\gamma_2 l(u^{n+1})^1 & 1 - \gamma_2 l(u^{n+1})^2 \end{vmatrix}},$$

$$c_2 = \frac{\begin{vmatrix} 1 - \gamma_1 l(u^{n+1})^1 & F_0^n + \gamma_1 l(u^{n+1})^0 \\ -\gamma_2 l(u^{n+1})^1 & F_N^n + \gamma_2 l(u^{n+1})^0 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} 1 - \gamma_1 l(u^{n+1})^1 & -\gamma_1 l(u^{n+1})^2 \\ -\gamma_2 l(u^{n+1})^1 & 1 - \gamma_2 l(u^{n+1})^2 \end{vmatrix}}.$$

Suradę koeficientus c_1 ir c_2, galime apskaičiuoti (2.4) sprendinį.

6.1. Skirtuminės schemos stabilumas

Nagrinėsime (6.3)–(6.6) skirtuminės schemos stabilumą. Pagrindinis stabilumo tyrimo metodas yra perėjimo matricos spektro struktūros nagrinėjimas.

Užrašysime (6.3)–(6.6) skirtuminę schemą $(n+1)$-ajame sluoksnyje tokiu pavidalu

$$Bu^{n+1} = Cu^n + \tau f^n, \tag{6.9}$$

čia $u_i^{n+1} = (u_1^{n+1},\ u_2^{n+1},\ \ldots, u_{N-1}^{n+1})^T$, o matricos B ir C yra $(N-1)$-osios eilės matricos. Jei egzistuoja atvirkštinė matrica B^{-1}, tada skirtuminę schemą užrašome tokiu būdu:

$$u^{n+1} = Su^n + \tau B^{-1} f^n, \tag{6.10}$$

čia S yra perėjimo matrica.

Kaip ir prieš tai nagrinėtame pavyzdyje, naudosime nesimetrinės matricos normą $\|S\|_* = \rho(S)$ ir toliau tirsime matricos S spektrą.

Vadinasi, (6.10) skirtuminei schemai galima naudoti (3.5) stabilumo sąlygą.

Toliau nagrinėsime stabilumą (6.3)–(6.6) skirtuminei neišreikštinei schemai. Šią schemą $(n+1)$-ajame sluosnyje užrašykime pavidalu, analogišku (3.13) lygčiai. Tuo tikslu, pirmiausia skirtuminių lygčių sistemą

$$\begin{cases} \frac{u_{i-1}-2u_i+u_{i+1}}{h^2} = \overline{f}_i, \quad i=\overline{1,N-1}, \\ u_0 - \gamma_1 h\left(\frac{u_0+u_N}{2} + \sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i\right) = \overline{f}_0, \\ u_N - \gamma_2 h\left(\frac{u_0+u_N}{2} + \sum\limits_{i=1}^{N-1} u_i\right) = \overline{f}_N \end{cases}$$

užrašome matriciniu pavidalu

$$\Lambda u = \overline{F},$$

čia $u = (u_1, u_2, ..., u_{N-1})^T$, F – $(N-1)$-osios eilės vektorius, Λ – $(N-1)$-osios eilės matrica.

Dabar (6.3), (6.5), (6.6) sistemą $(n+1)$-ajame sluoksnyje galima užrašyti tokiu pavidalu

$$Eu^{n+1} = Eu^n - \tau\Lambda u^{n+1} - \eta\Lambda u^{n+1} + \eta\Lambda u^n + \tau f^n,$$

$$(E + \tau\Lambda + \eta\Lambda)u^{n+1} = (E + \eta\Lambda)u^n + \tau f^n,$$

čia E yra vienetinė matrica.

Iš čia gauname

$$u^{n+1} = (E + \tau\Lambda + \eta\Lambda)^{-1}(E + \eta\Lambda)u^n + \tau(E + \tau\Lambda + \eta\Lambda)^{-1}f^n, \tag{6.11}$$

čia

$$B = E + \tau\Lambda + \eta\Lambda,$$

$$C = E + \eta\Lambda.$$

Tada lygtį (6.11) galime užrašyti tokiu būdu

$$u^{n+1} = B^{-1}Cu^n + \tau B^{-1}f^n.$$

Matricą S apibrėžkime taip

$$S = B^{-1}C$$

arba

$$S = (E + \tau\Lambda + \eta\Lambda)^{-1}(E + \eta\Lambda).$$

Tada matricos S tikrinėms reikšmėms apskaičiuoti naudosime formulę

$$\lambda_k(S) = \frac{1 + \eta\lambda_k(\Lambda)}{1 + (\tau + \eta)\lambda_k(\Lambda)}. \tag{6.12}$$

6.2. Matricos S spektro struktūros tyrimas

Norint išnagrinėti skirtuminės schemos stabilumą, reikia ištirti skirtuminio operatoriaus Λ su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūrą. Ieškosime matricos S tikrinių reikšmių, t.y. skirtuminio operatoriaus

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0, \quad i = \overline{1, N-1}, \tag{6.13}$$

$$u_0 = \gamma_1 h\left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i\right), \tag{6.14}$$

$$u_N = \gamma_2 h\left(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i\right) \tag{6.15}$$

tikrinių reikšmių. Tam tikslui naudosime metodus, aprašytus [22, 71, 72, 84] straipsniuose. Išnagrinėsime tris atskirus atvejus.

1 atvejis: $\lambda = 0$**.** Šiuo atveju, bendrasis (6.13) lygties sprendinys yra $u_i = c_1 ih + c_2$. Šią u_i išraišką įrašę į (6.14)–(6.15) sąlygas, gauname

$$\begin{cases} -\frac{\gamma_1}{2}c_1 + (1 - \gamma_1)c_2 = 0, \\ (1 - \frac{\gamma_2}{2})c_1 + (1 - \gamma_2)c_2 = 0. \end{cases} \tag{6.16}$$

Kad $\lambda = 0$ būtų (6.13)–(6.15) uždavinio tikrinė reikšmė būtina ir pakankama, kad sprendinys u_i nebūtų lygus nuliui, t.y. (6.16) sistema turi turėti netrivialųjį sprendinį (c_1, c_2). Vadinasi, šios sistemos determinantas privalo būti lygus nuliui

$$\begin{vmatrix} -\frac{\gamma_1}{2} & 1-\gamma_1 \\ 1-\frac{\gamma_2}{2} & 1-\gamma_2 \end{vmatrix} = 0.$$

Iš čia gauname

$$\gamma_1 + \gamma_2 = 2. \tag{6.17}$$

Taigi, tikrinė reikšmė $\lambda = 0$ egzistuoja tada ir tik tada, kai $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$.

2 atvejis: $\lambda < 0$**.** (6.13) lygtį užrašykime tokiu pavidalu

$$u_{i-1} - 2(1 - \frac{\lambda h^2}{2})u_i + u_{i+1} = 0. \tag{6.18}$$

Kai $\lambda < 0$, tada nelygybė $1 - \lambda h^2/2 > 1$ yra teisinga. Pažymėkime

$$1 - \frac{\lambda h^2}{2} = \operatorname{ch}(\beta h). \tag{6.19}$$

(6.18) lygties bendrasis sprendinys yra

$$u_i = c_1 \operatorname{ch}(\beta i h) + c_2 \operatorname{sh}(\beta i h).$$

Įrašęsią išraišką į (6.14)–(6.15) nelokaliąsias sąlygas ir atlikę atitinkamus pertvarkymus, gauname lygtį

$$h(\gamma_1 + \gamma_2) \operatorname{cth} \frac{\beta h}{2} \operatorname{sh}^2 \frac{\beta}{2} = 2 \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} \operatorname{ch} \frac{\beta}{2}. \tag{6.20}$$

O tai yra ekvivalentu dviems atitinkamoms lygtims

$$\operatorname{sh} \frac{\beta}{2} = 0, \tag{6.21}$$

$$h(\gamma_1 + \gamma_2) \operatorname{cth} \frac{\beta h}{2} \operatorname{sh} \frac{\beta}{2} = 2 \operatorname{ch} \frac{\beta}{2}. \tag{6.22}$$

Iš (6.21) lygties, gauname $\beta = 0$. Iš to seka, kad šiuo atveju netenkinama sąlyga $\lambda < 0$. Vadinasi, lieka vienintelė tinkama (6.22) lygtis. Pertvarkę šią lygtį, gauname

$$\operatorname{th}\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{\operatorname{th}\frac{\beta h}{2}}{\frac{\beta h}{2}}. \tag{6.23}$$

Užrašykime (6.23) tokiu būdu

$$\frac{\operatorname{th}\frac{\beta h}{2}}{\frac{\beta h}{2}} = \frac{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{2}}{\frac{\beta h}{2}\operatorname{ch}\frac{\beta h}{2}}.$$

Pastebime, kad jei $\beta h/2$ yra pakankamai mažas, tuomet

$$\frac{\operatorname{sh}\frac{\beta h}{2}}{\frac{\beta h}{2}} \approx 1. \tag{6.24}$$

Taigi, jei βh pakankamai mažas, tuomet, (6.23) lygtis aproksimuoja diferencialinio uždavinio neigiamos tikrinės reikšmės lygtį [22]:

$$\operatorname{th}\frac{\beta}{2} = \frac{\beta}{\gamma_1+\gamma_2}.$$

(6.13)–(6.15) uždavinys turi vieną neigiamą tikrinę reikšmę. Tai pavaizduosime grafiškai. Pažymėkime funkcijas

$$f_1(\beta) = \operatorname{th}\frac{\beta h}{2},$$

$$f_2(\beta) = \frac{\beta}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{\operatorname{th}\frac{\beta h}{2}}{\frac{\beta h}{2}} \equiv \frac{2\operatorname{th}\frac{\beta h}{2}}{h(\gamma_1+\gamma_2)}$$

ir nubrėžkime funkcijų $f_1(\beta)$, $f_2(\beta)$ grafikus, imdami skirtingas parametrų h, γ_1, γ_2 reikšmes (1.3 pav.).

1.3 išvada. Kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$, (6.22) lygtis turi vienintelę šaknį intervale $(0, \infty)$. Vadinasi, (6.13)–(6.15) skirtuminis uždavinys turi vienintelę neigiamą tikrinę reikšmę, kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$.

3 atvejis: $\lambda > 0$. Apibrėžkime $1-\lambda h^2/2 = \cos(\alpha h)$ arba $\lambda = (4/h^2)\sin^2(\alpha h/2)$. Šiuo atveju bendrasis (6.13) lygties sprendinys yra $u_i = c_1\cos(\alpha i h)+c_2\sin(\alpha i h)$. Į (6.14)–(6.15) nelokaliąsias sąlygas įrašę bendrąjį sprendinį ir prilyginę šios homogeninės sistemos determinantą nuliui, gauname

$$h(\gamma_1+\gamma_2)\operatorname{ctg}\frac{\alpha h}{2}\sin^2\frac{\alpha}{2} = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}. \tag{6.25}$$

Gauta lygtis yra ekvivalenti šioms dviems lygtims

$$\sin\frac{\alpha}{2} = 0, \tag{6.26}$$

$$\frac{\alpha h}{2}(\gamma_1+\gamma_2)\operatorname{ctg}\frac{\alpha h}{2}\frac{\sin\frac{\alpha}{2}}{\cos\frac{\alpha}{2}} = \alpha. \tag{6.27}$$

Pertvarkę reiškinį, gauname

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \frac{\alpha}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{1}{\frac{\alpha h}{2}}\frac{\cos\frac{\alpha h}{2}}{\sin\frac{\alpha h}{2}}. \tag{6.28}$$

Be to, kai parametrai α ir h yra pakankamai maži, tai (6.28) lygtyje

$$\frac{1}{\frac{\alpha h}{2}}\frac{\cos\frac{\alpha h}{2}}{\sin\frac{\alpha h}{2}} \approx 1.$$

(6.26) lygties šaknys nepriklauso nuo parametrų $\gamma_1,\ \gamma_2$:

$$\alpha_k = 2k\pi, \quad k = 1,2,...,\left[\frac{N-1}{2}\right],$$

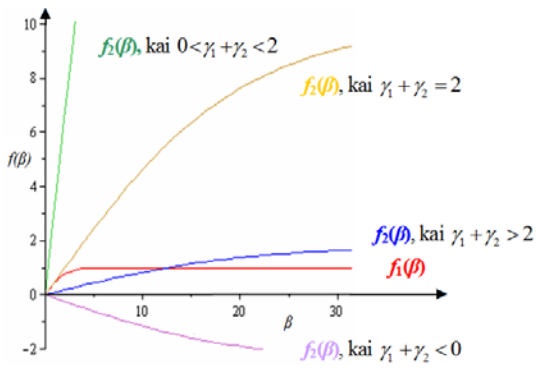
čia

$$\left[\frac{N-1}{2}\right] = \begin{cases} \frac{N-1}{2}, & N - \text{nelyginis}, \\ \frac{N}{2}-1, & N - \text{lyginis}. \end{cases} \tag{6.29}$$

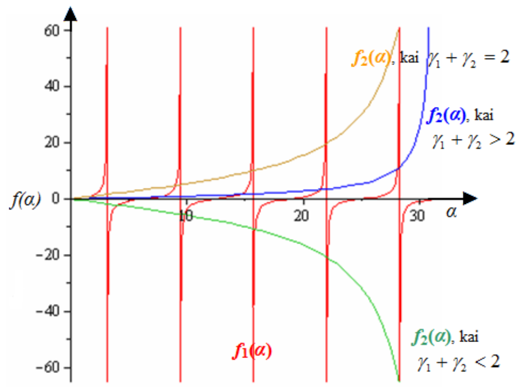
Su šiomis k reikšmėmis gauname skirtingas λ_k tikrines reikšmes. Kai $k > [(N-1)/2]$, tikrinės reikšmės pradeda kartotis.

Įveskime funkcijas $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$:

$$f_1(\alpha) = \operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}, \quad f_2(\alpha) = \frac{\alpha}{\gamma_1+\gamma_2}\frac{\operatorname{tg}\frac{\alpha h}{2}}{\frac{\alpha h}{2}} \equiv \frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha h}{2}}{h(\gamma_1+\gamma_2)}.$$



1.3 pav. Čia funkcija $f_1(\beta) = \mathrm{th}\,\frac{\beta}{2}$. Funkcija $f_2(\beta)$ pavaizduota skirtingais atvejais, kai $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$, $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$ ir $\gamma_1 + \gamma_2 < 0$



1.4 pav. Čia funkcija $f_1(\alpha) = \mathrm{th}\,\frac{\alpha}{2}$. Funkcija $f_2(\alpha)$ pavaizduota skirtingais atvejais, kai $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 2$, ir $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$

Išnagrinėkime šias funkcijas intervale $(0, N\pi)$. Abi funkcijos yra periodinės, o jų mažiausias periodas yra $N\pi$.

1. Intervale $(0, N\pi)$ funkcija $f_2(\alpha) > 0$, kai $0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$. Funkcijos $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ pavaizduotos grafiškai (1.4 pav.). Jos kertasi kiekviename intervale

$$(2k\pi, (2k+1)\pi), \;\; k = 0, 1, ..., N_1,$$

čia

$$N_1 = \begin{cases} \frac{N-3}{2}, & N - \text{nelyginis}, \\ \frac{N}{2} - 1, & N - \text{lyginis}. \end{cases}$$

2. Kai $\gamma_1 + \gamma_2 < 0$, tada visame intervale $(0, N\pi)$ funkcija $f_2(\alpha) < 0$. Šiuo atveju funkcijos $f_1(\alpha)$, $f_2(\alpha)$ kertasi kiekviename intervale

$$((2k-1)\pi, \;\; 2k\pi), \;\; k = 1, 2, ..., N_2,$$

$$N_2 = \begin{cases} \frac{N-1}{2}, & N - \text{nelyginis}, \\ \frac{N}{2}, & N - \text{lyginis}. \end{cases} \tag{6.30}$$

3) Kai $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$, gauname klasikinį uždavinį su kraštinėmis sąlygomis, čia

$$\alpha_k = (2k-1)\pi, \;\; k = 1, 2, ..., N_2.$$

Todėl, kai $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$, gauname $N-1$ teigiamą tikrinę reikšmę.

Su visomis šiomis λ tikrinėmis reikšmėmis, yra teisinga nelygybė

$$\left|1 - \frac{\lambda h^2}{2}\right| < 1.$$

1.4 išvada. Kai $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$, visais trim atvejais ($\gamma_1 + \gamma_2 < 0,\ 0 < \gamma_1 + \gamma_2 < 2$, $\gamma_1 + \gamma_2 = 0$) turime $N-1$ realią tikrinę reikšmę. Vadinasi, kompleksinių tikrinių reikšmių nėra.

6.3. Skirtuminės schemos stabilumo tyrimo tęsinys

Grįžkime prie (6.12) formulės ir panagrinėkime kada teisinga nelygybė $|\lambda_k(S)| < 1$.

Iš (6.12) turime

$$\lambda_k(S) = \frac{1 + \eta\lambda_k(\Lambda)}{1 + (\tau + \eta)\lambda_k(\Lambda)}.$$

Jei $\gamma_1 + \gamma_2 < 0$, tuomet matricos Λ tikrinės reikšmės $\lambda_k(\Lambda)$ yra teigiamos. Tai seka iš 6.2. skirsnio.

Taigi, kai $\eta > 0$, tada

$$1 + \eta\lambda_k < 1 + (\eta + \tau)\lambda_k$$

ir nelygybė $|\lambda_k(S)| < 1$ yra teisinga visoms reikšmėms $\tau > 0$.

1.5 išvada. *Pakankama stabilumo sąlyga.* (6.3)–(6.6) skirtuminė schema yra stabili, kai

$$|\lambda_k(S)| < 1,$$

t.y., kai $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$ ir parametras $\eta \geqslant 0$.

1.6 išvada. Vienintelė neigiama tikrinė reikšmė $\lambda_k(\Lambda)$ egzistuoja tuomet, kai $\gamma_1 + \gamma_2 > 2$, tada $|\lambda_k(S)| > 1$. Tokiu atveju skirtuminė schema yra nestabili.

7. Išvados

Tyrimai, atlikti šiame skyriuje, suteikia galimybę suformuluoti tokią išvadą: skirtuminių schemų trečiosios eilės pseudoparabolinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis stabilumo sąlyga gaunama nagrinėjant matricos Λ spektro stuktūrą, t.y. tos pačios matricos spektro struktūrą kaip ir antrosios eilės parabolinei lygčiai.

2 skyrius

Padidintos eilės aproksimacijos skirtuminės schemos vienmačiu ir dvimačiu atvejais

Šiame skyriuje nagrinėsime tiesinę pseudoparabolinę lygtį su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis. Tirsime skirtumines schemas tokiam uždaviniui spręsti bei tokių skirtuminių schemų aproksimavimo tikslumą.

1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime vienmatę pseudoparabolinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + f(x,t) \tag{1.1}$$

su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis

$$u(0,t) = \gamma_1 \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_1(t), \tag{1.2}$$

$$u(1,t) = \gamma_2 \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_2(t) \tag{1.3}$$

ir pradine sąlyga

$$u(x,0) = \varphi(x); \tag{1.4}$$

čia funkcijos f, φ, μ_i, $i = 1, 2$, yra žinomos, o γ_1, γ_2, $\eta > 0$ – duotos konstantos.

2. Padidinto tikslumo skirtuminė schema

Šiame paragrafe pateiksime (1.1)–(1.4) uždaviniui skirtuminę schemą ir panagrinėsime šios schemos tikslumą.

Pagal [46, 47] straipsniuose nagrinėjamus metodus, lygtį (1.1) galime pakeisti tokia skirtumine schema su paklaida $O(h^2 + \tau)$:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \Lambda u_i^{n+1} + \eta \frac{\Lambda u_i^{n+1} - \Lambda u_i^n}{\tau} + f_i^{n+1}$$

arba

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \sigma \Lambda u_i^{n+1} + (1-\sigma)\Lambda u_i^n + \varphi_i^{n+1}, \tag{2.1}$$

čia $\sigma = 1 + \eta/\tau$, $\varphi_i^{n+1} = f_i^{n+1}$ ir

$$\Lambda u_i^n = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}, \quad i = \overline{1, N-1}.$$

Tinkamai parinkę σ ir φ_{ij}^{n+1} įrodysime, kad (2.1) lygtis aproksimuoja lygtį (1.1) su paklaida $O(h^2 + \tau^2)$.

Pakeiskime (1.1) lygtį su (1.2)–(1.3) sąlygomis tokia skirtumine schema:

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \sigma \Lambda u_i^{n+1} + (1-\sigma)\Lambda u_i^n + \varphi_i^{n+1}, \tag{2.2}$$

$$\tilde{u}_0^{n+1} = \gamma_1 h \left(\frac{\tilde{u}_0^{n+1} + \tilde{u}_N^{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{u}_i^{n+1} \right) + \tilde{\mu}_1^{n+1}, \tag{2.3}$$

$$\tilde{u}_N^{n+1} = \gamma_2 h \left(\frac{\tilde{u}_0^{n+1} + \tilde{u}_N^{n+1}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{u}_i^{n+1} \right) + \tilde{\mu}_2^{n+1}, \tag{2.4}$$

čia

$$\tilde{u}_i^{n+1} = \sigma u_i^{n+1} + (1-\sigma) u_i^n.$$

(2.3)–(2.4) išraiškos aproksimuoja (1.2)–(1.3) nelokaliąsias sąlygas $O(h^2)$ tikslumu.

2.1 lema. *Jei sprendinys* $u(x,t)$ *yra pakankamai glodus ir*

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{\eta}{\tau}, \quad o \quad \varphi_i^{n+1} = f_i^{n+1/2},$$

tuomet (2.2) *skirtuminė lygtis aproksimuoja* (1.1) *diferencialinę lygtį su paklaida* $O(h^2+\tau^2)$.

Įrodymas. Funkcijas $u_{i\pm1}^{n+1/2}$ išskleiskime Teiloro eilute taško $(i, n+1/2)$ aplinkoje

$$\begin{aligned}
u_{i+1}^{n+1/2} &= u_i^{n+1/2} + h(u_i^I)^{n+1/2} + \frac{h^2}{2}(u_i^{II})^{n+1/2} + \frac{h^3}{6}(u_i^{III})^{n+1/2} + \\
&+ \frac{h^4}{4!}(u_i^{IV})^{n+1/2} + \frac{h^5}{5!}(u_i^{V})^{n+1/2} + O(h^6), \\
u_{i-1}^{n+1/2} &= u_i^{n+1/2} - h(u_i^I)^{n+1/2} + \frac{h^2}{2}(u_i^{II})^{n+1/2} - \frac{h^3}{6}(u_i^{III})^{n+1/2} + \\
&+ \frac{h^4}{4!}(u_i^{IV})^{n+1/2} - \frac{h^5}{5!}(u_i^{V})^{n+1/2} + O(h^6).
\end{aligned}$$

Sudėję gautus skleidinius ir padalinę iš h^2, gauname

$$\frac{u_{i-1}^{n+1/2} - 2u_i^{n+1/2} + u_{i+1}^{n+1/2}}{h^2} = (u_i^{II})^{n+1/2} + \frac{h^2}{12}(u_i^{IV})^{n+1/2} + O(h^4)$$

arba

$$\Lambda u_i^{n+1/2} = \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_i^{n+1/2} + \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_i^{n+1/2} + O\big(h^4\big). \tag{2.5}$$

Panašiai gauname

$$\begin{aligned}
u_i^{n+1} &= u_i^{n+1/2} + \frac{\tau}{2}(u_i^I)^{n+1/2} + \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \frac{1}{2}(u_i^{II})^{n+1/2} + \left(\frac{\tau}{2}\right)^3 \frac{1}{6}(u_i^{III})^{n+1/2} + O(\tau^4), \\
u_i^{n} &= u_i^{n+1/2} - \frac{\tau}{2}(u_i^I)^{n+1/2} + \left(\frac{\tau}{2}\right)^2 \frac{1}{2}(u_i^{II})^{n+1/2} - \left(\frac{\tau}{2}\right)^3 \frac{1}{6}(u_i^{III})^{n+1/2} + O(\tau^4).
\end{aligned}$$

Sutvarkę užrašome taip

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_i^{n+1/2} + \frac{\tau^2}{24}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_i^{n+1/2} + O\big(\tau^4\big). \tag{2.6}$$

Iš pradžių taikydami (2.5) formulę, o po to (2.6) formulę, gauname

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i^{n+1/2} &= \frac{(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_i^{n+1} - (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})_i^{n}}{\tau} + O\big(\tau^2\big) \\ &= \frac{\Lambda u_i^{n+1} - \Lambda u_i^n - \frac{h^2}{12}((\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_i^{n+1} - (\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_i^{n}) + O(h^4)}{\tau} + O\big(\tau^2\big) \\ &= \frac{\Lambda u_i^{n+1} - \Lambda u_i^n}{\tau} - \frac{h^2}{12}\bigg(\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\Big)_i^{n+1/2} + O\big(\tau^2\big)\bigg) \\ &+ O\bigg(\frac{h^4}{\tau} + \tau^2\bigg) = \frac{\Lambda u_i^{n+1} - \Lambda u_i^n}{\tau} + R_1(\tau, h), \end{aligned} \tag{2.7}$$

čia $R_1(\tau, h) = O(h^2 + \tau^2 + h^4/\tau)$. Vadinasi

$$R_1(\tau, h) = O\big(h^2 + \tau^2\big), \quad \text{kai } \tau \geqslant h^2. \tag{2.8}$$

Analogiškai pirmiausia taikydami (2.6) formulę, o po to (2.5) formulę, gauname

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i^{n+1/2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial u}{\partial t}\Big)_i^{n+1/2} \\ &= \frac{(\frac{\partial u}{\partial t})_{i-1}^{n+1/2} - 2(\frac{\partial u}{\partial t})_{i}^{n+1/2} + (\frac{\partial u}{\partial t})_{i+1}^{n+1/2}}{h^2} + O(h^2) \\ &= \frac{\Lambda u_i^{n+1} - \Lambda u_i^n}{\tau} - \frac{\tau^2}{24}\bigg(\Lambda\Big(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big)_i^{n+1/2}\bigg) + \frac{O(\tau^4)}{h^2} + O(h^2) \\ &= \frac{\Lambda u_i^{n+1} - \Lambda u_i^n}{\tau} - \frac{\tau^2}{24}\bigg(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\Big(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\Big)_i^{n+1/2} + O(h^2)\bigg) \\ &+ O\bigg(\frac{\tau^4}{h^2}\bigg) + O(h^2) = \frac{\Lambda u_i^{n+1} - \Lambda u_i^n}{\tau} + R_2(\tau, h), \end{aligned} \tag{2.9}$$

čia $R_2(\tau, h) = O(h^2 + \tau^2 + \tau^4/h^2)$. Tada

$$R_2(\tau, h) = O\big(h^2 + \tau^2\big), \quad \text{kai } \tau \leqslant h^2. \tag{2.10}$$

Taigi, visoms τ ir h reikšmėms

$$\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big)_i^{n+1/2} = \frac{\Lambda u_{ij}^{n+1/2} - \Lambda u_{ij}^n}{\tau/2} + O(h^2 + \tau^2).$$

Dabar (1.1) lygtį taške $(x_i,\ t_{n+1/2})$ pakeisime skirtumine lygtimi, kiekvieną narį aproksimuodami su paklaida $O(\tau^2)$ ar $O(h^2)$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{\Lambda u_i^{n+1} + \Lambda u_i^n}{2} + \eta\frac{\Lambda u_i^{n+1} + \Lambda u_i^n}{\tau} + f_i^{n+1/2}.$$

Iš čia gauname

$$\frac{u_i^{n+1}-u_i^n}{\tau}=\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta}{\tau}\right)\Lambda u_i^{n+1}+\left(\frac{1}{2}+\frac{\eta}{\tau}\right)\Lambda u_i^n+f_i^{n+1/2}.$$

Taigi, (2.2) lygties aproksimavimo paklaida yra $O(h^2+\tau^2)$ bet kokiems τ ir h.

□

3. Dvimatis atvejis

Toliau panagrinėkime dvimatę pseudoparabolinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}+\eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)+f(x,y,t) \tag{3.1}$$

su nelokaliosiomis sąlygomis

$$u(0,y,t)=\gamma_1\int_0^1 u(x,y,t)\mathrm{d}x+\mu_1(y,t), \tag{3.2}$$

$$u(1,y,t)=\gamma_2\int_0^1 u(x,y,t)\mathrm{d}x+\mu_2(y,t), \tag{3.3}$$

$$u(x,0,t)=\mu_3(x,t),\quad u(x,1,t)=\mu_4(x,t), \tag{3.4}$$

$$u(x,y,0)=\varphi(x,y). \tag{3.5}$$

(3.1) lygčiai užrašykime skirtuminę schemą

$$\frac{u_{ij}^{n+1}-u_{ij}^n}{\tau}=\sigma(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{ij}^{n+1}+(1-\sigma)(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{ij}^n+\varphi_{ij}^{n+1}, \tag{3.6}$$

čia $\sigma=1/2+\eta/\tau$, $\varphi_{ij}^{n+1}=f_{ij}^{n+1/2}$,

$$\Lambda_1 u_{ij}^n=\frac{u_{i-1,j}^n-2u_{ij}^n+u_{i+1,j}^n}{h^2},\quad \Lambda_2 u_{ij}^n=\frac{u_{i,j-1}^n-2u_{ij}^n+u_{i,j+1}^n}{h^2},\quad i=\overline{1,N-1}.$$

Įrodysime, kad (3.6) skirtuminė lygtis aproksimuoja (3.1) diferencialinę lygtį su paklaida $O(h^2+\tau^2)$. Remdamiesi 2.1 lemos įrodymu ir išskleidę $u_{i\pm1,j}^{n+1/2}$ Teiloro eilute taško $(i,j,n+1/2)$ aplinkoje, gauname

$$\Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)_{ij}^{n+1/2}+\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ij}^{n+1/2}+O(h^4), \tag{3.7}$$

$$\Lambda_2 u_{ij}^{n+1/2}=\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}^{n+1/2}+\frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij}^{n+1/2}+O(h^4). \tag{3.8}$$

Panašiai gauname ir

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n}}{\tau} = \left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)_{ij}^{n+1/2} + \frac{\tau^2}{24}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{ij}^{n+1/2} + O\big(\tau^4\big). \qquad (3.9)$$

Pirmiausia taikydami (3.7)–(3.8) formules, o po to (3.9) formulę, gauname

$$\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}^{n+1/2} &= \frac{(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{ij}^{n+1} - (\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2})_{ij}^{n}}{\tau} + O\big(\tau^2\big)\\
&= \frac{\Lambda_1 u_{ij}^{n+1} - \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_{ij}^{n+1} + O(h^4) + \Lambda_2 u_{ij}^{n+1} - \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})_{ij}^{n+1} + O(h^4)}{\tau} -\\
&- \frac{\Lambda_1 u_{ij}^{n} - \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_{ij}^{n} + O(h^4) + \Lambda_2 u_{ij}^{n} - \frac{h^2}{12}(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})_{ij}^{n} + O(h^4)}{\tau} + O\big(\tau^2\big)\\
&= \frac{\Lambda_1 u_{ij}^{n+1} - \Lambda_1 u_{ij}^{n}}{\tau} + \frac{\Lambda_2 u_{ij}^{n+1} - \Lambda_2 u_{ij}^{n}}{\tau}\\
&- \frac{h^2}{12}\left(\frac{(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_{ij}^{n+1} - (\frac{\partial^4 u}{\partial x^4})_{ij}^{n}}{\tau}\right) - \frac{h^2}{12}\left(\frac{(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})_{ij}^{n+1} - (\frac{\partial^4 u}{\partial y^4})_{ij}^{n}}{\tau}\right)\\
&+ O\left(\frac{h^4}{\tau}\right) + O\big(\tau^2\big)\\
&= \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)u_{ij}^{n+1} - (\Lambda_1 + \Lambda_2)u_{ij}^{n}}{\tau} - \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial x^4}\right)_{ij}^{n+1/2} + O\big(\tau^2\big)\right)\\
&- \frac{h^2}{12}\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^4 u}{\partial y^4}\right)_{ij}^{n+1/2} + O\big(\tau^2\big)\right) + O\left(\frac{h^4}{\tau}\right) + O\big(\tau^2\big)\\
&= \frac{(\Lambda_1 + \Lambda_2)u_{ij}^{n+1} - (\Lambda_1 + \Lambda_2)u_{i}^{n}}{\tau} + R_1(\tau, h), \qquad (3.10)
\end{aligned}$$

čia $R_1(\tau, h) = O(h^2 + \tau^2 + h^4/\tau)$. Tada, kaip ir vienmačiu atveju

$$R_1(\tau, h) = O\big(h^2 + \tau^2\big), \quad \text{kai } \tau \geqslant h^2. \qquad (3.11)$$

Analogiškai pirmiausia taikydami (3.9) formulę, o po to (3.7)–(3.8) formules, gauname

$$
\begin{aligned}
\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{ij}^{n+1/2} &= \frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right) \\
&= \frac{(\frac{\partial u}{\partial t})_{i-1,j}^{n+1/2}-2(\frac{\partial u}{\partial t})_{ij}^{n+1/2}+(\frac{\partial u}{\partial t})_{i+1,j}^{n+1/2}}{h^2}+O(h^2) \\
&+ \frac{(\frac{\partial u}{\partial t})_{i,j-1}^{n+1/2}-2(\frac{\partial u}{\partial t})_{ij}^{n+1/2}+(\frac{\partial u}{\partial t})_{i,j+1}^{n+1/2}}{h^2}+O(h^2) \\
&= \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{ij}^{n+1}-(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{ij}^{n}}{\tau} \\
&- \frac{\tau^2}{24}\left((\Lambda_1+\Lambda_2)\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{ij}^{n+1/2}\right)+\frac{O(\tau^4)}{h^2}+O(h^2) \\
&= \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{ij}^{n+1}-(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{ij}^{n}}{\tau} \\
&- \frac{\tau^2}{24}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{ij}^{n+1/2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left(\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}\right)_{ij}^{n+1/2}+O(h^2)\right)+O\left(\frac{\tau^4}{h^2}\right) \\
&+ O(h^2) = \frac{(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{i}^{n+1}-(\Lambda_1+\Lambda_2)u_{i}^{n}}{\tau}+R_2(\tau,h), \qquad (3.12)
\end{aligned}
$$

čia $R_2(\tau,h)=O(h^2+\tau^2+\tau^4/h^2)$. Tada

$$
R_2(\tau,h)=O\big(h^2+\tau^2\big), \quad \text{kai } \tau\leqslant h^2. \tag{3.13}
$$

Taigi, (3.1) dvimatę pseudoparabolinę lygtį pakeitę (3.6) skirtumine lygtimi, kai

$$
\sigma=\frac{1}{2}+\frac{\eta}{\tau}, \qquad \varphi_{ij}^{n+1}=f_{ij}^{n+1/2}, \tag{3.14}
$$

iš (3.11)–(3.13) formulių gauname, kad (3.6) lygties aproksimavimo paklaida yra $O(h^2+\tau^2)$ bet kokiems τ ir h.

4. Skaitinis eksperimentas

Ieškosime (1.1) pseudoparabolinės lygties sprendinio, kai $\eta \geqslant 0$, tenkinančio šias sąlygas

$$\frac{\partial}{\partial t}\int_0^{\xi} u(x,t)\mathrm{d}x = \mu_1(t), \quad 0 < \xi \leqslant l, \tag{4.1}$$

$$u(l,t) = \mu_2(t), \tag{4.2}$$

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{4.3}$$

Gruntinio vandens tekėjimo uždavinyje (4.1) nelokalioji sąlyga reiškia, kad yra duotas drėgmės kitimo greitis sluoksnyje $0 \leqslant x \leqslant \xi$. Tokia nelokalioji sąlyga formuluojama ir nagrinėjama [18] knygoje.

Spręsime (1.1), (4.1)–(4.3) uždavinį baigtinių skirtumų metodu. Tuo tikslu kitaip perrašysime (4.1) nelokąliąją sąlygą. Integruodami šią lygybę intervale $[0,t]$ gauname

$$\int_0^{\xi} u(x,t)\mathrm{d}x = \overline{\mu}_1(t), \tag{4.4}$$

čia

$$\overline{\mu}_1(t) = \int_0^{\xi}\varphi(x)\mathrm{d}x + \int_0^{t}\mu_1(t)\mathrm{d}t.$$

Pažymėkime $\tau = T/M$, $h = l/N$,

$$\Lambda_1 u_i^n = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2}.$$

Kad būtų paprasčiau, tarkime, jog ξ yra toks, kad $\xi/h = m$ yra sveikas skaičius.

Užrašykime skirtuminę schemą

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \sigma\Lambda_1 u_i^{n+1} + (1-\sigma)\Lambda_1 u_i^n + f_i^{n+1/2}, \quad i = 1,2,...,N-1, \tag{4.5}$$

$$h\Big(\frac{u_0^{n+1} + u_m^{m+1}}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} u_i^{n+1}\Big) = \overline{\mu}_1^{n+1}, \tag{4.6}$$

$$u_N^{n+1} = \mu_2^{n+1}, \quad n = 0,1,...,M-1, \tag{4.7}$$

$$u_i^0 = \varphi_i. \tag{4.8}$$

Kai

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{\eta}{\tau}, \tag{4.9}$$

tai (4.5)–(4.8) skirtuminė schema aproksimuoja (1.1), (4.1)–(4.3) diferencialinį uždavinį su paklaida $O(\tau^2 + h^2)$.

Kaip ir [47] straipsnyje, užrašykime (4.5)–(4.8) lygčių sistemą matriciniu pavidalu

$$u^{n+1} = Su^n + g^{n+1/2}, \tag{4.10}$$

čia

$$\begin{gathered} S = (E - \tau\sigma\Lambda)^{-1}(E + \tau(1-\sigma)\Lambda), \qquad (4.11) \\ g^{n+1/2} = (E - \tau\sigma)^{-1} f^{n+1/2}, \quad u^n = (u_1^n, u_2^n, ..., u_{N-1}^n)^T, \end{gathered}$$

Λ yra žemiau pateiktos skirtuminių lygčių sistemos $(N-1)$-osios eilės matrica:

$$\begin{aligned} &\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} = \psi_i, \quad i = 1, 2, ..., N-1, \\ &h\Big(\frac{u_0 + u_m}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} u_i\Big) = \psi_0, \\ &u_N = \psi_N, \end{aligned} \tag{4.12}$$

ψ_i – bet kokios duotos reikšmės. Matricos (skirtuminio operatoriaus) Λ tikrinės reikšmės apibrėžiamos uždaviniu:

$$\frac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0, \quad i = 1, 2, ..., N-1, \tag{4.13}$$

$$h\Big(\frac{u_0 + u_m}{2} + \sum_{i=1}^{m-1} u_i\Big) = 0, \quad 1 < m \leqslant N, \tag{4.14}$$

$$u_N = 0. \tag{4.15}$$

Testas 1. Naudojant (4.10) skirtuminę schemą buvo išspręstas iliustracinis pavyzdys, atitinkantis (1.1), (4.1)–(4.3) uždavinį. Į uždavinio formulavimą įeinančios funkcijos $f(x,t)$, $\mu_1(t)$, $\mu_2(t)$, $\varphi(x)$ buvo parinktos taip, kad tikslus

2.1 lentelė. Paklaidos $\varepsilon = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |u(x_i, t_j) - u_i^n|$ reikšmės. $T = 6.28$; $\xi = 0.5$.

h	τ	ε
0.1	0.0997	$9.150 \cdot 10^{-5}$
0.05	0.0498	$2.287 \cdot 10^{-5}$
0.025	0.0249	$0.571 \cdot 10^{-5}$
0.0125	0.0125	$0.143 \cdot 10^{-5}$

diferencialinio uždavinio sprendinys būtų

$$u(x,t) = x(l-x)\sin t.$$

Buvo parinktos tokios parametrų reikšmės: $l = 1,\ \xi = 1/2,\ T = 1.57, T = 6.28.$

Skaičiavimo rezultatai pateikti 2.1 lentelėje.

Skaitinis eksperimentas parodė pakankamai gerą nagrinėjamo metodo efektyvumą.

5. Išvados

Vieną iš svarbiausių šio skyriaus išvadų galima suformuluoti taip: (1.1) pseudoparabolinei lygčiai skirtuminę schemą su svoriais galima formuluoti lygiai tokiu pačiu (2.1) pavidalu, kaip ir antrosios eilės parabolinei lygčiai be nario $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$, tik svorio koeficientas σ parenkamas atsižvelgiant į (1.1) lygties pavidalą.

Analogiška situacija susidaro ir dvimačiu atveju: (3.1) dvimatei pseudoparabolinei lygčiai skirtuminė schema su svoriais užrašoma (3.6) pavidalu, t.y. tokiu pat pavidalu kaip dvimatei antrosios eilės parabolinei lygčiai. Svorio koeficientą σ galima parinkti taip, kad aproksimavimo paklaida būtų $O(h^2+\tau^2)$ eilės dydis.

3 skyrius

Lokaliai vienmatis metodas dvimatei pseudoparabolinei lygčiai su integralinėmis sąlygomis

Šiame skyriuje nagrinėsime tiesinę dvimatę pseudoparabolinę lygtį su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis viena koordinačių kryptimi. Tokiam uždaviniui spręsti naudosime lokaliai vienmatį metodą. Tirdami diferencialinio operatoriaus su nelokaliosiomis sąlygomis spektro struktūrą, įrodysime baigtinių skirtumų schemos stabilumą.

1. Uždavinio formulavimas

Nagrinėsime trečiosios eilės dvimatį pseudoparabolinį uždavinį srityje $\Omega_T = \{0 < x, y < 1,\ 0 < t < T\}$:

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + f(x, y, t), \tag{1.1}$$

$$u(0, y, t) = \gamma_1 \int_0^1 u(x, y, t)\mathrm{d}x + \mu_1(y, t), \tag{1.2}$$

$$u(1,y,t) = \gamma_2 \int_0^1 u(x,y,t)\mathrm{d}x + \mu_2(y,t), \tag{1.3}$$

$$u(x,0,t) = \mu_3(x,t), \quad u(x,1,t) = \mu_4(x,t), \tag{1.4}$$

$$u(x,y,0) = \varphi(x,y), \tag{1.5}$$

čia funkcijos f, φ, μ_i, $i = 1,2,3,4$ yra žinomos, o γ_1, γ_2, $\eta > 0$ – duotos konstantos.

Tiek tiesinės, tiek netiesinės pseudoparabolinės lygtys su skirtingomis nelokaliosiomis sąlygomis yra nagrinėjamos daugelyje straipsnių [9, 11, 24, 25, 46, 47, 52, 57, 88]. Kai kuriuose iš šių straipsnių [9, 24, 52, 57] tiriama, kaip uždavinio sprendinys priklauso nuo nelokalių sąlygų, taip pat sprendinio egzistavimo ir vienaties klausimai. [11] straipsnyje nagrinėjamas Rothe laiko diskretizavimo metodas netiesinei pseudoparabolinei lygčiai su integralinėmis sąlygomis. Paprasčiausias skaitinis metodas netiesinei pseudoparabolinei lygčiai su integraline sąlyga spręsti pateikiamas straipsnyje [54]. [88] straipsnyje analizuojamas pseudoparabolinės lygties su nelokaliosiomis sąlygomis uždavinys, kaip gruntinio vandens tekėjimo modelis. Baigtinių skirtumų schemos pseudoparabolinei lygčiai su integralinėmis sąlygomis nagrinėjamos [46, 47] straipsniuose.

Visuose prieš tai paminėtuose straipsniuose nagrinėjama vienmatė pseudoparabolinė lygtis.

Dvimačiu atveju nelokaliosios sąlygos vieno kintamojo atžvilgiu suformuluotos ir išanalizuotos elipsinėms, parabolinėms ir hiperbolinėms lygtims [5, 40, 43, 73, 79, 78, 94] straipsniuose.

Šio skyriaus tikslas – užrašyti ir pritaikyti ekonomines baigtinių skirtumų schemas suformuluotam diferencialiniam uždaviniui spręsti. Svarbiausias tikslas – lokaliai vienmačių skirtuminių schemų (1.1) pseudoparabolinei lygčiai su (1.3)–(1.4) nelokaliosiomis sąlygomis stabilumo įrodymas. Lokaliai vienmatis metodas dvimatei pseudoparabolinei lygčiai, kiek yra žinoma, kitų autorių nebuvo nagrinėtas.

2. Lokaliai vienmatė skirtuminė schema

Šiame paragrafe (1.1)–(1.5) uždaviniui pateiksime lokaliai vienmatę skirtuminę schemą. Tokia idėja, kaip išskaidyti parabolinį uždavinį į lokaliai vienmačius diferencialinius uždavinius, išnagrinėta [69] monografijoje. Antrosios eilės parabolinėms lygtims su nelokaliąja integraline sąlyga lokaliai vienmatis metodas išnagrinėtas [19, 20] straipsniuose. Remiantis [69] monografijoje aprašyta idėja, sudarome vienmačių uždavinių "grandinę":

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + \frac{1}{2}f, \tag{2.1}$$

$$\frac{1}{2}\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \eta\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) + \frac{1}{2}f. \tag{2.2}$$

(2.1) lygtį aproksimuokime intervale $(t_n,\ t_{n+1/2})$, o (2.2) lygtį – intervale $(t_{n+1/2},\ t_{n+1})$.

Tam, kad pereitume iš sluoksnio $t = t_n$ į sluoksnį $t = t_{n+1}$, (1.1) lygtį su (1.2)–(1.4) sąlygomis pakeisime žemiau pateikta vienmate skirtumine schema:

$$\frac{u_{ij}^{n+1/2} - u_{ij}^{n}}{\tau} = \sigma\Lambda_1 u_{ij}^{n+1/2} + (1-\sigma)\Lambda_1 u_{ij}^{n} + \varphi_{ij}^{n+1/2}, \tag{2.3}$$

$$\tilde{u}_{0j}^{n+1/2} = \gamma_1 h\left(\frac{\tilde{u}_{0j}^{n+1/2} + \tilde{u}_{Nj}^{n+1/2}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1}\tilde{u}_{ij}^{n+1/2}\right) + \tilde{\mu}_{1j}^{\ n+1/2}, \tag{2.4}$$

$$\tilde{u}_{Nj}^{n+1/2} = \gamma_2 h\left(\frac{\tilde{u}_{0j}^{n+1/2} + \tilde{u}_{Nj}^{n+1/2}}{2} + \sum_{i=1}^{N-1}\tilde{u}_{ij}^{n+1/2}\right) + \tilde{\mu}_{2j}^{\ n+1/2}, \tag{2.5}$$

$$\frac{u_{ij}^{n+1} - u_{ij}^{n+1/2}}{\tau} = \sigma\Lambda_2 u_{ij}^{n+1} + (1-\sigma)\Lambda_2 u_{ij}^{n+1/2} + \varphi_{ij}^{n+1}, \tag{2.6}$$

$$u_{i0}^{n+1} = \mu_{3i}, \quad u_{iN}^{n+1} = \mu_{4i}, \tag{2.7}$$

čia

$$\Lambda_1 u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i-1,j}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i+1,j}^{n+1}}{h^2}, \qquad \Lambda_2 u_{ij}^{n+1} = \frac{u_{i,j-1}^{n+1} - 2u_{ij}^{n+1} + u_{i,j+1}^{n+1}}{h^2}$$

$$\tilde{u}_{ij}^{n+1/2} = \sigma u_{ij}^{n+1/2} + (1-\sigma)u_{ij}^{n},$$

$$\tilde{\mu}_{k_j}^{n+1/2} = \sigma \mu_{k_j}^{n+1/2} + (1-\sigma)\mu_{k_j}^{n+1/2}, \quad k = 1, 2,$$

σ, $\varphi_{ij}^{n+1/2}$ ir φ_{ij}^{n+1} apibrėšime vėliau (žr. 3.1 lema).

(2.4)–(2.5) išraiškos aproksimuoja (1.2)–(1.3) nelokaliąsias sąlygas $O(h^2)$ tikslumu.

Remdamiesi, antrajame skyriuje suformuluota ir įrodyta 2.1 lema, performuluosime ją mūsų atveju:

3.1 lema. *Jei sprendinys $u(x,t)$ yra pakankamai glodus ir*

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{\eta}{\tau} \quad ir \quad \varphi_{ij}^{n+1/2} = \frac{1}{2} f_i^{n+1/4},$$

tuomet (2.3) *skirtuminė lygtis aproksimuoja* (2.1) *diferencialinę lygtį su paklaida $O(h^2 + \tau^2)$, o* (2.6) *skirtuminė lygtis –* (2.2) *diferencialinę lytį su tokia pat paklaida.*

3. Skirtuminės schemos stabilumas

Užrašykime (2.3)–(2.7) skirtuminę schemą įprastu matriciniu pavidalu

$$u^{n+1} = Su^n + \varphi^n, \tag{3.1}$$

čia u^n ir φ^n yra $(N-1)^2$-osios eilės vektoriai, o S yra $(N-1)^2$-osios eilės matrica. Tuo tikslu, (2.4)–(2.5) sąlygas interpretuodami kaip dvi lygtis su nežinomaisiais $\tilde{u}_{0j}^{n+1/2}$ ir $\tilde{u}_{Nj}^{n+1/2}$, šiuos du nežinomuosius išreikškime per likusius nežinomuosius $\tilde{u}_{ij}^{n+1/2}$, $i = \overline{1, N-1}$ kiekvienai j reikšmei.

Gauname:

$$\tilde{u}_{0j}^{n+1/2} = \alpha \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{u}_{ij}^{n+1/2} + \overline{\mu}_{1j}^{\,n+1/2}, \tag{3.2}$$

$$\tilde{u}_{Nj}^{n+1/2} = \beta \sum_{i=1}^{N-1} \tilde{u}_{ij}^{n+1/2} + \overline{\mu}_{2j}^{\,n+1/2}, \tag{3.3}$$

čia

$$\alpha = \frac{\gamma_1 h}{D}, \quad \beta = \frac{\gamma_2 h}{D}, \quad D = 1 - \frac{(\gamma_1+\gamma_2)h}{2},$$

$$\overline{\mu}_{1j}^{\,n+1/2} = \frac{1}{D}\left(\tilde{\mu}_{1j}^{\,n+1/2} + \frac{h}{3}\big(\gamma_1 \tilde{\mu}_{2j}^{\,n+1/2} - \gamma_2 \tilde{\mu}_{1j}^{\,n+1/2}\big)\right),$$

$$\overline{\mu}_{2j}^{\,n+1/2} = \frac{1}{D}\left(\tilde{\mu}_{2j}^{\,n+1/2} + \frac{h}{3}\big(\gamma_2 \tilde{\mu}_{1j}^{\,n+1/2} - \gamma_1 \tilde{\mu}_{2j}^{\,n+1/2}\big)\right).$$

Pastebėkime, kad, jei $h < 2/(\gamma_1+\gamma_2)$, tuomet $D > 0$.

Išraiškas $\tilde{u}_{0j}^{n+1/2}$, $\tilde{u}_{Nj}^{n+1/2}$ įrašę į (2.3) lygtį, kai $i = 1$ ir $i = N-1$, (2.3)–(2.5) skirtuminių lygčių sistemą fiksuotiems j (t.y. vienoje eilutėje) galime užrašyti taip

$$(I_{N-1} + \tau\sigma\Lambda_x)u_j^{n+1/2} = \big(I_{N-1} - \tau(1-\sigma)\Lambda_x\big)u_j^n + \tau F_j^{n+1/2},$$

čia I_{N-1} yra $(N-1)$-osios eilės vienetinė matrica, o

$$\Lambda_x = h^{-2}\begin{pmatrix} 2-\alpha & -1-\alpha & -\alpha & \dots & -\alpha & -\alpha \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ -\beta & -\beta & -\beta & \dots & -1-\beta & 2-\beta \end{pmatrix}, \tag{3.4}$$

$$u_j^n = \big(u_{1j}^n,\ u_{2j}^n,\ \dots,\ u_{N-1,j}^n\big)^{\mathrm{T}}. \tag{3.5}$$

Visoje srityje $\{i, j = \overline{1, N-1}\}$ (2.3)–(2.5) lygčių sistemą užrašysime tokiu būdu

$$(I + \tau\sigma A_1)u^{n+1/2} = \big(I - \tau(1-\sigma)A_1\big)u^n + F^{n+1/2}, \tag{3.6}$$

čia A_1 yra blokinė-diagonalinė (block-diagonal) matrica

$$A_1 = \mathrm{diag}(\Lambda_x, \Lambda_x, \dots, \Lambda_x), \tag{3.7}$$

$$u^n = \big(u_1^n, u_2^n, \dots, u_{N-1}^n\big)^{\mathrm{T}}, \tag{3.8}$$

Λ_x yra $(N-1)$-osios eilės matrica, o A_1 ir I yra $(N-1)^2$-osios eilės matrica.

Antrą kartą panaudoję lokaliai vienmatį metodą, panašiai užrašysime (2.6)–(2.7) skirtuminių lygčių sistemą. Tuo tikslu apibrėžkime $(N-1)$-osios eilės matricą

$$\Lambda_y = h^{-2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ir blokinę-diagonalinę (block-diagonal) matricą

$$A_2 = h^{-2}\begin{pmatrix} 2I_{N-1} & -I_{N-1} & 0 & \dots & 0 & 0 \\ -I_{N-1} & 2I_{N-1} & -I_{N-1} & \dots & 0 & 0 \\ 0 & -I_{N-1} & 2I_{N-1} & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 2I_{N-1} & -I_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -I_{N-1} & 2I_{N-1} \end{pmatrix},$$

čia matrica A_2 turi $(N-1)$ stulpelius, t.y. A_2 yra $(N-1)^2$-osios eilės matrica.

Analogiškai (3.6) išraiškai, (2.6), (2.7) lygtims užrašysime skirtuminę lygčių sistemą

$$(I + \tau\sigma A_2)u^{n+1} = \big(I - \tau(1-\sigma)A_2\big)u^{n+1/2} + F^{n+1}, \tag{3.9}$$

čia u^{n+1} ir $u^{n+1/2}$ vektorių struktūra analogiška (3.5) formule apibrėžtiems vektoriams.

Iš (3.6) lygties paimkime $u^{n+1/2}$ ir įstatykime į (3.9) lygtį. Iš to gauname

$$u^{n+1} = Su^n + b^n, \tag{3.10}$$

čia

$$S = (I + \tau\sigma A_2)^{-1}\big(I - \tau(1-\sigma)A_2\big)(I + \tau\sigma A_1)^{-1}\big(I - \tau(1-\sigma)A_1\big). \tag{3.11}$$

3.1 teorema. *Matricos S tikrinės reikšmės yra apskaičiuojamos pagal formulę*

$$\lambda(S) = q\big(\lambda(\Lambda_x)\big)q\big(\lambda(\Lambda_y)\big), \tag{3.12}$$

čia

$$q(\lambda) = \frac{1 - \tau(1-\sigma)\lambda}{1 + \tau\sigma\lambda}. \tag{3.13}$$

Įrodymas. Apibrėžkime matricų Λ_x ir Λ_y tikrinius vektorius tokiu būdu: $v^{(k)} = \{v_i^{(k)}\}$, $k = \overline{1, N-1}$, $w^{(l)} = \{w_j^{(l)}\}$, $l = \overline{1, N-1}$ ir atitinkamai

$$\Lambda_x v^{(k)} = \lambda(\Lambda_x)v^{(k)}, \qquad \Lambda_y w^{(l)} = \lambda(\Lambda_y)w^{(l)}.$$

Kadangi matrica Λ_y yra simetrinė, tai jos tikriniai vektoriai yra ortonormuoti. Matrica Λ_x yra nesimetrinė, o jos tikriniai vektoriai yra tiesiškai nepriklausomi [73].

Panaudodami Kronekerio tenzorinę sandaugą [89], apibrėžkime naują $(N-1)^2$-osios eilės vektorių

$$u^{(k,l)} = w^{(l)} \otimes v^{(k)} = \big\{w_j^{(l)} v_i^{(k)}\big\}.$$

Naudodami tenzorinę sandaugą, matricas A_1 ir A_2 galime užrašyti tokiu būdu:

$$A_1 = I_{N-1} \otimes \Lambda_x, \qquad A_2 = \Lambda_y \otimes I_{N-1}.$$

Pasinaudoję tenzorinės sandaugos savybėmis, išveskime

$$A_1 u^{(k,l)} = (I_{N-1} \otimes \Lambda_x)\big(w^{(l)} \otimes v^{(k)}\big) = I_{N-1} w^{(l)} \otimes \Lambda_x v^{(k)}$$

$$= w^{(l)} \otimes \lambda(\Lambda_x) v^{(k)} = \lambda(\Lambda_x) u^{(k,l)}.$$

Taigi, $u^{(k,l)}$ yra matricos A_1 tikrinis vektorius, o matricos A_1 tikrinės reikšmės atitinka matricos Λ_x tikrines reikšmes (visos matricos Λ_x tikrinės reikšmės yra skirtingos, tuo tarpu matricos A_1 tikrinės reikšmės yra kartotinės). Be to, kadangi vektoriai $w^{(l)}$, $l = \overline{1, N-1}$, ir $v^{(k)}$, $k = \overline{1, N-1}$ yra tiesiškai nepriklausomi, tai $u^{(k,l)}$ visiems k ir l taip pat yra tiesiškai nepriklausomi [89].

Analogiškai išvedame ir

$$A_2 u^{(k,l)} = \lambda(\Lambda_y) u^{(k,l)}.$$

Vadinasi, matricos A_1 ir A_2 turi tą pačią tiesiškai nepriklausomų tikrinių vektorių sistemą. Iš to seka [73], kad

$$A_1 A_2 = A_2 A_1.$$

Todėl

$$S u^{(k,l)} = \lambda(S) u^{(k,l)},$$

čia $\lambda(S)$ yra apibrėžiama (3.12) formule.

Teorema įrodyta. □

Panašūs rezultatai kaip ir 3.1 teoremoje buvo gauti ir ankščiau (žr. str. [76, 78]), tačiau nagrinėjant kitokias diferencialines lygtis ar kitokias nelokaliąsias sąlygas.

3.2 teorema. *Jei $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$, tuomet* (2.3)–(2.7) *skirtuminė schema yra stabili su visomis h ir τ reikšmėmis.*

Įrodymas. Visos matricos Λ_y tikrinės reikšmės tenkina nelygybę

$$0 < \lambda(\Lambda_y) < \frac{4}{h^2}.$$

Jei $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$, tada visos matricos Λ_x tikrinės reikšmės yra realios, skirtingos ir tenkina tą pačią nelygybę [74]. Taigi, apibrėžkime funkciją $q(\lambda)$ iš (3.13) lygybės su $\tau > 0$ ir $\sigma > 0$ intervale $\lambda \in (0, 4/h^2)$.

Nustatysime, kada teisinga nelygybė $|q(\lambda)| < 1$, t.y. kada $-1 < q(\lambda) < 1$. Sąlyga $q(\lambda) < 1$ yra teisinga visiems $\tau > 0$ ir $\lambda > 0$.

Sąlyga $q > -1$ yra teisinga, jei

$$\sigma > \frac{1}{2} - \frac{1}{\tau\lambda}.$$

Kai $0 < \lambda < 4/h^2$, tada nelygybė $|\lambda(S)| < 1$ yra teisinga, jei

$$\sigma > \frac{1}{2} - \frac{h^2}{4\tau}.$$

Tada su

$$\sigma = \frac{1}{2} + \frac{\eta}{\tau}$$

nelygybė $|\lambda(S)| < 1$ yra teisinga visiems $h > 0$ ir $\tau > 0$.

Taigi, skirtuminė schema yra stabili.

Teorema įrodyta. $\square$

4. Skaitiniai rezultatai

Taikant skaitinį experimentą išsprendėmę (2.3)–(2.7) skirtuminį uždavinį. Gauti rezultatai pateikiami 3.1 lentelėje.

5. Išvados ir apibendrinimai

Pagal bendrąsias prielaidas, kai $\eta > 0$ ir $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$ [74], lokaliai vienmatis metodas (1.1) pseudoparabolinei lygčiai su (1.3)–(1.4) nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis vieno kintamojo atžvilgiu yra besąlygiškai stabilus. Tiek antrosios eilės parabolinei lygčiai, tiek pseudoparabolinei lygčiai stabilumo sąlyga $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$ yra ta pati.

3.1 lentelė. (2.3)–(2.7) skirtuminės schemos paklaidos $\varepsilon = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1} |u(x_i, t_n) - u_i^n|$ reikšmės.

h_1	h_2	τ	ε
$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	$\frac{1}{10}$	0.0049
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	0.0023
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{40}$	0.0011
$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{40}$	$\frac{1}{160}$	0.000269

Šioje lentelėje pateikiami skaičiavimo rezultatai, kai $T = 1$, $\eta = 0.1$, $\gamma_1 = \gamma_2 = 0.5.$, o diferencialinio uždavinio tikslus sprendinys yra $u(x, y, t) = sin(x)sin(y)e^t$.

Kiekvienu laiko momentu t_n ar $t_{n+1/2}$ taikant lokaliai vienmatį metodą pseudoparabolinei lygčiai reikia spręsti vienmatę pseudoparabolinę lygtį, taikant stabilų baigtinių skirtumų metodą. Vietoje γ_1, γ_2, šį metodą nesunku praplėsti nelokaliųjų integralinių sąlygų su svorinėmis funkcijomis atveju. Tokiu atveju metodo stabilumo prielaidos būtų sudėtingesnės nei $\gamma_1 + \gamma_2 < 2$ (žr. pvz. [74]).

4 skyrius

Išreikštinės trisluoksnės skirtuminės schemos vienmatei pseudoparabolinei lygčiai

1. Uždavinio formulavimas

Sprendžiant trečiosios eilės pseudoparabolinę lygtį tiek su klasikinėmis, tiek su nelokaliosiomis sąlygomis baigtinių skirtumų metodu, literatūroje, dažniausiai nagrinėjamos tik neišreikštinės skirtuminės schemos. Akcentuotina tai, kad dėl pseudoparabolinei lygčiai būdingo nario $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ negalima sudaryti dvisluoksnių išreikštinių skirtuminių schemų.

Šio skyriaus tikslas – ištirti išreikštinių skirtuminių schemų sudarymo galimybes, naudojant ne du, o tris laiko sluoksnius. Trisluoksnės skirtuminės schemos antrosios eilės parabolinėms lygtims su klasikinėmis sąlygomis nagrinėtos A. Samarskio monografijoje "Teoriya raznostnykh skhem" [69]. Skirtuminių lygčių sistemų matricos yra simetrinės, kai kraštinės sąlygos klasikinės. Šioje monografijoje nagrinėtos tiek neišreikštinės, tiek išreikštinės skirtuminės schemos antrosios eilės parabolinėms lygtims.

Trisluoksnės skirtuminės schemos parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis nagrinėtos tik M.Sapagovo straipsnyje [75]. Šiame straipsnyje sudaryta metodika, kaip nagrinėti trisluoksnių skirtuminių schemų stabilumą, kai matricos, esančios skirtuminių lygčių sistemoje, yra nesimetrinės (būtent tai būdinga nelokaliosioms sąlygoms). Straipsnio metodika naudojama šiame skyriuje pseudoparabolinių lygčių išreikštinių schemų stabilumui tirti.

Matematinėje literatūroje pseudoparabolinei lygčiai

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right) + f(x,t) \tag{1.1}$$

yra žinoma tokia interpretacija: kai kuriais atvejais (esant mažai $\eta > 0$ reikšmei, arba kai $\eta \to 0$) narys $\eta \frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ gali būti interpretuojamas kaip parabolinės lygties

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{1.2}$$

reguliarizatorius. Kitaip sakant, šiuo trečiosios eilės nariu galima užtikrinti tam tikrą pageidaujamą skaitinio metodo ar matematinio modelio savybę. Šiame skyriuje tokia idėja ir naudojama sudarant išreikštines (pageidautina stabilias) skirtumines schemas pseudoparabolinei lygčiai.

Kad išsiaiškintume trisluoksnių išreikštinių skirtuminių schemų stabilumo tyrimo metodiką, iš pradžių imsime klasikines kraštines sąlygas

$$u(0,t) = \mu_1(t), \quad u(1,t) = \mu_2(t) \tag{1.3}$$

ir pradinę sąlygą

$$u(x,0) = \varphi(x). \tag{1.4}$$

2. Pirmoji schema. Klasikinė aproksimacija

Sprendžiant (1.1), (1.3), (1.4) uždavinį, sudarysime trisluoksnę skirtuminę schemą

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} &= \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \\ &+ \frac{\eta}{\tau}\left(\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} - \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2}\right) + f_i^n,\end{aligned} \tag{2.1}$$

$$u_0^n = \mu_1^n, \quad u_N^n = \mu_2^n, \quad u_i^0 = \varphi_i. \tag{2.2}$$

Tokios trisluoksnės skirtuminės schemos gali būti užrašytos operatoriniu būdu [70].

Tuo tikslu (2.1) lygtyje sugrupuojame narius kiekviename laiko sluoksnyje atskirai, o po to apibrėžiame $(N-1)$-osios eilės matricas ir vektorius

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = u_i^n + (\tau + \eta)\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} - \\ \eta\frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2} + \tau f_i^n. \tag{2.3}$$

Apibrėžkime $(N-1)$-osios eilės matricą Λ

$$\Lambda = \frac{1}{h^2}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

ir $(N-1)$-osios eilės vektorių $u^n = (u_1^n, u_2^n, ..., u_{N-1}^n,)^T$. Tada (2.1) lygtį su (2.2) kraštinėmis sąlygomis galima užrašyti taip

$$Eu^{n+1} = (E - (\tau + \eta)\Lambda)u^n + \eta\Lambda u^{n-1} + \tau\overline{f}^n, \tag{2.4}$$

$\overline{f}^n$ – žinomas vektorius, sudarytas iš f_i^n ir μ_1, μ_2.

(2.4) lygtį užrašome bendresniu pavidalu

$$Au^{n+1} + Bu^n + Cu^{n-1} = f^n, \tag{2.5}$$

čia

$$A = E, \quad B = -(1 - (\tau + \eta)\Lambda), \quad C = -\eta\Lambda. \tag{2.6}$$

Prijungę prie (2.5) lygties tapatybę

$$u^n \equiv u^n, \tag{2.7}$$

o (2.5) lygtį užrašę pavidalu

$$u^{n+1} = -A^{-1}Bu^n - A^{-1}Cu^{n-1} + A^{-1}f^n, \tag{2.8}$$

(2.7)–(2.8) lygtis galime užrašyti tokiu būdu

$$\begin{pmatrix} u^{n+1} \\ u^n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -A^{-1}B & -A^{-1}C \\ E & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u^{n+1} \\ u^n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} A^{-1}f^n \\ 0 \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Apibrėžkime $2(N-1)$ eilės vektorius z^{n+1}, $\tilde{f}^n$

$$z^{n+1} = \begin{pmatrix} u^{n+1} \\ u^n \end{pmatrix}, \quad \tilde{f}^n = \begin{pmatrix} A^{-1}f^n \\ 0 \end{pmatrix}$$

ir $2(N-1)$ eilės matricą S

$$S = \begin{pmatrix} -A^{-1}B & -A^{-1}C \\ E & 0 \end{pmatrix}. \tag{2.10}$$

Dabar (2.9) lygtį, kitaip tariant, trisluoksnę skirtuminę schemą (2.1)–(2.2), galima užrašyti taip

$$z^{n+1} = Sz^n + \tilde{f}^n. \tag{2.11}$$

Taigi, trisluoksnę skirtuminę schemą užrašėme (2.11) pavidalu kaip dvisluoksnę skirtuminę schemą.

(2.11) skirtuminė schema pagal bendrą stabilumo tyrimo teoriją yra stabili tam tikroje normoje, jei

$$\|S\| < 1.$$

Taigi, gauname tarpinį uždavinį – ištirti matricos S, apibrėžtos (2.10) lygybe, tikrines reikšmes. Taip gauname lygtį

$$det(S - \mu E) = 0,$$

čia μ – matricos S tikrinė reikšmė. Skaičiuojame

$$\det \begin{pmatrix} -A^{-1}B & -A^{-1}C \\ E & 0 \end{pmatrix} = 0$$

arba

$$\det(\mu^2 E + \mu A^{-1} B + A^{-1} C) = 0,$$

$$\det(\mu^2 A + \mu B + C) = 0. \tag{2.12}$$

Iš (2.12) lygybės μ galima interpretuoti kaip tokio apibendrinto netiesinio tikrinių reikšmių uždavinio

$$\mu^2 Av + \mu Bv + Cv = 0 \tag{2.13}$$

tikrinę reikšmę.

(2.13) netiesinis tikrinių reikšmių uždavinys yra pakankamai gerai ištirtas literatūje [53]. Reikia pastebėti, kad klasikinėje netiesinio (2.13) tikrinių reikšmių uždavinio teorijoje matricos A, B ir C paprastai yra simetrinės, ko tikrai nėra, kai nagrinėjame skirtumines schemas matricoms su nelokaliosiomis sąlygomis.

Tačiau, nagrinėjant skirtumines schemas parabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis, turime kitą (2.13) uždavinio gerą savybę. Būtent matricos A, B ir C paprastai turi tuos pačius tikrinius vektorius.

Skirtuminei schemai (2.4) matricos A, B ir C turi tą pačią tikrinių vektorių sistemą kaip ir matrica Λ, kuriai tikrinių reikšmių uždavinys formuluojamas taip

$$\begin{cases} \dfrac{u_{i-1} - 2u_i + u_{i+1}}{h^2} + \lambda u_i = 0, \\ u_0 = 0, \quad u_N = 0. \end{cases} \tag{2.14}$$

Todėl žinant matricos Λ tikrines reikšmes, galima paprastai rasti matricų A, B ir C tikrines reikšmes. (2.6) formule apibrėžtoms matricoms A, B ir C tikrinės reikšmės yra

$$\lambda(A) = 1, \quad \lambda(B) = -(1 - (\tau + \eta)\lambda), \quad \lambda(C) = -\eta\lambda. \tag{2.15}$$

Toliau vietoje v įrašykime į (2.13) formulę matricos Λ tikrinį vektorių v_k, $k = 1, 2, ..., N-1$. Gauname

$$\mu^2 Av_k + \mu Bv_k + Cv_k = (\mu^2\lambda(A) + \mu\lambda(B) + \lambda(C))v_k = 0.$$

Kadangi $v_k \not\equiv 0$ (kaip tikrinis vektorius), tai iš pastarosios lygybės seka

$$\mu^2\lambda(A) + \mu\lambda(B) + \lambda(C) = 0,$$

iš kur gaunama galutinė svarbi formulė

$$\mu = \frac{-\lambda(B) \pm \sqrt{\lambda(B)^2 - 4\lambda(A)\lambda(C)}}{2\lambda(A)} \tag{2.16}$$

Iš čia ir galima spręsti apie $\mu = \mu(S)$ absoliučią reikšmę. Jei $|\mu(S)| < 1$, tai (2.4) skirtuminė schema stabili.

Konkrečiu atveju, atsižvelgiant į (2.6) formules, gauname

$$\mu^2 - (1 - (\tau + \eta)\lambda)\mu - \eta\lambda = 0,$$

tada

$$\mu = \frac{1 - (\tau + \eta)\lambda \pm \sqrt{(1 - (\tau + \eta)\lambda)^2 + 4\eta\lambda}}{2}. \tag{2.17}$$

Taigi, kai $\lambda > 0$ – $\mu_1,\ \mu_2$ yra realieji skaičiai. Tuomet galimi du atvejai.

1. Atvejis. Jei $1 - (\tau + \eta) > 0$, tada $\mu_1 > |\mu_2| > 0$. Panagrinėkime, kada $\mu_1 < 1$, t.y.

$$\mu_1 = \frac{1 - (\tau + \eta)\lambda + \sqrt{(1 - (\tau + \eta)\lambda)^2 + 4\eta\lambda}}{2} < 1. \tag{2.18}$$

Ši nelygybė yra ekvivalenti

$$\sqrt{(1 - (\tau + \eta)\lambda)^2 + 4\eta\lambda} < 2 - 1 + (\tau + \eta)\lambda,$$

$$(1 - (\tau + \eta)\lambda)^2 + 4\eta\lambda < (1 + (\tau + \eta)\lambda)^2,$$

$$1 - 2(\tau + \eta)\lambda + (\tau + \eta)^2\lambda^2 + 4\eta\lambda < 1 + 2(\tau + \eta)\lambda + (\tau + \eta)^2\lambda^2.$$

Atlikę prastinimo veiksmus, gauname

$$-2(\tau + \eta)\lambda + 4\eta\lambda < 2(\tau + \eta)\lambda.$$

Kadangi $-2\tau\lambda < 2\tau\lambda$, tai seka, kad

$$\text{jei } 1 - (\tau + \eta)\lambda > 0, \text{ tai } |\mu_1| < 1 \quad \text{ir } |\mu_2| < \mu_1 < 1.$$

2. Atvejis. Kai $1-(\tau+\eta)\lambda<0$, tada

$$|\mu_1|<|\mu_2|=\frac{(\tau+\eta)\lambda-1+\sqrt{((\tau+\eta)\lambda-1)^2+4\eta\lambda}}{2}. \tag{2.19}$$

Panagrinėkime, kada $\mu_2<1$, t.y. kada teisinga nelygybė

$$(\tau+\eta)\lambda-1+\sqrt{(1-(\tau+\eta)\lambda)^2+4\eta\lambda}<2,$$

arba

$$\sqrt{(1-(\tau+\eta)\lambda)^2+4\eta\lambda}<3-(\tau+\eta)\lambda.$$

Šią nelygybę pakėlę kvadratu, gauname

$$(\tau+\eta)^2\lambda^2-2(\tau+\eta)\lambda+1+4\eta\lambda<9-6(\tau+\eta)\lambda+(\tau+\eta)^2\lambda^2.$$

Suprastinę turime

$$-2\tau\lambda+2\eta\lambda<8-6\tau\lambda-6\eta\lambda,$$

$$4\tau\lambda+8\eta\lambda<8,$$

$$\tau\lambda+2\eta\lambda<2,$$

$$\tau+2\eta<\frac{2}{\lambda}, \tag{2.20}$$

kadangi $0<\lambda<4/h^2$, tai (2.20) nelygybė bus teisinga visoms λ reikšmėms, kai

$$\tau+2\eta<\frac{h^2}{2}.$$

Kai $1-(\tau+\eta)\lambda<0$, (2.4) skirtuminė schema stabili, tik jeigu $\eta<h^2/4$.

Taigi, sąlyga $|\mu(S)|<1$ nėra išpildyta. Vadinasi, (2.1)–(2.2) skirtuminė schema nėra stabili.

Toliau panagrinėsime kitas (1.1) lygties aproksimavimo schemas.

3. Antroji schema. Klasikinė Diuforto-Frankelio schema

Iš skirtuminių schemų teorijos antrosios eilės parabolinei lygčiai žinomas toks rezultatas: (1.2) lygčiai Diuforto Frankelio skirtuminė schema

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{i-1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i+1}^n}{h^2} + f_i^n \tag{3.1}$$

yra absoliučiai stabili.

Atkreipkime dėmesį, kad (3.1) skirtuminė schema aproksimuoja (1.2) lygtį $O(\tau^2 + h^2 + \tau/h^2)$ tikslumu, t.y., kad skirtuminio metodo paklaida mažėtų, kai τ ir h mažėja, papildomai reikia, kad dydis τ/h^2 irgi mažėtų. Tai papildomas apribojimas, praktikoje verčiantis dirbtinai laikytis τ ir h santykio.

Panagrinėkime kokiomis savybėmis pasižymės (3.1) schema, jei papildomai pridėsime reguliarizuojantį narį $\eta\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$. Pirmiausia šį narį aproksimuokime taip, kad (3.1) schema liktų išreikštinė. Kitaip tariant, (1.1) pseudoparabolinei lygčiai užrašykime tokią skirtuminę schemą

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} &= \frac{u_{i-1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i+1}^n}{h^2} + \\ &+ \frac{\eta}{\tau}\left(\frac{u_{i-1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i+1}^n}{h^2} - \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2}\right) + f_i^n. \end{aligned} \tag{3.2}$$

Ištirsime šios schemos stabilumą. Pirmiausia parašykime (3.2) schemą kitokiu būdu

$$\begin{aligned}\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} &= \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \frac{2u_i^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1})}{h^2} + \\ &+ \frac{\eta}{\tau}\left(\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \frac{2u_i^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1})}{h^2} - \right. \\ &\left. - \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2}\right) + f_i^n.\end{aligned}$$

Po elementarių pertvarkymų gauname

$$\begin{aligned}&\left(1 + \frac{2\tau + 2\eta}{h^2}\right)u^{n+1} + \left(2\tau\Lambda + 2\eta\Lambda - \frac{4\tau + 4\eta}{h^2}\right)u^n + \\ &+ \left(-1 + \frac{2\tau + 2\eta}{h^2} - 2\eta\Lambda\right)u^{n-1} = 2\tau f^{n+1}.\end{aligned}$$

Pasinaudoję šio skyriaus 2 poskyryje išdėstyta metodika, turime

$$\left(1+\frac{2\tau+2\eta}{h^2}\right)\mu^2+\left(2(\tau+\eta)\lambda-\frac{4(\tau+\eta)}{h^2}\right)\mu-\left(1+2\eta\lambda-\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}\right)=0.$$

Iš čia

$$\mu^2-\frac{2(\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda)}{1+\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}}-\frac{1+2\eta\lambda-\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}}{1+\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}}=0.$$

Toliau

$$\mu=\frac{\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda}{1+\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}}\pm$$

$$\pm\frac{\sqrt{(\frac{2(\tau+\eta)^2}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda)^2+(1+2\eta\lambda-\frac{2(\tau+\eta)}{h^2})(1+\frac{2(\tau+\eta)}{h^2})}}{1+\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}}. \tag{3.3}$$

Panagrinėkime narį, esantį pošaknyje

$$\begin{aligned}D&=\frac{4(\tau+\eta)^2}{h^4}-\frac{4(\tau+\eta)^2}{h^2}\lambda+(\tau+\eta)^2\lambda^2+1+2\eta\lambda+\\&+(1+2\eta\lambda)\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}-\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}-\frac{4(\tau+\eta)^2}{h^4}=\\&=(\tau+\eta)^2\lambda(\lambda-\frac{4}{h^2})+1+2\eta\lambda+\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}(1+2\eta\lambda-1)=\\&=(\tau+\eta)^2\lambda(\lambda-\frac{4}{h^2})+1+2\eta\lambda+\frac{4\eta\lambda(\tau+\eta)}{h^2}>0,\end{aligned}$$

jei $0\leqslant\lambda\leqslant\frac{4}{h^2}$.

Taigi, abi (3.3) formule apibrėžiamos šaknys $\mu_1,\ \mu_2$ yra realios.

Pastebėkime, kad, kai $\eta>0$ ir $\lambda>\frac{3}{h^2}$, tai

$$\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda<(\tau+\eta)(\frac{2}{h^2}-\frac{3}{h^2})<0$$

ir

$$\left|\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda\right|\geqslant\frac{\tau+\eta}{h^2}.$$

Todėl

$$|\mu_2|\geqslant\frac{\frac{\tau+\eta}{h^2}+\sqrt{(\frac{\tau+\eta}{h^2})^2+1(\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}+1)}}{\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}+1}>$$

$$>\frac{\frac{\tau+\eta}{h^2}+\sqrt{(\frac{\tau+\eta}{h^2}+1)^2}}{\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}+1}=\frac{\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}+1}{\frac{2(\tau+\eta)}{h^2}+1}=1.$$

Taigi

$$|\mu_2| > 1.$$

Vadinasi, skirtuminė schema (3.2) yra nestabili. Kitaip tariant, kai reguliarizatorių $\eta\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ aproksimavome pagal (3.2) skirtuminę schemą, reguliarizatorius skirtuminės schemos stabilumą pablogino – iš stabilios skirtuminės schemos antrosios eilės parabolinei lygčiai gavome nestabilią skirtuminę schemą pseudoparabolinei lygčiai. Todėl toliau bandysime kitaip aproksimuoti reguliarizatorių.

4. Trečioji schema

Aproksimuokime reguliarizatorių $\eta\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ tokiu būdu

$$\left(\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)\right)_i^n = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right)_i^n = \frac{(\frac{\partial u}{\partial t})_{i-1}^n - 2(\frac{\partial u}{\partial t})_i^n + (\frac{\partial u}{\partial t})_{i+1}^n}{h^2} + O(h^2) =$$

$$= \frac{1}{h^2}\left(\frac{u_{i-1}^n - u_{i-1}^{n-1}}{\tau} - 2\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i+1}^{n-1}}{\tau} + O(\tau)\right) + O(h^2) =$$

$$= \frac{1}{\tau}\left(\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^n}{h^2} - \frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^n + u_{i+1}^{n-1}}{h^2}\right) + O(\frac{\tau}{h^2} + h^2). \qquad (4.1)$$

Dabar (1.1) pseudoparabolinei lygčiai užrašykime tokią skirtuminę schemą (žr. 4.1 pav. atitinkantį šios schemos šabloną)

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \tau \Lambda u_i^n + \eta\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^n}{h^2} - $$
$$- \eta\frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^n + u_{i+1}^{n-1}}{h^2} + f_i^n, \qquad (4.2)$$

kurios aproksimavimo paklaida yra $O(\tau + h^2 + \tau/h^2)$. Pertvarkysime (4.2) lygtį tokiu pavidalu

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \frac{\eta}{\tau}\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \frac{2\eta}{\tau}\left(\frac{u_i^n}{h^2} - \frac{u_i^{n+1}}{h^2}\right) -$$
$$- \frac{\eta}{\tau}\frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^{n-1} + u_{i+1}^{n-1}}{h^2} - \frac{2\eta}{\tau}\left(\frac{u_i^{n-1}}{h^2} - \frac{u_i^n}{h^2}\right) + f_i^n.$$

Analogiškai kaip ir ankščiau nagrinėtoms skirtuminėms schemoms, gauname

$$\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big)u^{n+1}-\Big(1-(\tau+\eta)\varLambda+\frac{4\eta}{h^2}\Big)u^n+\Big(\frac{2\eta}{h^2}-\eta\varLambda\Big)u^{n-1}=\tau f^n$$

arba

$$Au^{n+1}+Bu^n+Cu^{n-1}=\tau f^n,$$

čia

$$A=\left(1+\frac{2\eta}{h^2}\right)E,\quad B=-\left((1+\frac{4\eta}{h^2})E-(\tau+\eta)\varLambda\right),\quad C=-\eta\varLambda+\frac{2\eta}{h^2}E.$$

Toliau seka

$$\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big)\mu^2-\Big(1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda\Big)\mu+\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda=0.$$

Taigi, gavome kvadratinę lygtį, kurią išsprendę rasime šaknis

$$\mu_{1,2}=\frac{1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda}{2\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big)}\pm$$
$$\pm\frac{\sqrt{(1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda)^2-(\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda)4(1+\frac{2\eta}{h^2})}}{2\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big)}. \tag{4.3}$$

Panagrinėkime (4.3) formulę. Pastebime, kad

$$\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda\geqslant 0\quad\text{jei}\quad 0<\lambda<\frac{2}{h^2},$$
$$\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda<0\quad\text{jei}\quad \lambda>\frac{2}{h^2}.$$

Taigi, kai $\lambda>2/h^2$, (4.3) formulėje pošaknis teigiamas (abu dėmenys teigiami).

Kai $0<\lambda<2/h^2$, pošaknis gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas. Ištirsime šiuos atvejus:

1 atvejis. Tegul pošaknis teigiamas. Tada abi šaknys μ_1 ir μ_2 realios.

Be to,

$$\frac{4\eta}{h^2}-\eta\lambda\geqslant 0,\quad\text{jei}\quad 0<\lambda<\frac{4}{h^2}.$$

Darykime prielaidą, kad

$$1 - \tau\lambda \geqslant 0. \tag{4.4}$$

Kadangi $0 < \lambda < 4/h^2$, tai (4.4) prielaida bus visada teisinga, jei

$$\tau \leqslant \frac{h^2}{4}. \tag{4.5}$$

Taigi, tarkime, kad (4.5) nelygybė teisinga. Tada $\mu_1 > |\mu_2| > 0$.

Išnagrinėkime, kada bus teisinga nelygybė

$$\begin{aligned}\mu_1 = {} & \frac{1 + \frac{4\eta}{h^2} - (\tau + \eta)\lambda}{2\Big(1 + \frac{2\eta}{h^2}\Big)} + \\ & + \frac{\sqrt{(1 + \frac{4\eta}{h^2} - (\tau + \eta)\lambda)^2 - (\frac{2\eta}{h^2} - \eta\lambda)4(1 + \frac{2\eta}{h^2})}}{2\Big(1 + \frac{2\eta}{h^2}\Big)} < 1.\end{aligned} \tag{4.6}$$

(4.6) nelygybė ekvivalenti

$$\begin{aligned}1 + \frac{4\eta}{h^2} - (\tau + \eta)\lambda + \sqrt{\Big(1 + \frac{4\eta}{h^2} - (\tau + \eta)\lambda\Big)^2 - \Big(\frac{2\eta}{h^2} - \eta\lambda\Big)4\Big(1 + \frac{2\eta}{h^2}\Big)} < \\ < 2\Big(1 + \frac{2\eta}{h^2}\Big).\end{aligned} \tag{4.7}$$

Pastebėkime, kad (4.7) nelygybėje esantis pirmas dėmuo $1 + 4\eta/h^2 - (\tau + \eta)\lambda > 0$. Tai gauname dėl $0 < \lambda < 4/h^2$ ir dėl (4.5) prielaidos.

(4.7) nelygybę užrašykime tokiu būdu

$$\begin{aligned}\sqrt{\Big(1 + \frac{4\eta}{h^2} - (\tau + \eta)\lambda\Big)^2 - \Big(\frac{2\eta}{h^2} - \eta\lambda\Big)4\Big(1 + \frac{2\eta}{h^2}\Big)} < 2\Big(1 + \frac{2\eta}{h^2}\Big) - \\ - \Big(1 + \frac{4\eta}{h^2} - (\tau + \eta)\lambda\Big)\end{aligned}$$

ir pakelkime kvadratu

$$\begin{aligned}\Big(1 + \frac{4\eta}{h^2} - (\tau + \eta)\lambda\Big)^2 - \Big(\frac{2\eta}{h^2} - \eta\lambda\Big)4\Big(1 + \frac{2\eta}{h^2}\Big) < \\ < \bigg(2\Big(1 + \frac{2\eta}{h^2}\Big) - \Big(1 + \frac{4\eta}{h^2} - (\tau + \eta)\lambda\Big)\bigg)^2.\end{aligned}$$

Sutvarkę gauname

$$
\begin{aligned}
&(1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda)^2-(\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda)4(1+\frac{2\eta}{h^2})<\\
&<4\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big)^2-4\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big)\Big(1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda\Big)+\Big(1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda\Big)^2.
\end{aligned}
$$

Atlikime prastinimo veiksmus

$$
-(\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda)<1+\frac{2\eta}{h^2}-\Big(1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda\Big),
$$

tada

$$
-\frac{2\eta}{h^2}+\eta\lambda<1+\frac{2\eta}{h^2}-1-\frac{4\eta}{h^2}+\tau\lambda+\eta\lambda.
$$

Suprastinę gauname

$$
0<\tau\lambda.
$$

Kadangi nelygybė $\tau\lambda>0$ visada teisinga, tai (4.6) nelygybė irgi teisinga visada.

2. atvejis Tegul (4.3) lygybėje esantis pošaknis yra neigiamas. Tada abi šaknys μ_1 ir μ_2 yra kompleksiniai skaičiai.

Tada

$$
\begin{aligned}
|\mu_{1,2}|^2=(\mathrm{Re}\mu)^2+(\mathrm{Im}\mu)^2&=\frac{\Big(1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda\Big)^2}{\Big(2(1+\frac{2\eta}{h^2})\Big)^2}+\\
&+\frac{(\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda)4(1+\frac{2\eta}{h^2})-\Big(1+\frac{4\eta}{h^2}-(\tau+\eta)\lambda\Big)^2}{\Big(2(1+\frac{2\eta}{h^2})\Big)^2}=\frac{\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda}{1+\frac{2\eta}{h^2}}.
\end{aligned}
$$

Pastebėkime, kad skaitiklis, priklausomai nuo λ reikšmės gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas, todėl

$$
|\mu_{1,2}|^2<1
$$

yra ekvivalentu nelygybei

$$
\left|\frac{2\eta}{h^2}-\eta\lambda\right|<1+\frac{2\eta}{h^2}
$$

arba

$$-\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big) < \frac{2\eta}{h^2} - \eta\lambda < 1 + \frac{2\eta}{h^2}.$$

Išnagrinėkime gautą nelygybę.

Dešinėje pusėje esanti nelygybė

$$\frac{2\eta}{h^2} - \eta\lambda < 1 + \frac{2\eta}{h^2}$$

arba

$$-\eta\lambda < 1$$

yra teisinga visada.

Kairėje pusėje gauta nelygybė

$$-\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big) < \frac{2\eta}{h^2} - \eta\lambda \tag{4.8}$$

turi būti teisinga su visomis λ reikšmėmis. Paimkime blogiausią atvejį, kai dešinėje pusėje $\lambda = 4/h^2$, tada

$$-\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big) < \frac{2\eta}{h^2} - \frac{4\eta}{h^2}.$$

Gauname, kad

$$-\Big(1+\frac{2\eta}{h^2}\Big) < -\frac{2\eta}{h^2}.$$

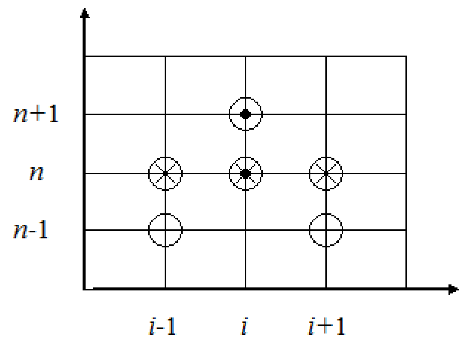
Ši nelygybė yra visada teisinga. Taigi ir (4.8) bus visada teisinga.

Vadinasi, jei $\lambda > 0$ ir $\tau \leqslant h^2/4$, tai $|\mu| < 1$. Iš to seka, kad skirtuminė schema (4.2) yra sąlyginai stabili.

5. Skaitiniai rezultatai

Šiame poskyryje pateiksime keletą skaitinių eksperimentų, kuriuos atlikome, taikydami išreikštines skirtumines schemas. Pirmiausia užrašysime diferencialinį pseudoparabolinį uždavinį, kuriame yra nelokalioji sąlyga. Nagrinėsime tiesinę pseudoparabolinę lygtį

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \eta\frac{\partial}{\partial t}\Big(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\Big) + f(x,t), \quad t \geqslant 0,\ 0 < x < 1 \tag{5.1}$$



4.1 pav. (4.2) skirtuminę schemą atitinkantis šablonas. ○ – išvestinės $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ aproksimavimo taškai.

su klasikine ir nelokaliąja sąlygomis

$$u(0,t) = \mu_1(t), \tag{5.2}$$

$$u(1,t) = \gamma \int_0^1 u(x,t)\mathrm{d}x + \mu_2(t) \tag{5.3}$$

ir pradine sąlyga

$$u(0,x) = \varphi(x). \tag{5.4}$$

5.1. Skaitiniai rezultatai (I)

Diferencialinę (5.1) lygtį užrašykime (4.2) skirtumine schema. Spręskime (4.2) skirtuminę lygtį su sąlygomis:

$$u_0^n = \mu_1^n, \ n = \overline{1, M}, \tag{5.5}$$

$$u_N^{n+1} = \gamma h\Big(\frac{u_0 + u_N}{2} + \sum_{i=1}^{N-1} u_i\Big), \tag{5.6}$$

$$u_i^0 = \varphi_i, \quad i = \overline{0, N}. \tag{5.7}$$

Atlikus skaitinį eksperimentą, įsitikinome, kad sprendinio paklaida ε yra tiesiogiai susijusi su dydžiu τ/h^2 (žr. į 4.1 lentelę). Iš rezultatų, pateiktų 4.1 lentelėje, galima pastebėti, kad mažinant žingsnius τ, h ir santykį τ/h^2 paklaida ε mažėja.

4.1 lentelė. (4.2) skirtuminės schemos paklaidos $\varepsilon = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1} |u(x_i,t_j) - u_i^j|$ reikšmės.

h	τ	$\frac{\tau}{h^2}$	ε
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{800}$	0.5	0.000524
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1600}$	0.25	0.000213
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{3200}$	0.125	0.0000623
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{6400}$	0.0625	0.0000179

Šioje lentelėje pateikiami skaičiavimo rezultatai, kai $T = 3.14,\ \eta = 0.1,\ \gamma = 1$, o diferencialinio uždavinio tikslus sprendinys yra $u(x,t) = x(x-l)\sin t$.

4.2 lentelė. (4.2) skirt.schem. paklaidos $\varepsilon = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1} |u(x_i,t_j) - u_i^j|$ priklausomybė nuo T.

T	ε
1.57	$4.2474 \cdot 10^{-4}$
3.14	$6.23 \cdot 10^{-5}$
6.28	$6.249 \cdot 10^{-5}$
12.56	$6.275 \cdot 10^{-5}$

Šioje lentelėje pateikiami skaičiavimo rezultatai, kai $h = 1/20, \tau = 1/3200,\ \eta = 0.1,\ \gamma = 1$, o diferencialinio uždavinio tikslus sprendinys yra $u(x,t) = x(x-l)\sin t$.

Paklaidos ε priklausomybė nuo T pateikta 4.2 lentelėje. Iš čia pastebime, kad naudojant bet kokias T reikšmes, paklaida artėja į nulį, o tai reiškia, kad skirtuminė išreikštinė schema yra stabili.

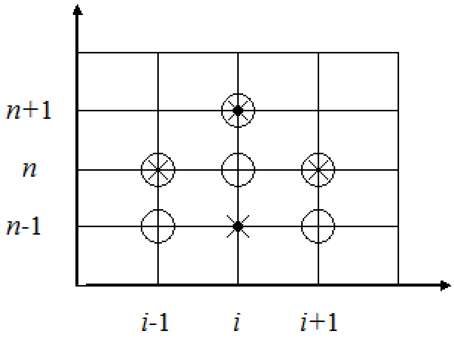
5.2. Skaitiniai rezultatai (II)

Imkime ir diferencialinę (5.1) lygtį užrašykime kiek kitokia skirtumine schema

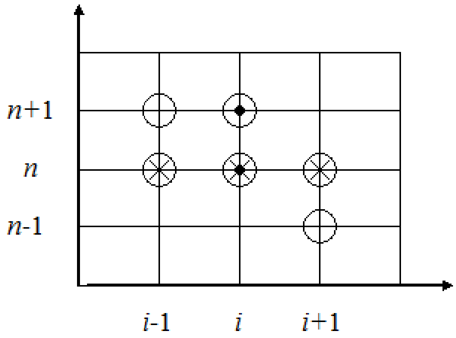
$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^{n-1}}{2\tau} = \frac{u_{i-1}^n - (u_i^{n+1} + u_i^{n-1}) + u_{i+1}^n}{h^2} + \frac{\eta}{\tau}\left(\frac{u_{i-1}^n - 2u_i^{n+1} + u_{i+1}^n}{h^2}\right) - \\ - \frac{\eta}{\tau}\left(\frac{u_{i-1}^{n-1} - 2u_i^n + u_{i+1}^{n-1}}{h^2}\right) + f_i^n. \tag{5.8}$$

Tokios skirtuminės schemos šablonas pavaizduotas 4.2 paveiksle.

Šiuo atveju spręsime (5.8) skirtuminę lygtį su sąlygomis (5.5)–(5.7). Atlikus skaitinį eksperimentą, pastebėjome, kad sprendinio paklaida ε taip pat yra



4.2 pav. (5.8) skirtuminę schemą atitinkantis šablonas. ◯ – išvestinės $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ aproksimavimo taškai.



4.3 pav. (5.9) skirtuminę schemą atitinkantis šablonas. ◯ – išvestinės $\frac{\partial}{\partial t}(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2})$ aproksimavimo taškai.

4.3 lentelė. (5.8) skirtuminės schemos paklaidos $\varepsilon = \max\limits_{1\leqslant i\leqslant N-1} |u(x_i,t_j) - u_i^j|$ reikšmės.

h	τ	$\frac{\tau}{h^2}$	ε
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{800}$	0.5	0.0012
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{1600}$	0.25	0.000517
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{3200}$	0.125	0.00021041
$\frac{1}{20}$	$\frac{1}{6400}$	0.0625	0.000060095

Šioje lentelėje pateikiami skaičiavimo rezultatai, kai $T = 3.14$, $\eta = 0.1$, $\gamma = 1$, o diferencialinio uždavinio tikslus sprendinys yra $u(x,t) = x(x-l)\sin t$.

tiesiogiai susijusi su dydžiu τ/h^2 (žr. į 4.3 lentelę).

Paklaidos ε priklausomybė nuo T pateikta 4.4 lentelėje. Pastebime, kad naudojant bet kokias T reikšmes, paklaida taip pat artėja į nulį.

5.3. Skaitiniai rezultatai (III)

Šiuo atveju diferencialinę (5.1) lygtį pakeiskime skirtumine schema pagal 4.3 paveiksle pavaizduotą šabloną.

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \frac{u_{i-1}^n - 2u_i^n + u_{i+1}^n}{h^2} + \\ + \frac{\eta}{h^2}\left(\frac{u_{i-1}^{n+1} - u_{i-1}^n}{\tau} - 2\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} + \frac{u_{i+1}^n - u_{i+1}^{n-1}}{\tau}\right) + f_i^n. \quad (5.9)$$

4.4 lentelė. (5.8) skirt.schem. paklaidos $\varepsilon = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |u(x_i, t_j) - u_i^j|$ priklausomybė nuo T.

T	ε
1.57	$5.9389 \cdot 10^{-4}$
3.14	$2.1041 \cdot 10^{-4}$
6.28	$2.1124 \cdot 10^{-4}$
12.56	$2.1289 \cdot 10^{-4}$

Šioje lentelėje pateikiami skaičiavimo rezultatai, kai $h = 1/20, \tau = 1/3200,\ \eta = 0.1,\ \gamma = 1$, o diferencialinio uždavinio tikslus sprendinys yra $u(x,t) = x(x-l)\sin t$.

4.5 lentelė. (5.9) skirt.schem. paklaidos $\varepsilon = \max\limits_{1 \leqslant i \leqslant N-1} |u(x_i, t_j) - u_i^j|$ priklausomybė nuo T.

T	ε
1.57	$5.9856 \cdot 10^{-4}$
3.14	$2.1185 \cdot 10^{-4}$
6.28	$2.1268 \cdot 10^{-4}$
12.56	$2.1435 \cdot 10^{-4}$

Šioje lentelėje pateikiami skaičiavimo rezultatai, kai $h = 1/20, \tau = 1/3200,\ \eta = 0.1,\ \gamma = 1$, o diferencialinio uždavinio tikslus sprendinys yra $u(x,t) = x(x-l)\sin t$.

Šiuo atveju spręsime (5.9) skirtuminę lygtį su sąlygomis (5.5)–(5.7). Atlikti skaičiavimai rodo, kad su šia išreikštine skirtumine schema galima taip pat sėkmingai skaičiuoti. Kaip ir prieš tai, (5.9) skirtuminės schemos sprendinio paklaida ε taip pat yra tiesiogiai susijusi su dydžiu τ/h^2.

Paklaidos ε priklausomybė nuo T pateikta 4.5 lentelėje. Įaudojant bet kokias T reikšmes, paklaida taip pat artėja į nulį.

6. Išvados

Trečiosios eilės pseudoparabolinei lygčiai negalima sudaryti dvisluoksnių išreikštinių skirtuminių schemų. Tačiau įvairiais būdais galima sudaryti trisluoksnes skirtumines schemas. Daugelis šių trisluoksnių išreikštinių skirtuminių schemų nėra stabilios. Specialiu būdu aproksimuojant trečiosios eilės išvestinę $\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\right)$ galima gauti sąlyginai stabilią trisluoksnę išreikštinę skirtuminę schemą su aproksimavimo paklaida $O(h^2 + \tau + \tau/h^2)$.

Bendrosios išvados

1. Skirtuminių schemų pseudoparabolinei lygčiai su nelokaliosiomis integralinėmis sąlygomis perėjimo matricos spektro struktūros tyrimas yra efektyvus skirtuminių schemų stabilumo tyrimo metodas.

2. Dvimatėms tiesinėms pseudoparabolinėms lygtims su nelokaliosiomis sąlygomis spręsti sėkmingai galima taikyti lokaliai vienmatį metodą.

3. Parabolinio tipo lygtims žinomi išreikštinių skirtuminių schemų sudarymo metodai paprastai netinka pseudoparabolinėms lygtims. Išreikštinės skirtuminės schemos pseudoparabolinėms lygtims, sudarytos kitu principu, yra stabilios.

Literatūros sąrašas

[1] B.I. Bandyrskii, I. Lazurchak, V.L. Makarov and M. Sapagovas. Eigenvalue problem for the second order differential equation with nonlocal conditions. *Nonlin. Anal. Model. Control.*, **11**:13–32, 2006.

[2] G. Barenblatt, V. Entov and V. Ryzhik. *Theory of Fluid Flow Through Natural Rocks.* Kluwer, Dordrecht, 1990.

[3] G.I. Barenblatt, Iv.P. Zheltov and I.N. Kochina. Basic concepts in the theory of seepage of homogeneous liquids in fissured rocs. *J. Appl. Math. Mech.*, **24**:1286–1303, 1960.

[4] T.B. Benjemin, J.L. Bona and J.J. Mahony. Model equations for long waves in nonlinear dispersive systems. *Phylosophical Transactions of the Royal Society in London.*

[5] G.K. Berikelashvili. On the convergence rate of the finite-difference solution of a nonlocal boundary value problem for a second-order elliptic equation. *Differ. Equ.*, **39**(7):896–903, 2003.

[6] M.Kh. Beshtokov. *Raznostnye metody reshenija nelokalnykh kraevykh zadach dlia psevdoparabolicheskykh uravnenij tret'ego poriadka.* Avtoreferat diss. kand. fiz.-mat. n., Moskva, MGU, 2009. (in Russian)

[7] A. Bouziani. Mixed problem with boundary integral conditions for a certain parabolic equation. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, **9**:323–330, 1996.

[8] A. Bouziani. On a third order parabolic equation with a nonlocal boundary condition. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, **13**:181–195, 2000.

[9] A. Bouziani. Solvability of nonlinear pseudoparabolic equation with nonlocal boundary condition. *Nonlin. Anal. Theor. Meth. Appl.*, **55**:883–904, 2003.

[10] A. Bouziani. Initial-boundary value problems for a class of pseudoparabolic equations with integral boundary conditions. *J. Math. Anal. Appl.*, **291**:371–386, 2004.

[11] A. Bouziani and N. Merazga. Solution to a semilinear pseudoparabolic problem with integral condition. *Elect. J. Diff. Equat.*, **115**:1–18, 2006.

[12] B. Cahlon, D.M. Kulkarni and P. Shi. Stepwise stability for the heat equation with a nonlocal constrain. *SIAM J. Numer. Anal.*, **32**(2):571–593, 1995.

[13] C. Cancès, C. Choqeut, Y. Fan and I.S. Pop. Existence of weak solutions to a degenerate pseudoparabolic equation modeling two-phase flow in porous media. *Eindhoven University of Technology, CASA Report*, pp. 10–75, 2010.

[14] J.R. Cannon. The solution of heat equation subject to the specification of energy. *Quart. Appl. Math.*, **21**:155–160, 1963.

[15] J.R. Cannon and Y.P. Lin. Classical and weak solutions for one-dimensional pseudo-parabolic equations with typical boundary data. *Annali di Mathematica Pura ed Applicata*, **152**(4):375–385, 1988.

[16] P.J. Chen and M.E. Gurtin. On a theory of heat conduction involving two temperatures. *Z. Angew. Math. Phys*, **19**:614–627, 1968.

[17] A.F. Chudnovskij. Nekotorye korrektivy v postanovke i reshenii zadach teplo-i vlagoperenosa v pochve (rusų kalba). *Sbornik trudov AFI*, **23**:41–54, 1969.

[18] A.F. Chudnovskij. *Teplofizika pochv (rusų kalba).* M. Nauka, 1976.

[19] R. Čiegis. Economical difference schemes for the solution of a two-dimensional parabolic problem with an integral condition. *Differ. Equations*, **41**(7):1025–1033, 2005.

[20] R. Čiegis. Parallel numerical algorithms for 3D parabolic problem with nonlocal boundary conditions. *Informatica*, **17**(3):309–324, 2006.

[21] R. Čiegis, A. Štikonas, O. Štikonienė and O. Subač. A monotonic finite-difference scheme for a parabolic problem with nonlocal conditions. *Differ.Equ.*, **38**(7):1027–1037, 2002.

[22] R. Čiupaila, Ž. Jesevičiūtė and M. Sapagovas. On the eigenvalue problem for one-dimensional differential operator with nonlocal integral conditions. *Nonlin. Anal. Model. Control.*, **9**:109–116, 2004.

[23] B.D. Coleman, R.J. Duffin and V.J. Mizel. Instability, uniqueness and non-existence theorems for the equation $u_t = u_{xx} - u_{xtx}$ on a strip. *Arch. Rational Mech. Anal.*, **19**:100–116, 1965.

[24] D.Q. Dai and Y. Huang. A moment problem for one-dimensional nonlinear pseudoparabolic equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **328**:1057–1067, 2007.

[25] D.Q. Dai and Y. Huang. Nonlocal boundary problems for a third-order one-dimensional nonlinear pseudoparabolic equation. *Nonlin. Anal.*, **66**:179–191, 2007.

[26] D.Q. Dai and W. Lin. Piecewise continuous solutions of nonlinear pseudoparabolic equations in two space dimensions. *Proc. Royal Soc. of Edinburg, Series A*, **121**:203–217, 1992.

[27] Q. Dai. The Riemann-Hilbert boundary value problem for semilinear pseudoparabolic equations. *Nonlin. Anal. Theory, Methods and Applications*, **23**(6):785–796, 1994.

[28] E. DiBenedetto and M. Pierre. On the maximum principle for pseudoparabolic equations. *Indiana Univ. Math. J.*, **30**:821–854, 1981.

[29] E. DiBenedetto and R.E. Showalter. Implicit degenerate evolution equations and applications. *SIAM J. Math. Anal.*, **12**:731–751, 1981.

[30] J. DouglasJr. and V.Thom´ ee D.N. Arnold. Superconvergence of a finite element approximation to the solution of a Sobolev equation in a single space variable. *Math. Comp.*, **36**:53–63, 1981.

[31] R.E. Ewing. Numerical solution of Sobolev partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **12**:345–363, 1975.

[32] R.E. Ewing. Time-stepping Galerkin methods for nonlinear Sobolev partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **15**:1125–1150, 1978.

[33] G. Fairweather and J.C. Lopez-Marcos. Galerkin methods for a semilinear parabolic problem with nonlocal boundary conditions. *Advanc. Comput. Math.*, **6**:243–262, 1996.

[34] Y. Fan and I.S. Pop. A class of pseudo-parabolic equations: existence, uniqueness of weak solutions, and error estimates for the Euler-implicit discretization. *Mathematical Methods in the Applied Sciences*, **34**(18):2329–2339, 2011.

[35] Y. Fan and I.S. Pop. Equivalent formulations and numerical schemes for a class of pseudo-parabolic equations. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, p. /in press, 2013.

[36] Y. Fan, I.S. Pop, C.J. van Duijn and L.A. Peletier. Travelling wave solution for some degenerate pseudo-parabolic equations. *CASA Report*, **10**(01):TU Eindhoven, 2010.

[37] W.H. Ford and T.W. Ting. Stability and convergence of difference approximations to pseudo-parabolic partial differential equations. *Math. of Comput.*, **27**(124):737–743, 1973.

[38] W.H. Ford and T.W. Ting. Uniform error estimates for difference approximations to nonlinear pseudo-parabolic partial differential equations. *SIAM J. Numer. Anal.*, **11**(1):155, 1974.

[39] H. Gu. Characteristic finite element methods for nonlinear Sobolev equations. *Appl. Math. Comput.*, **102**:51–62, 1999.

[40] A.V. Gulin, N.I. Ionkin and V.A. Morozova. Stability of a nonlocal two-dimensional finite-difference problem. *Diff. Equat.*, **37**(7):960–978, 2001.

[41] A.V. Gulin, N.I. Ionkin and V.A. Morozova. Stability criterion of difference schemes for the heat conduction equation with nonlocal boundary conditions. *Comput. Meth. Appl. Math.*, **6**:31–55, 2006.

[42] R. Helming, A. Weis and B. Wohlmuth. Dynamic capillary effects in heterogeneous porous media. *Computational Geosciences*, **11**:261–274, 2007.

[43] V.A. Il'in and E.I. Moiseev. Two dimensional nonlocal boundary value problem for Poisson's operator in differential and difference variants. (in russian). *Math. Model.*, **2**(8):132–156, 1990.

[44] G. Infante. Eigenvalues of some non-local boundary-value problems. *Proc. Edinburg Math. Soc.*, **46**:75–86, 2003.

[45] N.I. Ionkin. Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonclasical boundary conditions. *Differ. Uravn.*, **13**:1177–1182, 1977.

[46] J. Jachimavičienė. The finite-difference method for a third-order pseudoparabolic equation with integral conditions. *Differ. Equ. and Their Appl. (DETA'2009), Proc. Intern. Conf.*, pp. 49–58, 2009.

[47] J. Jachimavičienė, Ž. Jesevičiūtė and M. Sapagovas. The stability of finite-difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, **30**(9):988–1001, 2009.

[48] Ž. Jesevičiūtė and M. Sapagovas. On the stability of a finite-difference scheme for parabolic equations subject to integral conditions with applications to thermoelasticity. *Comput. Meth. Appl. Math.*, **8**:360–373, 2008.

[49] W. Jiang and M. Cui. Solving nonlinear singular pseudoparabolic equations with nonlocal mixed conditions in the reproducing kernel space. *Int. J. of Computer Mathematics*, **87**(15):3430–3442, 2010.

[50] E.I. Kaikina. Nonlocal boundary problems for a third-order one-dimensional nonlinear pseudoparabolic equation. *Nonlinear Anal.*, **67**:2839–2858, 2007.

[51] N.I. Kamynin. A boundary value problem in the theory of heat conduction with non classical boundary condition. *Th. Vychisl. Mat. Fiz.*, **43**:1006–1024, 1964.

[52] A.I. Kozhanov. On a nonlocal boundary value problem with variable coefficients for the heat equation and the Aller equation. *Differ. Equ.*, **40**:815–826, 2004.

[53] P. Lancaster. *Lambda-Matrices and Vibrating Systems.* Oxford, 1966.

[54] Y. Lin and Y. Zhou. Solving nonlinear pseudoparabolic equations with nonlocal conditions in reproducing kernel space. *Numer. Algorithms*, **52**(2):173–186, 2009.

[55] T. Liu, Y. Lin, M. Rao and J. Cannon. Finite element methods for Sobolev equations. *J. Comput. Math.*, **20**:627–642, 2002.

[56] S. Mesloub. On a nonlocal problem for a pluriparabolic equation. *Acta Sci. Math. (Szeged)*, **67**:203–219, 2001.

[57] S. Mesloub. A nonlinear nonlocal mixed problem for a second order pseudoparabolic equation. *J. Math. Anal. Appl.*, **316**:189–209, 2006.

[58] S. Mesloub and A. Bouziani. Mixed problem with a weighted integral condition for a parabolic equation with bessel operator. *J. Appl. Math. Stochastic Anal.*, **15**:291–300, 2002.

[59] A. Mikelić. A global existence result for the equations describing unsaturated flow in porous media with dynamic capillary psessure. *J. of Differential Equations*, **248**:1561–1577, 2010.

[60] A. Mikelić and H. Bruining. Analysis of model equations for stess-enhanced diffusion in coal layers. part i: existence of a weak solution. *SIAM J.on Mathematical Analysis*, **40**:1671–1691, 2008.

[61] A.M. Nakhushev. Boundary-value problems for foaded integro-differential equations of hyperbolic type and some of their applications to the prediction of ground moisture, (in russian). *Differen. Uravn.*, **15**(1):96–105, 1979.

[62] A.M. Nakhushev. On certain approximate method for boundary-value problems for differential equations and its applications in ground waters dynamics, (in russian). *Differen. Uravn.*, **18**(1):72–81, 1988.

[63] K. Orucoglu and S. Akhiev. The Riemann function for the third-order one-dimensional pseudoparabolic equation. *Acta Applicandae Mathematicae*, **53**(3):353–370, 1998.

[64] V. Padron. Effect of aggregation on population recovery modeled by a forward-backward pseudoparabolic equation. *Transactions of the American Mathematical Society*, **356**(7):2739–2756, 2004.

[65] S. Pečiulytė and A. Štikonas. Parabolinio uždavinio su nelokaliosiomis sąlygomis suvedimas į integralinę lygtį. *Informacinė visuomenė ir univeristetinės studijos*, pp. 246–250, 2004.

[66] M. Ptashnyk. Nonlinear pseudoparabolic equations as singular limit of reaction-diffusion equations. *Applicable Analysis*, **85**:1285–1299, 2006.

[67] M. Ptashnyk. Pseudoparabolic equations with convection. *IMA J. of Applied Mathematics*, **72**:912–922, 2007.

[68] A. Quarteroni. Fourrier spectral methods for pseudoparabolic equations. *SIAM J. on Numerical Analysis*, **24**(2):323–335, 1987.

[69] A.A. Samarskii. *Teoriya raznostnykh skhem (The Theory of Difference Schemes). (rusų kalba).* Moscow, Nauka, 1977.

[70] A.A. Samarskii and A.V. Gulin. *Chislennye metody (Numerical Methods). (rusų kalba).* Moscow, 1989.

[71] M. Sapagovas. The eigenvalue of some problems with a nonlocal condition. *Differ. Equ.*, **38**:1020–1026, 2002.

[72] M. Sapagovas. On stability of finite-difference schemes for one-dimensional parabolic equations subject to integral condition. *Zh. Obchys. Prykl. Mat.*, **92**:70–90, 2005.

[73] M. Sapagovas. Difference method of increased order of accuracy for the poisson equation with nonlocal conditions. *Differ. Equ.*, **44**(7):1018–1028, 2008.

[74] M. Sapagovas. On stability of finite difference schemes for nonlocal parabolic boundary value problems. *Lith. Math. J.*, **48**(3):339–356, 2008.

[75] M. Sapagovas. On the spectral properties of three-layer difference schemes for parabolic equations with nonlocal conditions. *Differential Equations*, **48**(7):1018–1027, 2012.

[76] M. Sapagovas, G. Kairytė, O. Štikonienė and A. Štikonas. Alternating direction method for a two-dimensional parabolic equation with a nonlocal boundary condition. *Math. Model. Anal.*, **12**(1):131–142, 2007.

[77] M. Sapagovas and A. Štikonas. On the structure of the spectrum of a differential operator with a nonlocal condition. *Differ. Equ.*, **41**(7):1010–1018, 2005.

[78] M. Sapagovas, A. Štikonas and O. Štikonienė. Alternating direction method for the Poisson equation with variable weight cofficients in the integral condition. *Differ. Equ.*, **47**(8):1163–1174, 2011.

[79] M. Sapagovas and O. Štikonienė. Alternating direction method for a mildly nonlinear elliptic equation with nonlocal integral condition. *Nonlinear Anal., Model. Control*, **16**(2):220–230, 2011.

[80] H. De Schepper and R. van Keer. On a variational approximation method for 2nd order eigenvalue problems in a multi-component domain with nonlocal transition conditions. *Numer. Funct. Anal. Optim.*, **19**:971–993, 1998.

[81] L.I. Serbina. *Nonlocal mathematical models of carrying over in water-bearing systems, (In Russian).* Moskva, Nauka, 2007.

[82] R.E. Showalter. Local regularity boundary values and maximum principles for pseudoparabolic equations. *Applicable Anal.*, **16**:235–241, 1983.

[83] R.E. Showalter and T.W. Ting. Pseudoparabolic partial differential equations. *SIAM J. Math. Anal.*, **1**:1–26, 1970.

[84] A. Štikonas. The Sturm-Liouville problem with a nonlocal boundary condition. *Lith. Math. J.*, **47**:336–351, 2007.

[85] T. Sun and D. Yang. The finite difference stream line diffusion methods for Sobolev equations with convection-domitated term. *Appl. Math. Comput.*, **125**:325–345, 2002.

[86] M.M. Tembotova. *Raznostnye metody reshenija nelokalnykh kraevykh zadach dlia modificirovannogo uravnenija vlagoperenosa s determinirovannymi i sluchainymi dannymi (rusų kalba).* Avtoreferat, Nalchik, 1999.

[87] T.W. Ting. A cooling process according to two temperature theory of heat conduction. *J. Math. Anal.*, **45**:23–31, 1974.

[88] V.A. Vodakhova. A boundary value problem with Nakhushev nonlocal condition for a certain pseudoparabolic moisture-transfer equation. *Differ. Uravn*, **18**:280–285, 1982.

[89] V.V. Voevodin and Ju.A. Kuznecov. *Matricy i Vychislenija (rusų kalba).* Nauka, Moscow, 1984.

[90] S. Yadong. The large time behaviour of spectral approximation for a class of pseudoparabolic viscous diffusion equation. *Acta Math. Sci.*, **27B**(1):153–168, 2007.

[91] M. Yang. Analysis of second order finite volume element methods for pseudo-parabolic equations in three spatial dimensions. *Appl. Math. Comput.*, **196**:94–104, 2008.

[92] M. Yang. L^2 error estimation of a quadratic finite volume element method for pseudo-parabolic equations in three spatial dimensions. *Appl. Math. Comput.*, **218**:7270–7278, 2012.

[93] N.I. Yurchuk. Mixed problem with an integral condition for certain parabolic equations. *Differential Equations*, **22**:1457–1463, 1986.

[94] O.S. Zikirov. On boundary-value problem for hyperbolic type equation on the third order. *Lith. Math. J.*, **47**(4):484–495, 2007.

Autorės publikacijos disertacijos tema

[A1] J. Jachimavičienė. Solution of a third-order pseudoparabolic equation with non-local integral conditions by a finite-difference method. *MII Preprintas*, **2008-39**, 2008.

[A2] J. Jachimavičienė. The finite-difference method for a third-order pseudoparabolic equation with integral conditions. *Differ. Equ. and Their Appl. (DETA'2009), Proc. Intern. Conf.*, pp. 49–58, 2009.

[A3] J. Jachimavičienė. Explicit difference schemes for pseudoparabolic equation with integral condition. *Liet. mat. rink. LMD darbai*, **53**:36–41, 2012.

[A4] J. Jachimavičienė and M. Sapagovas. Locally one-dimensional difference scheme for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions. *Lith. Math. J.*, **52**(1):53–61, 2012.

[A5] J. Jachimavičienė, Ž. Jesevičiūtė and M. Sapagovas. The stability of finite-difference schemes for a pseudoparabolic equation with nonlocal conditions. *Numer. Funct. Anal. Optimiz.*, **30**(9):988–1001, 2009.

Justina Jachimavičienė

PSEUDOPARABOLINĖS LYGTIES
SU NELOKALIOSIOMIS INTEGRALINĖMIS SĄLYGOMIS
SPRENDIMAS BAIGTINIŲ SKIRTUMŲ METODU

Daktaro disertacija

Fiziniai mokslai (P 000),
Matematika (01 P)

Justina Jachimavičienė

SOLUTION OF A PSEUDOPARABOLIC EQUATION
WITH NONLOCAL INTEGRAL CONDITIONS
BY THE FINITE DIFFERENCE METHOD

Doctoral Dissertation

Physical sciences (P 000),
Mathematics (01 P)