

**Vilniaus universitetas**  
**Matematikos ir informatikos fakultetas**  
**Matematinės statistikos katedra**

**Audrius Galinskis**

**Kravčiuko ir Čebyševo momentų palyginimas vaizdų analizėje**

**Darbo vadovas:** doc. dr. P. Vaitkus

**Recenzentas:** Prof. habil. dr. Algimantas Bikelis

**VILNIUS, 2007**

# TURINYS

1.	ĮVADAS.....	3
2.	KLASIKINIAI DISKRETŪS ORTOGONALŪS POLINOMAI .....	4
3.	KRAVČIUKO MOMENTAI .....	5
3.1.	KRAVČIUKO POLINOMAI.....	5
4.	ČEBYŠEVO MOMENTAI .....	14
4.1.	ČEBYŠEVO POLINOMAI.....	14
4.2.	ČEBYŠEVO MOMENTAI.....	15
4.3.	ČEBYŠEVO MOMENTŲ SAVYBĖS.....	17
4.3.1.	SIMETRIJA .....	17
4.3.2.	REKURENTINIS RYŠYS $x$ ATŽVILGIU .....	18
4.4.	RADIALINIAI ČEBYŠEVO INVARIANTAI .....	18
4.4.1.	RADIALINIAI MOMENTAI .....	19
5.	PRAKTINĖ DALIS .....	21
5.1.	VAIZDŲ ATSTATYMAS .....	21
5.1.1.	VAIZDO DALIES ATSTATYMAS .....	27
5.2.	MOMENTŲ INVARIANTAI.....	28
5.3.	POLINOMŲ NAUDOJIMAS TRIUKŠMO MAŽINIMUI.....	32
5.4.	KITI TAIKYMO PAVYZDŽIAI.....	36
6.	DARBO APIBENDRINIMAS .....	37
7.	ATEITIES DARBAI.....	38
8.	SUMMARY .....	39
	LITERATŪROS SĄRAŠAS.....	40
	PRIEDAS 1 .....	42
	PRIEDAS 2 .....	43
	PRIEDAS 3 .....	44
	PRIEDAS 4 .....	45
	PRIEDAS 5 .....	46

# 1. Įvadas

Matematinė momentų koncepcija jau senai naudojama nuo mechanikos ir statistikos iki vaizdų atpažinimo ir analizės. Pirmas ir vienas svarbiausių darbų apie momentų taikymą vaizdų atpažinime buvo atlikta Hu [6]. Jis iš algebrinių invariantų metodo gavo rinkinį iš septynių momentų invariantų, naudodamas ne tiesines geometrinių momentų kombinacijas. Šie invariantai nekinta sukiojant, didinant, mažinant vaizdą. Nuo tada momentai ir momentų funkcijos plačiai naudojami vaizdų atpažinime, laivų, lėktuvų identifikavime. Deja, geometrinių momentų funkcija yra ne ortogonalė, todėl vaizdų rekonstrukcija yra gana sudėtinga ir reikalauja momentų atitikimo metodo [20]. Palyginus neseniai Mukundan [18] pristatė diskrečius ortogonaluosius momentus, pagrįstus Čebyševio polinomais. Kita klasė diskrečių ortogonalųjų momentų pagrįsta diskrečiais Kravčiuko polinomais [8].

Šiame darbe apžvelgsiu Kravčiuko ir Čebyševio polinomus, jų momentus ir momentų invariantus, bei jų panaudojimą praktiškai vaizdų analizėje. Bet kokį vaizdą – paveikslėlį, nuotrauką, galima užkoduoti skaičių matrica, kurios elementai koduos vaizdo spalvas. Turint juodai-baltą vaizdą, matricos elementai bus 1 ir 0. Turint vaizdą su pilkais atspalviais (ang. greyscale) matricos elementai įgis reikšmes nuo 0 iki 256. Taigi diskrečių polinomų pagalba, vaizdus galima užkoduoti. Taip gaunama mažesnio dydžio matrica, kurią galima vėl atstyti iki pirminio vaizdo. Užkodavus vaizdą iki mažesnio dydžio lengvesnė tampa vaizdų analizė, klasifikavimas. Momentų invariantai naudojami vaizdų atpažinimui. Paėmus keletą pirmųjų eilių invariantų galima tiksliai nusakyti visa vaizdą. Taigi šiame darbe iš pradžių apžvelgsiu Kravčiuko ir Čebyševio polinomus iš teorinės pusės. Kitoje darbo dalyje parodysiu praktinį taikymą:

- vaizdų kodavimą;
- vaizdų atstatymą;
- vaizdų atpažinimą.

Ir paskutinėje dalyje atliksiu aukščiau pateiktų darbų palyginimą naudojant Kravčiuko bei Čebyševio polinomus.

## 2. Klasikiniai diskretūs ortogonalūs polinomial

Diskretūs ortogonalūs polinomial, tai polinomų klasė, kurie tenkina sąlygą:

$$\int_a^b \rho(x) P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m, \quad (2.1)$$

Čia  $\rho(x)$  - svorio funkcija, o  $\delta_{nm}$  - Kronekerio delta, apibrėžiama

$$\delta_{nm} = \begin{cases} 1, & n = m \\ 0, & n \neq m \end{cases}$$

Kai  $\rho(x) > 0$ , tai polinomial netik ortogonalūs bet ir ortonormuoti.

Matematinis vaizdų atstatymo pagrindas yra ši teorema.

Teorema. Jei  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  yra diskrečių ortogonalinių polinomų rinkinys su svoriu  $\rho(x)$  ir tenkinantis sąlygą (2.1), tai bet kokią aprėžtą funkciją  $f(x)$ ,  $g(x)$  galima išreikšti:

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n P_n(x), \quad g(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n P_n(x), \quad (2.2)$$

kur koeficientai  $a_n$  yra:

$$a_n = \frac{\int_a^b \rho(x) f(x) P_n(x) dx}{\int_a^b \rho(x) P_n^2(x) dx}, \quad (2.3)$$

Čia  $\int_a^b \rho(x) P_n^2(x) dx$ .

Diskrečių ortogonalinių polinomų  $\{P_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$  ant taškų  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  ortogonalumo sąlyga:

$$P_n(x_k) P_m(x_k) = 0, \quad n \neq m, \quad (2.4)$$

čia  $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$  - Pochhamerio simbolis.

Klasikiniai diskretūs ortogonalūs polinomial – Kravčiuko, Čebyševo, Čarlier, Meiksnerio, Hano polinomial. Šiame darbe, kaip jau ir minėta pradžioje, bus apžvelgti pirmieji du - Kravčiuko, Čebyševo polinomial.

### 3. Kravčiuko momentai

Kravčiuko momentai yra momentų rinkiniai suformuoti naudojant Kravčiuko polinomus kaip pagrindinę funkciją. Kravčiuko polinomiali buvo pristatyti Michailo Kravčiuko 1929 m. kaip polinomiali susiję su binominiu skirstiniu. Šioje dalyje bus aptarti Kravčiuko ir svertiniai Kravčiuko polinomiali, taip pat Kravčiuko momentai ir momentų invariantai.

#### 3.1. Kravčiuko polinomiali

Apibrėšiu  $n$ -tos eilės Kravčiuko polinomą:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n a_{n,k} x^k \tag{3.1}$$

čia  $a_{n,k}$  yra hipergeometrinė funkcija, apibrėžiama:

$$a_{n,k} = \frac{(-n)_k (n-k)!}{k! (n-k)!} \tag{3.2}$$

Kravčiuko polinomų rinkinys  $\{P_n(x)\}$  tenkina ortogonalumo sąlygą:

$$\int_{-1}^1 P_n(x) P_m(x) dx = 0, \quad n \neq m \tag{3.3}$$

o  $P_n(x)$ . Svoriai  $w_n$  pasiskirstę pagal binominį skirstinį ir

$$w_n = \binom{n}{k} \tag{3.4}$$

##### 3.1.1. Kravčiuko polinomų skaičiavimo pavyzdžiai

Iš (3.1) ir (3.2) gaunu:

$$P_n(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(-n)_k (n-k)!}{k! (n-k)!} x^k \tag{3.5}$$

o  $P_n(x)$  ir  $w_n$ . Todėl

$$\text{Kai } \boxed{\phantom{0}}: \quad \boxed{\phantom{0}} \quad (3.6)$$

$$\text{Kai } \boxed{\phantom{0}}: \quad \boxed{\phantom{0}} \quad (3.7)$$

$$\text{Kai } \boxed{\phantom{0}}: \quad \boxed{\phantom{0}} \quad (3.8)$$

$$\text{Kai } \boxed{\phantom{0}}: \quad \boxed{\phantom{0}} \quad (3.9)$$

### 3.1.2. Svertiniai Kravčiuko polinomial

Norint palengvinti momentų skaičiavimus, polinomial yra normuojami. Normuoti Kravčiuko polinomial:

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (3.10)$$

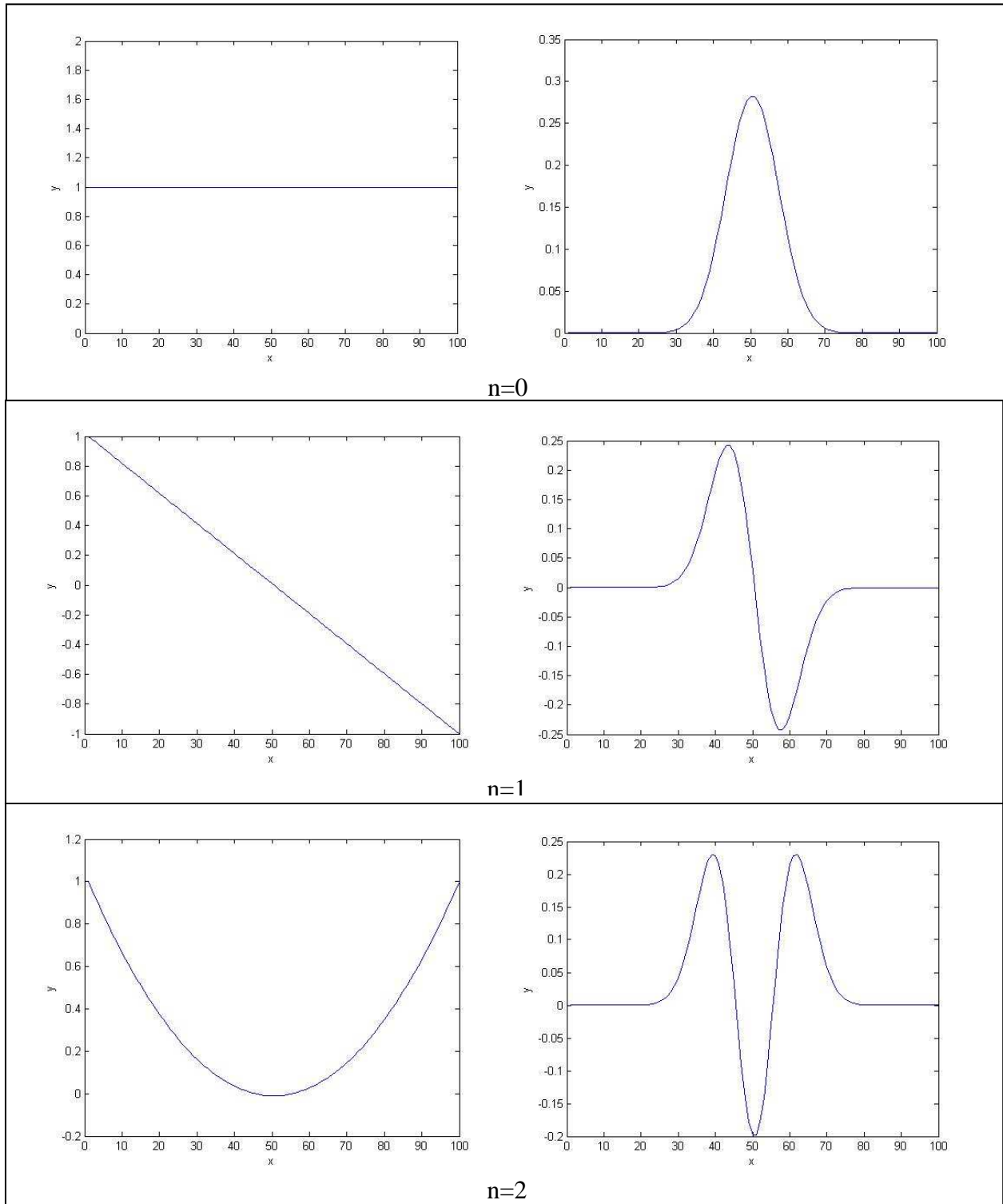
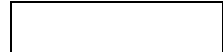
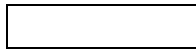
Tačiau šito neužtenka norint išvengti skaitinio stabilumo. Todėl yra naudojami svertiniai Kravčiuko polinomial  $\boxed{\phantom{0}}$ :

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (3.11)$$

Taigi ortogonalumo sąlyga (2.1) pasikeičia į:

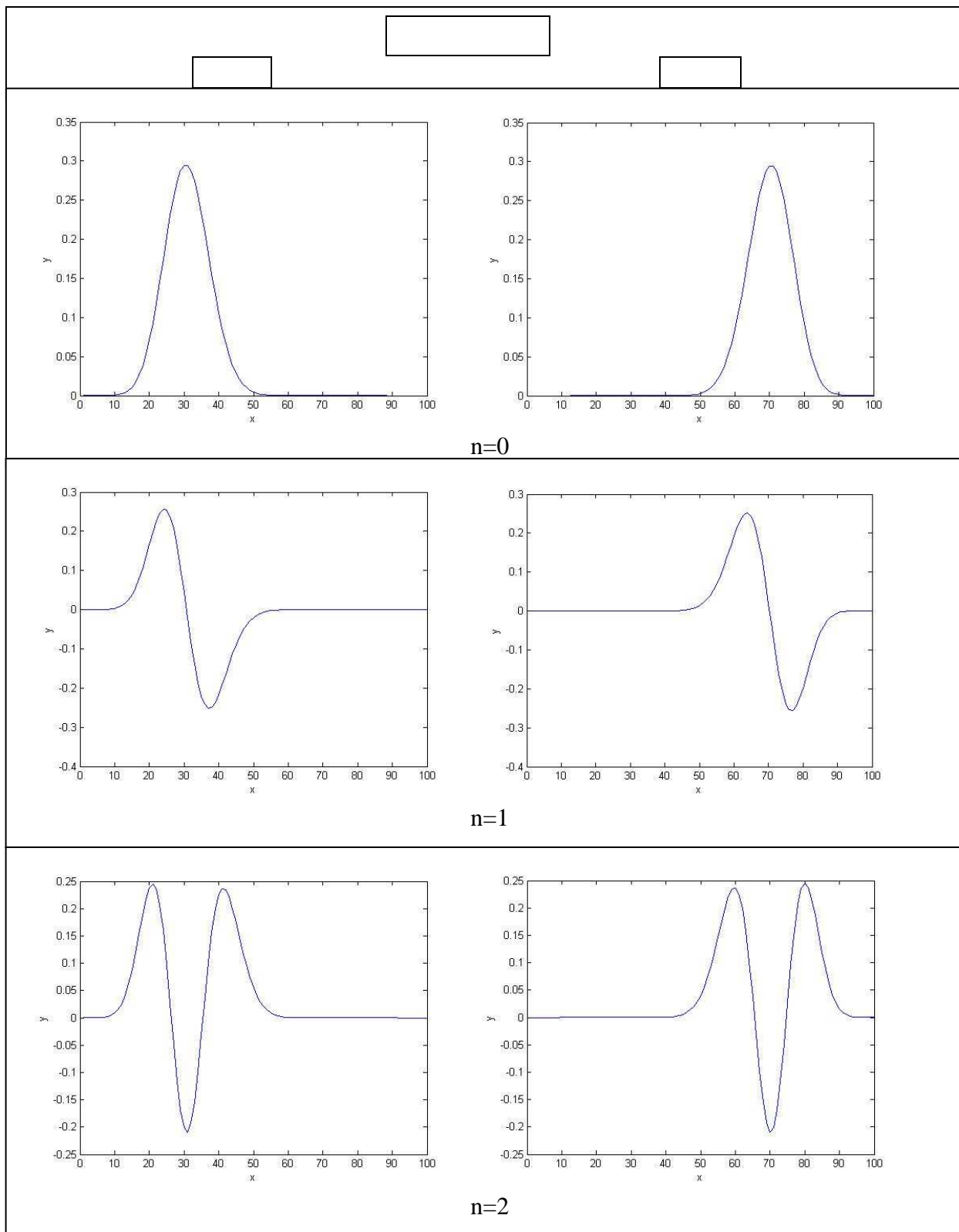
$$\boxed{\phantom{0}} \quad (3.12)$$

iš ko seka, kad  $\boxed{\phantom{0}}$  - ortogonalūs ortonormuoti polinomial.



**Paveikslas 1. Kravčenko polinomial (paprasti ir svertiniai), kai  $p=0,5$ ,  $N=100$**

Iš paveikslė 1 matosi, kad Kravčenko polinomial reikšmės priklauso intervalui . Pav. 2 matome svertinial Kravčenko polinomial grafikus, esant skirtingoms  $p$  reikšmėms. Matome, kad  $p$  reikšmei



**Paveikslas 2. Svertinių Kravčiuko polinomų palyginimas kai  $p=0,3$  ir  $p=0,7$ ,  $N=100$**

keičiantis nuo 0,5 per , tai yra , svertiniai Kravčiuko polinomi apytiksliai pasislenka . Poslinkio kryptis priklausys nuo  ženklo. Ši savybė bus svarbi nagrinėjant atskirus vaizdo regionus.



### 3.2. Kravčiuko momentai

Kravčiuko momentai, kurių eilė  $\{m_k\}$ , vaizdai su intensyvumu (tankio) funkcija<sup>1</sup>  $f(x)$  yra apibrėžiami taip:

$$m_k = \int_{-\infty}^{\infty} x^k f(x) dx \quad (3.13)$$

čia vaizdo dydis yra  $L$  taškų. Kravčiuko momentas, kai  $m_0$  yra vaizdo svertinė masė:

$$m_0 = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) dx \quad (3.14)$$

Sprendžiant lygybes (3.13) ir (3.14)  $\{m_k\}$  atžvilgiu, vaizdo tankio funkcija gali būti perrašyta per Kravčiuko momentus, t.y.

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{m_k}{k!} \left(\frac{x}{L}\right)^k \quad (3.15)$$

Taigi (3.15) Kravčiuko polinomiali yra padauginami iš svorio – Kravčiuko momentų. Taigi naudojant šią lygybę galima atstatyti vaizdą. Žemesniųjų eilių Kravčiuko momentai saugo informaciją apie pasirinktą vaizdo dalį (šią dalį pasirenkame, rinkdamiesi  $p$  reikšmes), tuo tarpu aukštesniųjų eilių momentai saugo informaciją apie likusią vaizdo dalį. Taigi mes galime pasirinkti mus dominančią vaizdo sritį. Vaizdo atstatyme naudojant žemesniųjų eilių momentus ir nekreipiant dėmesio į aukštesniuosius momentus, gautume mus dominančią vaizdo sritį iš viso vaizdo. Taip pat galima parodyti, kad vaizdo atstatyme naudojant kiekvieną papildomą momentą, atstatytojo vaizdo kvadratinė klaida mažėja, tai yra:

$$E = \int_{-\infty}^{\infty} (f(x) - \sum_{k=0}^p \frac{m_k}{k!} \left(\frac{x}{L}\right)^k)^2 dx \quad (3.16)$$

čia  $E$  – kvadratinė klaida,  $m_{p+1}$  – papildomas momentas. Taigi, vaizdo atstatyme naudojant visus momentus, mes gausime pirminį vaizdą be jokių praradimų.

<sup>1</sup> Vaizdo tankio funkcija – tai skaičių matrica, kurios kiekvienas elementas atitinka vaizdo taško spalva. Esant juodai-baltam vaizdai, juodą spalva atitiks 0, baltą – 1.

### 3.2.1. Kravčiuko momentų invariantai

Vaizdo su intensyvumo funkcija  $I(x, y)$  geometriniai momentai yra apibrėžiami naudojant diskrečių sumų aproksimaciją [6]:

$$M_{pq} = \sum_x \sum_y x^p y^q I(x, y) \quad (3.17)$$

Tada standartiniai geometrinių momentų invariantai, kurie bus nepriklausomi nuo posūkio, postūmio ir mastelio, gali būti užrašyti kaip

$$\mu_{pq} = \frac{M_{pq}}{M_{00}^{p+q+1}} \quad (3.18)$$

čia

$$M_{00} = \sum_x \sum_y I(x, y) \quad (3.19)$$

$$M_{10} = \sum_x \sum_y x I(x, y) \quad (3.20)$$

$$M_{01} = \sum_x \sum_y y I(x, y) \quad (3.21)$$

$$M_{20} = \sum_x \sum_y x^2 I(x, y) \quad (3.22)$$

o  $\mu_{10}$  - centriniai momentai [6]:

$$\mu_{10} = \frac{M_{10}}{M_{00}} \quad (3.23)$$

Normuoto atvaizdžio  $\mu_{pq}$  Kravčiuko momentai gali būti užrašyti per geometrinius momentus:

$$\mu_{pq} = \frac{M_{pq}}{M_{00}^{p+q+1}} \quad (3.24)$$

čia  $\mu_{10}$  koeficientai gauti iš (3.1). Be to (3.24) yra geometrinių momentų  $M_{10}$ , kurių eilės  $M_{20}$  ir  $M_{01}$ , tiesinė kombinacija su svoriais  $\mu_{10}$ . Dar reikia atkreipti dėmesį į tai, kad

išraiška (3.24) transformuoja neortogonalius geometrinius momentus į ortogonalius Kravčiuko momentus. Taip pat, normuotas vaizdas pagal (3.18) nepatenka į vidų matricos  $\square$ , kaip kad reikalauja Kravčiuko momentai, todėl invariantai yra modifikuojami [8].

$$\square \tag{3.25}$$

Naują momentų rinkinį galima gauti geometrinius momentus  $\square$  pakeitus invariantų dalimis  $\square$ . Iš (3.24) gauname:

$$\square \tag{3.26}$$

Reikia atkreipti dėmesį, kad naujas momentų rinkinys yra invariantiškas posūkiui, postūmiui ir masteliui. Taigi, dabar galima užrašyti keletą pirmųjų Kravčiuko momentų invariantų [8]:

$$\square \tag{3.27}$$

čia  $\square$ .

$\square$

### 3.3. Kravčiuko momentų skaičiavimas

Šioje dalyje bus aptartas Kravčiuko momentų skaičiavimas. Skaičiavimui naudojama rekurentinė formulė, kuri padeda išvengti skaitinio nestabilumo. Taip pat svarbi simetriškumo savybė, kuri padės sutaupyti skaičiavimo laiką ir vietą informacijos saugojimui. Ir taip pat bus aptartas vaizdo kodavimas bei atkodavimas.

### 3.3.1. Rekurentinis ryšys

Norint sutaupyti skaičiavimui skirtą laiką, taip pat taupant kompiuterio resursus reikia išnaudoti rekurentinį ryšį. Svarbiausia, rekurentinis ryšys padės išvengti arba sumažinti skaitinį nestabilumą, nes skaičiuojant Kravčiuko polinomus, momentus ne kartą reikia skaičiuoti gama ir hipergeometrines funkcijas. Svertinių Kravčiuko polinomų rekurentinė formulė  $n$  (polinomo eilės) atžvilgiu:

$$\boxed{\hspace{15cm}} \quad (3.28)$$

kur

$$\boxed{\hspace{10cm}}$$

su pradinėmis sąlygom

$$\boxed{\hspace{10cm}}$$

Rekurentinė formulė paprastiems Kravčiuko polinomams  $\boxed{\hspace{2cm}}$  bus tokia pati kaip (3.28), kai  $\boxed{\hspace{2cm}}$ . Analogiškai svoriai (3.4) taip pat gali būti skaičiuojami rekurentiškai:

$$\boxed{\hspace{15cm}} \quad (3.29)$$

kur

$$\boxed{\hspace{10cm}}$$

### 3.3.2. Simetrijos savybės

Iš Kravčiuko polinomo apibrėžimo, t.y. iš (3.1) ir (3.2) matome, kad Kravčiuko polinomai yra simetriški  $x$  ir  $n$  atžvilgiu. Jei pažymėtume  $\dots$ , o  $\dots$ , kur  $\dots$ ,  $\dots$ , tai tada dėl simetrijos gauname, kad  $\dots$ . Iš šito seka, kad vietoj  $\dots$  elementų, skaičiuoti reikia tik  $\dots$ . Ši simetrija teisinga bet kokiam  $\dots$ , bet galioja tik paprastiems Kravčiuko polinomams, nes svertiniai Kravčiuko polinomai nėra simetriški  $x$  ir  $n$  atžvilgiu. Žinant šią simetriją, rekurentinę formulę (3.28) galima perrašyti ir  $x$  atžvilgiu.

Dar viena simetriškumo savybė galioja esant specialiam atvejui, t.y.  $\dots$ . Ši savybė galioja svertiniams Kravčiuko polinomams ir ji yra tokia:

$$\dots \tag{3.30}$$

Šiuo atveju skaičiavimai dar labiau sumažėja ir bereikia skaičiuoti tik polinomus kai  $\dots$ .

### 3.3.3. Matricinė forma

Matricinėje formoje Kravčiuko momentų matrica  $Q$  bus lygi:

$$\dots \tag{3.31}$$

kur

$$\dots$$

Tada, rekonstruotas vaizdas:

$$\dots \tag{3.32}$$

Matricinės formos labai palengvina skaičiavimus taikant įvairius skaičiavimo paketus, tokius kaip MATLAB.

## 4. Čebyševio momentai

### 4.1. Čebyševio polinomai

Diskretūs Čebyševio polinomai [2], [5] apibrėžti:

$$\boxed{\phantom{P_n(x)}} \quad (4.1)$$

kur  $\boxed{\phantom{P_n(x)}}$  - Pochamerio simbolis, o  $\boxed{\phantom{P_n(x)}}$  - apibendrinta hipergeometrinė funkcija:

$$\boxed{\phantom{P_n(x)}} \quad (4.2)$$

Naudojant šiuos apibrėžimus, (4.1) gali būti užrašytas:

$$\boxed{\phantom{P_n(x)}} \quad (4.3)$$

Čebyševio polinomai yra ortogonalūs ir tenkina savybę (2.1) su  $\boxed{\phantom{P_n(x)}}$ , dėl ko jie dažnai pasirenkami dėl paprastumo skaičiuojant. Taigi gaunu:

$$\boxed{\phantom{P_n(x)}} \quad (4.4)$$

o kvadratinė norma:

$$\boxed{\phantom{P_n(x)}} \quad (4.5)$$

Čebyševio polinomai turi tokį rekurentinį ryšį:

$$\boxed{\phantom{P_n(x)}} \quad (4.6)$$

Su pradinėmis sąlygom:

$$\boxed{\phantom{P_n(x)}}$$

Toks polinomų rinkinys nėra tinkamas aprašyti momentams, nes  $\boxed{\phantom{P_n(x)}}$  reikšmė auga kaip  $\boxed{\phantom{P_n(x)}}$ , o momentai  $\boxed{\phantom{P_n(x)}}$  augtų kaip  $\boxed{\phantom{P_n(x)}}$ . Todėl reikia naudoti svertinius Čebyševio polinomus.

## 4.2. Čebyševio momentai

Svertiniai Čebyševio polinomialai :

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (4.7)$$

kur  $\boxed{\phantom{0}}$  -  $n$ -tosios eilės diskretus Čebyševio polinomas, o  $\boxed{\phantom{0}}$  - konstanta, nepriklausanti nuo  $x$ . Atlikus šią transformaciją, gauname kvadratinę normą:

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (4.8)$$

Apibrėšiu Čebyševio momentus:

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (4.9)$$

O atvirkštinė momentų transformacija:

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (4.10)$$

$\boxed{\phantom{0}}$  dažniausiai yra funkcija nuo  $N$ , auganti  $\boxed{\phantom{0}}$  greičiau. Taip pat svarbu  $\boxed{\phantom{0}}$  parinkti taip, kad būtų išvengta skaitinio nestabilumo. Paprasčiausias, bet ne prasčiausias  $\boxed{\phantom{0}}$  yra:

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (4.11)$$

Tokiu atveju svertinių polinomų rekurentinė formulė bus:

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (4.12)$$

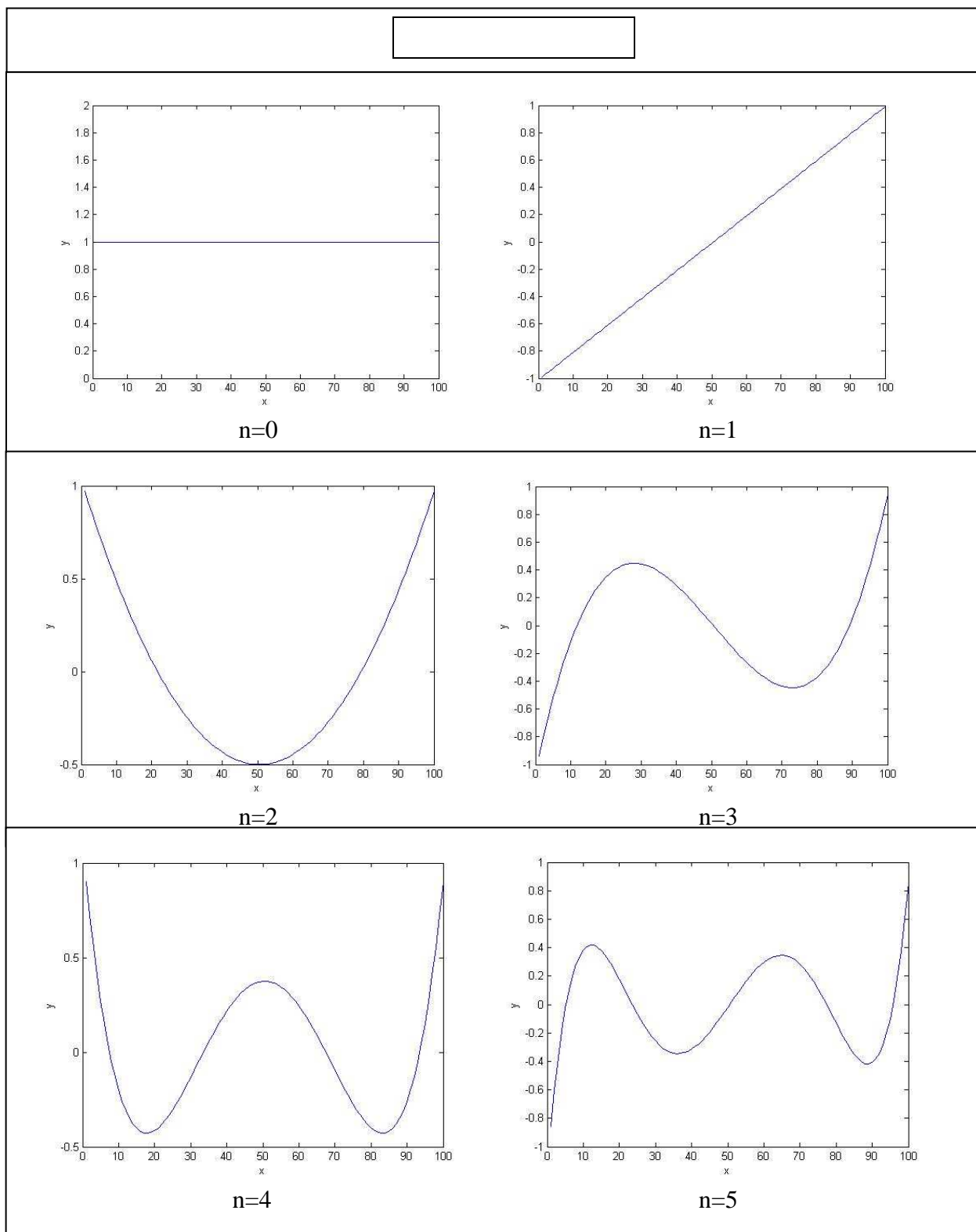
Pradinės sąlygos taip pat keičiasi:

$$\boxed{\phantom{0}}$$

bei

$$\boxed{\phantom{0}} \quad (4.13)$$

Pav. 3 galima pamatyti, kaip kinta ir kuo skiriasi svertiniai Čebyševio polinomialai didėjant eilei.



**Paveikslas 3. Svertinių Čebyševio polinomų grafikai, kai  $N=100$ .**

Kitos galimos  išraiškos gali būti tokios:

- . Šiuo atveju svertiniai polinomi tenkins tokias savybes:



[ ]

- [ ] Šis pasirinkimas veda prie lygybės:

[ ]

- [ ] Šis pasirinkimas taip pat patogus, nes tokiu atveju

[ ]

Pasinaudojus (4.7)-(4.10) galima nesunkiai įrodyti, kad rekonstruoto vaizdo intensyvumo funkcija nepriklauso nuo [ ] parinkimo.

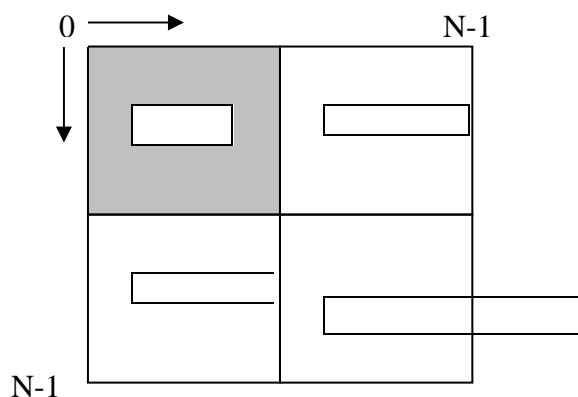
### 4.3. Čebyševų momentų savybės

#### 4.3.1. Simetrija

Kaip ir šnekėta anksčiau, simetrija labai padeda pagreitinti polinomų skaičiavimą. Svertiniai Čebyševų turi tokią pačią simetrijos savybę kaip ir klasikiniai Čebyševų polinomi, t.y. tenkina:

$$[ ] \tag{4.14}$$

Turint [ ] ( $N$  lyginis) dydžio vaizdą ir jį padalinus į lygias keturias dalis, užtenka skaičiuoti tik pirmojo ketvirčio polinomus, tai yra kai [ ]



Paveikslas 4. Simetrijos schema.

Čebyševų momentų išraišką (4.9) galima pakeisti į:

$$\boxed{\phantom{\text{rekonstrukcijos formulė (4.10) galima perrašyti į:}}}$$

(4.15)

O rekonstrukcijos formulę (4.10) galima perrašyti į:

$$\boxed{\phantom{\text{rekonstrukcijos formulė (4.10) galima perrašyti į:}}}$$

(4.16)

### 4.3.2. Rekurentinis ryšys $x$ atžvilgiu

$x$  atžvilgiu polinomiali  $\boxed{\phantom{\text{polinomiali}}}$  turi tokį rekurentinį ryšį [2]:

$$\boxed{\phantom{\text{rekurentinis ryšys}}}$$

(4.17)

Pradinės šio ryšio sąlygos gali būti gautos iš lygybių:

$$\boxed{\phantom{\text{pradinės sąlygos}}}$$

(4.18)

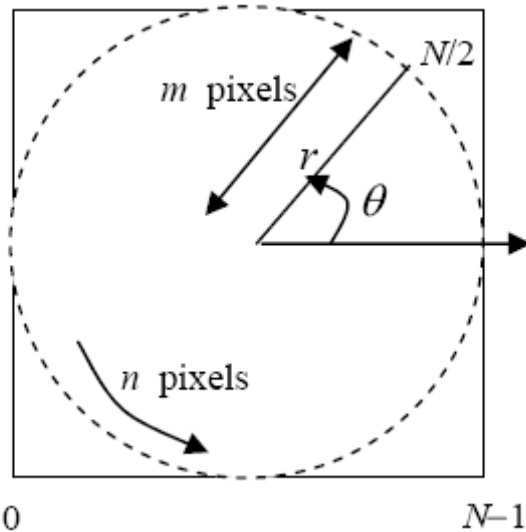
## 4.4. Radialiniai Čebyševio invariantai

Norint, kad Čebyševio momentai būtų invariantiški vaizdo posūkiui reikės transformuoti koordinačių sistemą. Tokiu būdu bus gauti pristatysiu radialinius Čebyševio momentus [17]. Po to seks skyrelis apie invariantus, kurių pagalba bus galima nesunkiai atpažinti net pasuktą ar apverstą vaizdą.

### 4.4.1.Radialiniai momentai

Radialiniams momentams sudaryti reikia polinių koordinačių sistemos  $[ ]$ . Vaizdo intensyvumo funkciją transformuojame į  $[ ]$ . Taigi, tegu  $[ ]$ , o kampas  $[ ]$  kinta nuo 0 iki  $[ ]$  per  $n$  žingsnių (žiūrėti į pav. 4):

$$[ ] \tag{4.19}$$



**Paveikslas 5. Radialiniai Čebyševio momentai.**

$p$ -tosios eilės ir  $q$  kartotinumų radialiniai Čebyševio momentai apibrėžiami:

$$[ ] \tag{4.20}$$

čia  $[ ]$  -  $p$ -tosios eilės svartiniai Čebyševio polinomi (4.12), kur  $[ ]$ ,  $[ ]$ ,  $[ ]$  yra duotas ir lygus (4.19),  $[ ]$ , o  $n$  nusako maksimalų taškų skaičių, kurie sudaro apskritimą, kurį brėžia  $r$  ilgio spindulys (žiūrėti į pav. 4). Atvirkštinė momentų transformacija bus tokia:

$$[ ] \tag{4.21}$$

kur  $p_{max}$  ir  $q_{max}$  – skaičiai, reiškiantys maksimalią polinomų eilę ir kartotinumą. Realiosios Čebyševio momentų dalys gaunamos iš (4.20):

$$[ ] \tag{4.22}$$



## 5. Praktinė dalis

Šioje darbo dalyje bus aptartas ir parodytas praktinis teorijos taikymas. Ši dalis bus padalinta į dvi mažesnes: vaizdų atstatymas ir vaizdų atpažinimas. Vaizdų atstatymas parodys kaip gerai momentai gali reprezentuoti vaizdą. Norint įvertinti vaizdo atstatymą įvedu atstatymo klaidos dydį. Šis dydis nusakys klaidą tarp pradinio vaizdo su tankiu  $I(x,y)$  ir atstatyto vaizdo su tankio funkcija  $\hat{I}(x,y)$ :

$$\text{klaidos dydis} = \frac{\int \int |I(x,y) - \hat{I}(x,y)|^2 dx dy}{\int \int I(x,y)^2 dx dy} \quad (4.1)$$

Jei vaizdas yra juodai-baltas, t.y.  $I(x,y) \in \{0,1\}$ , tai

$$\text{klaidos dydis} = \frac{\int \int |I(x,y) - \hat{I}(x,y)| dx dy}{\int \int I(x,y) dx dy} \quad (4.2)$$

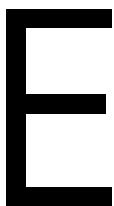
kur  $\hat{I}(x,y)$  yra slenkstinė funkcija:

$$\hat{I}(x,y) = \begin{cases} 1 & \text{jei } I(x,y) \geq T \\ 0 & \text{jei } I(x,y) < T \end{cases} \quad (4.3)$$

### 5.1. Vaizdų atstatymas

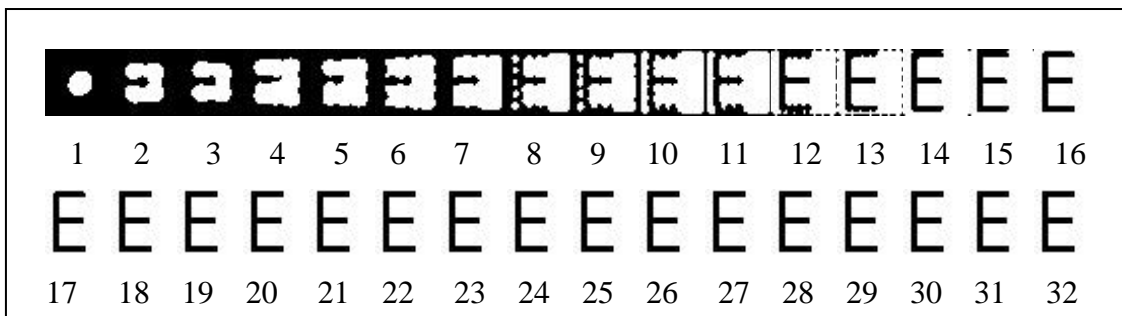
Vaizdų atstatymas parodo, kaip gerai polinomiali nusakoma pati vaizdą. Kuo mažesnės eilės polinomo užtenka geram vaizdo atstatymui, tuo daugiau vaizdo informacijos galima užkoduoti mažesnėje skaičių matricoje. Šis metodas taip pat gali būti naudojamas vaizdų kodavime, taip pat ir suspaudimo metuose, norint sutaupyti vaizdui saugoti skirtos vietos.

Visi žemiau pateikti skaičiavimai buvo atliekami naudojant matematinį paketa MATLAB. Iš pradžių panagrinesiu nedidelį (33x33 taškų) juodai-baltą paveikslėlį (pav. 5).



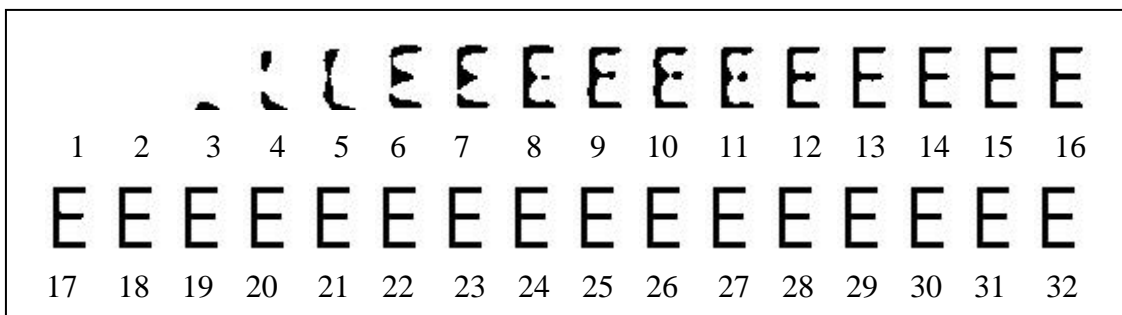
Paveikslas 6. E raidė, 33x33 dydžio.

Šio paveikslėlio atstatymui naudosiu Kravčiuko polinomus, kai  ir Čebyševo polinomus. Abejais atvejais polinomų eilės bus iki 32 (). Taip pat, kiekviename žingsnyje skaičiuosiu atstatymo paklaidas (4.2). Kadangi paveikslėlis nedidelis, tai kompiuterio resursų daug nesunaudojo. Pateiksiu atstatytus vaizdus kiekviename žingsnyje. Atstatinėjant su Kravčiuko polinomais (žiūrėti pav. 7), normalus vaizdas gaunamas naudojant jau polinomus iki 16 eilės, t.y. 33x33 dydžio vaizdas koduojamas 16x33 dydžio polinomų matrica. Toks ženklus dimensijos sumažėjimas gali labai palengvinti tolesnę vaizdo analizę, naudojant įprastinius matematinius metodus.



**Paveikslas 7. Vaizdo atstatymas naudojant Kravčiuko polinomus. Skaičius rodo polinomo eilę.**

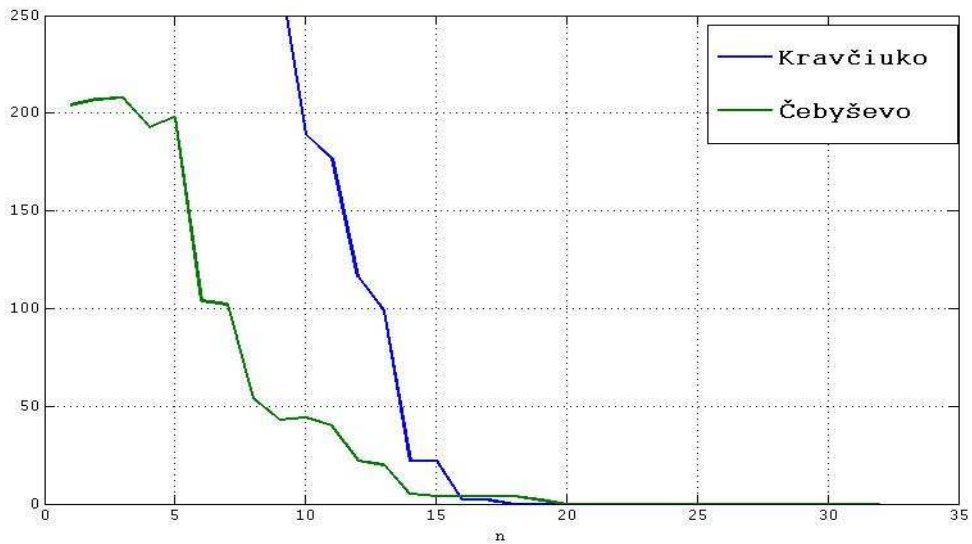
Panašus vaizdas gaunamas ir naudojant Čebyševo polinomus (žiūrėti pav. 8).



**Paveikslas 8. Vaizdo atstatymas naudojant Čebyševo polinomus. Skaičius rodo polinomo eilę.**

Kadangi akimi nelabai eina įvertinti vieno ar kitų polinomų pranašumo, reikia žiūrėti į paklaidą. Paveiksle 9 galima matyti kaip kinta paklaida didėjant polinomų eilei. Iš grafiko matosi, kad vaizdą atstatinėjant Kravčiuko polinomais, paklaida yra didesnė kol naudojami polinomai iki 15 eilės. Tačiau, naudojant 16 eilės Kravčiuko polinomus, paklaida , o Čebyševo – . Vaizdas atstatomas pilnai, t.y.  naudojant 18 eilės Kravčiuko arba 20 eilės Čebyševo polinomus. Tad galima daryti išvadą, kad naudojant mažesnės eilės polinomus, geriau naudoti Čebyševo polinomus. Tačiau, norint kiek įmanoma labiau sumažinti vaizdo dimensijas ir tuo pačiu neprarasti nė trupučio informacijos, geriau naudoti Kravčiuko polinomus.

Taigi, visiškai neprarandant informacijos bei kokybės, vietoj  dydžio matricos galima analizuoti  dydžio matrica. Matome kaip ženkliai sumažėja matricos dimensijos, nors visai neprarandame informacijos.



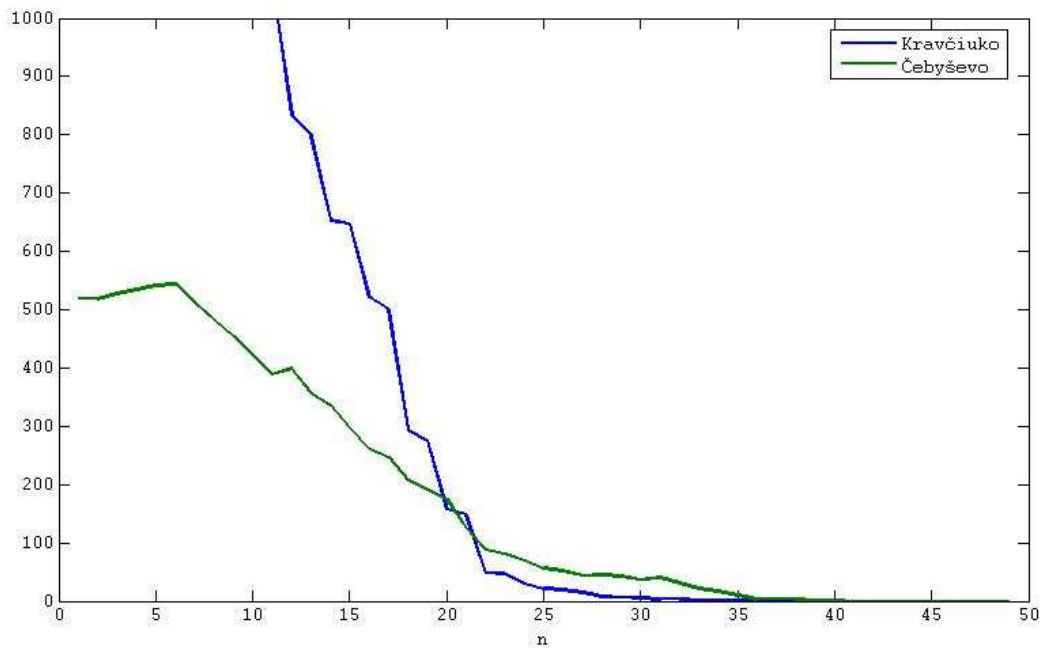
**Paveikslas 9. Atstatymo paklaidos.**

Atliksiu, ta patį su kiek didesniu vaizdu. Šį kartą naudosiu juodai-baltą hieroglifą (pav. 10), kurio dydis  taškų.



**Paveikslas 10. Hieroglifas, paveikslėlio dydis  taškų.**

Atstatymo paklaida, didėjant polinomo eilei, mažėja. Žiūrint į grafikus (pav. 11).



**Paveikslas 11. Atstatymo paklaidos, vaizdas "hieroglifas".**

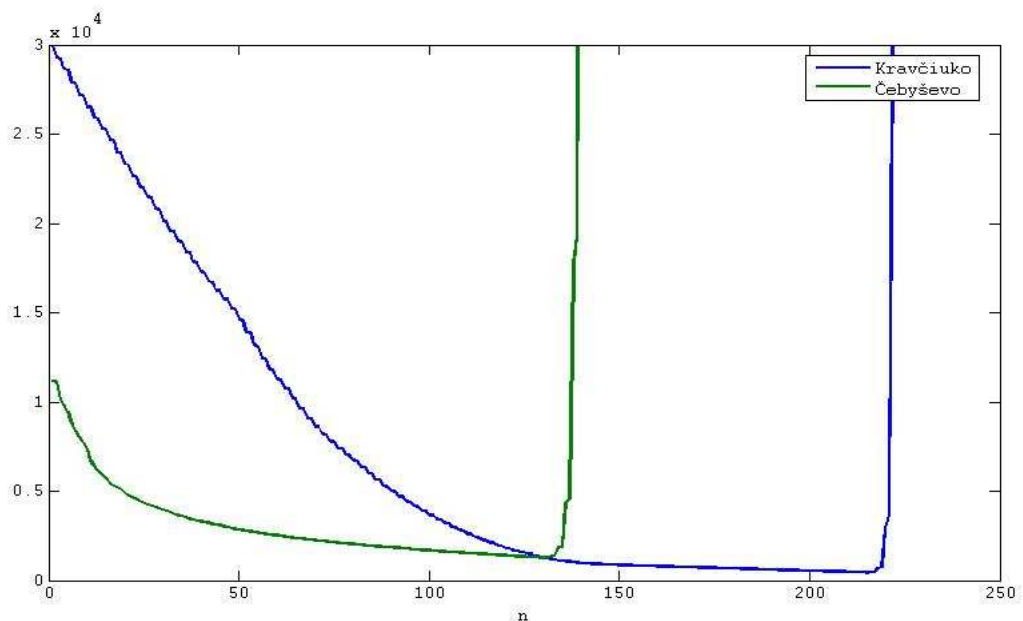
Ši kartą, taip pat kaip ir praeitą, paklaida mažėja greičiau ir greičiau pasiekia 0 naudojant Kravčiuko polinomus. Naudojant Kravčiuko polinomus, paklaida  pasiekama naudojant 36 eilės polinomus, o Čebyševo – 41 eilės.

Įdomu, kaip vaizdo atstatymas vyksta su didesniu vaizdu. Panagrinęsiu  dydžio, pilkų atspalvių nuotrauką (priminsiu, kad šis paveikslėlis turės iki 256 pilkų atspalvių) (pav. 12).



Paveikslas 12. Nuotrauka "Lena". Natūralus dydis.

Šįkart situacija pasikeičia. Kadangi, naudojamos rekurentinės formulės polinomų skaičiavime, tai po kiek laiko pradeda kauptis skaičiavimo paklaidos, kurios, didėjant polinomų eilei, didėja.



Paveikslas 13. Atstatymo paklaidos "Lenos" nuotraukai.



Kaip matome (pav. 13), paklaidos laipsniškai mažėja, kol pasiekia tam tikrą tašką, nuo kurio jos staigiai, beveik stačiai, pradeda augt link begalybės. Naudojant Čebyševo polinomus, paklaida ima didėti daug anksčiau (kai polinomo eilė yra apie 140), tuo tarpu paklaida, naudojant Kravčiuko polinomus, dar kurį laiką mažėja.

**Lentelė 1. Metodų palyginimas. Lenos nuotrauka, 256x256.**

	Minimali paklaida	Eilė prie min. paklaidos
Čebyševo	1367	133
Kravčiuko	449,25	215

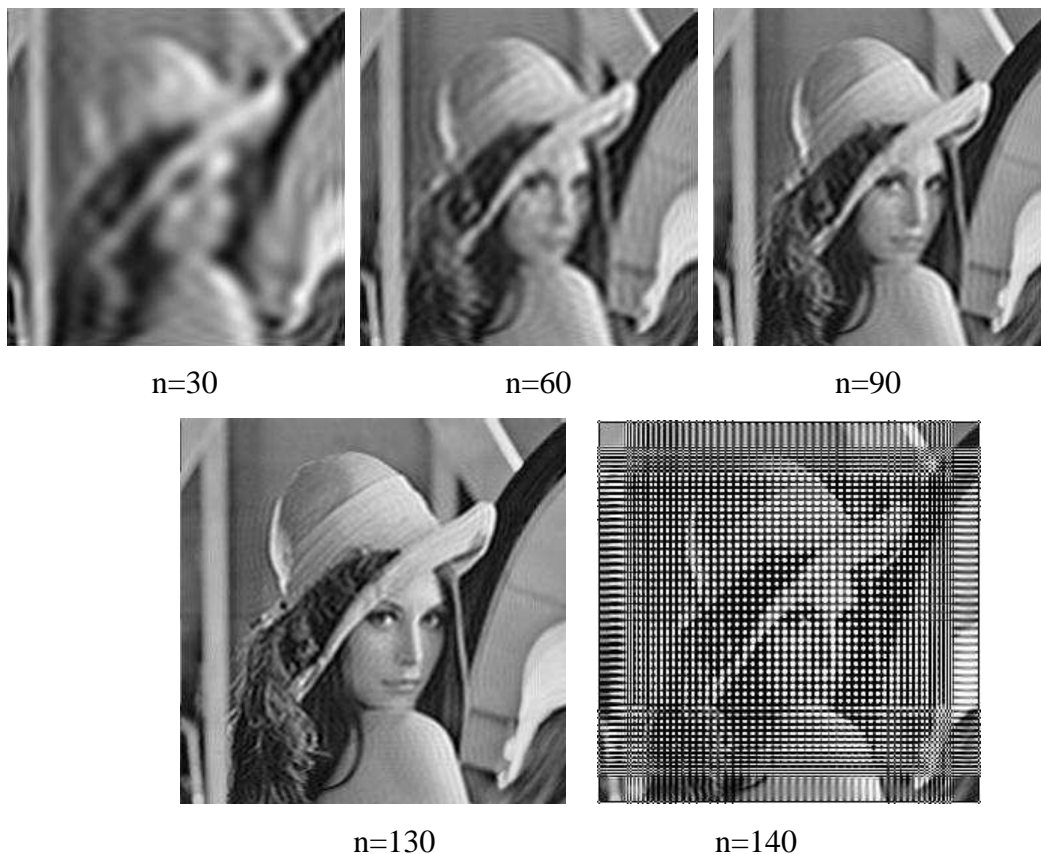
Lentelėje 1 galima matyti, kad šiuo atveju Kravčiuko polinomų pagalba galima gauti daug geresnius rezultatus. Kaip matome šį kartą prie minimalios paklaidos vaizdo dimensijas galima sumažinti iki . Galima atidžiau pažiūrėti į gautus atstatytus vaizdus, ir akimi įvertinti gautus vaizdus.



**Paveikslas 14. Nuotraukos atstatymas naudojant Kravčiuko polinomus.**

Iš paveikslas 14, aiškiai galima matyti, kaip kinta atstatomo vaizdo kokybė naudojant Kravčiuko polinomus. Galima matyti, kad naudojant 130 eilės polinomus, gautas vaizdas yra jau patenkinamos kokybės, o naudojant dar didesnės eilės polinomus (n=150), vaizdas gaunamas puikus, ir plika

akimi net neina atskirti originalo nuo atstatyto vaizdo. Pažiūrėsiu, koks rezultatas gaunamas naudojant Čebyševio polinomus.



**Paveikslas 15. Nuotraukos atstatymas naudojant Čebyševio polinomus.**

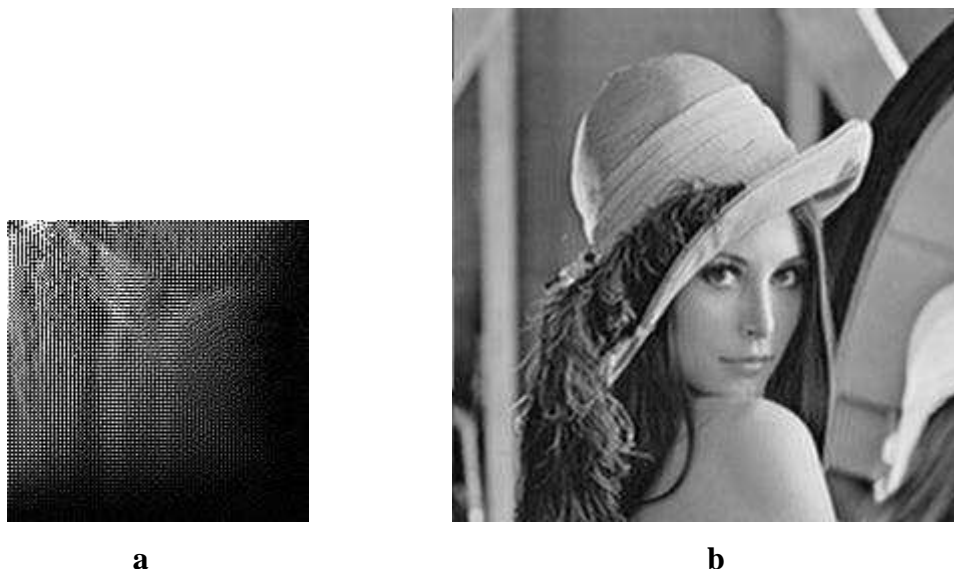
Pav. 15 rodo kaip vyksta atstatymas naudojant Čebyševio polinomus. Iš 14 ir 15 paveikslų galima matyti, kodėl prie nedidelių polinomų eilių taip smarkiai skiriasi atstatymo paklaida tarp Kravčiuko ir Čebyševio polinomų. Paklaida daug didesnė naudojant Kravčiuko polinomus dėl didelio juodo rėmo, kuris, eilei didėjant, mažėja, o kartu vaizdas ryškėja. Tuo tarpu dirbant su Čebyševio polinomais, vaizdas matosi visas, bet gerokai "išplaukęs". Kai eilė  $n=130$ , tai abu atstatyti vaizdai yra panašios – patenkinamos kokybės, tačiau plika akimi eina įvertinti, kad vaizdas atstatytas su Kravčiuko polinomais yra geresnis. Tai įrodo ir paklaidos dydis:



Polinomo eilei padidėjus iki 140, vaizdas jau akivaizdžiai suprastėjęs (priminsiu, kad pradėdant 133 eile, vaizdas ima blogėti, o paklaida greitai augti).

Ši skyrelį baigsiu labai svarbia išvada. Galima buvo įsitikinti, kad Kravčiuko polinomi duoda geresnį rezultatą vaizdų atstatyme. Šiame skyrelyje aprašytas vaizdo dimensijų mažinimas gali būti labai naudingas nuotraukų suspaudime bei kodavime. Skaitmeniniu būdu laikomos nuotraukos (pvz. kompiuteryje) gali būti ženkliai suspaustos, t.y. sumažintas jų užimamas

vietos diske dydis, beveik neprarandant kokybės. Toks būdas galėtų būti laisvai įgyvendintas. Tereiktų, kad vartotojas turėtų programą, kurios pagalba būtų galima atlikti transformacijas ir atstatymus. Taip pat, naudojant šį metodą, galima nesunkiai užkoduoti vaizdus.



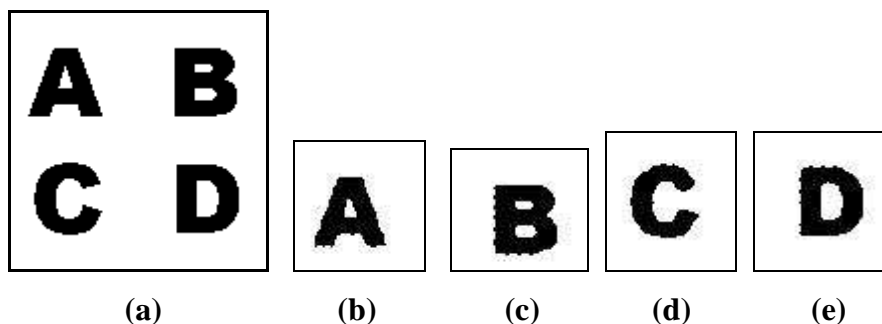
Paveikslas 16. a) koduotas vaizdas, dydis 150x150; b) atstatytas vaizdas, dydis 256x256.

Žiūrint į koduotą vaizdą (pav. 16 a) tikrai negalima numatyti koks vaizdas ten slepiasi; Beato toks koduotas vaizdas, kaip matome, yra daug mažesnis, iš ko seka, kad užima mažiau vietos. Atstatyto vaizdo (pav. 16 b) kokybė gera, tad šis metodas gali būti taikomas praktikoje.

### 5.1.1. Vaizdo dalies atstatymas

Kaip jau ir buvo minėta, vaizdo atstatymui naudojant Kravčiuko polinomus ir keičiant parametru  reikšmes galima iš viso vaizdo išskirti labiausiai dominančias dalis. Parametras  naudojamas paslinkti dominančią sritį horizontalia kryptimi. Jei , tai dominančią sritį paslinksime į kairę, jei  – į dešinę. Parametras  naudojamas paslinkti dominančią sritį vertikalia kryptimi. Jei , tai dominančią sritį paslinksime į viršų ir atvirkščiai.

Paveiksluose 17 (b) – (e) galima matyti vaizdo "ABC" (pav. 17(a)) atstatymo rezultatus. Buvo naudojamos skirtingos parametru  ir  reikšmės. Atstatymui užteko tik 25 eilės Kravčiuko momentų.



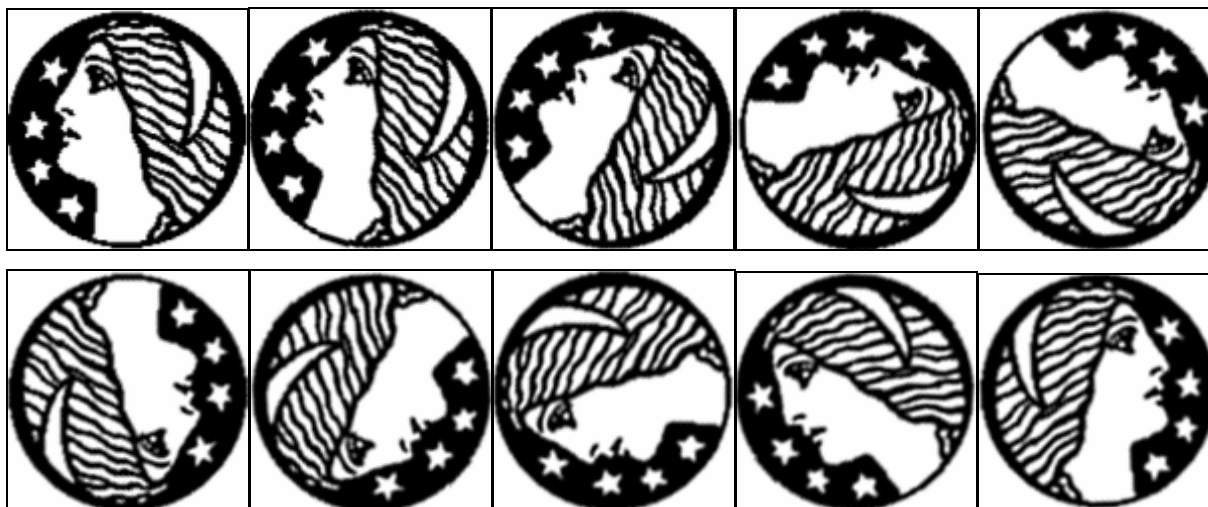
Paveikslas 17. Paveikslas "ABC" atstatymas, dydis 128x128 (a); (b)  $(p_1, p_2) = (0, 15, 0, 15)$ ; (c)  $(p_1, p_2) = (0, 85, 0, 15)$ ; (d)  $(p_1, p_2) = (0, 15, 0, 85)$ ; (e)  $(p_1, p_2) = (0, 85, 0, 85)$ .

## 5.2. Momentų invariantai

Šioje darbo dalyje skaičiuosiu invariantus. Pažiūrėsiu, ar galima invariantais nusakyti vaizdą, ar skiriasi to paties vaizdo invariantai, kai vaizdas pasuktas arba jame yra taškų. Taip pat parodysiu kaip galima invariantus taikyti vaizdo atpažinime. Priminsiu, kad Kravčiuko momentų invariantus skaičiuosiu pagal (3.27), o radialinių Čebyševio momentų invariantus pagal – (4.26) ir (4.27).

Invariantai vaizdai atpažinti jau buvo naudojami septintajame dešimtmetyje. Hu [6] pasiūlė naudoti geometrinių momentų invariantus. Šis metodas buvo naudojamas karinėje srityje, daugiausiai laivų bei lėktuvų atpažinimui. Dabar šis metodas patobulintas, imant ortogonalius diskrečius polinomus.

Pirmiausia reikia išsiaiškinti kiek ir kokių eilių invariantų imti. Šiam reikalui naudosiu 11 vaizdų rinkinį (pav. 18), kur pirmieji dešimt vaizdų yra lygiai tas pats vaizdas tik pasuktas, tuo tarpu vienuoliktasis paveikslas yra visiškai skirtingas nuo visų prieš tai buvusių vaizdų. Dar reiktų atkreipti dėmesį į dešimtą paveikslėlį – ten yra pirmojo paveikslėlio veidrodinis atvaizdas.





**Paveikslas 18. Vaizdų rinkinys skirtas invariantų charakteristikom išsiaiškinti.**

Taigi, pirmiausia skaičiuosiu Kravčiuko invariantus, iš kurių vėliau atrinksiu kokius 6, kuriuos vėliau naudosiu vaizdams atpažinti. Skaičiuosiu pirmųjų eilių momentų invariantus:

Svarbiausius invariantus galima atrinkti taikant įvairius bus, aš naudosiu patį paprasčiausią: žiūrėsiu, kad pirmųjų dešimties paveikslų invariantai skirtųsi kuo mažiau, tačiau paskutiniojo paveikslėlio – skirtųsi ryškiai.

**Lentelė 2. Kravčiuko invariantai pagal paveikslą 18.**

Pav. nr.										
<b>1</b>	1	10,911	10,907	119,008	97,833	96,431	786,465	765,914	1067,835	1048,668
<b>2</b>	1	10,911	10,907	119,009	97,819	96,421	786,197	765,701	1067,673	1048,556
<b>3</b>	1	10,911	10,907	119,009	97,843	96,434	786,970	765,729	1067,858	1048,676
<b>4</b>	1	10,912	10,908	119,026	97,679	96,471	782,967	766,207	1065,950	1049,079
<b>5</b>	1	10,912	10,907	119,019	97,661	96,397	782,419	765,321	1065,890	1048,357
<b>6</b>	1	10,912	10,907	119,017	97,683	96,393	782,973	765,237	1066,119	1048,360
<b>7</b>	1	10,912	10,907	119,007	97,725	96,329	784,101	764,142	1066,782	1047,646
<b>8</b>	1	10,912	10,907	119,016	97,697	96,395	783,412	765,143	1066,247	1048,362
<b>9</b>	1	10,912	10,907	119,011	97,733	96,359	784,256	764,545	1066,742	1047,964
<b>10</b>	1	10,912	10,911	119,058	97,663	96,411	782,621	761,738	1064,802	1048,647
<b>Vidurkis</b>	<b>1</b>	<b>10,912</b>	<b>10,907</b>	<b>119,018</b>	<b>97,734</b>	<b>96,404</b>	<b>784,238</b>	<b>764,968</b>	<b>1066,590</b>	<b>1048,432</b>
<b>Vid.kv.nuokrypis</b>	<b>0</b>	<b>0,000</b>	<b>0,001</b>	<b>0,015</b>	<b>0,072</b>	<b>0,040</b>	<b>1,703</b>	<b>1,294</b>	<b>0,990</b>	<b>0,401</b>
<b>11</b>	1	10,912	10,908	119,033	103,711	99,124	896,262	814,853	1129,910	1075,206

Lentelėje matosi, kad daugiausiai naudos turi paskutiniai šeši invariantai. Taigi, vaizdų atpažinimui, naudojant Kravčiuko momentus, naudosiu tokį invariantų vektorių:

(4.4)

Šiuo eksperimentu taip pat parodžiau, kad Kravčiuko momentų invariantai nepriklauso nuo vaizdo pasukimo. Tai labai svarbu norint šį metodą pritaikyti praktikoje, pvz. monetų atpažinimui – nereiktų monetų sukinėti.

Tą patį atliksiu su radialiniais Čebyševo polinomais: paskaičiuosiu invariantus ir atrinksiu tuos, kurie geriausiai tiks vaizdų atpažinimui. Naudoju tą patį vaizdų rinkinį (pav. 18).

Skaičiuosiu invariantus  $I_1, I_2, \dots, I_{10}$  naudodamasis formulėmis (4.26) ir (4.27).

**Lentelė 3. Čebyševo invariantai pagal paveikslą 18.**

Pav. nr.	$I_1$	$I_2$	$I_3$	$I_4$	$I_5$	$I_6$	$I_7$	$I_8$	$I_9$	$I_{10}$	$I_{11}$	
1	0,5756	-0,3102	-0,0312	0,0219	0,0045	0,0223	0,0026	0,0222	0,0016	0,0004	0,0021	0,0033
2	0,5781	-0,3131	-0,0250	0,0218	0,0045	0,0208	0,0021	0,0254	0,0016	0,0003	0,0018	0,0031
3	0,5813	-0,3189	-0,0059	0,0170	0,0043	0,0174	0,0030	0,0350	0,0017	0,0002	0,0015	0,0026
4	0,5922	-0,3370	0,0150	0,0131	0,0043	0,0138	0,0009	0,0515	0,0019	0,0001	0,0002	0,0015
5	0,5836	-0,3130	-0,0295	0,0187	0,0053	0,0228	0,0008	0,0265	0,0017	0,0003	0,0009	0,0032
6	0,5755	-0,2926	-0,0640	0,0349	0,0056	0,0283	0,0004	0,0136	0,0013	0,0003	0,0014	0,0045
7	0,5598	-0,2384	-0,1270	0,1030	0,0057	0,0356	0,0002	0,0024	0,0008	0,0013	0,0010	0,0052
8	0,5718	-0,2886	-0,0648	0,0376	0,0053	0,0282	0,0004	0,0104	0,0013	0,0004	0,0017	0,0050
9	0,5716	-0,2866	-0,0602	0,0387	0,0051	0,0276	0,0011	0,0108	0,0013	0,0006	0,0015	0,0047
10	0,5637	-0,2575	-0,1059	0,0769	0,0058	0,0332	0,0001	0,0041	0,0010	0,0008	0,0011	0,0054
<b>Vidurkis</b>	<b>0,5753</b>	<b>-0,2956</b>	<b>-0,0498</b>	<b>0,0384</b>	<b>0,0050</b>	<b>0,0250</b>	<b>0,0012</b>	<b>0,0202</b>	<b>0,0014</b>	<b>0,0005</b>	<b>0,0013</b>	<b>0,0038</b>
<b>Vid.kv. nuokrypis</b>	<b>0,0094</b>	<b>0,0297</b>	<b>0,0437</b>	<b>0,0292</b>	<b>0,0006</b>	<b>0,0068</b>	<b>0,0010</b>	<b>0,0152</b>	<b>0,0003</b>	<b>0,0003</b>	<b>0,0005</b>	<b>0,0013</b>
11	0,4021	-0,1726	-0,1537	0,3422	0,0015	0,0003	0,0045	0,0117	0,0117	0,0012	0,0005	0,0092

Šį kartą atrinksiu taip pat 6 invariantus. Žinoma šį skaičių galima ir padidinti ir sumažinti priklausomai nuo uždavinio. Naudodamasis tais pačiais kriterijais gaunu vektorių:

(4.5)

Kaip matome, vėl gauname, kad invariantai yra nepriklausomi nuo vaizdo pasukimo.

Kadangi jau turiu invariantų rinkinius, galiu juos išbandyti praktiškai vaizdų atpažinime. Euklidinį atstumą naudosiu kaip klasifikatorių:

$$\square \quad (4.6)$$

kur  $\square$  – neatpažinto vaizdo požymių (šiuo atveju invariantų) vektorius, kurio dimensija  $\square$ , o  $\square$  – apmokymo imties požymių vektorius iš  $\square$  - tosios klasės. Taigi klasifikavimo taisyklė bus:

$$\square \quad (4.7)$$

Šiam eksperimentui naudosiu šių raidžių rinkinį: "A", "B", "E", "K", "U", "L", "O", "T", "Z". Apmokymui naudojamas vaizdų rinkinys:



**Paveikslas 19. Apmokymui naudojami vaizdai.**

Testinėje aibėje yra 66 paveikslėliai, kuriuose yra tos pačios raidės bet pasuktos:

$\square$  laipsniais. Visus šiuos paveikslėlius galima pamatyti priede nr.1.

**Lentelė 4. Vaizdų atpažinimo rezultatai.**

	Viso vaizdų	Atpažinta teisingai	Dalis, %
Kravčiuko	66	66	100%
Čebyšev	66	65	98,48%

Lentelėje 4 matome, kad naudojant Kravčiuko invariantus teisingai buvo atpažintos visos raidės. Naudojant Čebyšev invariantus buvo suklysta tik vieną kartą.

Labai svarbu pažiūrėti, kaip einasi atpažinti vaizdus, kai vaizdas turi šiek tiek triukšmo. Šiam eksperimentui naudosiu tų pačių raidžių rinkinį su triukšmu. Kiekvienai raidei imsiu keturis paveikslėlius su skirtingu triukšmų lygiu. Taigi šįkart klasifikavimui naudosiu 36 paveikslėlių imtį (šiuos paveikslėlius galima pamatyti priede nr. 2).

**Lentelė 5. Vaizdų atpažinimo rezultatai, kai vaizdai su triukšmu.**

	Viso vaizdų	Atpažinta teisingai	Dalis, %
Kravčiuko	36	36	100%
Čebyšev	36	33	91,66%

Šiuo eksperimentu taip pat parodžiau, kad gauti rezultatai (lentelė 5) yra geresni, vaizdo atpažinimui naudojant Kravčiuko momentų invariantus.

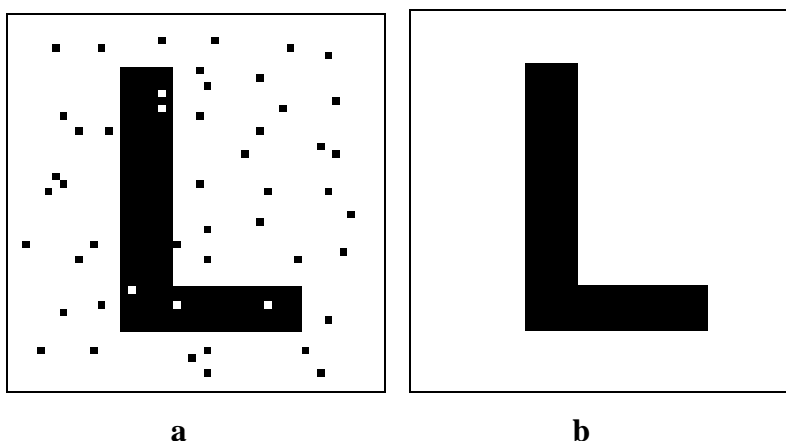
Geresnį atpažinimą būtų galima gauti paėmus kitą arba didesnę invariantų rinkinį. Taigi, atlikau eksperimentą ir vietoje šešių, paėmiau septynis Čebyševio momentų invariantus. Rezultatai gavosi tokie pat, kaip ir naudojant Kravčiuko invariantus, t.y. visi vaizdai buvo atpažinti teisingai.

Taigi, iš atliktų eksperimentų matosi, jog paveikslėlių vienareikšmiškai galima nusakyti tik šešiais skaičiais. Taip pat, parodžiau, kad Kravčiuko momentai savyje turi daugiau informacijos apie vaizdą, dėl ko, naudojant juos, galima gauti tikslesnius vaizdo atstatymo ir atpažinimo rezultatus. Beje Kravčiuko invariantai, geriau susitvarkė su vaizdų atpažinimu esant didesniam ar mažesniai triukšmui.

### 5.3. Polinomų naudojimas triukšmo mažinimui

Darant eksperimentus su vaizdas, kuriuose yra triukšmo, pastebėjau gana įdomų dalyką – triukšmo mažinimą. Apie triukšmo mažinimą yra daug prirašyta ir padaryta, tačiau niekur neradau jokių rašinių apie triukšmo mažinimą, naudojant Kravčiuko arba Čebyševio polinomus. Taigi pastebėjau, kad atstatant vaizdą su Kravčiuko arba Čebyševio momentų pagalba, galima atfiltruoti triukšmą. Triukšmo mažinimas vaizde gali būti plačiai taikomas praktikoje – triukšmo šalinimas skaitmeninėse nuotraukose. Taip pat tai labai aktuali problema ir matematikoje bei statistikoje.

Parodysiu, kaip naudojant Kravčiuko ir Čebyševio polinomus, galima sumažinti triukšmą. Šiam eksperimentui naudosisiu jau naudotą "L" raidės vaizdą, kuris turi daugiausiai triukšmo (pav.20). Čia triukšmas – atsitiktinis baltų-juodų taškų (druskos ir pipirų) triukšmas.

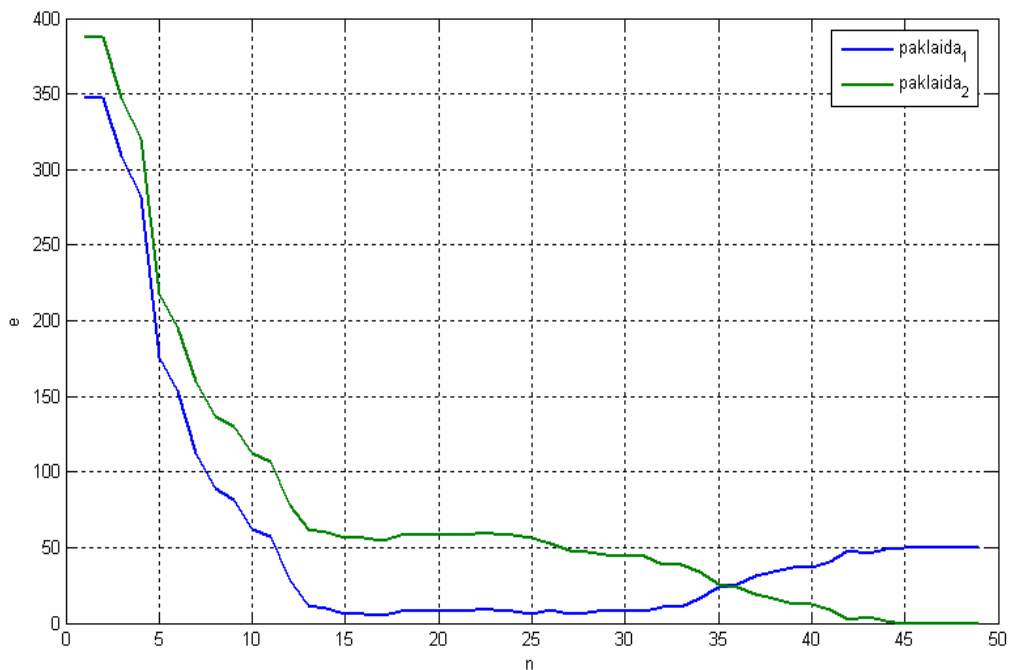


Paveikslas 20. Raidė L su triukšmu (a) ir be triukšmo (b).

Jeigu vaizdą su triukšmu atstatysiu naudojant  $\square$  eilės polinomus, tai gausiu tokį patį vaizdą su triukšmu. Tačiau, jei vaizdas bus atstatomas mažesnės eilės polinomais, turėčiau gauti vaizdą be triukšmo. Pamėginsiu savo mintis pagrįsti praktiniais eksperimentais.

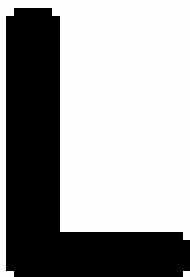


Taigi, vaizdą atstatant su Čebyševio polinomais, gaunu tokias atstatymo klaidas (atstatytus vaizdus galima pamatyti priede nr.3). Triukšmo mažinimo įvertinimui naudosiu paklaidą, skaičiuojama pagal (4.2). Skaičiuosiu dvi paklaidas:  $\epsilon_1$ , kuri parodys atstatomo vaizdo nuokrypį nuo vaizdo be triukšmo, ir  $\epsilon_2$  – parodys paklaidą tarp atstatomo vaizdo ir vaizdo su triukšmu. Paklaidų kitimą, didėjant polinomų eilei galima matyti pav. 21.



**Paveikslas 21. Paklaidų kitimas. Čebyševio polinomai.**

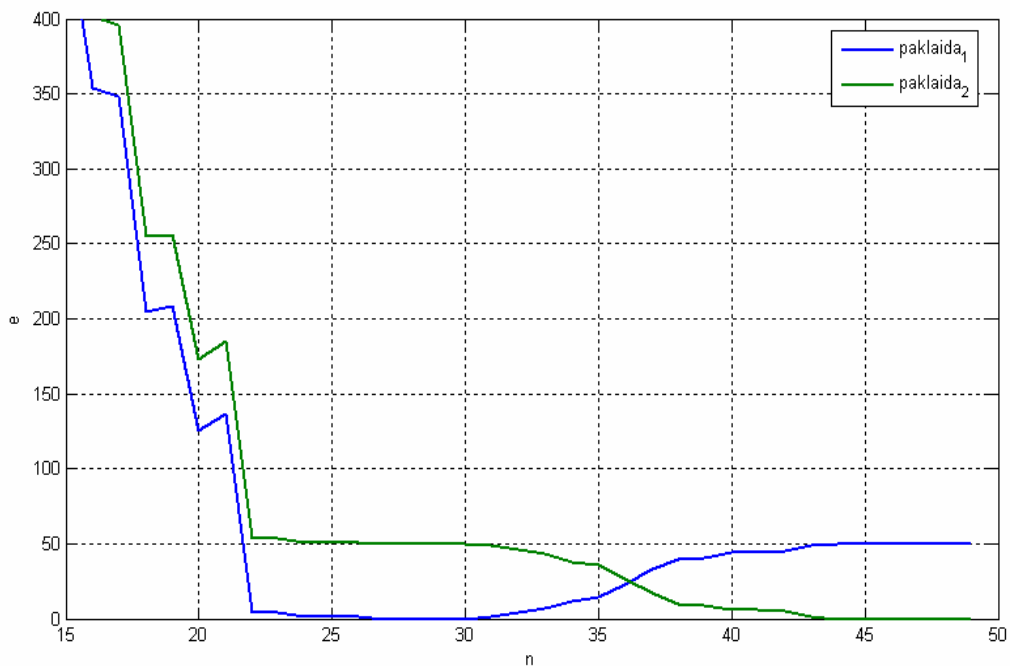
Gaunu, kad  $\epsilon_1$  įgyja minimumą, kai eilės numeris  $n=17$ , o  $\epsilon_2$ , iš ko seka, kad atstatytame vaizde yra tik 5 taškai, kurie skiriasi nuo paveikslo 20b. Vaizdas atstatytas naudojant 17 eilės Čebyševio polinomus (pav. 22) švarus, tik pačiai raidei trūksta penkių taškų



**Paveikslas 22. Triukšmo išvalymas naudojant Čebyševio polinomus.**

Tą patį atliksiu naudojant Kravčiuko polinomus. Gautus atstatytus vaizdus galima pamatyti priede nr. 4. Apskaičiuoju tas pačias paklaidas, gautas naudojant Kravčiuko polinomus (pav. 23). Iš

grafiko matosi, kad  įgyja minimumą, kai polinomo eilės numeris , o  - iš ko seka, kad atstatomas vaizdas yra visiškai be triukšmo.



**Paveikslas 23. Paklaidų kitimas. Kravčiuko polinomai.**

Kadangi, naudojant Kravčiuko momentus, gavau geresnį rezultatą, tai su jais dar atliksiu vieną eksperimentą su nuotrauka.



**a**

**b**

**Paveikslas 24. "Žiedai" (512x512). Be triukšmo (a); su triukšmu (b).**

Tikslas – kiek įmanoma labiau išvalyti nuotrauką (pav. 24b), naudojant Kravčiuko polinomus.

Pažymiu – nuotraukos (a) tankio (intensyvumo) funkcija - , nuotraukos (b) – . Tai skirtumas tarp šių nuotraukų yra:

Išvalytos nuo "triukšmų" nuotraukos (pav. 25) tankio funkcija - , tai


Matosi, kad skirtumas yra akivaizdus ne tik lyginant nuotraukas, bet ir žiūrint į skaičius.



**Paveikslas 25. "Išvalyta" nuotrauka.**

Penktame priede galima pažiūrėti į kelis kartus padidintas nuotraukas ir pažiūrėti kaip veikia triukšmo valymas.

## 5.4. Kiti taikymo pavyzdžiai

Norėčiau pažymėti, kad šiame darbe aprašyti metodai gali būti taikomi ne tik vaizdų apdorojime, bet ir grynai matematine prasme. Galima įsivaizduoti, kad kiekviena dvimatė funkcija, išreikšta reikšmių vektoriumi, yra vaizdas, kurio aukštis – vienas taškas, o plotis – atitinka turimų reikšmių skaičius. Paveiksle 26 galima pamatyti, kaip atrodo funkcijos  grafikas paverstas į vaizdą.



**Paveikslas 26. Parabolė išreikšta vaizdu.**

Kaip matome, panašų vaizdą gautume, paėmę genų eilutę, laiko eilutę, medicininių matavimų seką ir t.t. Tokiam vektoriui dabar jau galima skaičiuoti tiek Čebyševio tiek Kravčiuko momentus, kuriuos jau galima jungti su kitais matematiniais metodais.

## 6. Darbo apibendrinimas

Darbo tema buvo pasirinkta neatsitiktinai. Polinomi taikomi statistikoje, atsitiktinių dydžių transformacijose, aš pats domiuosi fotografija. Beto, ši tema turėjo labai aiškius praktinius uždavinius, kurie dažnai taikomi gyvenime.

Šiame darbe apžvelgiau dviejų diskrečių ortogonalinių polinomų tipų taikymą praktikoje. Parodžiau, kaip galima užkoduoti ir atkoduoti vaizdą, sumažinti vaizdo dimensiją, bei kaip taikyti polinomus ir jų momentus atpažinti vaizdams. Dar vienas svarbus taikymo būdas, kuris buvo atrastas rašant darbą – tai triukšmo mažinimas, naudojant polinomus. Šis taikymo būdas naujas, dar negirdėtas ir neaprašytas<sup>2</sup>. Reikėtų atkreipti dėmesį į tai, kad visi šie uždaviniai gali būti sprendžiami ne tik su vaizdas, bet ir vietoj vaizdo naudojant bet kokią skaičių matricą arba tankio funkciją.

Sprendžiant uždavinius išsiaiškinau ir parodžiau, kad su svertiniais Kravčiuko polinomais yra pasiekiami geresni rezultatai: tiksliau atstato vaizdą naudojant mažesnės eilės polinomus lyginant su Čebyševio polinomais, tiksliau eina atpažinti vaizdus, geriau susitvarko su triukšmo mažinimu. Taip pat svarbu pabrėžti, kad Kravčiuko polinomi yra universalesni lyginant su Čebyševio, dėl parametro  $p$ , kurio pagalba galima pasirinkti mus dominančią sritį.

Taip pat parodžiau, kad nagrinėjamų polinomų momentų pagrindu galima sudaryti invariantus, kurie yra invariantiški posūkiui, postūmiui, masteliui. Invariantai leidžia klasifikuoti, atpažinti objektus.

---

<sup>2</sup> Apie triukšmo mažinimą nebuvo užsiminta naudotoje literatūroje. Taip pat nebuvo pateikta jokių nuorodų į darbus, kuriuose būtų kalbama apie triukšmo mažinimą, naudojant diskrečius ortogonaliosius polinomus.

## 7. Ateities darbai

Didžiausias darbas, kurį būtų galima plėtoti toliau – tai bandymas sumažinti skaičiavimo paklaidas, kurios kaupiasi naudojant rekurentines formules. Darydamas, darbą mėginau kiek įmanoma labiau sumažinti paklaidų kaupimąsi: naudojau simetrijos savybes, taip pat bandžiau perskaičiuoti polinomus didinat jų eilę.

Taip pat būtų galima labiau išnagrinėti ir paskaičiuoti realią naudą, polinomų metoda taikant vaizdų suspaudimui bei kodavimui. Galima būtų sukurti programas vaizdo kodavimui/suspaudimui, bei jo peržiūrėjimui, ir pažiūrėti, kiek realiai galima sutaupyti kompiuterio atminties naudojant įvairius suspaudimo laipsnius.

Vaizdo atpažinimui galima būtų paieškot dar labiau tinkamų invariantų arba jų tiesinių/netiesinių kombinacijų. Galima invariantus naudoti su kitais matematiniais arba statistiniais metodais: neuroniniais tinklais, logistine regresija ir t.t. Įsitikinęs, kad rezultatai būtų dar geresni. Invariantų pagalba būtų galima klasifikuoti kreives, laiko eilutes, kitus matavimus.

Apie polinomų naudojimą šalinant triukšmus, manau, reikėtų rašyti atskirą darbą. Triukšmo filtrus galima naudoti, ne tik nuotraukoms, bet ir įvairiuose matematiniuose, statistikos uždaviniuose.

## 8. Summary

This work is dedicated for Krawchouk and Chebyshev polynomials. I tried to compare two types of polynomials in image analysis. These polynomials belong to discrete orthogonal polynomial family. Work is divided in two main parts: theoretical part and practical part. In theoretical part I introduced both polynomials, their moments and invariants. Also, I talked about image reconstruction and classification. In practical section I showed how polynomials deal with image reconstruction, classification and found very important feature of polynomials – image transformation using polynomials work as noise reduction filter. This is absolutely way of polynomials usage. This can be useful not only with images, but also with density functions and number matrices. Krawchouk polynomials showed better results in all these practical examples. So I am doing assumption that discrete Krawchouk polynomials is better in image analysis comparing to Chebyshev polynomials.

## Literatūros saraksts

1. J. Arvesu, J. Coussement, W. Assche, Universidad Carlos III de Madrid, 2001
2. A. Erdelyi et al., Higher Transcendental Functions. New York: Mc-Graw-Hill, 1953, vol. 2
3. F. Ghorbel, S. Derrode, S. Dhahbi et al., Reconstructing With Geometric Moments
4. F. Ghorbel, S. Derrode, R. Mezhoud et al., Image reconstruction from a complete set of similarity invariants extracted from complex moments, Pattern Recognition Letters, 2006, 1361-1369
5. F. Hilderbrand, Introduction to Numerical Analysis. New York: Mc-Graw-Hill, 1956
6. M.K. Hu, Visual pattern recognition by moments invariants, IRE Tran. Inf. Theory, It-8, 1962, 179-187
7. O. Hunt, Image Coding Using Orthogonal Basis Functions, University of Canterbury, 2004
8. P. Yap, R. Paramesran, Image Analysis by Krawchouk Moments, IEEE Trans. Image Process., 2003, 1367-1377
9. R. Koekoek, R. F. Swarttouw, The Askey-scheme of hypergeometric orthogonal polynomials and its q-analogue, 1996
10. W. Koepf, D. Schmersau, Representations of orthogonal polynomials, Elsevier, 1998, 57-98
11. R. Mukundan, Improving Image Reconstruction Accuracy Using Discrete Orthonormal Moments, University of Canterbury, 2003
12. R. Mukundan, O. Hunt, A Comparison of Discrete Orthogonal Basis Functions for Image Compression, University of Canterbury, 2004
13. R. Mukundan, Transform coding using discrete Tchebichef polynomials, 2006
14. R. Mukundan, A new class of rotational invariants using discrete orthogonal moments, 2004
15. R. Mukundan, Image Analysis by Tchebichef Moments, IEEE Trans. Image Process., 2001, 1357-1364
16. R. Mukundan, Some Computational Aspects of Discrete Orthonormal Moments, IEEE Trans. Image Process., 2004, 1055-1059
17. R. Mukundan, Radial Tchebichef Invariants for Pattern Recognition, IEEE Trans. Image Process., 2005
18. R. Mukundan, Image analysis by Tchebishev moments, IEEE Trans. Image Process., 2001, 1357-1364
19. K. Sandberg, Introduction to image processing in Matlab, University of Colorado



20. M.R. Teague, Image analysis via the general theory of moments, J. of Opt.Soc. Am. 1980, 920-930
21. E. W. Weisstein, "Polynomial." MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/Polynomial.html>
22. E. W. Weisstein, "Krawtchouk Polynomial." MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/KrawtchoukPolynomial.html>
23. E. W. Weisstein, "Kronecker Delta." MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/KroneckerDelta.html>
24. E. W. Weisstein, "Chebyshev Polynomial of the Second Kind." MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheSecondKind.html>
25. E. W. Weisstein, "Chebyshev Polynomial of the First Kind." MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/ChebyshevPolynomialoftheFirstKind.html>
26. E. W. Weisstein, "Orthogonal Polynomials." MathWorld--A Wolfram Web Resource. <http://mathworld.wolfram.com/OrthogonalPolynomials.html>
27. Г. Сере, ОРТОГОНАЛЬНЫЕ МНОГОЧЛЕНЫ, Москва, 1962

# Priedas 1

A A A A A A A

B B B B B B B

E E E E E E E

K K K K K K K

U U U U U U U

L L L L L L L

O O O

T T T T T T T

Z Z Z Z Z Z Z

## Priedas 2

A A A A

B B B B

E E E E

K K K K

U U U U

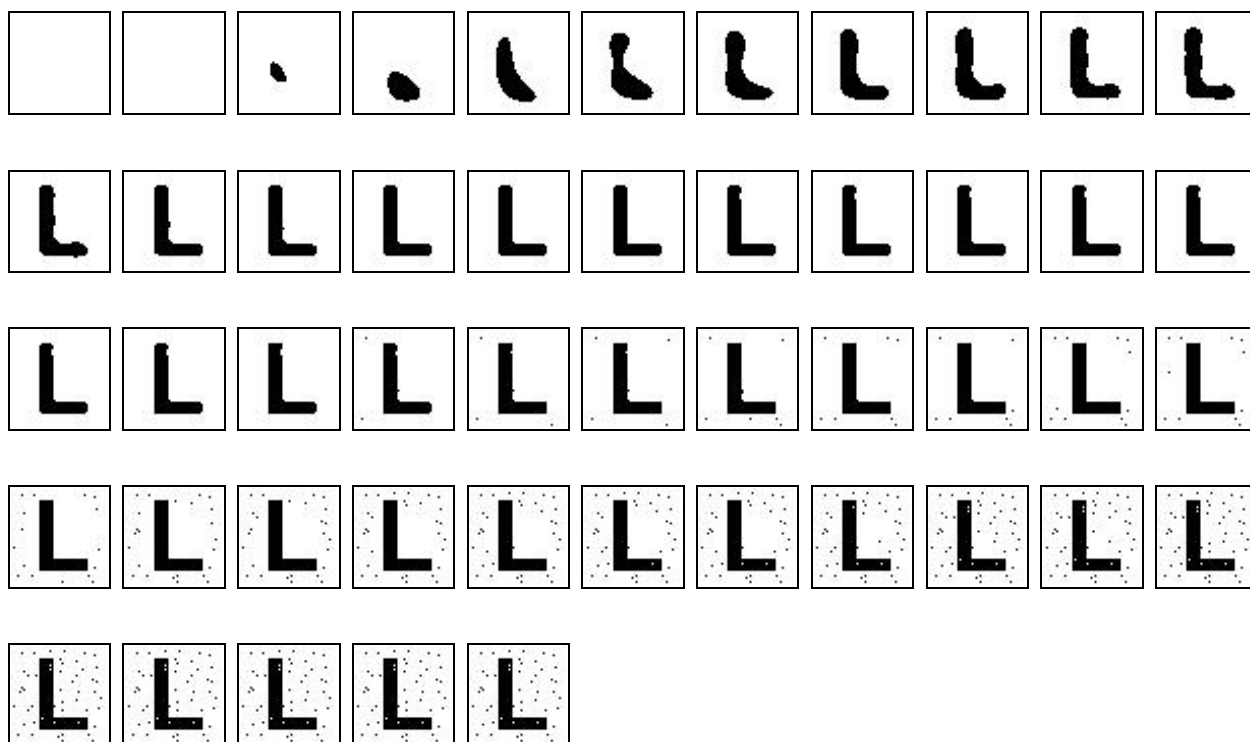
L L L L

O O O O

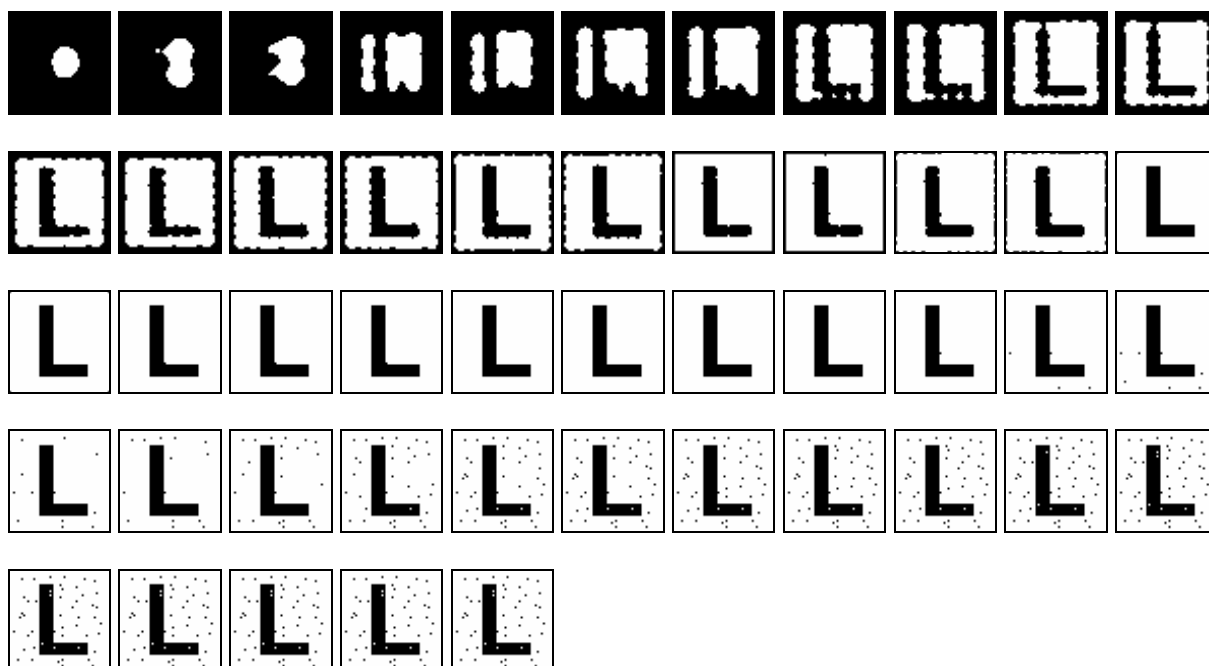
T T T T

Z Z Z Z

### Priedas 3



## Priedas 4



## Priedas 5

Su triukšmu:



Išvalytas triukšmas:

