VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

Magistro baigiamasis darbas

Sisteminio ir individualaus rizikos faktorių modelis įsipareigojimų nevykdymo tikimybei vertinti

Systemic and Individual Risk Factors Model for Low Default Portfolios

Tatjana Petiukevič

Darbo vadovas Doc. Dr. A.Grigutis

VILNIUS 2023

Sisteminio ir individualaus rizikos faktorių modelis įsipareigojimų nevykdymo tikimybei vertinti

Santrauka

Šiame magistriniame darbe nagrinėjama tema - „Sisteminio ir individualaus rizikos faktorių modelis įsipareigojimų nevykdymo tikimybei vertinti". Darbe pristatomi bendri įsipareigojimų nevykdymo tikimybės įvertinimo principai ir alternatyvūs įvertinimo metodai, leidžiantys prognozuoti įsipareigojimų nevykdymo tikimybę. Aprašomi sisteminiai ir individualūs faktoriai, darantys įtaką įsipareigojimų vykdymui ir žemo nemokumo portfelių rizikai (naudojant Pluto ir Tasche metodą [10]). Darbo struktūra susideda iš įvado, banko rizikos aprašymo, įvertinimo metodikos, ekonominio faktorio ir ciklo aprašymo, skaičiavimo pavyzdžių bei išvadų ir rekomendacijų skyrių.

Raktiniai žodžiai: kredito rizika, žemo nemokumo portfeliai, įsipareigojimų nevykdymo tikimybė, sisteminis faktorius, ekonominis faktorius, rizikos vertinimas, rizikos modeliai

Systemic and Individual Risk Factors Model for Low Default Portfolios

Abstract

The topic of this master's thesis is 'Systemic and Individual Risk Factors Model for Low Default Portfolios.' The thesis presents general principles for assessing the probability of default and alternative evaluation methods that allow predicting the likelihood of default. It describes systemic and individual factors that influence default risk and the risk of low creditworthiness portfolios (using the Pluto and Tasche method, as cited in [10]). The structure of the thesis consists of an introduction, a description of bank risk, evaluation methodology, description of the economic factor and cycle, calculation examples, and a conclusion and recommendations section.

Keywords: credit risk, low default portfolios, probability of default, systemic factor, economic factor, risk assessment, risk models.

Turinys

1 Įvadas

Įsipareigojimų nevykdymas yra iššūkis, su kuriuo susiduria kiekvienas bankas, siekdamas užtikrinti stabilumą ir efektyvumą savo veikloje. Tai kompleksiškas procesas, kuriame bankai vertina ir valdo riziką, susijusią su įsipareigojimų nevykdymu. Šiame magistriniame darbe nagrinėjama tema - sisteminio ir individualaus rizikos faktorių modelis įsipareigojimų nevykdymo tikimybei vertinti.

Įsipareigojimų nevykdymo vertinimas yra kiekvieno banko neatsiejama veiklos dalis. Svarbu nustatyti tikimybę, kad tam tikras įsipareigojimas nebus vykdomas, siekiant prognozuoti ir valdyti finansinį rizikos potencialą. Vertinimo modeliai, leidžiantys numatyti ir kvantifikuoti šią tikimybę, tampa esminiu bankų rizikos valdymo įrankiu. Siekiant sukurti efektyvų ir patikimą rizikos vertinimo modelį, dažnai naudojami bendri įvertinimo principai, galintys turėti saryšį su formulėmis iš Pluto ir Dirk Tasche straipsnio[10].

Be bendrų įvertinimo principų, vertinant įsipareigojimų nevykdymo tikimybę, svarbu atsižvelgti tiek į individualius rizikos faktorius, susijusius su konkrečiais įsipareigojimais, tiek į sisteminius faktorius, galinčius turėti įtakos visam bankų sektoriui. Skaičiavimai ir modeliai, naudojami šiam vertinimui, gali keistis priklausomai nuo aplinkybių ir norimo rezultato. Tai reiškia, kad vertinant įsipareigojimų nevykdymo tikimybę, reikia atsižvelgti į kontekstą, apimantį rinkos sąlygas, makroekonomikos rodiklius, turimų istorinių duomenų kiekį ir kitus veiksnius, galinčius turėti įtaką įsipareigojimų vykdymui ar nevykdymui.

2 Banko rizikos

2.1 Rizikos valdymas

Banko veikloje egzistuoja daug įvairios rūšies rizikų, kurių ne visada pavyksta išvengti[3]. Tačiau teisingai sudėliojus rizikos valdymo procesą, galima sumažinti finansines ir nefinansines rizikos pasekmes. Rizikos valdymas yra finansinės, teisinės, strateginės ir saugumo rizikos organizacijos kapitalui bei pajamoms nustatymo, vertinimo ir kontrolės procesas. Bankui gali kilti grėsmės dėl įvairių priežasčių įskaitant finansinį netikrumą, teisinius įsipareigojimus, strateginio valdymo klaidas ir nelaimingus atsitikimus.

Bet kuris nenumatytas įvykis gali turėti tiek mažą, nereikšmingą poveikį, tiek sukelti katastrofišką situaciją ir turėti rimtų pasekmių, tokių kaip didelė finansinė našta ar net banko verslo uždarymas.

Norėdami sumažinti riziką, bankai turi investuoti laiką ir išteklius į rizikos sistemos vystymą ir valdymą, stebėti kylančias rizikas bei nuolat analizuoti ir prognozuoti galimas pasekmes. Nuoseklus, sisteminis ir integruotas požiūris į rizikos valdymą gali padėti nustatyti banko kapitalo dalį, kitaip sakant, pinigų rezervą, norint padengti dėl įvairiausių rūšių rizikų atsiradusias išlaidas. Trys svarbūs rizikos valdymo proceso etapai yra rizikos nustatymas, rizikos analizė ir vertinimas bei rizikos mažinimas ir stebėsena[9]:

- Rizikos nustatymas:

  Rizikos identifikavimas yra grėsmių organizacijai, jos operacijoms ir darbuotojams nustatymo ir vertinimo procesas.

- Rizikos analizė ir vertinimas:

  Rizikos analizė vertina rizikos įvykio tikimybę ir nustato kiekvieno galimo įvykio rezultatą. Atliekant rizikos vertinimą kiekvienas galimas rizikos įvykis yra reitinguojamas pagal reikšmingumą ir pasekmes.

- Rizikos mažinimas ir stebėsena

  Rizikos mažinimas yra planuotas metodų kūrimo bei galimybių procesas, siekiant sumažinti grėsmes. Bankas gali sudaryti ir įgyvendinti rizikos mažinimo strategijas, kad nustatytų, stebėtų ir įvertintų riziką bei pasekmes, susijusias su konkretaus projekto užbaigimu, pvz., naujo produkto kūrimą. Rizikos mažinimas taip pat apima veiksmus, kurių imamasi siekiant spręsti su rizika susijusias problemas.

Kiekvienas iš šių procesų turi būti išvystytas atkreipiant dėmesį į rizikos rūšies specifiką.

2.2 Finansinės rizikos

Finansinė rizika yra rizika, galinti turėti tiesioginę įtaką banko kapitalui, tai reiškia, kad egzistuoja tikimybė patirti finansines išlaidas. Finansinės rizikos pavyzdžiai:

- Kredito rizika

  Kredito rizika kyla, kai klientai neįvykdo arba nevykdo savo įsipareigojimo mokėti skolą, sukeldami visišką arba dalinį nuostolį. Vienas iš pagrindinių kredito rizikos valdymo aspektų yra įsipareigojimo nevykdymo tikimybė (angl. *Probability of default*). Dėl diversifikacijos poveikio sunku įvertinti portfelio bendrą kredito riziką, tačiau bankai turi daug įvairiausių būdų ir analizavimo priemonių, siekdami aiškiau apibrėžti galimą kredito riziką.

- Rinkos rizika

  Rinkos rizika kyla dėl pokyčių finansų rinkos aplinkoje. Tokie pokyčiai apima akcijų kainų, palūkanų normų, valiutų kursų, žaliavų kainų ir kitų ekonominių ar pramonės rinkos veiksnių pokyčius. Siekdami kontroliuoti ir prognozuoti rinkos riziką banko analitikai modeliuoja rinkos modelius bei prognozes naudodamiesi daugeliu statistinių metodų ir testų (pavyzdžiui: *Value at Risk* modelio principai).

- Likvidumo rizika

  Likvidumo rizika atsiranda tada, kai bankas negali įvykdyti savo finansinių įsipareigojimų. Tai apima nefinansuojamos kredito linijos naudojimą, įsipareigojimus suėjus terminui (indėlių atšaukimą arba nepratęsimą) arba išmokėjimą klientams. Netinkamai valdomas likvidumas gali sukelti didelį nuostolį nesėkmingai pardavus investicijas arba patyrus didelių išlaidų išteklių pritraukimui.

2.3 Nefinansinės rizikos

Nefinansinė rizika yra rizika, galinti netiesiogiai turėti įtaką banko kapitalui arba iš vis jos neturėti, tačiau neigiamai paveikti banko reputaciją ir patikimumą. Nefinansinės rizikos pavyzdziai:

- Operacinė rizika

  Ši rizika yra susijusi su organizacijos darbuotojais ir procesais. Organizacijos darbuotojai gali padaryti klaidų, kurios yra finansiškai brangios, arba elgtis nesąžiningai dėl tinkamos priežiūros ir kontrolės trūkumo. Bendrovės taip pat gali patirti verslo trigdžių dėl stichinių nelaimių ar terorizmo.

- Teisinė rizika

  Tai yra rizika, kad bus iškeltas ieškinys, ypač ginčo aplinkoje, arba rizika, kad sandorio šalis nesilaikys sutartų įsipareigojimų. Kadangi banko darbo srityje egzistuoja ypač daug įsipareigojimų sutarčių, teisinė rizika būtinai turi būti valdoma iš vidaus teisės krypties specialistų.

- Modelių rizika

  Tai yra rizika, susijusi su banke naudojamų modelių netinkamumu arba neteisingu naudojimu. Jeigu modelis neatitinka reglamentų, padarytas naudojant klaidingus duomenis, neteisingai įdiegtas arba yra neteisingai naudojamas, bankas gali patirti tiek finansines, tiek ir nefinansines rizikas. Pagal Europos Centrinio Banko reikalavimus kredito rizikos modelius privaloma peržiūrėti kasmet bei pateikti ataskaitas apie peržiūros rezultatus. Modelio valdymo funkciją atliekantys darbuotojai turi būti nepriklausomi nuo modelių kūrėjų.

- Reputacinė rizika

  Tai yra rizika, susijusi su neigiama įtaka banko reputacijai. Tai gali būti neigiamos nuomonės straipsnis spaudoje arba klientų atsiliepimai apie banko veiklą. Jeigu reputacinė rizika yra tinkamai nesuvaldyta, bankas gali prarasti daug klientų dėl nepatikimumo.

2.4 Įsipareigojimų nevykdymo tikimybė

Kaip buvo minėta praeitame skyriuje, bankai gali susidurti su įvairiomis rizikomis, tačiau svarbiausia yra rizika, dėl kurios galima patirti didelių finansinių nuostolių. Kadangi viena iš pagrindinių banko veiklų yra paskolų išdavimas, tad rizika, susijusi su kliento nemokumu, yra viena iš svarbiausių. Taigi PD (angl. *Probability of Default*) yra tikimybė, kad per vienerių metų laikotarpį paskolos gavėjas negalės įvykdyti savo sutartų skolinių įsipareigojimų. Kitaip sakant, taps nemokiu arba blogu klientu. PD įverčiai naudojami apskaičiuojant tikėtinus kredito nuostolius ECL (angl. *Expected Credit Loss*) pagal visas sutartis, kurių įsipareigojimai šiuo metu yra vykdomi. Tikėtini kredito nuostoliai apskaičiuojami pagal formulę:

$$ECL = EAD \times LGD \times PD,$$

kur EAD (angl. *Exposure at Default*) yra skolos pozicija default'o momentu, LGD (angl. *Loss Given Default*) yra nuostolis dėl įsipareigojimų neįvykdymo ir PD yra įsipareigojimų nevykdymo tikimybė.

Vertinant PD reikia aiškiai atskirti vertinimo laikotarpį ir įvertinimo rūšį. Kadangi kliento įsipareigojimo nevykdymas gali priklausyti nuo daugelio skirtingų faktorių, atsiranda galimybė patobulinti banko turimą PD modelį ir išskaičiuoti PD atsižvelgiant į ekonominę situaciją bei dabartinę ekonominę padėtį.

3 PD įvertinimas

3.1 PD įvertinimo konservatyvumo metodas

Egzistuoja daug įvairių PD įvertinimmo metodologijų, tačiau vienas iš veiksmingiausių ir populiariausių metodų yra 2004 metais K. Pluto ir D. Tasche [10] pasiūlytas konservatyvumo metodas. Siekiant tiksliau apskaičiuoti skolininkų nemokumo tikimybes buvo pasiūlyta suskirstyti skolininkus į grupes pagal atitinkamas kategorijas. Tokias skolininkų grupes, sudarytas iš atitinkamų kategorijų skolininkų paskolų, vadinsime skolininkų portfeliu. Kiekvienai kategorijai priskiriamas rangas nuo geriausio iki blogiausio. Tarkime, kad skolininkai iš kategorijos A turėjo mažiau pastebėtų įsipareigojimo neįvykdymo atvejų (arba iš vis neturėjo) negu skolininkai iš kategorijos B, o skolininkai iš kategorijos B turėjo mažiau pastebėtų įsipareigojimo neįvykdymo atvejų negu skolininkai iš kategorijos C. Tada p_i yra kiekvienos kategorijos įsipareigojimo neįvykdymo tikimybė. Tada yra logiška teigti, kad:

$$p_A \leq p_B \leq p_C. \tag{1}$$

Taigi galime sakyti, jog tikimybė, kad portfelyje C atsiras nemokūs skolininkai, yra didžiausia, o kad portfelyje A - mažiausia. Kadangi norime pritaikyti konservatyvumo metodą, sakysime, kad geriausi skolininkai iš kategorijos A turės tiek pat nemokumo atvejų kaip skolininkai iš kategorijos C, tada turime kad:

$$p_A = p_B = p_C. \tag{2}$$

Kadangi portfeliai suskirstyti pagal kategorijas, gali atsitikti taip, kad geriausioje kategorijoje PD lygus 0. Toks portfelis vadinamas žemo nemokumo portfeliu (angl. *low default portfolio*). Akivaizdu, kad nepavyks statistiškai prognozuoti tokio portfelio PD, kadangi faktinis PD bus lygus 0. Tačiau sakyti, jog tikimybė, kad kažkas iš skolininkų negrąžins paskolos, yra nulinė, nėra korektiška ir gali sukelti didelę finansinę riziką. Todėl tolimesniuose skyriuose nagrinėsime kelis atvejus, kaip galima prognozuoti PD geriems portfeliams (be įsipareigojimų neįvykdymo atvejų) bei portfeliams su keliais įsipareigojimų neįvykdymo atvejais.

3.2 Pirmasis atvejis: įsipareigojimo neįvykdymo atvejų nėra

Tarkime, kad turime tris portfelius skolininkų. Portfeliai suskirstyti pagal kategorijas kaip buvo minėta (3.1) skyriuje. Tegul kiekviename portfelyje yra skirtingas skolininkų skaičius n ir portfeliai A, B, C turi atitinkamai n_a, n_b, n_c skolininkų. Iš konservatyvumo sąlygos turime, kad kiekvieno portfelio rizikingumas yra vienodas. Be to, darome prielaidą, kad portfeliai vienas nuo kito nepriklauso ir nei viename portfelyje nebuvo pastebėtų įsipareigojimo neįvykdymo atvejų.

Panagrinėsime portfelį C (skolininkai iš blogiausios kategorijos), pasinaudoję binominio skirstinio tikimybės formule. Galime sakyti, kad tikimybė, kad portfelyje C nebus nemokių skolininkų, yra

$$\mathbf{P}_C = \binom{n_C}{0} p_C^0 (1-p_C)^{n_C} = (1-p_C)^{n_C}. \tag{3}$$

Analogiškai, galime užrašyti tikimybę, kad sujungtose B ir C portfeliuose nebus įsipareigojimų neįvykdymo atvejų

$$\mathbf{P}_{B+C} = \binom{n_B+n_C}{0} p_B^0 (1-p_B)^{n_B+n_C} = (1-p_B)^{n_B+n_C}. \tag{4}$$

Taip pat, jeigu sujungsime visus tris portfelius A, B ir C

$$\mathbf{P}_{A+B+C} = \binom{n_A+n_B+n_C}{0} p_A^0 (1-p_A)^{n_A+n_B+n_C} = (1-p_A)^{n_A+n_B+n_C}. \tag{5}$$

Jeigu turime iki K, kur $K \in N$ skirtingų skolininkų portfelių kategorijų, galime užrašyti bendrą formulę (K-tojo portfelio skolininkai turi mažiausiai įsipareigojimo neįvykdymo atvejų, arba iš vis neturi):

$$\mathbf{P}_{bendras} = \binom{N}{0} p_K^0 (1 - p_K)^N = (1 - p_K)^N, \tag{6}$$

kur $N = \sum_{i=0}^{K} n_i$ (bendras skaičius skolininkų visuose portfeliuose).

Kadangi kiekvienu atveju p_i yra nežinomas dydis, tai galime įvertinti jo tikimybę pasirinkus reikšmingumo lygmenį γ bei laikant, kad $\mathbf{P}$ patenka į pasikliautinį intervalą $(1 - \gamma)$. Tam turime išspręsti lygtį:

$$1 - \gamma \leq (1 - p_K)^N. \tag{7}$$

Iš čia gauname, kad

$$p_K \leq 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{N}}. \tag{8}$$

Kadangi šiame darbe laikysime, kad yra tik trys skolininkų kategorijos ,A, B ir C, užrašysime formulę (5) atvejui

$$p_A \leq 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{n_A + n_B + n_C}}. \tag{9}$$

Analogiškai užrašome (4) ir (3) atvejams:

$$p_B \leq 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{n_B + n_C}}, \tag{10}$$

$$p_C \leq 1 - (1 - \gamma)^{\frac{1}{n_C}}. \tag{11}$$

3.3 Antrasis atvejis: yra bent vienas įsipareigojimų neįvykdymo atvejis

Panagrinėsime atvejį, kai bent viename portfelyje yra bent vienas įsipareigojimų neįvykdymo atvejis. Tokiu atveju galime sakyti, kad bent vienas Bernulio eksperimentas buvo sėkmingas. Kaip ir anksčiau naudosime konservatyvų metodą, t.y., nepaisant to, kad portfeliuose gali būti skirtingas skaičius užfiksuotų įsipareigojimo neįvykdymo atvejų, kiekvieno portfelio PD tikimybė yra vienoda: $p_A = p_B = p_c$.

Tarkime, kad default'ų skaičius A portfelyje yra d_A, B portfelyje d_B ir C portfelyje d_C. Pradėsime nuo atvejo, kai turime tik vieną portfelį C. Pasinaudoję (3) nelygybe turime:

$$1 - \gamma \leq \sum_{i=0}^{d_C} \binom{n_C}{i} p_C^i (1 - p_c)^{n_C - i}. \tag{12}$$

Analogiškai užrašome atvejus, kai yra du portfeliai - B ir C:

$$1-\gamma \leq \sum_{i=0}^{d_B+d_C} \binom{n_B+n_C}{i} p_B^i (1-p_B)^{n_B+n_C-i}. \tag{13}$$

Kai turime 3 portfelius - A, B ir C:

$$1-\gamma \leq \sum_{i=0}^{d_A+d_B+d_C} \binom{n_A+n_B+n_C}{i} p_A^i (1-p_A)^{n_A+n_B+n_C-i}. \tag{14}$$

Užrašykime bendrą formulę, kai turime iki K, kur $K \in N$ skirtingų skolininkų portfelių kategorijų (K-tojo portfelio skolininkai turi mažiausiai įsipareigojimo neįvykdymo atvejų, arba iš vis neturi):

$$1-\gamma \leq \sum_{i=0}^{D} \binom{N}{i} p_K^i (1-p_K)^{N-i} \tag{15}$$

kur $N = \sum_{i=0}^{K} n_i$(bendras skaičius skolininkų) ir $D = \sum_{i=0}^{K} d_i$ (bendras default'ų skaičius).

Kad galėtume išspręsti (12),(13), (14) ir (15) nelygybes ir paskaičiuoti įverčius p_A, p_B, p_C ir p_K, pasinaudosime K.Pluto ir D. Tasche[10] straipsnyje pateikta lygybe:

Jei X yra binominis atsitiktinis dydis su parametrais n ir p, tada bet kokiam $k \in N$ nuo 0 iki n turime kad:

$$\sum_{i=0}^{k} \binom{n}{i} p^i (1-p)^{n-i} = P[X \leq k] = 1 - P[Y \leq p] = \frac{\int_p^1 t^k (1-t)^{n-k-1} dt}{\int_0^1 t^k (1-t)^{n-k-1} dt}, \tag{16}$$

kur Y yra atsitiktinis dydis, pasiskirstęs pagal Beta skirstinį su parametrais $\alpha = k+1$ ir $\beta = n-k$. Skaičiuojant p_i įverčius galima pasinaudoti Excel programoje integruota Beta skirtinio funkcija.

Kadangi šiuo atveju portfeliuose buvo pastebėta įsipareigojimo neįvykdymo atvejų, gali atsitikti taip, kad gautas PD įvertinimas bus labai konservatyvus. Egzistuoja didelė tikimybė, kad bendras faktinis default'ų skaičius portfeliuose, kitaip sakant - bendra portfelio tendencija, bus žymiai mažesnė negu prognozuotas PD. Norint sumažinti konservatyvumo lygį galima įvesti naują kintamąjį L, sušvelninantį prognozes ir priartinantį jas prie realios situacijos:

$$\frac{p_A n_A + p_B n_B + p_C n_C + \cdots p_K n_K}{n_A + n_B + n_C + \cdots n_K} L = \frac{\sum_{i=0}^{K} p_i n_i}{N} L = PD_{faktinis}.$$

Tada

$$L_K = \frac{PD_{faktinis} \times N}{\sum_{i=0}^{K} p_i n_i},$$

kur $N = \sum_{i=0}^{K} n_i$(bendras skolininkų skaičius) ir $PD_{faktinis}$ yra santykis tarp visų pastebėtų default'ų skaičiaus ir bendro skolininkų skaičiaus.

Naudojant kintamąjį L, galime užrašyti naują $p_{K(L)}$ įvertį:

$$p_{K(L)} = L_K p_K.$$

Atitinkamai portfeliams A, B ir C turime :

$$p_{A(L)} = \frac{PD_{faktinis}(n_A + n_B + n_C)}{p_A n_A + p_B n_B + p_C n_C} p_A = L_A p_A, \tag{17}$$

$$p_{B(L)} = \frac{PD_{faktinis}(n_B + n_C)}{p_B n_B + p_C n_C} p_B = L_B p_B, \tag{18}$$

ir

$$p_{C(L)} = \frac{PD_{faktinis} n_C}{p_C n_C} p_C = L_C p_C. \tag{19}$$

Verta paminėti, kad taip yra tik tada, kai portfelyje C buvo užfiksuotų įsipareigojimo neįvykdymo atvejų.

3.4 Trečiasis atvejis: įsipareigojimo neįvykdymo atvejų nėra, veikia sisteminis faktorius

Nagrinėsime atvejį, panašų į (3.2), kur portfelyje nebuvo užfiksuota įsipareigojimo nevykdymo atvejų. Reiktų atkreipti dėmesį, kad portfeliams veikė nepriklausomumo sąlyga. Tai reiškia, kad koreliacijos tarp portfeliuose esančių skolininkų bei įsipareigojimo neįvykdymo atvejų nebuvo. Laikyti, kad koreliacija tarp skolininkų yra nulinė, yra nevisiškai teisinga realiame gyvenime. Kadangi mes gyvename vienos ekonomikos aplinkoje, gali atsirasti daug įvairių veiksmų, kurie gali pakeisti šalies ar pasaulio ekonominę situaciją, o taip pat ir skolininkų, esančių portfelyje, finansinę padėtį. Kitaip sakant, verta panagrinėti PD skaičiavimą laikant, kad veikia bendras sisteminis faktorius.

Sisteminis faktorius yra veiksnys ar būklė, turinti įtakos visai sistemai, pavyzdžiui, ekonomikai ar visuomenei. Kadangi ekonominė padėtis gali turėti įtaką PD reikšmėms, tad dėmesys labiau kreipiamas į ekonominius faktorius. Sisteminis ekonominis veiksnys gali būti infliacijos lygis, kuris gali turėti įtakos prekių ir paslaugų kainoms, pinigų vertei ir bendrai ekonomikos būklei arba bendras pajamų mokestis, darantis įtaką kliento finansinei padėčiai. Sisteminius veiksnius gali būti sunku nustatyti ir išmatuoti, tačiau tai yra svarbus aspektas suprantant sudėtingą sistemos dinamiką.

Toliau nagrinėjama, kaip galima apskaičiuoti PD veikiant ekonominiui faktoriui. Pateikiama tolimesniam darbui reikalinga formulė, pateikta jau minėtame K.Pluto ir D.Tasche[10] straipsnyje. Taigi veikiant sisteminiui faktoriui, pagrindinė lygtis PD skaičiavimui atrodo taip:

$$1-\gamma \leq \int_{\infty}^{-\infty} \varphi(y)\left(1-\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_A)+\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{n_A+n_B+n_c} dy, \tag{20}$$

kur φ yra standartinio normaliojo a. d. tankio funkcija, Φ yra standartinio normaliojo a. d. pasiskirstymo funkcija, Φ^{-1} yra standartinio normaliojo a. d. pasiskirstymo funkcijos atvirkštinė , o ρ - turto koreliacijos koeficientas.

Taip pat pateikiama bendra formulė, kai turima K skirtingų skolininkų portfelių kategorijų:

$$1-\gamma \leq \int_{\infty}^{-\infty} \varphi(y)\left(1-\Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(p_K)+\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}\right)\right)^{N} dy, \tag{21}$$

kur $N = \sum_{i=0}^{K} n_i$(bendras skolininkų skaičius).

3.5 Ketvirtasis atvejis: yra bent vienas įsipareigojimų neįvykdymo atvejis, veikia sisteminis faktorius

Nagrinėjamas analogiškas praeitam skyriui ((3.4)) atvejis. Tik šiuo atveju laikoma, kad tarp skolininkų portfelių pastebėtas bent vienas įsipareigojimo neįvykdymo atvejis. Tokiu atveju, reikia pasinaudoti konservatyvumo (1) ir pasikliautinųjų intervalų metodu (3.3). Tada sujungus formules iš minėtų skyrių, galima išskaičiuoti p_A, p_B ir p_C tikimybes, kai portfelyje pastebėta iki d įsipareigojimų neįvykdymo atvejų.

Taigi, A rango įsipareigojimų neįvykdymo tikimybę galima išskaičiuoti iš nelygybės:

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{d_A+d_B+d_C} \binom{n_A+n_B+n_C}{i} G(p_A,\rho,y)^i (1-G(p_A,\rho,y))^{n_A+n_B+n_C-i} dy, \tag{22}$$

čia

$$G(p_i,\rho,y) = \frac{\Phi^{-1}(p_i)-\sqrt{\rho}y}{\sqrt{1-\rho}}.$$

Atitinkamai p_B rasime iš:

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{d_B+d_C} \binom{n_B+n_C}{i} G(p_B,\rho,y)^i (1-G(p_B,\rho,y))^{n_B+n_C-i} dy, \tag{23}$$

ir p_C

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{d_C} \binom{n_C}{i} G(p_C,\rho,y)^i (1-G(p_C,\rho,y))^{n_C-i} dy. \tag{24}$$

Kadangi skolininkų kategorijų gali būti ir daugiau, toliau pateikiama bendra formulė, turint K skolininkų portfelių kategorijų:

$$1-\gamma \leq \int_{-\infty}^{+\infty} \varphi(y) \sum_{i=0}^{D} \binom{N}{i} G(p_K,\rho,y)^i (1-G(p_K,\rho,y))^{N-i} dy, \tag{25}$$

kur $N = \sum_{i=0}^{K} n_i$ - bendras skolininkų skaičius, $D = \sum_{i=0}^{K} d_i$ - bendras default'ų skaičius.

4 Ekonominis faktorius ir ciklas

4.1 Ekonominis ciklas ir skaičiavimo modelis

Ekonominiai faktoriai yra visi veiksniai, turintys įtakos ekonomikos veiklai ir plėtrai. Jie apima daugelį skirtingų elementų, tokių kaip valstybės ir vyriausybės politikos, rinkos sąlygos, nacionalinės ir tarptautinės ekonomikos, makroekonominės sąlygos ir t. t. Šie faktoriai gali turėti didelį poveikį rizikos modeliams, nes jie gali keistis laikui bėgant ir keisti rizikos lygį bei rizikos vertinimą.

Ekonominis ciklas yra laikotarpis, per kurį ekonomika patiria augimą ir kritimą. Ekonominis ciklas gali būti suskirstytas į keletą fazių, tokių kaip augimo fazė, pikas, krizė ir atsigavimo fazė. Kiekviena iš šių fazių turi savo specifinius ekonominius požymius ir gali turėti įtakos rizikos modeliams.

Kadangi, ekonominiai faktoriai ir ekonominis ciklas gali turėti įtakos rizikos modeliams ir jų rezultatams, norint tiksliau paskaičiuoti PD, galima laikyti, kad veikia sisteminis ekonominis faktorius Z. Kadangi Z yra sisteminis, reiškia PD prognozė priklausys nuo konkretaus laiko momento t, t.y., kad PD skaičiuojamas konkrečiam laiko taškui (angl. *Point in Time PD*, toliau - PD_{PIT}). Kadangi PD_{PIT} priklauso nuo ekonominio ciklo, PD_{PIT} turėtų tiksliau rodyti portfelio klientų dabartinę situaciją. Taigi, norint gauti PD_{PIT} skaičiavimo formulę, kiekvienam klientui, kuriam veikia ekonominis faktorius Z, reikia apibrėžti a. d. X_i:

$$X_i = \beta_i Z_i + \xi_i, \tag{26}$$

kur Z_i ir ξ_i yra nepriklausomi a. d., pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį. Z yra sisteminis ekonominis faktorius, o ξ- individualus faktorius. Darome prielaidą, kad Z_i ir ξ_i vienodi kiekvienam skolininkui. Be to, Z_i ir ξ_i yra nepriklausomos Z ir ξ kopijos.

Tada (26) lygtį dar galima užrašyti taip:

$$\tilde{X} = \beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\tilde{Z} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\tilde{\xi}, \tag{27}$$

čia $\tilde{X} = \frac{X-\mathbb{E}X}{\sigma_x}$, $\tilde{Z} = \frac{Z-\mathbb{E}Z}{\sigma_z}$ ir $\tilde{\xi} = \frac{\xi-\mathbb{E}\xi}{\sigma_\xi}$.

Kadangi $\sigma_{\tilde{X}} = 1$, o $\sigma_{\tilde{X}} = \sqrt{\mathbb{E}\tilde{X}^2 - (\mathbb{E}\tilde{X})^2}$, reikia paskaičiuoti $\mathbb{E}\tilde{X}^2$ ir $(\mathbb{E}\tilde{X})^2$. Tad $(\mathbb{E}\tilde{X})^2$ gaunamas:

$$\begin{aligned}(\mathbb{E}\tilde{X})^2 &= (\mathbb{E}(\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\tilde{Z} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\tilde{\xi})^2\\ &= (\mathbb{E}(\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\tilde{Z}) + \mathbb{E}(\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\tilde{\xi}))^2\\ &= (\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\mathbb{E}(\tilde{Z}) + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\mathbb{E}(\tilde{\xi}))^2\\ &= (\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\times 0) + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\times 0)^2 = 0.\end{aligned}$$

Kai $(\mathbb{E}\tilde{X})^2 = 0$, turime

$$\begin{aligned}1 = \sqrt{\mathbb{E}\tilde{X}^2 - (\mathbb{E}\tilde{X})^2} &= \sqrt{\mathbb{E}\tilde{X}^2}\\ &= \sqrt{\mathbb{E}(\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\tilde{Z} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\tilde{\xi})^2}\\ &= \sqrt{\mathbb{E}((\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\tilde{Z})^2 + 2\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\tilde{Z}\tilde{\xi} + (\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\tilde{\xi}))^2}\\ &= \sqrt{(\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x})^2\mathbb{E}\tilde{Z}^2 + 2\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x}\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x}\mathbb{E}\tilde{Z}\mathbb{E}\tilde{\xi} + (\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x})^2\mathbb{E}\tilde{\xi}^2}\\ &= \sqrt{(\beta\frac{\sigma_z}{\sigma_x})^2 + (\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x})^2}.\end{aligned}$$

Tada

$$
\begin{aligned}
1 &= \sqrt{(\beta \frac{\sigma_z}{\sigma_x})^2 + (\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x})^2} \\
1 &= (\beta \frac{\sigma_z}{\sigma_x})^2 + (\frac{\sigma_\xi}{\sigma_x})^2 \\
&\Rightarrow \frac{\sigma_\xi}{\sigma_x} = \sqrt{1 - (\beta \frac{\sigma_z}{\sigma_x})^2}.
\end{aligned}
$$

Pažymėsime $p = (\beta \frac{\sigma_z}{\sigma_x})^2 = \frac{\beta^2 \sigma_{\tilde{z}}^2}{\beta^2 \sigma_{\tilde{z}}^2 + \sigma_\xi^2}$. Tada įrodysime, kad $\beta \frac{\sigma_z}{\sigma_x}$ yra koreliacija tarp dydžių Z ir X:

$$
\begin{aligned}
\rho(\tilde{X}, \tilde{Z}) = \frac{cov(\tilde{X}, \tilde{Z})}{\sigma_{\tilde{x}} \sigma_{\tilde{z}}} &= cov\left(\beta \frac{\sigma_z}{\sigma_x} \tilde{Z} + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_x} \tilde{\xi}, \tilde{Z}\right) \\
&= \beta \frac{\sigma_z}{\sigma_x} cov(\tilde{z}, \tilde{}) + \frac{\sigma_\xi}{\sigma_x} cov(\tilde{\xi}, \tilde{Z}) = \beta \frac{\sigma_Z}{\sigma_x} = \sqrt{p}.
\end{aligned}
$$

Tada turime, kad:

$$
\tilde{X} = \sqrt{p} \tilde{Z} + \sqrt{1-p} \tilde{\xi}. \tag{28}
$$

4.2 Metinio PD_{PIT} ir ekoniminio ciklo PD_{TTC} skaičiavimai

Dabar galime aprašyti PD_{PIT} skaičiavimą. Kaip jau buvo minėta, PD_{PIT} turi parodyti PD prognozes priklausomai nuo konkretaus taško ekonominiame cikle, nes priklauso nuo sisteminio faktoriaus Z[5].

Apibrėžimas 1 *PD_{PIT} (angl. Point in Time), žymima $p_i(Z)$, yra tikimybė, kad per vienerius metus skolininkas negalės įvykdyti savo įsipareigojimų, su sąlyga, kad veikia ekonominis faktorius Z, turintis reikšmę z.*

Taip pat apibrėžkime PD_{TTC} (angl.*Through the Cycle*) tikimybę.

Apibrėžimas 2 *PD_{TTC} (angl.Through the Cycle), žymima q_i, yra PD_{PIT} vidurkis, t. y. vidurkis visų įmanomų ekonominių stadijų, bei sisteminių faktorių:*

$$
q_i = \mathbb{E}_Z[p_i(Z)] = \int_{\infty}^{-\infty} p_i(z) \phi(z) dz, \tag{29}
$$

kur ϕ standartinio normaliojo skirstinio tankio funkcija, o q_i priklauso nuo informacijos, turimos momentu t.

Toliau pateikiami apibrėžimai portfeliams, o ne konkrečiam skolininkui.

Apibrėžimas 3 *Portfelio P tikimybė PD_{PIT} (Point in Time) $p_p(Z)$ yra kiekvieno skolininko iš portfelio P PD_{PIT} vidurkis, su sąlyga, kad veikia ekonominis faktorius Z, turintis reikšmę z:*

$$p_P(Z) = \frac{1}{n_P}\sum_{i\in P} p_i(z). \tag{30}$$

Apibrėžimas 4 *Portfelio P tikimybė PD_{TTC} q_p yra kiekvieno skolininko iš portfelio P PD_{TTC} vidurkis:*

$$q_P(Z) = \frac{1}{n_P}\sum_{i\in P} q_i. \tag{31}$$

Pasinaudojus (28) formule , galima rasti $p_i(z)$:

$$p_i(z) = \mathbb{P}[X_i < B_i|Z]. \tag{32}$$

Apibrėžkime įvykį I, kai $\tilde{X} = \sqrt{p}\tilde{Z} + \sqrt{1-p}\tilde{\xi}$ nėra žemiau B_i reikšmės:

$$I = \begin{cases} 1, \ kai \ \tilde{X} = \sqrt{p}\tilde{Z} + \sqrt{1-p}\tilde{\xi} < B_i, \\ 0, \ kitur. \end{cases} \tag{33}$$

Tada

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[I = 1|Z] &= \mathbb{P}\left(\xi < \frac{B_i - \sqrt{p}Z}{\sqrt{1-p}}\right) \\ &= \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{p}Z}{\sqrt{1-p}}\right). \end{aligned}$$

Taigi turime

$$p_i(Z) = \mathbb{P}[X_i < B_i|Z] = \Phi\left(\frac{B_i - \sqrt{p}Z}{\sqrt{1-p}}\right) \tag{34}$$

ir atitinkamai

$$p_P(Z) = \Phi\left(\frac{B - \sqrt{p}Z}{\sqrt{1-p}}\right). \tag{35}$$

Pasinaudojus (29) ir (31) apibrėžimais, galima užrašyti, kad

$$q_i = \mathbb{E}_Z[p_i] = \Phi(B_i) \tag{36}$$

ir

$$q_P = \Phi(B). \tag{37}$$

Darykime prielaidą, kad turima informacija apie skolininkų portfelį ir žinoma, kiek jame yra įsipareigojimų neįvykdymo atvejų d_t momentu t. Tada galima pertvarkyti (35) formulę:

$$\Phi^{-1}(d_t) = \frac{B - \sqrt{p}Z_t}{\sqrt{1-p}}, \tag{38}$$

$$B - \sqrt{p}Z_t = \Phi^{-1}(d_t)\sqrt{1-p}, \tag{39}$$

$$Z_t = \frac{B - \Phi^{-1}(d_t)\sqrt{1-p}}{\sqrt{p}}. \tag{40}$$

Kad būtų galima apskaičiuoti Z reikšmę momentu t, laikoma, kad:

$$B = \frac{m}{\sqrt{1+\sigma^2}} \tag{41}$$

ir

$$p = \frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}. \tag{42}$$

Įstatome (41) ir (42) formules (M.Carlehed ir A.Petrov[5]) į (40) formulę:

$$\begin{aligned}
Z_t &= \frac{\frac{m}{\sqrt{1+\sigma^2}} - \Phi^{-1}(d_t)\sqrt{1-\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}}}{\sqrt{\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}}} \\
&= \frac{\frac{\sigma}{1+\sigma^2}m - \Phi^{-1}(d_t)\sqrt{(\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2})(1-\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2})}}{\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}} \\
&= \frac{\frac{\sigma}{1+\sigma^2}m - \Phi^{-1}(d_t)\sqrt{(\frac{\sigma^4+\sigma^2-\sigma^4}{(1+\sigma^2)^2})}}{\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}} \\
&= \frac{\frac{\sigma}{1+\sigma^2}m - \Phi^{-1}(d_t)\frac{\sigma}{1+\sigma^2}}{\frac{\sigma^2}{1+\sigma^2}}.
\end{aligned}$$

Taigi turime

$$Z_t = \frac{m - \Phi^{-1}(d_t)}{\sigma}, \tag{43}$$

kur m ir σ atitinkamai yra turimos Default'o serijos $\Phi^{-1}(d_t)$ duomenų vidurkis ir standartinis nuokrypis, o d_t įsipareigojimų neįvykdymo dažnis momentu t, toks kad:

$$d_t = \frac{(d_{1metu})}{n_t},$$

čia n_t - skolininkų skaičius momentu t ir d_{1metu} - laiko momentu t užfiksuotas įsipareigojimų neįvykdymo skaičius per metus.

Taigi yra aprašytos visos reikalingos formulės metų PD ir ekonominio ciklo PD skaičiavimams. Akivaizdu, kad prognozės tikslumas priklauso nuo turimos informacijos apie skolininkus, portfelius ir ekonominius rodiklius, įeinančius į faktorių Z skaičiavimus, kiekio ir kokybės. Deja, ne visada informacijos užtenka, norint tiksliai nustatyti ekonominio ciklo PD, nes pagal gerąsias praktikas reikia turėti mažiausiai 5 metų laikotarpio duomenis (optimaliausias variantas - 10 metų). Kadangi duomenų trūkumas yra dažna problema bankuose, jau turima metų PD formulė yra taip modifikuojama:

$$p_P(Z) = \Phi\left(\frac{B - \sqrt{p}Z}{\sqrt{1-p}}\right), \tag{44}$$

kur B reikšmė turi būti nustatyta iš makroekonominės prognozės, tačiau norint tai padaryti,reikia turėti pakankamai daug statistiškai pagristų duomenų.

Toliau vietoje B reikšmės įstatomos savo prognozės ir ekonominiai tikslai, atsižvelgiant į PD skaičiavimus iš (3.3) skyriaus, kadangi ypač tame skyriuje PD skaičiavimui nereikėjo turėti papildomų duomenų.

Tarkime, kad

$$B = \Phi^{-1}(PD_{prognozuota}), \tag{45}$$

o

$$PD_{prognozuota} = PD_{modelio} \times \beta_t, \tag{46}$$

kur $PD_{modelio}$ yra suprognozuota tikimybė pagal (3.3) skyriaus formules, β_t yra koeficientas priklausantis nuo konkretaus taško t.

Aprašysime β_t:

$$\beta_t = \frac{PD_{tikslas}}{\mathbb{E}(PD_{modelio})}, \tag{47}$$

kur $PD_{tikslas}$ nustatomas pagal dabartinę ekonominę padėtį (pvz., jeigu tai yra būsto kreditas, galima daryti prognozes žiūrint į pasirinkta ekonominį rodiklį arba nustatyti norimą PD tikslą, atsižvelgiant į dabartinę banko finansinę padėtį).

Tada turima, kad:

$$PD_{prognozuota} = PD_{modelio} \times \frac{PD_{tikslas}}{\mathbb{E}(PD_{modelio})} \tag{48}$$

ir įstatoma į (44) formulę:

$$p_P(Z) = \Phi\left(\frac{\Phi^{-1}(PD_{prognozuota}) - \sqrt{p}Z}{\sqrt{1-p}}\right). \tag{49}$$

Taigi, gautas dar vienas variantas PD įvertinimui.

4.3 Ekonominio ir individualaus faktoriaus pasiskirstymai

Kadangi aprašant ekonominio arba individualaus faktorių modelį dažnai daroma prielaida, kad faktoriai yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, šiame darbe aptariami kiti galimi faktorių pasiskirstymo variantai. Svarbų vaidmenį įsipareigojimo neįvykdymo tikimybei vertinti atlieka (28) modelis, dar kitaip vadinamas Mertono vienapusiško faktoriaus modeliu. Remiantis 4.1 skuriaus skaičiavimais, norint aprašyti modelį reikia, kad X_i (26) turėtų pirmą ir antrą momentą. Kadangi X_i modelis sudarytas iš ekonominio ir individualus faktorių sumos, patogu naudoti faktorių normalaus pasiskirstymo prielaidą, nes rezultatas X_i irgi turi normalų pasiskirstymą. Taigi norint pakeisti faktorių pasiskirstymus, reikia ieškoti Mertono modelio alternatyvos. Tačiau įsipareigojimo nevykdymo tikimybę galima įvertinti nenaudojant šio modelio. Reikia ieškoti pasiskirstymo funkcijos su tokiomis savybėmis kaip normaliojo pasiskirstymo. Vienas iš tokių skirstinių yra Koši skirstinys [6]:

Apibrėžimas 5 *Tarsime, atsitiktinis dydis X yra pasiskirstę pagal standartinį Koši, jei* $X \sim Cauchy(0;1)$

Teiginys 1 *Tarkime, kad X ir Y yra nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai, pasiskirstę pagal standartinį Koši su parametrais* m_X, m_Y *ir* γ_X, γ_Y. *Tada, jei* $X \sim Cauchy(0;1)$ *ir* $Y \sim Cauchy(0;1)$, *tai dydis* $Z = aX + bY$ *irgi yra pasiskirstęs pagal Koši:* $Z \sim Cauchy(0; a+b)$

Tad, naudojantis 3.3 ir 4.2 informacija, vertinama įsipareigojimo nevykdymo tikimybė veikiant ekonominiam bei individualiam faktoriui, kai faktoriai yra pasiskirstę pagal standartinį Koši pasiskirstymą.

Remiantis prielaida, kad ekonominis ir individualus faktoriai yra pasiskirstę pagal Košį skirtinį, išvedamas $p_i(z)$. Naudojamas (26) modelis X_i kiekvienam klientui, kuriam veikia ekonominis faktorius Z:

$$X_i = \beta_i Z_i + \xi_i, \tag{50}$$

kur Z_i ir ξ_i yra nepriklausomi a.d., pasiskirstę pagal standartinį Koši skirstinį. Z yra sisteminis ekonominis faktorius, o ξ- individualus faktorius. Darome prielaidą, kad Z_i ir ξ_i vienodi kiekvienam skolininkui. Tada įsipareigojimų nevykdymo tikimybę galima rasti taip:

$$p_i(z) = \mathbb{P}[X_i < B_i|Z]. \tag{51}$$

Toliau apibrėžiamas įvykis J, kai $\tilde{X} = \beta\tilde{Z} + \tilde{\xi}$ nėra žemiau x_p reikšmės:

$$J = \begin{cases} 1, & kai\ \tilde{X} = \beta\tilde{Z} + \tilde{\xi} < x_p, \\ 0, & kitur. \end{cases} \tag{52}$$

Tada

$$\begin{aligned} \mathbb{P}[J = 1|Z] &= \mathbb{P}(\xi < x_p - \beta Z) \\ &= K(x_p - \beta Z). \end{aligned}$$

Taigi turima:

$$p_i(Z) = \mathbb{P}[X_i < x_p|Z] = K(x_{p_i} - \beta Z), \tag{53}$$

kur K - Koši atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija.

Atitinkamai:

$$p_P(Z) = K(x_p - \beta Z) \tag{54}$$

Naudojant apibrėžimą 1 mes galime perrašyti (54) formulę taip:

$$p_P(Z) = K(K^{-1}(p) - \beta Z). \tag{55}$$

Tarkime, kad turimas skolininkų portfelis. Be to, jame pastebėtas įsipareigojimų neįvykdymo atvejų skaičius d_t momentu t. Pasinaudojus (15) ir (55), galima užrašyti bendrą formulę:

$$\begin{aligned} p_P(Z) &= \mathbb{P}[X < x_p|Z] && (56) \\ &= \sum_{i=0}^{D} \binom{N}{i} K(K^{-1}(p) - \beta Z)^i (1 - K(K^{-1}(p) - \beta Z))^{N-i} && (57) \end{aligned}$$

Pasinaudojus apibrėžimais (29),(31) ir formulę (55) galime užrašyti, kad

$$\begin{aligned} q_P &= \mathbb{E}_Z[p_P] && (58) \\ &= \int_{\infty}^{-\infty} p_P(z) \sum_{i=0}^{D} \binom{N}{i} K(K^{-1}(p) - \beta Z)^i (1 - K(K^{-1}(p) - \beta Z))^{N-i} dz. && (59) \end{aligned}$$

Dabar galima pasinauduoti γ pasiskirstymo lygmenimis ir užrašyti bendrą formulę:

$$1-\gamma \le \int_{\infty}^{-\infty} p_P(z) \sum_{i=0}^{D} \binom{N}{i} K(K^{-1}(p)-\beta Z)^i (1-K(K^{-1}(p)-\beta Z))^{N-i} dz, \tag{60}$$

kur $p_P(z)$ - Koši atsitiktinio dydžio tankio funkcija, K - Koši atsitiktinio dydžio pasiskirstymo funkcija ir K^{-1} - Koši a. d. funkcija.

5 Pavyzdžiai

Šiame skyriuje pateikiami keli įsipareigojimo nevykdymo tikimybių skaičiavimo pavyzdžiai. Siekiant geriau matyti skirtumus tarp skaičiavimų, laikoma, kad egzistuoja tik 3 portfeliai su skolininkais iš A, B ir C kategorijų (kaip aprašyta (3.1) skyriuje).

5.1 Pavyzdys, kai įsipareigojimo neįvykdymo atvejų nėra

Tarkime, turime tris tarpusavyje nepriklausomų skolininkų portfelius, išskirstytus į 3 skolininkų klases - A, B ir C - kuriuose $n_A = 350$, $n_B = 150$ ir $n_C = 500$. Pritaikius konservatyvumo metodą, kai nei vienas iš trijų portfelių neturi įsipareigojimo neįvykdymo atvejų: $d_A = d_B = d_c = 0$, apskaičiuojami tikimybių viršutiniai rėžiai su skirtingomis γ reikšmėmis:

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99.9%
$\hat{p_A}$	0.069%	0.139%	0.230%	0.299%	0.459%	0.688%
$\hat{p_B}$	0.107%	0.213%	0.354%	0.460%	0.706%	1.057%
$\hat{p_C}$	0.139%	0.277%	0.459%	0.597%	0.917%	1.372%

1 lentelė: Tikimybių $\hat{p_A}, \hat{p_B}$ ir $\hat{p_C}$ viršutiniai rėžiai

Iš lentelės matyti, kad didėjant pasikliautinio intervalo reikšmei, didėja ir įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės įvertis. Taip pat galima pastebėti, kad visur galioja (1) nelygybė.

5.2 Pavyzdys, kai yra bent vienas įsipareigojimo neįvykdymo atvejis

Nagrinėjami jau aprašyti trys portfeliai, kuriuose $n_A = 350$, $n_B = 150$ ir $n_C = 500$, bet daroma prielaida, kad buvo pastebėti d įsipareigojimų nevykdymo atvejai: $d = d_A + d_B +$

d_C, atitinkamai portfelyje $d_A = 0, d_B = 1, d_C = 3$. Pasinaudojus 3.3 skyriuje aprašytomis formulėmis, apskaičiuojami įsipareigojimų neįvykdymo tikimybių įverčiai:

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99.9%
$\hat{p_A}$	0.366%	0.509%	0.666%	0.772%	0.999%	1.297%
$\hat{p_B}$	0.563%	0.782%	1.022%	1.185%	1.532%	1.988%
$\hat{p_C}$	0.731%	1.016%	1.326%	1.537%	1.987%	2.576%

2 lentelė: Tikimybių $\hat{p_A}, \hat{p_B}$ ir $\hat{p_C}$ viršutiniai rėžiai.

Taip pat panaudojus kintamąjį L, minėtą 3.3 skyriuje, pateikiami tikimybių $\hat{p_A}, \hat{p_B}$ ir $\hat{p_C}$ viršutiniai rėžiai. Tad šiuo atveju skaičiavimams naudojamos (17), (18) ir (19) formulės.

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99.9%
$\hat{p_{A_L}}$	0.256%	0.256%	0.255%	0.232%	0.230%	0.301%
$\hat{p_{B_L}}$	0.511%	0.507%	0.460%	0.464%	0.465%	0.596%
$\hat{p_{C_L}}$	0.585%	0.596%	0.609%	0.615%	0.663%	0.697%

3 lentelė: Tikimybių $\hat{p_A}, \hat{p_B}$ ir $\hat{p_C}$ viršutiniai rėžiai pritaikus kintamąjį L.

Akivaizdu, kad ir šiems atvejams irgi galioja (1) nelygybė. Be to, pastebima, kad tikimybių įverčiai lentelėje 3 atrodo mažiau konservatyvūs nei 2 lentelėje. Tačiau, lyginant su variantu, kai įsipareigojimų nevykdymo atvejų nebuvo (1 lentelė), rezultatai rodo didesnes tikimybes.

5.3 Pavyzdys, kai įsipareigojimų nevykdymo atvejų nėra, veikia sisteminis faktorius

Vėl nagrinėjami trys jau minėti portfeliai, kuriuose $n_A = 350$, $n_B = 150$ ir $n_C = 500$. Šį kartą, įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra priklausomos nuo sisteminio faktoriaus, tačiau nei viename portfelyje nebuvo pastebėti įsipareigojimų nevykdymo atvejai ir ρ reikšmė yra 0.12%. Skaičiavimams naudojama (20) formulė iš 3.4 skyriaus. Gautus rezultatai pateikti lentelėje:

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99.9%
$\hat{p_A}$	0.063%	0.167%	0.392%	0.59%	1.269%	2.67%
$\hat{p_B}$	0.077%	0.207%	0.483%	0.726%	1.537%	3.177%
$\hat{p_C}$	0.119%	0.32%	0.72%	1.07%	2.201%	4.413%

4 lentelė: Tikimybių $\hat{p_A}, \hat{p_B}$ ir $\hat{p_C}$ viršutiniai rėžiai.

Matome, kad visiems atvejams galioja (1) nelygybė. Be to, pastebime, kad tikimybių įverčiai 4 lentelėje turi didesnes tikimybes negu tai buvo pastebėta 1 lentelėje.

5.4 Pavyzdys, kai yra bent vienas įsipareigojimo neįvykdymo atvejis, veikia sisteminis faktorius

Nagrinėsime tuos pačius portfelius: $n_A = 350$, $n_B = 150$ ir $n_C = 500$. Šį kartą įsipareigojimų neįvykdymo tikimybės yra priklausomos nuo sisteminio faktoriaus, tačiau turima įsipareigojimų nevykdymo atvejų: $d = d_A + d_B + d_C$, atitinkamai $d_A = 0, d_B = 1, d_C = 3$. ρ reikšmė nesikeičia $\rho = 0.12\%$. Skaičiavimams naudosime (22), (23) ir (24) formules iš 3.5 skyriaus. Gauti rezultatai:

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99.9%
$\hat{p_A}$	0.124%	0.335%	0.722%	1.137%	2.412%	4.859%
$\hat{p_B}$	0.181%	0.418%	0.836%	1.256%	2.541%	4.898%
$\hat{p_C}$	0.363%	0.755%	1.382%	1.961%	3.678%	6.454%

5 lentelė: Tikimybių $\hat{p_A}, \hat{p_B}$ ir $\hat{p_C}$ viršutiniai rėžiai.

Akivaizdu, kad atvejams taip pat galioja (1) nelygybė. Be to galima pastebėti, kad tikimybių įverčiai 5 lentelėje lyginant su variantu, kai nebuvo įsipareigojimų nevykdymo atvejų (4 lentelė), rodo didesnes tikimybes.

5.5 Pavyzdys, kai veikia ekonominis faktorius Z

Nagrinėsime įsipareigojimo nevykdymo tikimybes įvertinimo modelį, kuris buvo aprašytas 4.1 skyriuje. Kadangi dabar sisteminis faktorius yra ekonominis faktorius Z, norėdami gauti p_i įverčius, mums rekia turėti Z_t faktoriaus reikšmes. Z_t reikšmės paskaičiuosime pagal (43) formulę. Tad, sugeneruosime 5 metų įsipareigojimų nevykdymų pastebėtus atvejus laikydami, kad vienas periodas yra vienas metų ketvirtis. Atsižvelgiant į anksčiau nauduotus portfelius laikysime, kad minimalus faktinis įsipareigojimų nevykdymų skaičius sudaro 0%, o maksimalus 0.4% viso skolininkų portfelio. Taigi, turime 5 metų įsipareigojimo neįvykdymo atvejų skaičių, (d_t kiekvienam periodui) Turedami visą išvardintą informaciją galėsime paskaičiuoti sisteminio faktoriaus Z_t reikšmes iš (43) formules. Tada, galesime paskaičiuoti p_i įverčius veikiant ekonominiam fartoriui pagal modelį (44). Skaičiavimams yra naudojama Excel programa. Rezultatai yra pateikti lentelėje, kur kiekvienos tikimybės įvertis yra 5 metų gautų $\hat{p}_i$ reikšmių vidurkis:

γ	50%	75%	90%	95%	99%	99.9%
$\hat{p_A}$	0.726%	0.97%	1.232%	1.406%	1.773%	2.218%
$\hat{p_B}$	0.061%	1.422%	1.81%	2.069%	2.617%	3.328%
$\hat{p_C}$	1.339%	1.801%	2.293%	2.625%	3.326%	4.236%

6 lentelė: Tikimybės $\hat{p_A}, \hat{p_B}$ ir $\hat{p_C}$ naudojant $\hat{p_A}, \hat{p_B}$ ir $\hat{p_C}$ įverčius iš (2) lentelės.

Matome, kad atvejams taip pat galioja (1) nelygybė. Be to galima pastebėti, kad tikimybių įverčiai 6 lentelėje lyginant su variantu, kai buvo įsipareigojimų nevykdymo atvejų ir veikiant sisteminiui faktoriui (5 lentelė), rodo didesnes tikimybes, išskyrus paskutinį stulpelį. Tai gali reikšti, kad įverčiai 6 lentelėje yra tikslesni, kai yra atsižvalgiama į ekonominę padėtį.

6 Išvados ir rekomendacijos

Šiame magistriniame darbe nagrinėti sisteminio ir individualaus rizikos faktorių modeliai įsipareigojimų nevykdymo tikimybei vertinti. Darbe pristatomi bendri įsipareigojimų nevykdymo tikimybės įvertinimo principai pagal K. Pluto ir D. Tasche straipsnyje pateiktas metodikas. Taip pat pasiūlyti alternatyvūs įvertinimo metodai, leidžiantys prognozuoti įsipareigojimų nevykdymo tikimybę.

Nagrinėjant tikimybės įvertinimo principus pagal K. Pluto ir D. Tasche[10] išskirti keturi atvejai: 1) kai nebuvo užfiksuota įsipareigojimų nevykdymo atvejų, 2) kai buvo užfiksuotas bent vienas įsipareigojimų nevykdymo atvejis, 3) kai veikiant sisteminiu faktoriui nebuvo užfiksuota įsipareigojimų nevykdymo atvejų ir 4) kai veikiant sisteminiu faktoriui buvo užfiksuotas bent vienas įsipareigojimų nevykdymo atvejis. Pagal pateiktus pavyzdžius kiekvienam atvejui, pastebėta, kad visur veikia konservatyvumo sąlyga, taip pat tikimybių įvertinimo rezultatai priklausomi nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens.

Remiantis M.Carlehed ir A.Petrov[5] straipsniu, pateiktas alternatyvus metodas įsipareigojimų nevykdymo tikimybei vertinti, veikiant ekonominiam faktoriui Z. Taip pat aprašytas PD įvertinimo modelis priklausomai nuo laiko momento t, kitaip sakant nuo konkretaus ekonomikos ciklo stadijos (laiko taško). Naudojant generuotus įsipareigojimų nevykdymo atvejų skaičius, suskaičiuota PD tikimybė, priklausanti nuo konkretaus laiko taško ir ekonominio faktoriaus. Rezultatai pateikti kaip visų gautų tikimybių vidurkis, priklausomai nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens. Rezultatai parodė, kad naudojant ekonominių faktorių modelį bei įstatant norimas prognozes, galima tiksliau ir mažiau konservatyviau įvertinti įsipareigojimų nevykdymo tikimybę.

Nagrinėjant modelį veikiant ekonominiam faktoriui, pasiūlyta skaičiavimo formulė su prielaidą, kad naudojami atsitiktiniai dydžiai turi standartinį Koši pasiskirstymą. Gauta formulė, kurią galima naudoti PD įvertinimui veikiant ekonominiu faktoriui, priklausomam nuo pasirinkto reikšmingumo lygmens.

Tęsiant darbą, galima išanalizuoti daugiau atvejų PD vertinimui, naudojant Koši pasiskirstymą, bei įvertinti, ar toks pasiskirstymas tinka realiems duomenims bei ekonominio faktoriaus reikšmės prognozavimui. Taip pat galima bandyti išvesti alternatyvu metodą įsipareigojimo tikimybei vertinti priklausomai nuo konkretaus taško, laikant, kad duomenys nėra pasiskirstę pagal normalųjį bei Koši pasiskirstymus. Praktinis PD įvertinimo metodų patikrinimas reikalauja realių istorinių duomenų.

7 Literatūra

[1] Basel Committee on Banking Supervision: Studies on the Validation of Internal Rating Systems: Basel, 2005, 120 p.

[2] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): Bank Failures in Mature Economies. 2004, 13 p.

[3] Basel Committee on Banking Supervision (BCBS): Guidance on the application of the Core Principles for Effective Banking Supervision to the regulation and supervision of institutions relevant to financial inclusion. 2016, 5-29 p.

[4] C. Bluhm, L. Overbeck, C. Wagner, New York: An Introduction to Credit Risk Modeling: 2003, 384 p.

[5] Carlehed M., Petrov A. (2012), A methodology for point-in-time-through-the-cycle probability of default decomposition in risk classification systems.

[6] Charles Grinstead, J. Laurie Snell. Introductory Probability (2021)

[7] Grigutis, A: Overview of interactions between some probability distributions and probability of default. Straipsnio rankraštis: URL: https://klevas.mif.vu.lt/ andriusg/preprintai.html

[8] Kubilius, J: Tikimybių teorija ir matematinė statistika. 1996.

[9] Lietuvos banko valdybos 2006 11 09 nutarimas Nr. 138: Dėl Kapitalo pakankamumo skaičiavimo bendrosios nuostatos. 2006, Vilnius

[10] Pluto K.,Tasche D. (2004), Estimating Probabilities of Default for Low Default Portfolios.

Priedai

Python programos kodas 3.2 atvejui:

```
import seaborn as sns
import pandas as pd
pd.options.display.float_format = '{:.6f}'.format
import matplotlib.pyplot as plt
from scipy.stats import beta

#create gammas
gamma_list = [0.5, 0.75, 0.90, 0.95, 0.99, 0.999]
#create df
nrA = 350
nrB = 150
nrC = 500

df = pd.DataFrame(
{'portfolio': ['Portfolio A', 'Portfolio B', 'Portfolio C'],
 'nr_of_defaults': [0,1,3], #0,1,3
 'nr_of_customers': [nrA, nrB, nrC],
 'zero_nr_of_defaults': [0,0,0], #0,1,3
 }
)
df['total_customers'] = [nrA + nrB + nrC, nrB + nrC, nrC]

#create function
def no_defaults(gamma = 0.9, count_1 = None, count_2= None, count_3 = None):
    if  None not in (count_1, count_2, count_3):
        return  1 - (1-gamma)**(1/(count_1+count_2+count_3)) #format, '.10f')

    elif (None not in (count_1, count_2)) & (count_3 is None):
      return 1 - (1-gamma)**(1/(count_1+count_2))
```

```
    elif (count_1 is not None) & (count_3 is None) & (count_2 is None):
      return 1 - (1-gamma)**(1/(count_1))

    else: print('smth wrong')

results = []
for g in gamma_list:
    a = no_defaults(gamma=g, count_1 = nrA, count_2= nrB, count_3 = nrC)
    b = no_defaults(gamma=g, count_1 = nrB, count_2= nrC)
    c = no_defaults(gamma=g, count_1 = nrC)
    results.append([g, a, b, c])

result = pd.DataFrame(results) #, columns={'portfolio', 'gamma', 'value'}
```

Python programos kodas 3.3 atvejui:

```
results = []
for portf in df['portfolio'].unique():

    portfolio = df[df['portfolio'] == portf]
    a = 4 #portfolio['nr_of_defaults'] + 1
    b = portfolio['total_customers'] - 1

    for g in gamma_list:
        #print(f" for {g}: {round(beta.ppf(g,a,  b)*100, 2)}")
        p = beta.ppf(g,a,  b)*100
        results.append([portf, g, p[0]])

result = pd.DataFrame(results) #, columns={'portfolio', 'gamma', 'value'}
result.columns = ['portfolio', 'gamma', 'value'] result.pivot(index='portfolio', columns='value
```

```
result['gamma'] = result['gamma']*100
```

R programos kodas 3.4 ir 3.5 atvejams:

```
 PTLinkFunc <- function(pd, rho, y) {

  # Is used in multiperiod Pluto & Tasche model for conditional PD estimation (given conditio
  # correlation with systematic factor and systematic factor realization)
  # Args:
  #   pd:             unconditional PD
  #   rho:            correlation with systematic factor
  #   y:              realization of systematic factor
  # Returns:
  #                   estimated conditional PD
  return(pnorm((qnorm(pd) - sqrt(rho) * y) / (sqrt(1 - rho))))
}

PTProbLessKdef <- function(portf.uncond, portf.def, pd, rho, rSt) {
  # Estimates probability of occurrence of less than portf.def defualts given PD for Multi-peri
  # Args:
  #   portf.uncond:   unconditional portfolio distribution from the worst to the best credit qu
  #   portf.def:      number of defaults in a given rating class
  #   rho:            correlation with systematic factor #   rSt:            realizations of sy
  # Returns:
  #                   mean probability across simulations of occurrence of less than portf.def

  piSt.onePer <- 1 - PTLinkFunc(pd, rho, rSt)
  piSt <- 1 - apply(piSt.onePer, 1, prod)
  s = 0
  for (i in seq.int(0, portf.def)) {
    s <- s + choose(portf.uncond, i) * (piSt^i) * ((1 - piSt)^(portf.uncond - i))
   }
```

```
  return(mean(s))
}

PTMultiPeriodPD <- function(portf.uncond, portf.def, rho, cor.St, kT, kNS = 1000, conf.interval
  # Estimates PDs according to multi-period Pluto & Tasche model
  # Args:
  #   portf.uncond:   unconditional portfolio distribution from the worst to the best credit qu
  #   portf.def:      number of defaults in a given rating class
  #   rho:            correlation with systematic factor
  #   cor.rSt:        correlation matrix of systematic factor realization through the time. In
  #   kT:             number of periods used in the PD estimation
  #   kNS:            number of simulations for integral estimation (using Monte-Carlo approach
  #   conf.interval:  confidence interval
  # Returns:
  #                   conditional PDs according to multi-period Pluto & Tasche model
  if (length(cor.St) == 1) {
    cor.ST <- matrix(numeric(kT * kT), nrow = kT) #Correlation matrix of systematic factors
    for (i in 0:(kT - 1))
      for (j in 1:kT)
        cor.ST[i * kT + j] <- cor.St ^ abs(i - j + 1)
  } else {
    cor.ST <- cor.St
  }

  r.num <- length(portf.uncond)
  r.PD <- rep(0, r.num)
  portf.CNum <- rev(cumsum(portf.uncond))
  portf.CDef <- rev(cumsum(portf.def))

  rSt <- MASS::mvrnorm(n = kNS, rep(0, kT), Sigma = cor.ST)

  for (r in seq_len(r.num)) {  # Iterating through rating classes
```

```
    f <- function(x) PTProbLessKdef(portf.CNum[r], portf.CDef[r], x, rho, rSt) - 1 + conf.inter
    r.PD[r] <- uniroot(f, c(0, 1))$root
  } return(rev(r.PD)) }

#create gamma
gamma_list <- c(0.5, 0.75, 0.90, 0.95, 0.99, 0.999)

# PD calibration using Multi-period Pluto and Tasche approach
#without defaults

portfolio <- c(1000,650,500)
defaults <- c(0,0,0)

result <- list() for (i in 1:length(gamma_list)) {
  result[[i]] <- PTMultiPeriodPD(portfolio, defaults, 0.12, cor.St = 0.12,kT = 1,  kNS = 1000,
}

#with defaults
defaults <- c(0,1,3)

result <- list()
for (i in 1:length(gamma_list)) {
  result[[i]] <- PTMultiPeriodPD(portfolio, defaults, 0.12, cor.St = 0.12,kT = 1,  kNS = 1000,
}
```