VILNIAUS UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS MAGISTRANTŪROS STUDIJŲ PROGRAMA

Šilumos laidumo uždavinio su netiesine papildoma sąlyga išsprendžiamumas

Solvability of Nonstationary Problem for Heat Equation with Nonlinear Side Condition

Baigiamasis magistro darbas

Atliko: Tomas Belickas

VU el.p. tomas.belickas@mif.stud.vu.lt

Vadovė: Doc. Dr. Kristina Kaulakytė

VILNIUS, 2023

Turinys

Įvadas

Šilumos laidumo lygtis yra parabolinė dalinių išvestinių diferencialinė lygtis. Ši lygtis aprašo šilumos pasiskirstymą ir temperatūros kitimą kietuose kūnuose, skysčiuose arba dujose. Kai temperatūra yra pastovi, tuomet šilumos laidumo lygtis tampa Puasono lygtimi. Šilumos laidumo procesą, aprašytą dalinių išvestinių diferencialine lygtimi, 1807 m. pirmasis suformulavo žymus prancūzų matematikas Žanas Baptistas Furjė, taip padėdamas pamatus tolesniam parabolinių dalinių išvestinių diferencialinių lygčių nagrinėjimui (žr. [5]). Dalinių išvestinių diferencialinės lygtys naudojamos įvairiose mokslo srityse - finansų matematikoje, tikimybių teorijoje, kvantinėje mechanikoje ir kt.

Šilumos laidumo lygties su skirtingomis sąlygomis išsprendžiamumas nagrinėjamas iki šių dienų. A. Amrazevičiaus ir A. Domarko knygoje "Matematinės fizikos lygtys" (žr. [1]) galima rasti įrodytą šilumos laidumo uždavinio

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \quad 0 < T < \infty, \\ u(x,t)|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0, \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{1}$$

išsprendžiamumą, kai $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, yra aprėžta sritis, u yra nežinoma (ieškoma) funkcija, o f yra duota (žinoma) funkcija. Kai (1) uždavinyje f yra nežinoma (ieškoma) funkcija (kaip ir u), tai tuomet reikalinga papildoma sąlyga. K. Pileckas savo knygoje "Navjė-Stokso lygčių matematinė teorija" (žr. [6]) išnagrinėjo (1) uždavinį, kai u ir f yra nežinomos (ieškomos) funkcijos ir papildomai suformuluota srauto salyga

$$\int_\Omega u(x,t)\,\mathrm{d}x = F(t), \tag{2}$$

čia $F(t)$ yra duota (žinoma) funkcija.

Magistro baigiamojo darbo tikslas - įrodyti (1) uždavinio išsprendžiamumą, kai u ir f yra nežinomos (ieškomos) funkcijos ir papildomai vietoje (2) srauto sąlygos turime energijos sąlygą

$$\int_\Omega u^2(x,t)\,\mathrm{d}x = e^2(t), \tag{3}$$

čia $e(t)$ yra duota (žinoma) funkcija. Esminis skirtumas tarp energijos sąlygos ir srauto sąlygos yra tas, kad energijos sąlyga yra netiesinė (u atžvilgiu). Šis netiesiškumas įneša iššūkių, norint įrodyti (1) uždavinio sprendinio egzistavimą. Motyvacija tokios netiesinės sąlygos nagrinėjimui kilo perskaičius neseniai publikuotą T. Buckmaster ir V. Vicol straipsnį (žr. [3]), kuriame autoriai nagrinėjo Navjė ir Stokso lygtis su netiesine energijos sąlyga.

1 Pagrindinės sąvokos

1.1 Žymėjimai, pagalbinės nelygybės ir teoremos

Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n,\ n = 2,3$, yra aprėžta sritis, $\partial\Omega$ yra srities Ω kraštas, $\overline{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$, $|\Omega|$ yra srities Ω matas. Tarkime, kad V - bet kokia Hilberto (ar Banacho) erdvė. Elemento u norma funkcinėje erdvėje V žymima $||u||_V$. $C^\infty(\Omega)$ žymėsime visų be galo diferencijuojamų srityje Ω funkcijų aibę, o $C_0^\infty(\Omega)$ žymėsime visų funkcijų iš $C^\infty(\Omega)$ poaibį su kompaktine atrama srityje Ω. $L^q(\Omega)$ ir $W^{k,q}(\Omega)$ žymėsime atitinkamai Lebego ir Sobolevo erdves su normomis apibrėžtomis tokiu būdu (žr. [1]):

$$||u||_{L^q(\Omega)} = \left(\int\limits_\Omega |u(x)|^q dx\right)^{1/q}, \quad ||u||_{W^{k,q}(\Omega)} = \left(\sum_{|\alpha|=0}^{k} \int\limits_\Omega |D^\alpha u(x)|^q dx\right)^{1/q},$$

čia q ir k duotieji neneigiami sveikieji skaičiai, $\alpha = (\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n)$ yra multiindeksas, $\alpha_j,\ j = 1, 2, ..., n$, - sveikieji neneigiami skaičiai, $|\alpha| = \sum\limits_{j=1}^{n} \alpha_j$, $D^\alpha u = \frac{\partial^{|\alpha|} u}{\partial x_1^{\alpha_1} ... \partial x_n^{\alpha_n}}$ yra funkcijos $u(x)$ dalinė $|\alpha|$ eilės išvestinė. $\mathring{W}^{k,q}(\Omega)$ - aibės $C_0^\infty(\Omega)$ uždarinys $W^{k,q}(\Omega)$ normos prasme. Erdvė $W^{-2,2}(\Omega)$ yra duali erdvei $W^{2,2}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, t.y. $W^{-2,2}(\Omega)$ yra funkcionalų, kurie yra tolydūs normos $\|\cdot\|_{W^{2,2}(\Omega)}$ atžvilgiu, erdvė.

Norma erdvėje $L^2(0, T; V)$ yra apibrėžiama tokiu būdu (žr. [4]):

$$||u||_{L^2(0,T;V)} = \left(\int\limits_0^T ||u(x,t)||_V^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Pavyzdžiui, jeigu $u \in L^2(0, T; L^2(\Omega))$, tai

$$||u||_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} = \left(\int\limits_0^T ||u(x,t)||_{L^2(\Omega)}^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2} = \left(\int\limits_0^T \int\limits_\Omega |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

1.1 lema. *(Koši-Švarco nelygybė). Bet kokioms funkcijoms $f \in L^2(\Omega)$ ir $g \in L^2(\Omega)$ teisinga Koši-Švarco nelygybė:*

$$\left|\int\limits_\Omega f(x)g(x)dx\right| \leqslant \left(\int\limits_\Omega |f(x)|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_\Omega |g(x)|^2 dx\right)^{1/2} = ||f||_{L^2(\Omega)} ||g||_{L^2(\Omega)}.$$

Koši - Švarco nelygybė yra atskiras Hiolderio nelygybės atvejis. Hiolderio nelygybę galima rasti [1] knygoje.

1.2 lema. *(Įdėties teorema, žr. [1]). Tegu $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2,3$, yra aprėžta sritis. Jeigu $n < ql$, $h < \frac{ql-n}{q}$, tai įdėties operatorius $I : W^{l,q}(\Omega) \hookrightarrow C^h(\overline{\Omega})$ yra visiškai tolydus.*

1.2 Laplaso operatoriaus tikrinės reikšmės ir tikrinės funkcijos

Apibrėšime Laplaso operatoriaus tikrines reikšmes, tikrines funkcijas ir jų savybes.
Nagrinėsime uždavinį:

$$\begin{cases} -\Delta v_k = \lambda_k v_k(x), \quad x \in \Omega, \\ v_k(x)|_{\partial\Omega} = 0. \end{cases} \tag{4}$$

Skaičius λ_k vadinamas Laplaso operatoriaus tikrine reikšme, jeigu egzistuoja netrivialusis (4) uždavinio sprendinys $v_k(x)$. Šis sprendinys vadinamas Laplaso operatoriaus tikrine funkcija.
Kaip žinoma (žr. [1]), visos tikrinės reikšmės $\lambda_k > 0$ ir $\lambda_k \to \infty$, o tikrinės funkcijos $v_k(x)$ sudaro erdvėje $L^2(\Omega)$ bazę, kurią galima ortonormuoti:

$$\int_\Omega v_k(x) v_l(x) \mathrm{d}x = \delta_{kl} = \begin{cases} 1, \quad k = l, \\ 0, \quad k \neq l. \end{cases} \tag{5}$$

Kadangi $\partial\Omega$ yra klasės C^2 paviršius, tai $v_k(x) \in W^{2,2}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$.

Įrodysime, kad

$$\int_\Omega |\nabla v_k(x)|^2 \mathrm{d}x = \lambda_k. \tag{6}$$

Tuo tikslu padauginame $(4)_1$ lygtį iš $v_k(x)$ ir suintegruojame sritimi Ω:

$$-\int_\Omega \Delta v_k(x) v_k(x) \mathrm{d}x = \int_\Omega \lambda_k v_k(x) v_k(x) \mathrm{d}x. \tag{7}$$

Kairėje lygybės pusėje esantį integralą suintegruojame dalimis:

$$\begin{aligned} -\int_\Omega \Delta v_k(x) v_k(x) \mathrm{d}x &= -\int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 v_k(x)}{\partial x_i^2} v_k(x) \mathrm{d}x = -\sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial v_k(x)}{\partial x_i} \right) v_k(x) \mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^n \int_\Omega \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_i} \mathrm{d}x = \int_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_i} \frac{\partial v_k(x)}{\partial x_i} \mathrm{d}x = \int_\Omega |\nabla v_k(x)|^2 \mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{8}$$

Tuomet iš (7) ir (8) turime:

$$\int_\Omega |\nabla v_k(x)|^2 \mathrm{d}x = \lambda_k \int_\Omega |v_k(x)|^2 \mathrm{d}x. \tag{9}$$

Iš (5) ir iš (9) gauname (6).

Panagrinėkime atvejį, kai $k \neq l$. Padauginkime $(4)_1$ iš v_l, kai $(l \neq k)$ ir suintegruokime sritimi Ω:

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta v_k(x) v_l(x) \mathrm{d}x = \lambda_k \int\limits_{\Omega} v_k(x) v_l(x) \mathrm{d}x. \tag{10}$$

Kairėje pusėje esantį integralą suintegruojame dalimis:

$$-\int\limits_{\Omega} \Delta v_k(x) v_l(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} \nabla v_k(x) \cdot \nabla v_l(x) \mathrm{d}x.$$

Tuomet gautą išraišką įsistatę į (10) turime, kad

$$\int\limits_{\Omega} \nabla v_k(x) \cdot \nabla v_l(x) \mathrm{d}x = \lambda_k \int\limits_{\Omega} v_k(x) v_l(x) \mathrm{d}x.$$

Kadangi $\int\limits_{\Omega} v_k(x) v_l(x) \mathrm{d}x = 0$ (žr. (5)), tai iš paskutinės lygybės, turime, kad

$$\int\limits_{\Omega} \nabla v_k(x) \cdot \nabla v_l(x) \mathrm{d}x = 0, \quad k \neq l.$$

Vadinasi, gavome, kad

$$\int\limits_{\Omega} \nabla v_k(x) \cdot \nabla v_l(x) \mathrm{d}x = \lambda_k \delta_{lk} = \begin{cases} \lambda_k, & l = k, \\ 0, & l \neq k. \end{cases} \tag{11}$$

2 Uždavinio formulavimas

Tarkime, kad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, yra aprėžta sritis, $\partial\Omega$ yra srities Ω kraštas, $x \in \Omega$ - erdvės kintamasis, $t \in [0, T]$ - laiko kintamasis, $0 < T < \infty$. Srityje Ω nagrinėjame šilumos laidumo uždavinį:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \qquad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,t)|_{\partial\Omega\times[0,T]} = 0, \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{12}$$

čia u ir f yra nežinomos (ieškomos) funkcijos, u_t reiškia funkcijos u dalinę išvestinę laiko kintamojo t atžvilgiu, Δ yra Laplaso operatorius.

Ieškosime tokio (12) uždavinio sprendinio, kuris tenkina papildomą sąlygą (energijos sąlygą):

$$\int\limits_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x = e^2(t), \ e(0) = 0. \tag{13}$$

Išvesime (12), (13) uždavinio labai silpno sprendinio apibrėžimą.

Dauginame abi $(12)_1$ lygties puses iš funkcijos $\eta \in L^2(0,T; W^{2,2}(\Omega) \cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega))$ ir suintegruojame sritimi Ω:

$$\int\limits_\Omega u_t(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega \Delta u(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega f(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x. \tag{14}$$

Antrąjį (14) lygybės kairėje pusėje esantį integralą integruojame dalimis du kartus:

$$\begin{aligned} \int\limits_\Omega \Delta u(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x &= \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x_i^2}\eta(x,t)\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\right)\eta(x,t)\mathrm{d}x \\ &= -\sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega \frac{\partial u(x,t)}{\partial x_i}\frac{\partial \eta(x,t)}{\partial x_i}\mathrm{d}x = \sum_{i=1}^n \int\limits_\Omega u(x,t)\frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x_i^2}\mathrm{d}x \\ &= \int\limits_\Omega u(x,t)\sum_{i=1}^n \frac{\partial^2 \eta(x,t)}{\partial x_i^2}\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega u(x,t)\Delta\eta(x,t)\mathrm{d}x. \end{aligned} \tag{15}$$

Tuomet iš (14) ir (15) turime:

$$\int\limits_\Omega u_t(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x - \int\limits_\Omega u(x,t)\Delta\eta(x,t)\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega f(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x. \tag{16}$$

Integruodami abi (16) lygybės puses nuo 0 iki T, gauname

$$\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T \int_\Omega u(x,t)\Delta\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int_0^T \int_\Omega f(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \tag{17}$$

2.1 apibrėžimas. *Pora* $(u(x,t), f(x,t))$, *kai* $u \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $u_t \in L^2(0,T;L^2(\Omega))$, $f \in L^2(0,T;W^{-2,2}(\Omega))$, *vadinama* (12),(13) *uždavinio labai silpnu sprendiniu, jeigu* u *tenkina pradinę sąlygą* $u(x,0)=0$, *pora* $(u(x,t), f(x,t))$ *tenkina integralinę tapatybę*

$$\int_0^T \int_\Omega u_t(x,t)\eta(x,t)\,dx\,dt - \int_0^T \int_\Omega u(x,t)\Delta\eta(x,t)\,dx\,dt = \int_0^T \int_\Omega f(x,t)\eta(x,t)\,dx\,dt \tag{18}$$

su $\forall\eta \in L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)\cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega))$ *ir funkcija* u *tenkina energijos sąlygą*

$$\int_\Omega u^2(x,t)\,dx = e^2(t),\ \ e(0)=0. \tag{19}$$

Suformuluosime teoremą, kurią įrodysime šiame magistriniame darbe.

2.2 teorema. *Tegu* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n=2,3$, *yra aprėžta sritis,* $\partial\Omega$ *yra klasės* C^2 *paviršius, funkcija* $e \in W^{1,2}(0,T)$, $e(0)=0$. *Tuomet egzistuoja* (12),(13) *uždavinio bent vienas labai silpnas sprendinys.*

3 Labai silpno sprendinio egzistavimas

Pradėsime nuo apytikslio sprendinio, kurio ieškosime tokiu pavidalu:

$$
\begin{aligned}
u^{(N)}(x,t) &= \sum_{k=1}^{N} w_k^{(N)}(t) v_k(x), \\
f^{(N)}(x,t) &= \sum_{k=1}^{N} q_k^{(N)}(t) v_k(x),
\end{aligned} \tag{20}
$$

čia $v_k(x)$ yra Laplaso operatoriaus tikrinės funkcijos.

Koeficientus $w_k^{(N)}(t)$ ir $q_k^{(N)}(t)$, kai $k = 1, 2, ..., N$, rasime iš tokio uždavinio:

$$
\begin{cases}
\int\limits_{\Omega} u_t^{(N)}(x,t) v_k(x) \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} u^{(N)}(x,t) \Delta v_k(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} f^{(N)}(x,t) v_k(x) \mathrm{d}x, \\
u^{(N)}(x,0) = 0, \\
\int\limits_{\Omega} |u^{(N)}(x,t)|^2 \mathrm{d}x = \frac{1}{|\Omega|} \sum_{k=1}^{N} \beta_k^2 \, e^2(t),
\end{cases} \tag{21}
$$

čia $\beta_k = \int\limits_{\Omega} v_k(x) \mathrm{d}x$ ir $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \beta_k^2 = |\Omega|$.

Toliau (21) uždavinį suvesime į paprastųjų diferencialinių lygčių pradinį uždavinį. Tuo tikslu į $(21)_1$ lygybę įsistatę (20) apytikslio sprendinio išraiškas, gauname:

$$
\int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{l=1}^{N} w_l^{(N)}(t) v_l(x) \Big)_t' v_k(x) \mathrm{d}x - \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{l=1}^{N} w_l^{(N)}(t) v_l(x) \Big) \Delta v_k(x) \mathrm{d}x = \int\limits_{\Omega} \Big(\sum_{i=1}^{N} q_l^{(N)}(t) v_l(x) \Big) v_k(x) \mathrm{d}x,
$$

t.y.

$$
\sum_{l=1}^{N} \Big(w_l^{(N)}(t) \Big)_t' \int\limits_{\Omega} v_l(x) v_k(x) \mathrm{d}x - \sum_{l=1}^{N} w_l^{(N)}(t) \int\limits_{\Omega} v_l(x)(-\lambda_k v_k(x)) \mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{N} q_l^{(N)}(t) \int\limits_{\Omega} v_l(x) v_k(x) \mathrm{d}x.
$$

Tuomet pasinaudoję tikrinių funkcijų savybėmis (žr. 1 skyriaus 1.2 poskyrį), turime

$$
\sum_{l=1}^{N} \Big(w_l^{(N)}(t) \Big)_t' \delta_{lk} + \sum_{l=1}^{N} w_l^{(N)}(t) \cdot \lambda_k \int\limits_{\Omega} v_l(x) v_k(x) \mathrm{d}x = \sum_{l=1}^{N} q_l^{(N)}(t) \delta_{lk},
$$

$$
\Big(w_k^{(N)}(t) \Big)_t' + \sum_{l=1}^{N} w_l^{(N)}(t) \lambda_k \delta_{lk} = q_k^{(N)}(t),
$$

$$
\Big(w_k^{(N)}(t) \Big)_t' + \lambda_k w_k^{(N)}(t) = q_k^{(N)}(t).
$$

Gauname diferencialinę lygtį:

$$
\Big(w_k^{(N)}(t) \Big)_t' + \lambda_k w_k^{(N)}(t) = q_k^{(N)}(t), \qquad \forall k = 1, 2, ..., N.
$$

Gauta lygtis yra pirmos eilės tiesinė nehomogeninė diferencialinė lygtis. Pirmos eilės diferencialinei lygčiai išspręsti reikalinga viena pradinė sąlyga.

Kadangi $u^{(N)}(x,0)=0$, tai $u^{(N)}(x,0)=\sum\limits_{k=1}^{N} w_k^{(N)}(0)v_k(x)=0$, čia $v_k(x)\neq 0$.

Vadinasi, $w_k^{(N)}(0)=0$.

Gavome paprastųjų diferencialinių lygčių pradinį uždavinį:

$$\begin{cases} \left(w_k^{(N)}(t)\right)_t' + \lambda_k w_k^{(N)}(t) = q_k^{(N)}(t), \\ \\ w_k^{(N)}(0) = 0, \end{cases} \tag{22}$$

kurį sprendžiame konstantų varijavimo metodu.

Pirmiausiai, sprendžiame homogeninę lygtį kintamųjų atskyrimo metodu:

$$\left(w_k^{(N)}(t)\right)_t' + \lambda_k w_k^{(N)}(t) = 0,$$

$$\frac{\mathrm{d}w_k^{(N)}(t)}{\mathrm{dt}} = -\lambda_k w_k^{(N)}(t),$$

$$\frac{\mathrm{d}w_k^{(N)}(t)}{w_k^{(N)}(t)} = -\lambda_k \mathrm{dt},$$

$$\ln|w_k^{(N)}(t)| = -\lambda_k t + c_1,$$

$$w_k^{(N)}(t) = ce^{-\lambda_k t}.$$

Taigi, $w_k^{(N)}(t)=ce^{-\lambda_k t}, c\in\mathbb{R}$ yra bendras homogeninės lygties sprendinys.

Tegul $w_k^{(N)}(t)=c(t)e^{-\lambda_k t}$. Šią išraišką statomės į $(22)_1$ nehomogeninę lygtį:

$$\left(c(t)e^{-\lambda_k t}\right)_t' + \lambda_k \cdot c(t)e^{-\lambda_k t} = q_k^{(N)}(t),$$

$$c'(t)e^{-\lambda_k t} + (-\lambda_k)\cdot c(t)e^{-\lambda_k t} + \lambda_k \cdot c(t)e^{-\lambda_k t} = q_k^{(N)}(t),$$

$$c'(t)e^{-\lambda_k t} = q_k^{(N)}(t),$$

$$c'(t) = q_k^{(N)}(t)e^{\lambda_k t}.$$

Integruodami abi paskutinės lygybės puses nuo 0 iki t, gauname

$$\int\limits_0^t c'(\tau)\mathrm{d}\tau = \int\limits_0^t q_k^{(N)}(\tau)e^{\lambda_k \tau}\mathrm{d}\tau,$$

$$c(\tau)|_{\tau=0}^{\tau=t} = \int\limits_0^t q_k^{(N)}(\tau)e^{\lambda_k\tau}\mathrm{d}\tau,$$

t.y.

$$c(t) = \int\limits_0^t q_k^{(N)}(\tau)e^{\lambda_k\tau}\mathrm{d}\tau + c(0). \tag{23}$$

Tuomet (23) išraišką įsistatę į bendrąjį homogeninės lygties sprendinį, gauname $(22)_1$ nehomogeninės lygties bendrąjį sprendinį:

$$w_k^{(N)}(t) = \Big(\int\limits_0^t q_k^{(N)}(\tau)e^{\lambda_k\tau}\mathrm{d}\tau + c(0)\Big)e^{-\lambda_k t} = \int\limits_0^t q_k^{(N)}(\tau)e^{\lambda_k\tau}e^{-\lambda_k t}\mathrm{d}\tau + c(0)e^{-\lambda_k t} =$$

$$= \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau + c(0)e^{-\lambda_k t}.$$

Iš pradinės sąlygos $(22)_2$ randame konstantos $c(0)$ išraišką:

$$w_k^{(N)}(0) = \int\limits_0^0 e^{-\lambda_k(0-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau + c(0)e^0 = 0 \Rightarrow c(0) = 0.$$

Taigi, (22) pradinio diferencialinio uždavinio sprendinys yra

$$w_k^{(N)}(t) = \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau, \qquad \forall k = 1, 2, ..., N. \tag{24}$$

Vadinasi, iš $(20)_1$ ir (24) turime apytikslį sprendinį $u^{(N)}$:

$$u^{(N)}(x,t) = \sum_{k=1}^N \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau \cdot v_k(x). \tag{25}$$

Toliau gautą (25) išraišką įsistatome į $(21)_3$ energijos sąlygą ir pasinaudoję tikrinių funkcijų savybėmis (žr. 1 skyriaus poskyrį 1.2), gauname:

$$\int\limits_\Omega |u^{(N)}(x,t)|^2\mathrm{d}x = \int\limits_\Omega \Big|\sum_{k=1}^N \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau \cdot v_k(x)\Big|^2\mathrm{d}x =$$

$$= \sum_{k=1}^N \Big(\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)^2 \int\limits_\Omega v_k^2(x)\mathrm{d}x = \sum_{k=1}^N \Big(\int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau\Big)^2 \tag{26}$$

$$= \sum_{k=1}^N \Big(w_k^{(N)}(t)\Big)^2 = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{k=1}^N \beta_k^2\, e^2(t).$$

Tam, kad galiotų (26) sąlyga, galime parinkti, kad:

$$\begin{aligned}\left(w_k^{(N)}(t)\right)^2 &= \frac{1}{|\Omega|}\beta_k^2\, e^2(t),\\ w_k^{(N)}(t) &= \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e(t).\end{aligned} \tag{27}$$

Tuomet galime apskaičiuoti funkcijų $u^{(N)}$ ir $u_t^{(N)}$ normas erdvėje $L^2(0,T;L^2(\Omega))$:

$$\begin{aligned}||u^{(N)}(x,t)||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^N|w_k^{(N)}(t)|^2|v_k(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\sum_{k=1}^N|w_k^{(N)}(t)|^2\mathrm{d}t\int_\Omega|v_k(x)|^2\mathrm{d}x = \int_0^T\sum_{k=1}^N|w_k^{(N)}(t)|^2\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\sum_{k=1}^N\left|\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e(t)\right|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{k=1}^N\beta_k^2\int_0^T e^2(t)\mathrm{d}t\end{aligned} \tag{28}$$

ir

$$\begin{aligned}||u_t^{(N)}(x,t)||^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} &= \int_0^T\int_\Omega\sum_{k=1}^N|(w_k^{(N)}(t))'_t|^2|v_k(x)|^2\mathrm{d}x\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\sum_{k=1}^N|(w_k^{(N)}(t))'_t|^2\mathrm{d}t\int_\Omega|v_k(x)|^2\mathrm{d}x = \int_0^T\sum_{k=1}^N|(w_k^{(N)}(t))'_t|^2\mathrm{d}t\\ &= \int_0^T\sum_{k=1}^N\left|\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e'(t)\right|^2\mathrm{d}t = \frac{1}{|\Omega|}\sum_{k=1}^N\beta_k^2\int_0^T|e'(t)|^2\mathrm{d}t.\end{aligned} \tag{29}$$

Toliau gausime įvertį funkcijai $f^{(N)}(x,t)$.
Kadangi $w_k^{(N)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e(t)$, tai iš (24) gauname pirmos rūšies Voltero integralinę lygtį:

$$\int_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e(t). \tag{30}$$

Diferencijuodami pirmos rūšies integralinę lygtį, suvedame ją į antros rūšies integralinę lygtį:

$$\int_0^t -\lambda_k e^{-\lambda_k(t-\tau)}q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau + e^{-\lambda_k(t-t)}q_k^{(N)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e'(t),$$

t.y.

$$q_k^{(N)}(t) = \lambda_k \int\limits_0^t e^{-\lambda_k(t-\tau)} q_k^{(N)}(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e'(t). \tag{31}$$

Rezolventės metodu rasime (31) integralinės lygties sprendinį (daugiau apie Voltero integralines lygtis žr. [2], [7]).

Apskaičiuojame iteruotuosius branduolius:

$$K_1(t,\tau) = K(t,\tau) = e^{-\lambda_k(t-\tau)},$$

$$K_2(t,\tau) = \int\limits_\tau^t K(t,y)K_1(y,\tau)\mathrm{d}y = \int\limits_\tau^t e^{-\lambda_k(t-y)}e^{-\lambda_k(y-\tau)}\mathrm{d}y = e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int\limits_\tau^t \mathrm{d}y = e^{-\lambda_k(t-\tau)}(t-\tau),$$

$$K_3(t,\tau) = \int\limits_\tau^t K(t,y)K_2(y,\tau)\mathrm{d}y = \int\limits_\tau^t e^{-\lambda_k(t-y)}e^{-\lambda_k(y-\tau)}(y-\tau)\mathrm{d}y = e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int\limits_\tau^t (y-\tau)\mathrm{d}y$$

$$= e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int\limits_\tau^t (y-\tau)\mathrm{d}(y-\tau) = e^{-\lambda_k(t-\tau)}\frac{(y-\tau)^2}{2}\Big|_{y=\tau}^{y=t} = e^{-\lambda_k(t-\tau)}\frac{(t-\tau)^2}{2},$$

$$K_4(t,\tau) = \int\limits_\tau^t K(t,y)K_3(y,\tau)\mathrm{d}y = \int\limits_\tau^t e^{-\lambda_k(t-y)}e^{-\lambda_k(y-\tau)}\frac{(y-\tau)^2}{2}\mathrm{d}y$$

$$= \frac{1}{2}e^{-\lambda_k(t-\tau)}\int\limits_\tau^t (y-\tau)^2\mathrm{d}(y-\tau) = e^{-\lambda_k(t-\tau)}\frac{(y-\tau)^3}{6}\Big|_{(y=\tau}^{y=t} = e^{-\lambda_k(t-\tau)}\frac{(t-\tau)^3}{6},$$

...

$$K_{n+1}(t,\tau) = e^{-\lambda_k(t-\tau)}\frac{(t-\tau)^n}{n!}.$$

Tada rezolventė yra:

$$R(t,\tau,\lambda_k) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_k^n K_{n+1}(t,\tau) = \sum_{n=0}^{\infty}\lambda_k^n e^{-\lambda_k(t-\tau)}\frac{(t-\tau)^n}{n!} = e^{-\lambda_k(t-\tau)}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda_k(t-\tau))^n}{n!}$$
$$= e^{-\lambda_k(t-\tau)}e^{\lambda_k(t-\tau)} = e^0 = 1.$$

Pasinaudojant rasta rezolvente, galime užrašyti (31) integralinės lygties sprendinį:

$$q_k^{(N)}(t) = \lambda_k\int\limits_0^t 1\cdot\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e'(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e'(t) = \lambda_k\beta_k\frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\int\limits_0^t e'(\tau)\mathrm{d}\tau + \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k e'(t)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k\Big(\lambda_k e(\tau)\Big|_{\tau=0}^{\tau=t} + e'(t)\Big) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k\Big(\lambda_k e(t) - \lambda_k e(0) + e'(t)\Big)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k\Big(\lambda_k e(t) + e'(t)\Big),$$

t.y.

$$q_k^{(N)}(t) = \frac{1}{\sqrt{|\Omega|}}\beta_k(\lambda_k e(t) + e'(t)). \tag{32}$$

Padaliname (32) lygybę iš λ_k ir pakeliame abi gautos lygybės puses kvadratu:

$$\frac{|q_k^{(N)}(t)|^2}{\lambda_k^2} = \frac{1}{|\Omega|}\beta_k^2\Big(e(t) + \frac{e'(t)}{\lambda_k}\Big)^2 \leqslant \frac{2}{|\Omega|}\beta_k^2\Big(e^2(t) + \frac{|e'(t)|^2}{\lambda_k^2}\Big) \leqslant \frac{2}{|\Omega|}\beta_k^2\Big(e^2(t) + |e'(t)|^2\Big).$$

Susumavus nuo 1 iki N, turime:

$$\sum_{k=1}^{N}\frac{|q_k^{(N)}(t)|^2}{\lambda_k^2} \leqslant \frac{2}{|\Omega|}\Big(e^2(t) + |e'(t)|^2\Big)\sum_{k=1}^{N}\beta_k^2. \tag{33}$$

Vadinasi, iš (33) turime, kad

$$||f^{(N)}(x,t)||^2_{L^2(0,T;W^{-2,2}(\Omega))} \leqslant \frac{2}{|\Omega|}\sum_{k=1}^{N}\beta_k^2\Big(|e'(t)|^2 + e^2(t)\Big). \tag{34}$$

Iš (28), (29), (34) matome, kad sekos $\{u^{(N)}\}$ ir $\{u_t^{(N)}\}$ yra aprėžtos erdvėje $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, o seka $\{f^{(N)}\}$ yra aprėžta erdvėje $L^2(0,T;W^{-2,2}(\Omega))$. Todėl galime išrinkti posekius $\{u^{(N_j)}\}$, $\{u_t^{(N_j)}\}$ ir $\{f^{(N_j)}\}$, kurie silpnai konverguoja atitinkamai erdvėse $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ ir $L^2(0,T;W^{-2,2}(\Omega))$.

Pastebėkime, kad integralinė tapatybė $(21)_1$ galioja ir kai $N = N_j$:

$$\int_\Omega u_t^{(N_j)}(x,t)v_k(x)\mathrm{d}x - \int_\Omega u^{(N_j)}(x,t)\Delta v_k(x)\mathrm{d}x = \int_\Omega f^{(N_j)}(x,t)v_k(x)\mathrm{d}x. \tag{35}$$

Dauginame (35) iš $d_k(t) \in L^2(0,T)$, sumuojame nuo 1 iki N ir integruojame kintamojo t atžvilgiu intervale $[0,T]$:

$$\int_0^T\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega u_t^{(N_j)}(x,t)v_k(x)d_k(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega u^{(N_j)}(x,t)\Delta v_k(x)d_k(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^T\sum_{k=1}^{N}\int_\Omega f^{(N_j)}(x,t)v_k(x)d_k(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t,$$

t.y. turime, kad:

$$\int_0^T\int_\Omega u_t^{(N_j)}(x,t)\sum_{k=1}^{N}v_k(x)d_k(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int_0^T\int_\Omega u^{(N_j)}(x,t)\Delta\Big(\sum_{k=1}^{N}v_k(x)d_k(t)\Big)\mathrm{d}x\mathrm{d}t$$
$$= \int_0^T\int_\Omega f^{(N_j)}(x,t)\sum_{k=1}^{N}v_k(x)d_k(t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t.$$

Pažymėję $\sum\limits_{k=1}^{N} v_k(x)d_k(t) = \eta(x,t)$, turime, kad:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_t^{(N_j)}(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u^{(N_j)}(x,t)\Delta\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f^{(N_j)}(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad (36)$$

čia funkcija $\eta \in L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)\cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega))$ (kadangi $v_k(x) \in W^{2,2}(\Omega)\cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega)$, o $d_k(t) \in L^2(0,T)$).

Kadangi $\{u^{(N_j)}\}$ ir $\{u_t^{(N_j)}\}$ silpnai konverguoja erdvėje $L^2(0,T;L^2(\Omega))$, o $\{f^{(N_j)}\}$ silpnai konverguoja $L^2(0,T;W^{-2,2}(\Omega))$, tai (36) integralinėje tapatybėje galima pereiti prie ribos, kai $N_j \to \infty$:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_t(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u(x,t)\Delta\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad (37)$$

čia $\eta(x,t) = \sum\limits_{k=1}^{N} v_k(x)d_k(t)$.

Kadangi funkcijų d_k ir v_k tiesinės kombinacijos $\sum\limits_{k=1}^{N} v_k(x)d_k(t)$ yra tiršta aibė erdvėje $L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)\cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega))$, tai kiekvienai funkcijai $\eta(x,t) \in L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)\cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega))$ egzistuoja tokia seka $\{\eta_l\}$, kad

$$\|\eta_l - \eta\|_{L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)\cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega))} \to 0, \quad \text{kai} \quad l \to \infty. \quad (38)$$

Tuomet kiekvienai η_l teisinga (37) integralinė tapatybė, t.y.

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_t(x,t)\eta_l(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u(x,t)\Delta\eta_l(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t)\eta_l(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t. \quad (39)$$

Kadangi η_l stipriai konverguoja į η (žr. (38)), tai (39) integralinėje tapatybėje galime pereiti prie ribos, kai $l \to \infty$:

$$\int\limits_0^T \int\limits_\Omega u_t(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t - \int\limits_0^T \int\limits_\Omega u(x,t)\Delta\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega f(x,t)\eta(x,t)\mathrm{d}x\mathrm{d}t, \quad (40)$$

čia η yra bet kokia funkcija iš erdvės $L^2(0,T;W^{2,2}(\Omega)\cap \mathring{W}^{1,2}(\Omega))$.

Liko įrodyti, kad galime pereiti prie ribos energijos sąlygoje:

$$\int\limits_\Omega |u^{(N)}(x,t)|^2\mathrm{d}x \to e^2(t). \quad (41)$$

Pažymėkime

$$\varphi^{(N)}(t) = \|u^{(N)}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)} = \left(\int\limits_{\Omega} |u^{(N)}|^2 dx\right)^{1/2}. \tag{42}$$

Pasinaudoję Koši-Švarco nelygybe (žr. 1 skyriaus 1.1 poskyrio 1.1 lemą), funkcijai $(\varphi^{(N)}(t))'$ gauname įvertį:

$$(\varphi^{(N)}(t))' = \frac{\int\limits_{\Omega} u^{(N)} u_t^{(N)} dx}{\|u^{(N)}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}} \leqslant \frac{\left(\int\limits_{\Omega} |u^{(N)}|^2 dx\right)^{1/2} \left(\int\limits_{\Omega} |u_t^{(N)}|^2 dx\right)^{1/2}}{\|u^{(N)}(\cdot,t)\|_{L^2(\Omega)}} = \|u_t^{(N)}\|_{L^2(\Omega)},$$

t.y.

$$(\varphi^{(N)}(t))' \leqslant \|u_t^{(N)}\|_{L^2(\Omega)}. \tag{43}$$

Tada (42) ir (43) abi puses pakėlę kvadratu ir suintegravę intervale $[0,T]$, gauname

$$\int\limits_0^T |\varphi^{(N)}(t)|^2 dt = \int\limits_0^T \|u^{(N)}\|^2_{L^2(\Omega)} dt = \|u^{(N)}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))} \tag{44}$$

ir

$$\int\limits_0^T |(\varphi^{(N)}(t))'|^2 dt \leqslant \int\limits_0^T \|u_t^{(N)}\|^2_{L^2(\Omega)} dt = \|u_t^{(N)}\|^2_{L^2(0,T;L^2(\Omega))}. \tag{45}$$

Kadangi funkcijų $u^{(N)}$ ir $u_t^{(N)}$ normos erdvėje $L^2(0,T;L^2(\Omega))$ yra baigtinės (žr. (28) ir (29)) ir galioja (44), (45) įverčiai, tai turime, kad $\varphi(t) \in W^{1,2}(0,T)$, o įdėjimas $W^{1,2}(0,T) \hookrightarrow C([0,T])$ yra visiškai tolydus (žr. 1 skyriaus 1.1 poskyrio 1.2 lemą). Vadinasi, iš to, kad $\varphi^{(N)} \rightharpoonup \varphi$ erdvėje $W^{1,2}(0,T)$, turime, kad $\varphi^{(N)} \to \varphi$ erdvėje $C([0,T])$, t.y. erdvėje $C([0,T])$ turime tolygų konvergavimą.

Todėl iš to, kad $\dfrac{1}{|\Omega|}\sum\limits_{k=1}^{N} \beta_k^2 e^2(t) \to e^2(t)$, kai $N \to \infty$, o $\varphi^{(N)} \to \varphi$ erdvėje $C([0,T])$, išplaukia, kad $\int\limits_{\Omega} |u(x,t)|^2 \mathrm{d}x = e^2(t)$.

Šilumos laidumo uždavinio su netiesine papildoma sąlyga išsprendžiamumas

Santrauka

Tarkime, kad $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, yra aprėžta sritis, $\partial\Omega$ yra srities Ω kraštas, $x \in \Omega$ - erdvės kintamasis, $t \in [0, T]$ - laiko kintamasis, $0 < T < \infty$. Srityje Ω nagrinėjame nestacionarų uždavinį šilumos laidumo lygčiai:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,t)|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0, \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{46}$$

su papildoma energijos sąlyga

$$\int_\Omega u^2(x,t)\mathrm{d}x = e^2(t), \; e(0) = 0, \tag{47}$$

čia $u(x,t)$ ir $f(x,t)$ yra nežinomos (ieškomos) funkcijos, $e(t)$ yra duota (žinoma) funkcija.
Šio darbo tikslas yra įrodyti (46) uždavinio su (47) netiesine papildoma sąlyga labai silpno sprendinio egzistavimą srityje Ω.
Sufomuluoto (46), (47) uždavinio išsprendžiamumą įrodome dviem pagrindiniais žingsniais. Pirmiausia, ieškome apytikslio sprendinio, t.y. ieškome funkcijų $u^{(N)}$ ir $f^{(N)}$. Norint įrodyti šių funkcijų egzistavimą, išsprendžiame paprastųjų diferencialinių lygčių pradinį uždavinį ir antros rūšies Voltero integralinę lygtį. Tuomet, norint įrodyti, kad rastas apytikslis sprendinys $(u^{(N)}, f^{(N)})$ konverguoja į (46), (47) uždavinio tikslų labai silpną sprendinį (u, f), apskaičiuojame reikiamus įverčius, kurie leidžia pereiti prie ribos, kai $N \to \infty$.

Solvability of Nonstationary Problem for Heat Equation with Nonlinear Side Condition

Summary

Let $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n = 2, 3$, be a bounded domain, $\partial\Omega$ is a boundary of domain Ω, $x \in \Omega$ - space variable, $t \in [0, T]$ - time variable, $0 < T < \infty$. In domain Ω we study the nonstacionary problem to the heat equation:

$$\begin{cases} u_t(x,t) - \Delta u(x,t) = f(x,t), \quad (x,t) \in \Omega \times [0,T], \\ u(x,t)|_{\partial\Omega \times [0,T]} = 0, \\ u(x,0) = 0, \end{cases} \tag{48}$$

with nonlinear side condition, i.e. with prescribed energy condition

$$\int\limits_{\Omega} u^2(x,t)\mathrm{d}x = e^2(t), \; e(0) = 0, \tag{49}$$

where $u(x,t)$ and $f(x,t)$ are unknown functions, $e(t)$ is a given function.
The main goal of this master thesis is to prove the existence of a very weak solution to problem (48), (49) in the domain Ω.
We prove the solvability of problem (48), (49) in two main steps. Firstly, we prove the existence of the approximate solution $(u^{(N)}, f^{(N)})$. To do this we solve the initial problem to ordinary differential equations and Volterra integral equation of the second kind. Then, in the second step, we prove that the approximate solution $(u^{(N)}, f^{(N)})$ converges to the very weak solution (u, f) of problem (48), (49). To do this we find the suitable estimates which let us pass to a limit as $N \to \infty$.

Literatūra

[1] A. Ambrazevičius, A. Domarkas: *Matematinės fizikos lygtys,* 2 dalis. Aldorija, Vilnius, 1999.

[2] E.Babolian, Z.Masouri: *Direct method to solve Volterra integral equation of the first kind using operational matrix with block-pulse functions.* Journal of Computational and Applied Mathematics 220, 51 – 57, 2008.

[3] T.Buckmaster, V.Vicol: *Nonuniqueness of weak solutions to the Navier-Stokes equation.* Annals of Mathematics 189, 101–144, 2019.

[4] L. C. Evans: *Partial Differential Equations.* American Mathematical Society, 2010.

[5] T.N. Narasimhan: *Fourier's heat conduction equation: History, influence, and connections.* Reviews of Geophysics, 37(1), 151–172, 1999.

[6] K. Pileckas: *Navjė-Stokso lygčių matematinė teorija.* MII, Vilnius, 2007.

[7] F. G. Tricomi: *Integral Equations.* Intersience, New York, 1957.