VILNIAUS UNIVERSITETAS
ŠIAULIŲ AKADEMIJA

MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
Didžiųjų duomenų analitikos specializacija

ROKAS KASPERAVIČIUS

Magistro studijų baigiamasis darbas

GRAMO TAŠKAI IR RYMANO DZETA FUNKCIJOS UNIVERSALUMAS TRUMPUOSE INTERVALUOSE

Darbo vadovas: prof. dr. Darius Šiaučiūnas

Šiauliai, 2023

Turinys

Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis, o $\mathbb{P}$ – visų pirminių skaičių aibė. Rymano (Riemann) dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė (Dirichlet) eilute

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}$$

arba Oilerio (Euler) sandauga

$$\zeta(s) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

Be to, $\zeta(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1.

Funkcija $\zeta(s)$ yra vienas iš svarbiausių analizinės skaičių teorijos objektų, ji sutinkama ir kituose matematikos skyriuose bei turi taikymų daugelyje gamtos mokslų, pavyzdžiui, kvantinėje mechanikoje. Funkciją $\zeta(s)$ jau XVIII a. viduryje nagrinėjo L. Oileris, tačiau jis laikė, jog s yra realusis kintamasis. B. Rymanas XIX a. viduryje pradėjo nagrinėti funkciją $\zeta(s)$ su kompleksiniu kintamuoju s ir pasiūlė ją taikyti pirminių skaičių pasiskirstymui tirti. Tegul

$$\pi(x) = \sum_{p \leqslant x} 1.$$

Rymanas nurodė būdą, kaip gauti funkcijos $\pi(x)$ asimptotinę formulę, kai $x \to \infty$, funkcijos $\zeta(s)$ pagalba. Jo pasiūlyta formulė nebuvo pilnai korektiška, tačiau idėja buvo teisinga, ir ją sėkmingai realizavo C. J. de la Valė Pusenas (de la Vallée-Poussin) [14] ir J. Adamaras (Hadamard) [3] 1996 m. Jie įrodė, jog

$$\lim_{x \to \infty} \pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u}. \tag{1.1}$$

Įrodyme svarbią vietą užima funkcijos $\zeta(s)$ nulių išsidėstymas. Formulės (1.1) įrodymui pakanka žinoti, kad $\zeta(s) \neq 0$ pusplokštumėje $\sigma \geqslant 1$. Jos tikslumui reikalinga informacija apie nulių nebuvimą platesnėje srityje. Garsioji Rymano hipotezė tvirtina, jog $\zeta(s) \neq 0$ srityje $\sigma > 1/2$. Iš šios hipotezės išplaukia, jog

$$\pi(x) = \int_2^x \frac{\mathrm{d}u}{\log u} + O(x^{1/2+\varepsilon}), \quad \forall \varepsilon > 0.$$

1975 m. tapo žinoma, kad funkcija $\zeta(s)$ turi įdomią universalumo savybę. S. M. Voroninas (Voronin) įrodė, žr. [15], kad visos analizinės funkcijos juostoje $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$ ir nevirstančios nuliu, yra aproksimuojamos norimu tikslumu postūmiais $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Jo rezultatas tiksliai yra formuluojamas taip. Tegul $0 < r < 1/4$, o funkcija yra tolydi ir nevirstanti nuliu skritulyje $|s| \leqslant r$ bei analizinė to skritulio viduje. Tuomet $\forall \varepsilon >$ atitinka toks skaičius $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, su kuriuo yra teisinga nelygybė

$$\max_{|s|\leqslant r}\left|\zeta\left(s+\frac{3}{4}+i\tau\right)-f(s)\right|<\varepsilon.$$

Voroninas šią funkcijos $\zeta(s)$ savybę pavadino universalumu, nes plati funkcijų klasė aproksimuojama vienos ir tos pačios funkcijos postūmiais. Tai yra labai įdomus rezultatas, rodantis funkcijos $\zeta(s)$ galimų reikšmių aibės tankumą. Voronino teoremą pastebėjo kiti matematikai ir ją sustiprino. Tegul $\mathscr{K}$ yra juostos D kompaktinių aibių su jungiuoju papildiniu klasė, o $H_0(K)$, $K \in \mathscr{K}$, yra tolydžiųjų ir nevirstančių nuliu aibėje K bei analizinių aibės K viduje klasė. Tuomet šiuolaikinė Voronino teoremos modifikacija atrodo taip, žr., pvz., [7].

1 teorema. *Tegul $K \in \mathscr{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty}\frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau\in[0;T]:\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\tau)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Čia $\mathrm{meas}A$ yra mačiosios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego (Lebesgue) matas.

1 teorema rodo, jog yra be galo daug postūmių $\zeta(s+i\tau)$, kurie norimu tikslumu aproksimuoja duotąją funkciją iš klasės $H_0(K)$.

1 teorema yra vadinama tolydžiojo universalumo teorema, nes τ postūmyje $\zeta(s+i\tau)$ gali įgyti bet kokias realiąsias reikšmes. Yra žinomas ir diskretusis universalumo teoremos analogas, kurį pasiūlė A. Reichas (Reich), žr. [12].

2 teorema. *Tegul $K \in \mathscr{K}$, $f(s) \in H_0(K)$, o $h > 0$ yra bet koks fiksuotas skaičius. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\#\left\{0\leqslant k\leqslant N:\sup_{s\in K}|\zeta(s+ikh)-f(s)|<\varepsilon\right\}>0.$$

Čia $\#A$ žymi aibės A elementų skaičių, o N perbėga reikšmes iš aibės $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Taikymuose 2 teorema turi pranašumą prieš 1 teoremą, nes diskrečių postūmių aibė $\{kh\}$ yra siauresnė už intervalą $[0;T]$, todėl lengviau galima aproksimuoti postūmiais $\zeta(s+ikh)$.

Galimi 1 ir 2 teoremų apibendrinimai su analizinių aproksimavimo bendresniais postūmiais $\zeta(s+i\varphi(\tau))$ arba $\zeta(s+i\widehat{\varphi}(k))$. Straipsnyje [6] buvo panaudota funkcija $\widehat{\varphi}$, glaudžiai susijusia su pačia funkcija $\zeta(s)$. Gerai žinoma, kad funkcija $\zeta(s)$ su visais $s \in \mathbb{C}$ tenkina funkcinę lygtį

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s)=\pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),\tag{1.2}$$

čia $\Gamma(s)$ yra Oilerio gama funkcija, kuri pusplokštumėje $\sigma > 0$ yra apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s)=\int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}u$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus taškus $s = -k$, $k \in \mathbb{N}_0$, kurie yra paprastieji poliai ir

$$\operatorname*{Res}_{s=-k} \Gamma(s) = \frac{(-1)^k}{k!}.$$

Lygtis (1.2) susieja funkciją $\zeta(s)$ su $\zeta(1-s)$, o sąryšio pagrindinė dalis yra funkcija

$$g(s) \stackrel{\text{def}}{=} \pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right).$$

Ši funkcija yra labai svarbi Rymano dzeta funkcijos teorijoje, nagrinėjant $\zeta(s)$ nulius. Yra dviejų rūšių nuliai. Nuliai, kurie yra gaunami iš (1.2) lygties yra $s = -2k$, $k \in \mathbb{N}$, ir yra vadinami trivialiaisias. Be to, žinoma, kad funkcija $\zeta(s)$ turi be galo daug kompleksinių nulių, kurie guli juostoje $\{s \in \mathbb{C} : 0 < \sigma < 1\}$. Šie nuliai yra vadinami netrivialiaisiais, ir atlieka svarbų vaidmenį funkcijos $\zeta(s)$ teorijoje. Deja, apie juos ne viskas yra žinoma. Paminėtų rezultatų įrodymus ir daugiau informacijos galima rasti, pvz., [7] monografijoje.

Tegul $\theta(t)$ yra funkcijos $g(s)$ argumentas, tolydžiu kirtimu išilgai atkarpos tarp taškų $s = 1/2$ ir $s = 1/2 + it$. Aišku, kad $\arg g(1/2) = 0$. Yra žinoma, žr. [5], kad funkcija $\theta(t)$ yra monotoniškai didėjanti, neaprėžta iš viršaus, kai $t > t^* = 6,289\ldots$. Todėl lygtis

$$\theta(t) = (n-1)\pi, \quad n \in \mathbb{N},$$

kai $t > t^*$ turi vienintelį sprendinį t_n. Skaičiai t_n yra vadinami Gramo taškais, nes juos pirmasis nagrinėjo danų matematikas J.-P. Gramas (Gram), žr. [2]. Tegul $\rho_n = 1/2 + i\widehat{\gamma}_n$, $\widehat{\gamma}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, yra funkcijos $\zeta(1/2+it)$ nuliai, t. y. $\zeta(\rho_n) = 0$. Gramas suskaičiavo, kad kiekviename intervale $(t_{n-1}; t_n]$, $n = 1, \ldots, 15$, yra tiksliai vienas nulis ρ_n su $t_{n-1} < \widehat{\gamma}_n < t_n$. Vėliau buvo įrodyta, kad atveju $n > 15$ šis teiginys nėra teisingas. Be to, yra žinoma, žr. [5], kad

$$t_n = \gamma_n(1 + o(1)), \quad n \to \infty,$$

čia γ_n yra netrivialiųjų nulių menamoji dalis. Taigi, Gramo taškai t_n yra glaudžiai susiję su funkcijos $\zeta(s)$ nulių pasiskirstymu.

Taškai t_n gali būti panaudoti ir funkcijos $\zeta(s)$ universalumo teorijoje aproksimuojant analizines funkcijas apibendrintais postūmiais $\zeta(s + iht_n)$, $h > 0$. Straipsnyje [6] buvo įrodyta tokia teorema.

3 teorema. *Tegul $K \in \mathscr{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su visais $h > 0$ ir $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Ši teorema, kaip ir 1 ir 2 universalumo teoremos, yra neefektyvi, nes jos tvirtina, kad yra be galo daug aproksimuojančių funkciją $f(s)$ postūmių $\zeta(s+ikh)$, tačiau nėra žinomas nė vienas konkretus aproksimuojantis postūmis. Aproksimuojančius postūmius lengviau nustatyti, kai jų aibė nėra plati. Tai veda prie universalumo teoremų trumpuose intervaluose. Aproksimavimas yra nagrinėjamas ne intervale $1 \leqslant k \leqslant N$, kurio ilgis yra $N-1$, bet intervale, kurio ilgis yra $o(N)$, kai $N \to \infty$. Pirmasis toks rezultatas buvo įrodytas [8] straipsnyje.

4 teorema. *Tegul* $T^{1/3}(\log T)^{26/15} \leqslant H \leqslant T$. *Tarkime, kad* $K \in \mathscr{K}$, *o* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su visais* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{H} \operatorname{meas}\left\{\tau \in [T; T+H] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Diskretusis 4 teoremos variantas buvo gautas [9] straipsnyje.

Magistro darbo tikslas yra 3 teoremos išplėtimas trumpame intervale. darbe įrodyta tokia teorema. Priminsime, kad h yra bet koks fiksuotas teigiamas skaičius.

5 teorema. *Tegul* $\left(\frac{3\pi N}{h^2}\right)^{1/3} (\log\{(h+1)N\})^{12/5} \leqslant M \leqslant N$. *Tarkime, kad* $K \in \mathscr{K}$, *o* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su visais* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \# \left\{N \leqslant k \leqslant N+M : \sup_{s\in K} |\zeta(s+iht_k) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

5 teoremos įrodymas yra tikimybinis. Jis išplaukia iš ribinės teoremos apie tikimybinių matų konvergavimą analizinių funkcijų erdvėje. Tegul $\mathscr{B}(\mathbb{X})$ yra erdvės $\mathbb{X}$ (bendruoju atveju, $\mathbb{X}$ yra topologinė erdvė) Borelio aibių klasė, t. y. σ-algebra, generuota aibės $\mathbb{X}$ atvirųjų aibių sistemos. Tegul P ir P_n, $n \in \mathbb{N}$, yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}, \mathscr{B}(\mathbb{X}))$. Priminsime, kad P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, jei su kiekviena realiąja, tolydžiąja, aprėžtąja funkcija g yra teisinga lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} g \,\mathrm{d}P_n = \int_{\mathbb{X}} g \,\mathrm{d}P.$$

1. Diskrečioji ribinė teorema trumpuose intervaluose

Įvade buvo paminėta, kad 5 teoremos įrodymas remiasi ribine teorema. Kad galėtume šią teoremą suformuluoti, reikia sukonstruoti tam tikrą tikimybinę erdvę. Tegul $H(D)$ žymi juostos D analizinių funkcijų, su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija, erdvę. Apibrėžkime aibę

$$\Omega = \prod_{p \in \mathbb{P}} \gamma_p,$$

čia γ_p su visais pirminiais p yra vienetinis apskritimas kompleksinėje plokštumoje. Kadangi, su sandaugos topologija ir pataškine daugyba, toras Ω yra topologinė kompaktinė Abelio (Abel) grupė, todėl erdvėje $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ galime apibrėžti tikimybinį Haro (Haar) matą m_H. Tokiu būdu gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), m_H)$. Su visais $p \in \mathbb{P}$, tegul $\omega(p)$ yra p-toji elemento $\omega \in \Omega$ komponentė. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega), m_H)$, apibrėžkime erdvėje $H(D)$ reikšmes įgyjantį ($H(D)$-reikšmį) atsitiktinį elementą

$$\zeta(s, \omega) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}.$$

Su beveik visais $\omega \in \Omega$, pastaroji begalinė sandauga tolygiai konverguoja juostos D kompaktiniuose poaibiuose, žr. [7]. Tegul P_ζ žymi atsitiktinio elemento $\zeta(s, \omega)$ skirstinį, t. y.

$$P_\zeta(A) = m_H \{\omega \in \Omega : \zeta(s, \omega) \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(H(D)).$$

Priminsime, kad mato P_ζ atrama yra minimalioji uždaroji aibė $S_{P_\zeta} \subset H(D)$ tokia, kad $P_\zeta(S_{P_\zeta}) = 1$. Yra gerai žinoma, žr., pvz., [7], kad mato P_ζ atrama yra aibė

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0, \text{ arba } g(s) \equiv 0\}.$$

Su $A \in \mathscr{B}(H(D))$, tegul

$$P_{N,M}(A) = \frac{1}{M+1} \# \{N \leqslant k \leqslant N + M : \zeta(s + iht_k) \in A\}.$$

Suformuluosime pagrindinę šio skyriaus teoremą.

6 teorema. *Tarkime, kad*

$$\left(\frac{3\pi N}{h^2}\right)^{1/3} (\log\{(h+1)N\})^{12/5} \leqslant M \leqslant N.$$

Tuomet matas $P_{N,M}$ silpnai konverguoja į matą P_ζ, kai $N \to \infty$.

Šios teoremos įrodymas yra ilgas, todėl jį išskaidysime į atskiras dalis.

1.1. Diskrečioji ribinė teorema tore

Pirmiausiai, erdvėje $(\Omega, \mathscr{B}(\Omega))$ įrodysime diskrečiąją ribinę teoremą trumpuose intervaluose. Tegul

$$Q_{N,M}(A) = \frac{1}{M+1} \# \left\{ N \leqslant k \leqslant N+M : \left(p^{-iht_k} : p \in \mathbb{P} \right) \in A \right\}, \quad A \in \mathscr{B}(\Omega).$$

Prieš pradėdami nagrinėti mato $Q_{N,M}$ silpnąjį konvergavimą, kai $N \to \infty$, suformuluosime keletą lemų. Priminsime, kad Gramo taškai t_n gali būti išplėsti į Gramo funkciją t_u su visais $u \geqslant 0$. Suformuluosime Lemą 1.1 iš [5] straipsnio.

1 lema. *Tegul t_u, $u \geqslant 0$, yra lygties*

$$\theta(t_u) = (u-1)\pi$$

sprendinys, tenkinantis sąlygą $\theta'(t_u) > 0$, o $u \to \infty$. Tuomet

$$t_u = \frac{2\pi u}{\log u} \left(1 + \frac{\log \log u}{\log u} (1 + o(1)) \right),$$
$$t'_u = \frac{2\pi}{\log u} \left(1 + \frac{\log \log u}{\log u} (1 + o(1)) \right)$$

ir

$$t''_u = -\frac{\pi}{u (\log u)^2} \left(1 + \frac{\log \log u}{\log u} (2 + o(1)) \right).$$

Taip pat mums reikės paprasto fakto apie trigonometrines sumas ir integralus.

2 lema. *Tarkime, kad realioji funkcija $g(s)$ intervale $[a, b]$ turi monotoninę išvestinę tokią, kad $|g'(x)| \leqslant \delta < 1$. Tuomet*

$$\sum_{a < m \leqslant b} \mathrm{e}^{2\pi i g(m)} = \int_a^b \mathrm{e}^{2\pi i g(x)} \, \mathrm{d}x + O\left(\frac{1}{1-\delta} \right).$$

Lemos įrodymą galima rasti, pvz., [13] monografijoje.

Dabar suformuluosime mato $Q_{N,M}$ diskrečiąją ribinę lemą trumpuose intervaluose.

3 lema. *Tarkime, kad $M \leqslant N$, $M \to \infty$, kai $N \to \infty$, ir $\log N = o(M)$. Tuomet, kai $N \to \infty$, matas $Q_{N,M}$ silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Įrodymas. Yra gerai žinoma, žr., pvz., [7], kad grupės Ω charakteris yra tokios išraiškos

$$\chi(\omega) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \omega^{k_p}(p), \quad \omega \in \Omega,$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p yra ne nuliai. Taikysime Furjė (Fourier) transformacijų metodą. Tegul $g_{N,M}(\underline{k})$, $\underline{k} = \{k_p : k_p \in \mathbb{Z},\ p \in \mathbb{P}\}$, yra mato $Q_{N,M}$ Furjė transformacija, t. y.

$$g_{N,M}(\underline{k}) = \int\limits_{\Omega} \prod_{p\in\mathbb{P}}{}' \omega^{k_p}(p)\,\mathrm{d}Q_{N,M},$$

čia ženklas "$'$" reiškia, kad tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p yra ne nuliai. Taigi, iš mato $Q_{N,M}$ apibrėžimo gauname

$$g_{N,M}(\underline{k}) = \frac{1}{M+1}\sum_{k=N}^{N+M}\prod_{p\in\mathbb{P}}{}' p^{-iht_k k_p} = \frac{1}{M+1}\sum_{k=N}^{N+M}\exp\left\{-iht_k \sum_{p\in\mathbb{P}}{}' k_p \log p\right\}. \tag{1.1}$$

Lengva matyti, kad

$$g_{N,M}(\underline{0}) = 1. \tag{1.2}$$

Kadangi aibė $\{\log p : p \in \mathbb{P}\}$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, todėl

$$a \stackrel{def}{=} \sum_{p\in\mathbb{P}}{}' k_p \log p \neq 0,$$

kai $\underline{k} \neq \underline{0}$. Šiuo atveju, iš 1 ir 2 lemų, su pakankamai dideliu N (tiksliau, tenkinančiu nelygybę $|ah|t'_N \leqslant 1/2$), gauname, kad

$$\sum_{k=N}^{N+M}\exp\{ihat_k\} = \int\limits_{N}^{N+M}\exp\{ihat_u\}\,\mathrm{d}u + O\left(\frac{1}{1-h|a|t'_N}\right). \tag{1.3}$$

Nesunku pastebėti, jog, pritaikę vidurinės reikšmės teoremą, turime

$$\int\limits_{N}^{N+M}\cos(hat_u)\,\mathrm{d}u = \int\limits_{N}^{N+M}\frac{1}{t'_u}\cos(hat_u)\,\mathrm{d}t_u \ll \frac{1}{|a|ht'_{N+M}}$$

ir

$$\int\limits_{N}^{N+M}\sin(hat_u)\,\mathrm{d}u \ll \frac{1}{|a|ht'_{N+M}}.$$

Pastarieji įverčiai, (1.1) – (1.3) lygybės ir 2 Lema duoda

$$\lim_{N\to\infty} g_{N,M}(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu} \quad \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jeigu} \quad \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Šios lygybės dešinioji pusė yra Haro mato m_H Furjė transformacija. Pritaikę tikimybinių matų kompaktinėse topologinėse grupėse tolydumo teoremą, gauname lemos tvirtinimą. $\square$

1.2. Diskrečioji ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms

Antrasis 6 teoremos įrodymo žingsnis yra diskrečioji ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms. Tegul $\theta > 1/2$ yra fiksuotas skaičius, $m, n \in \mathbb{N}$, o

$$v_n(m) = \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\theta} \right\}.$$

Pratęskime funkciją $\omega(p)$, $p \in \mathbb{P}$, į aibę $\mathbb{N}$ tokia formule

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^l \mid m \\ p^{l+1} \nmid m}} \omega^l(p), \quad m \in \mathbb{N},$$

ir apibrėžkime Dirichlė eilutę

$$\zeta_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_n(m)}{m^s} \qquad \text{and} \qquad \zeta_n(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\omega(m) v_n(m)}{m^s}.$$

Pastaroji eilutė absoliučiai konverguoja pusplokštumėje $\sigma > \sigma_0$, čia σ_0 yra bet koks fiksuotas skaičius, žr. [7]. Todėl funkcija $u_n : \Omega \to H(D)$ apibrėžta lygybe

$$u_n(\omega) = \zeta_n(s, \omega)$$

yra tolydžioji.

Pažymėkime

$$P_{N,M,n}(A) = \frac{1}{M} \#\{N \leqslant k \leqslant N + M : \zeta_n(s + iht_k) \in A\},$$

su $A \in \mathscr{B}(H(D))$. Tegul $P_n = m_H u_n^{-1}$, čia $m_H u_n^{-1}(A) = m_H(u_n^{-1} A)$ su $A \in \mathscr{B}(H(D))$. Priminsime vieną silpnojo tikimybinių matų savybę.

4 lema. *Tegul P ir P_n, $n \in \mathbb{N}$, yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}_1, \mathscr{B}(\mathbb{X}_1))$, o $u : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ – tolydusis atvaizdis. Jeigu P_n, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą P, tai tuomet ir matas $P_n u^{-1}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į matą $P u^{-1}$.*

Ši lema yra 5.1 teoremos iš [1] monografijos atskirasis atvejis.

5 lema. *Tarkime, kad $M \leqslant N$, $M \to \infty$, kai $N \to \infty$, ir $\log N = o(M)$. Tuomet matas $P_{N,M,n}$ silpnai konverguoja į matą P_n, kai $N \to \infty$.*

Įrodymas. Iš matų $Q_{N,M}$, $P_{N,M,n}$ ir funkcijos u_n apibrėžimų turime, kad $P_{N,M,n} = Q_{N,M} u_n^{-1}$. Kadangi funkcija u_n yra tolydžioji, iš 3 ir 4 lemų gauname lemos tvirtinimą. □

1.3. Rymano dzeta funkcijos vidurkinis artinys trumpuose intervaluose

Kitas 6 teoremos įrodymo žingsnis yra skirtas funkcijos $\zeta(s+iht_k)$ aproksimavimui Dirichlė eilute $\zeta_n(s+iht_k)$. Yra gerai žinoma, žr. [7], kad egzistuoja kompaktinių aibių seka $\{K_l : l \in \mathbb{N}\} \subset D$ tokia, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

čia $K_l \subset K_{l+1}$ su visais $l \in \mathbb{N}$. Be to, kiekviena kompaktinė aibė $K \subset D$ yra tam tikros aibės K_l poaibis. Tuomet

$$\rho(g_1, g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}, \quad g_1, g_2 \in H(D),$$

yra erdvės $H(D)$ metrika indukuojanti tolygaus konvergavimo kompaktuose topologiją.

Dėl patogumo suformuluosime Galaherio (Gallagher) lemą, kuri sujungia tos pačios funkcijos diskretųjį ir tolydųjį kvadratinius vidurkius.

6 lema. *Tegul T_0, $T \geqslant \delta > 0$, $\mathcal{T}$ – baigtinė netuščioji aibė intervale $[T_0 + \delta/2, T_0 + T - \delta/2]$, o*

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t\in\mathcal{T}\\ |t-x|<\delta}} 1.$$

Jeigu $S(t)$ – kompleksines reikšmes įgyjanti, tolydžioji uždarame intervale $[T_0, T + T_0]$ ir bent atvirame intervale $(T_0, T_0 + T)$ turinti tolydžiąją išvestinę funkcija, tai tuomet

$$\sum_{t\in\mathcal{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{T_0}^{T_0+T} |S(t)|^2 \mathrm{d}t + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S(t)|^2 \mathrm{d}t \int_{T_0}^{T_0+T} |S'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Lemos įrodymą galima rasti [11, lema 1.4].

Dabar suformuluosime pagrindinę šio skyrelio lemą.

7 lema. *Tarkime, kad*

$$\left(\frac{3\pi N}{h^2}\right)^{1/3} (\log\{(h+1)N\})^{12/5} \leqslant M \leqslant N.$$

Tuomet yra teisinga tokia lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \sum_{k=N}^{N+M} \rho\left(\zeta(s+iht_k), \zeta_n(s+iht_k)\right) = 0.$$

Įrodymas. Iš metrikos ρ apibrėžimo matome, kad pakanka įrodyti, jog, su kiekviena aibe $K \subset D$, galioja tokia lygybė

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \sum_{k=N}^{N+M} \sup_{s\in K} |\zeta(s+iht_k) - \zeta_n(s+iht_k)| = 0. \tag{1.4}$$

Tegul θ yra iš dydžio $v_n(m)$ apibrėžimo. Pažymėkime

$$l_n(s) = \frac{s}{\theta}\Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right)n^s.$$

Yra žinoma, žr. [7], kad Dirichlė eilutė $\zeta_n(s)$, su $\sigma > 1/2$, turi tokią integralinę išraišką

$$\zeta_n(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty}\zeta(s+z)l_n(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{1.5}$$

Fiksuokime aibę $K \subset D$ ir pakankamai mažą skaičių $\varepsilon > 0$ tokius, kad $1/2 + 2\varepsilon \leqslant \sigma \leqslant 1 - \varepsilon$ su taškais $s = \sigma + iv \in K$. Tegul $\hat{\theta} = \sigma - 1/2 - \varepsilon > 0$. Tuomet iš (1.5) išraiškos ir pagrindinės reziduumų teoremos gauname, kad

$$\zeta_n(s) - \zeta(s) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\hat{\theta}-i\infty}^{-\hat{\theta}+i\infty}\zeta(s+z)l_n(z)\frac{\mathrm{d}z}{z} + \operatorname*{Res}_{z=1-s}\zeta(s+z)\frac{l_n(z)}{z}.$$

Vadinasi, su $s \in K$,

$$\zeta(s+iht_k) - \zeta_n(s+iht_k) \ll \int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(s+iht_k-\hat{\theta}+it)|\frac{|l_n(-\hat{\theta}+it)|}{|-\hat{\theta}+it|}\,\mathrm{d}t + \frac{|l_n(1-s-iht_k)|}{|1-s-iht_k|}.$$

Kadangi $s = \sigma + iv$, imdami t vietoje $t + v$ turime

$$\begin{aligned}\zeta(s+iht_k) - \zeta_n(s+iht_k) &\ll \int_{-\infty}^{\infty}|\zeta(1/2+\varepsilon+i(t+ht_k)))|\frac{|l_n(1/2+\varepsilon-s+it)|}{|1/2+\varepsilon-s+it|}\,\mathrm{d}t\\ &\quad+\frac{|l_n(1-s-iht_k)|}{|1-s-iht_k|}.\end{aligned}$$

Pažymėkime

$$\frac{1}{M+1}\sum_{k=N}^{N+M}\sup_{s\in K}|\zeta(s+iht_k)-\zeta_n(s+iht_k)| \ll S_1 + S_2, \tag{1.6}$$

čia

$$S_1 = \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{M+1}\sum_{k+N}^{N+M}|\zeta(1/2+\varepsilon+i(t+ht_k))|\right)\sup_{s\in K}\frac{|l_n(1/2+\varepsilon-s+it)|}{|1/2+\varepsilon-s+it|}\,\mathrm{d}t$$

ir

$$S_2 = \frac{1}{M+1}\sum_{k=N}^{N+M}\sup_{s\in K}\frac{|l_n(1-s-iht_k)|}{|1-s-iht_k|}.$$

Atsižvelgę į gerai žinomą įvertį

$$\Gamma(\sigma+it) \ll \exp\{-c|t|\}, \quad c > 0,$$

kuris yra tolygus su $\sigma_1 \leqslant \sigma \leqslant \sigma_2$, randame

$$\frac{l_n(1/2+\varepsilon-\sigma-iv+it)}{1/2+\varepsilon-\sigma-iv+it} \ll \frac{n^{-\varepsilon}}{\theta}\exp\left\{-\frac{c}{\theta}|t-v|\right\} \ll_{\theta,K} n^{-\varepsilon}\exp\{-\frac{c}{\theta}|t|\}. \tag{1.7}$$

Panaudoję tuos pačius argumentus, gauname

$$\frac{|l_n(1-s-iht_k)|}{|1-s-iht_k|} \ll_{\theta,K} n^{1-\sigma} \exp\left\{-\frac{ch}{\theta} t_k\right\}.$$

Remdamiesi 2 lema, turime

$$S_2 \ll_{\theta,K} \frac{n^{1/2-2\varepsilon}}{M} \sum_{k=N}^{N+M} \exp\left\{-\frac{2ch\pi k}{\theta \log k}\right\} \ll_{\theta,h,K} \frac{n^{1/2-2\varepsilon}}{M}. \tag{1.8}$$

Integralo S_1 įvertinimas yra žymiai sudėtingesnis. Tam mums reikia funkcijos $\zeta(s)$ diskrečiojo kvadratinio vidurkio trumpuose intervaluose.

Priminsime vieną of A. Ivičiaus (Ivič) rezultatą, žr. [4], skirtą funkcijos $\zeta(s)$ kvadratiniam vidurkiui trumpuose intervaluose. Tegul (κ, λ) yra eksponentinė pora. Tuomet, su fiksuotu σ, $1/2 < \sigma < 1$, $1 + \lambda - \kappa \geqslant 2\sigma$, ir

$$T^{(\kappa+\lambda+1-2\sigma)/(2(\kappa+1))} (\log T)^{(2+\kappa)/(\kappa+1)} \leqslant H \leqslant T,$$

tolygiai pagal H, galioja įvertis

$$\int_{T-H}^{T+H} |\zeta(\sigma+it)|^2 \, \mathrm{d}t \ll H. \tag{1.9}$$

Mūsų atveju $\sigma = 1/2 + \varepsilon$. Imdami eksponentinę porą $(4/11, 6/11)$, žr. [4], gauname, kad (1.9) įvertis yra teisingas su $T^{1/3} (\log T)^{26/15} \leqslant H \leqslant T$. Šį faktą taikysime diskrečiojo kvadratinio vidurkio

$$\frac{1}{M+1} \sum_{k=N}^{N+M} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + ht_k)\right)\right|^2$$

įvertinime. Pradėsime nuo tolydžiojo kvadratinio vidurkio

$$I_{N,M}(t) \overset{def}{=} \int_{N}^{N+M} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}u.$$

Remdamiesi funkcijos t'_u monotoniškumu, randame

$$\begin{aligned} I_{N,M}(t) &= \int_{N}^{N+M} \frac{1}{t'_u} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}t_u \\ &\ll_h \frac{1}{t'_{N+M}} \int_{N}^{N+M} \mathrm{d}\left(\int_{N}^{t+ht_u} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}v \right) \\ &\ll_h \frac{1}{t'_{N+M}} \int_{t_N+t}^{ht_{N+M}+t} \left|\zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}v. \end{aligned} \tag{1.10}$$

Iš 2 lemos ir Lagranžo (Lagrange) vidurinės reikšmės teoremos, su $N \to \infty$, gauname

$$t_{N+M} - t_N = Mt'_{N+\vartheta M} \leqslant Mt'_N < \frac{3\pi M}{\log N}, \quad 0 < \vartheta < 1.$$

Todėl, iš (1.10) įverčio ir 2 lemos turime

$$I_{N,M} \ll_h \log(N+M) \int\limits_{ht_N-(3\pi hM)/\log N-|t|}^{ht_N+(3\pi hM)/\log N+|t|} |\zeta(1/2+\varepsilon+iv)|^2 \, \mathrm{d}v.$$

Kadangi

$$M \geqslant \left(\frac{3\pi N}{h^2}\right)^{1/3} (\log\{(h+1)N\})^{12/5},$$

todėl,

$$M \geqslant \left(\frac{3\pi N}{h^2}\right)^{1/3} (\log\{(h+1)M\})^{2/3+26/15} \geqslant \left(\frac{3\pi N}{h^2}\right)^{1/3} (\log N)^{2/3} \left(\log\frac{3\pi hN}{\log N}\right)^{26/15}$$

ir

$$\frac{2\pi Mh}{\log N} > \left(\frac{3\pi Nh}{\log N}\right)^{1/3} \left(\log\frac{3\pi Nh}{\log N}\right)^{26/15}.$$

Taigi, jeigu

$$\frac{3\pi hM}{\log N} + |t| \leqslant ht_N,$$

remdamiesi (1.9) įverčiu, randame

$$I_{N,M}(t) \ll_h \log(N+M)\left(\frac{3\pi hM}{\log N} + |t|\right) \ll_h M(1+|t|). \tag{1.11}$$

Jeigu

$$\frac{3\pi hM}{\log N} + |t| > ht_N,$$

tuomet

$$ht_N + \frac{3\pi hM}{\log N} + |t| \leqslant 2\left(\frac{3\pi hM}{\log N} + |t| + |t|\right),$$

o

$$ht_N - \frac{3\pi hM}{\log N} - |t| > -2\left(\frac{3\pi hM}{\log N} + |t|\right).$$

Vadinasi, šiuo atveju,

$$I_{N,M}(t) \ll_h \log(N+M) \int\limits_{-2((3\pi hM)/\log N+|t|)}^{2((3\pi hM)/\log N+|t|)} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+i(t+ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}v \ll_h M(1+|t|).$$

Pastarasis ir (1.11) įverčiai duoda

$$I_{N,M}(t) \ll_h M(1+|t|). \tag{1.12}$$

Pritaikę Koši (Cauchy) integralinę formulę ir panaudoję (1.12) įvertį, gauname

$$\int\limits_N^{N+M} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+i(t+ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}u \ll_h M(1+|t|). \tag{1.13}$$

Todėl, panaudoję (1.12) ir (1.13) įverčius bei 6 lemą, turime

$$\begin{aligned}\frac{1}{M+1}\sum_{k=N}^{N+M}\left|\zeta\left(\frac12+\varepsilon+i(t+ht_k)\right)\right|^2 &\ll \int\limits_{N-1/2}^{N+M+1/2}\left|\zeta\left(\frac12+\varepsilon+i(t+ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}u\\ &+\left(\int\limits_{N-1/2}^{N+M+1/2}\left|\zeta\left(\frac12+\varepsilon+i(t+ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}u\right.\\ &\quad\left.\times\,(t_N')^2\int\limits_{N-1/2}^{N+M+1/2}\left|\zeta'\left(\frac12+\varepsilon+i(t+ht_u)\right)\right|^2 \mathrm{d}u\right)\\ &\ll_h M(1+|t|).\end{aligned}$$

Grįžę prie S_1 apibrėžimo ir panaudoję (1.7) įvertį, randame, kad

$$S_1 \ll_{\theta,h,K} n^{-\varepsilon}\int\limits_{-\infty}^{\infty}(1+|t|)\exp\left\{-\frac{c}{\theta}|t|\right\} \ll_{\theta,h,K} n^{-\varepsilon}.$$

Pastarasis, (1.6) ir (1.8) įverčiai duoda

$$\frac{1}{M+1}\sum_{k=N}^{N+M}\sup_{s\in K}|\zeta(s+iht_k)-\zeta_n(s+iht_k)| \ll_{\theta,h,K} n^{-\varepsilon}+\frac{n^{1/2-2\varepsilon}}{M}.$$

Šis įvertis su $M\to\infty$ ir $n\to\infty$ įrodo (1.4) lygybę. □

1.4. 6 teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje pabaigsime diskrečiosios ribinės teoremos trumpuose intervaluose įrodymą. Prieš tai suformuluosime keletą įrodymui reikalingų faktų.

Nagrinėsime seką $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$, čia matas P_n yra 5 lemos ribinis matas. Priminsime, kad matų šeima $\{P\}$ erdvėje $(\mathbb{X},\mathscr{B}(\mathbb{X}))$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jeigu kiekviena seka $\{P_{n_k}\}\subset\{P\}$ turi posekį silpnai konverguojantį į tam tikrą tikimybinį matą P erdvėje $(\mathbb{X},\mathscr{B}(\mathbb{X}))$. Matų šeima $\{P\}$ yra vadinama suspausta, jeigu su kiekvienu $\varepsilon>0$ egzistuoja kompaktinė aibė $K\subset\mathbb{X}$ tokia, kad

$$P(K)>1-\varepsilon$$

su visais $P\in\{P\}$. Prochorovo (Prokhorov) teorema, žr. [1, Theorem 6.1], yra labai svarbi silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorijoje. Ši teorema teigia, kad kiekviena suspausta matų šeima yra reliatyviai kompaktiška.

8 lema. *Matų seka $\{P_n : n\in\mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktiška.*

Įrodymas. Remiantis Prochorovo teorema, pakanka įrodyti, kad seka $\{P_n\}$ yra suspausta.

Tegul $\theta_{N,M}$ yra atsitiktinis elementas apibrėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje su matu μ toks, kad

$$\mu\{\theta_{N,M} = ht_k\} = \frac{1}{M+1}, \quad k = N, \dots, N+M.$$

Tarkime, kad X_n yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, kurio skirstinys P_n. Apibrėžkime $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_{N,M,n} = X_{N,M,n}(s) = \zeta_n(s + i\theta_{N,M}).$$

Sąryšiu $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ pažymėję konvergavimą į skirstinį, 5 lemos tvirtinimą galime užrašyti taip

$$X_{N,M,n} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} X_n. \tag{1.14}$$

Kadangi eilutė $\zeta_n(s)$ su $\sigma > 1/2$ absoliučiai konverguoja, panaudoję 2 lemą su fiksuotu $1/2 < \sigma < 1$, gauname

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \int_N^{N+M} |\zeta_n(\sigma + it_u)|^2 \, \mathrm{d}u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_n^2(m)}{m^{2\sigma}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^{2\sigma}}$$

ir

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \int_N^{N+M} |\zeta_n'(\sigma + it_u)|^2 \, \mathrm{d}u = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{v_n^2(m)\log^2 m}{m^{2\sigma}} \leqslant \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\log^2 m}{m^{2\sigma}}.$$

Todėl, panaudoję 6 lemą, turime

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \sum_{k=N}^{N+M} |\zeta_n(\sigma + iht_k)|^2 \ll C_{\sigma,h} < \infty. \tag{1.15}$$

Tegul K_l yra kompaktinė aibė iš metrikos ρ apibrėžimo. Koši integralinė formulė ir (1.15) įvertis duoda

$$\sup_{n\in\mathbb{N}} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \sum_{k=N}^{N+M} \sup_{s\in K_l} |\zeta_n(\sigma + iht_k)| \ll R_{l,h} < \infty. \tag{1.16}$$

Paėmę fiksuotą $\varepsilon > 0$ ir $V = V_l(\varepsilon) = 2^l R_{l,h}\varepsilon^{-1}$, iš (1.16) įverčio gauname, kad

$$\limsup_{N\to\infty} \mu\left\{\sup_{s\in K_l} |X_{N,M,n}(s)| > V\right\} \leqslant \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{V(M+1)} \sum_{k=N}^{N+M} \sup_{s\in K_l} |\zeta_n(s + iht_k)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2^l} \tag{1.17}$$

su visais $n, l \in \mathbb{N}$. Aibė

$$K = K(\varepsilon) = \left\{g \in H(D) : \sup_{s\in K_l} |g(s)| \leqslant V_l(\varepsilon),\ l \in \mathbb{N}\right\}$$

erdvėje $H(D)$ yra kompaktiška. Atsižvelgę į (1.17) įvertį ir (1.14) sąryšį, matome, kad

$$\mu\{X_n \in K\} \geqslant 1 - \varepsilon$$

su visais $n \in \mathbb{N}$. Taigi, iš atsitiktinio elemento X_n apibrėžimo, gauname, kad

$$P_n(K) \geqslant 1 - \varepsilon$$

su visais $n \in \mathbb{N}$. Vadinasi seka $\{P_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. □

Dabar jau galime įrodyti 6 teoremą. Bet prieš tai priminsime vieną tvirtinimą apie konvergavimą į skirstinį.

9 lema. *Tarkime, kad erdvė* $(\mathbb{X}, d)$ *yra separabilioji,* $\mathbb{X}$*-reikšmiai atsitiktiniai elementai* Y_n *ir* X_{nk}*,* $n \in \mathbb{N}$*,* $k \in \mathbb{N}$*, yra apibrėžti toje pačioje tikimybinėje erdvėje su matu* μ*,*

$$X_{nk} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X_k$$

su visais $k \in \mathbb{N}$*, o*

$$X_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Be to, su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mu\{d(Y_n, X_{nk}) \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Tuomet

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Ši lema yra 4.2 teorema iš [1] monografijos.

6 teoremos įrodymas. Įrodysime, kad matas $P_{N,M}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į mato P_n ribinį matą P, kai $n \to \infty$, čia P_n yra 5 lemos ribinis matas.

Iš 8 lemos turime, kad egzistuoja seka $\{P_{n_r}\} \subset \{P_n\}$, su $r \to \infty$, silpnai konverguojanti į tam tikrą tikimybinį matą P erdvėje $(H(D), \mathscr{B}(H(D)))$. Šis faktas ekvivalentus sąryšiui

$$X_{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{D}} P, \tag{1.18}$$

čia X_n yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, kurio skirstinys P_n.

Apibrėžkime dar vieną $H(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_{N,M} = X_{N,M}(s) = \zeta(s + i\theta_{N,M}).$$

Iš 7 lemos turime, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$ galioja lygybė

$$\begin{aligned}&\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu\{\rho(X_{N,M}, X_{N,M,n}) \geqslant \varepsilon\} \\ &\qquad \leqslant \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{\varepsilon(M+1)} \sum_{k=N}^{N+M} \rho(\zeta(s+iht_k), \zeta_n(s+iht_k)) = 0.\end{aligned}$$

Ši lygybė kartu su (1.14) ir (1.18) sąryšiais rodo, kad

$$X_{N,M} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} P,$$

kitaip tariant, kad matas $P_{N,M}$ silpnai konverguoja į matą P, kai $N \to \infty$. Be to, iš pastarojo sąryšio matome, kad matas P nepriklauso nuo sekos $\{P_{n_r}\}$. Kadangi seka $\{P_n\}$ yra reliatyviai kompaktiška, turime, kad

$$X_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} P,$$

t. y. matas P_n silpnai konverguoja į matą P, kai $n \to \infty$.

Mato

$$\frac{1}{T}\text{meas}\{\tau \in [0,T] : \zeta(s+i\tau) \in A\}, \quad A \in \mathscr{B}(H(D)),$$

silpnasis konvergavimas, kai $T \to \infty$, yra gautas [7] monografijoje. Be to, ten pat yra įrodyta, kad matas P sutampa su matu P_ζ. Taigi, kai $N \to \infty$, matas $P_{N,M}$ silpnai konverguoja į matą P_ζ. $\square$

2. Universalumo teoremos įrodymas

Šiame skyriuje įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą. Priminsime Mergeliano (Mergelyan) teoremą, žr. [10], apie analizinių funkcijų aproksimavimą daugianariais (polinomais).

10 lema. *Tegul $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė su jungiuoju papildiniu, o $f(s)$ aibėje K tolydžioji funkcija ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja daugianaris $p(s)$ toks, kad*

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

5 teoremos įrodymas. Iš 10 lemos gauname, kad egzistuoja daugianaris $p(s)$ toks, kad

$$\sup_{s \in K} \left| f(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Pirmojo skyriaus pradžioje aptarėme, kad mato P_ζ atrama yra aibė S. Kadangi $\mathrm{e}^{p(s)} \neq 0$ su $s \in D$, todėl $\mathrm{e}^{p(s)} \in S$. Vadinasi aibė

$$G_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} \left| g(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

yra elemento $\mathrm{e}^{p(s)} \in S$ atviroji aplinka. Iš mato atramos savybių gauname, kad

$$P_\zeta(G_\varepsilon) > 0.$$

Silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentas atvirųjų aibių terminais, žr. pvz., 2.1 teoremą iš [1] monografijos, ir 6 teorema duoda, kad

$$\liminf_{N \to \infty} P_{N,M}(G_\varepsilon) \geqslant P_\zeta(G_\varepsilon) > 0.$$

Pastaroji nelygybė, mato $P_{N,M}$ ir aibės G_ε apibrėžimai, kartu su (2.1) nelygybe, duoda teoremos įrodymą. □

Lietratūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[2] J.-P. Gram, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, *Acta Math.* **27** (1903), 289–304.

[3] J. Hadamard, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, *Comptes Rendus Acad. Sci. Paris* **122** (1896), 1470–1473.

[4] A. Ivič, *The Theory of the Riemann Zeta-Function with Applications*, Wiley, New York, 1995.

[5] M. A. Korolev, Gram's law in the theory of the Riemann zeta-function. Part 1, *Proc. Steklov Inst. Math* **292** (2016), no. 2, 1–146.

[6] M. Korolev, A. Laurinčikas, A new application of the gram points, *Aequat. Math.* **93** (2019), 859–873.

[7] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[8] A. Laurinčikas, Universality of the Riemann zeta-function in short intervals, *J. Number Theory* **204** (2019), 279–295.

[9] A. Laurinčikas, Discrete universality of the Riemann zeta-function in short intervals, *Appl. Anal. Discr. Math.* **14** (2020), 382–405.

[10] S. N. Mergelyan, Uniform approximations to functions of a complex variable, *Amer. Math. Soc. Translation* **1954** (1954), no. 101, 99 pp.

[11] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes Math., vol. 227, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[12] A. Reich, Werteverteilung von Zetafunktionen, *Arch. Math.* **34** (1980), 440–451.

[13] E. C. Titchmarsh, *The Theory of the Riemann Zeta-Function*, 2nd ed., The Clarendon Press, Oxford University Press, New York, 1980.

[14] C. J. de la Vallée-Poussin, Recherches analytiques sur la théorie des nombres premiers, I-III, *Ann. Soc. Sci. Bruxelles* **20** (1896), 183–256, 281–362, 363–397.

[15] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.* **39**(3) (1975), 475–486.

Gramo taškai ir Rymano dzeta funkcijos universalumas trumpuose intervaluose

Santrauka

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichlė eilute arba Oilerio sandauga pirminiais skaičiais

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

čia $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė. Be to, funkcija $\zeta(s)$ turi analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, o taškas $s = 1$ yra jos paprastasis polius su reziduumu 1.

Magistro darbe yra įrodyta diskrečiojo universalumo teorema trumpuose intervaluose Rymano dzeta funkcijai postūmiuose naudojant funkcijos $\zeta(s)$ Gramo taškų aibę $\{t_k\}$.

5 teorema. *Tegul* $\left(\frac{3\pi N}{h^2}\right)^{1/3} (\log\{(h+1)N\})^{12/5} \leqslant M \leqslant N$. *Tarkime, kad* $K \in \mathscr{K}$, *o* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su visais* $\varepsilon > 0$ *ir visais fiksuotais* $h > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{M+1} \# \left\{ N \leqslant k \leqslant N + M : \sup_{s \in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Gram Points and Universality of the Riemann Zeta-function in Short Intervals

Summary

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and $\zeta(s)$ denote the Riemann zeta-function which, for $\sigma > 1$, is defined by Dirichlet series and Euler product over primes

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

where $\mathbb{P}$ denotes the set of all prime numbers. Moreover, the function $\zeta(s)$ has the analytic continuation to the whole complex plane with the unique simple pole at the point $s = 1$ with residue 1.

The aim of master thesis is the using of the sequence $\{t_n\}$ of Gram's points of the Riemann zeta-function in the theory of discrete universality in short intervals of the function $\zeta(s)$. The main result is the following theorem.

Theorem 5. *Suppose that* $\left(\frac{3\pi N}{h^2}\right)^{1/3} (\log\{(h+1)N\})^{12/5} \leqslant M \leqslant N$. *Let* $K \in \mathscr{K}$ *and* $f(s) \in H_0(K)$. *Ten, for all* $\varepsilon > 0$ *and all fixed* $h > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{M+1} \# \left\{ N \leqslant k \leqslant N + M : \sup_{s \in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$