VILNIAUS UNIVERSITETAS
ŠIAULIŲ AKADEMIJA

MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
Didžiųjų duomenų analitikos specializacija

EDVINAS LEVICKAS

Magistro studijų baigiamasis darbas

ABSOLIUČIAI KONVERGUOJANČIŲ DIRICHLE EILUČIŲ UNIVERSALUMAS

Darbo vadovas: prof. dr. Darius Šiaučiūnas

Šiauliai, 2023

Turinys

Įvadas **3**

1. Vidurkinis artinys **7**

2. Universalumo teoremos įrodymas **10**

Literatūra **14**

Santrauka **15**

Summary **16**

Įvadas

Primename, kad funkcija $g(s)$, $s = \sigma + it$, yra vadinama analizine srityje G, jeigu ji yra diferencijuojama kompleksine prasme kiekviename tos srities taške.

Analizinių funkcijų teorija yra labai svarbi matematikos šaka. Analizinių funkcijų problemas nagrinėja kompleksinio kintamojo funkcijų teorija, matematinė analizė, funkcinė analizė, diferencialinės ir integralinės lygtys, analizinė skaičių teorija ir kitos matematikos šakos. Dažnai sutinkamos sudėtingos analizinės funkcijos, todėl reikia mokėti jas aproksimuoti paprastesnėmis analizinėmis funkcijomis. Taip iškyla analizinių funkcijų aproksimavimo problema. Pagal klasikinę Mergeliano (Mergelyan) teoremą, žr. [7], kiekviena analizinė funkcija, tenkinanti kai kurias natūralias sąlygas, gali būti aproksimuojama norimu tikslumu daugianariu (kitaip – polinomu). Tačiau įdomesnis aproksimavimas yra taip vadinamomis dzeta funkcijomis, kurios yra apibrėžiamos Dirichle (Dirichlet) eilutėmis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a(m)}{m^s}, \quad a(m) \in \mathbb{C},\ \sigma > \sigma_0.$$

Šis aproksimavimas yra universalus, t. y. plati analizinių funkcijų klasė yra aproksimuojama vienos ir tos pačios dzeta funkcijos postūmiais. Pirmąją dzeta funkcijų su universaliu aproksimavimu savybę 1975 m. atrado rusų matematikas S. M. Voroninas (Voronin), žr. [11], ir tai buvo Rymano (Riemann) dzeta funkcija

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \quad \sigma > 1.$$

Funkcija $\zeta(s)$ turi analizinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Primename šiuolaikinę Voronino teoremos variantą. Tegul $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių aibių su jungiaisiais papildiniais klasė, o $H_0(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžiųjų ir nevirstančių nuliu aibėje K ir analizinių aibės K viduje klasė. Simboliu $\mathrm{meas}A$ žymėsime mačiosios aibės A Lebego (Lebesgue) matą. Tuomet yra teisingas toks tvirtinimas.

1 teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\left\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K} |\zeta(s+i\tau) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Teoremos nelygybė rodo, jog postūmių $\zeta(s+i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$, aproksimuojančių funkciją $f(s)$, aibė turi teigiamą apatinį tankį. Iš čia turime, kad ši aibė yra begalinė.

Pirmosios teoremos postūmiuose $\zeta(s + i\tau)$ τ gali įgyti bet kokias realiąsias reikšmes. Todėl 1 teorema yra vadinama tolydžiojo universalumo teorema. Yra žinomas ir diskretusis

1 teoremos analogas, žr. [1] ir [9]. Tegul $\#A$ yra aibės A elementų skaičius. Tuomet turime tokį tvirtinimą.

2 teorema. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$, *o* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su visais* $h > 0$ *ir* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Panašias aproksimavimo savybes turi ir daugelis kitų dzeta funkcijų. Magistro darbe nagrinėjamos taip vadinamos periodinės dzeta funkcijos. Tegul $\mathfrak{a} = \{a_m : n \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su mažiausiuoju periodu $q \in \mathbb{N}$. Tuomet periodinė dzeta funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichle eilute

$$\zeta(s;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}.$$

Tegul dar α, $0 < \alpha \leqslant 1$, yra fiksuotas parametras. Tuomet Hurvico (Hurwitz) dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichle eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir yra pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus tašką $s = 1$, kuris yra paprastasis polius su reziduumu 1. Iš sekos $\mathfrak{a}$ periodiškumo gauname, kad pusplokštumėje $\sigma > 1$ galioja lygybė

$$\zeta(s;\mathfrak{a}) = \frac{1}{q^s} \sum_{l=1}^{q} a_l \zeta\left(s, \frac{l}{q}\right). \tag{1}$$

Todėl iš minėtų Hurvico dzeta funkcijos savybių turime, kad periodinė dzeta funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje, išskyrus, galbūt, paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu

$$a \overset{\text{def}}{=} \frac{1}{q} \sum_{l=1}^{q} a_l.$$

Jei $a = 0$, tuomet funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra analizinė visoje kompleksinėje plokštumoje, t. y. ji yra sveikoji funkcija. Akivaizdu, kai $a_m \equiv 1$, tai funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ tampa Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$, t. y. $\zeta(s;\mathfrak{a})$ yra funkcijos $\zeta(s)$ apibendrinimas.

Yra žinoma, žr., pvz., [1], [10] ir [6], kad su kai kuriomis sekomis $\mathfrak{a}$ funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$ turi universalumo savybę. Magistro darbas siejamas su diskrečiuoju funkcijos $\zeta(s;\mathfrak{a})$ universalumu, todėl primename vieną [5] straipsnio atskirą atvejį. Toliau laikysime, kad seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvioji, t. y. $a_1 = 1$ ir $a_{mn} = a_m a_n$ su visais tarpusavyje pirminiais m ir n ((m,n)=1). Teoremos iš [5] straipsnio formulavimui dar yra reikalinga aibė

$$L(\mathbb{P}, h, \pi) = \left\{ (\log p : p \in \mathbb{P}), \frac{2\pi}{h} \right\},$$

čia $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė, o $h > 0$. Tuomet yra teisinga teorema, žr. [5].

3 teorema. *Tarkime, jog seka* $\mathfrak{a}$ *yra multiplikatyvioji, o aibė* $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ *yra tiesiškai nepriklausoma virs racionaliųjų skaičių kūno* $\mathbb{Q}$*. Tegul* $K \in \mathcal{K}$*, o* $f(s) \in H_0(K)$*. Tuomet su visais* $h > 0$ *ir* $\varepsilon > 0$ *yra teisinga nelygybė*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Magistro darbo tikslas yra įrodyti universalumo teoremą absoliučiai konverguojančiai Dirichle eilutei, į kurios apibrėžimą įeina seka $\mathfrak{a}$. Tegul $\theta > 1/2$ yra fiksuotas skaičius, $u > 0$ ir

$$l_u(s) = \frac{s}{\theta}\Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right)u^s, \qquad \text{ir} \qquad v_u(m) = \exp\left\{ -\left(\frac{m}{u}\right)^\theta \right\}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Darbe nagrinėjame eilutę

$$\zeta_u(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m v_n(m)}{m^s}.$$

Kadangi a_m yra aprėžti, o $v_u(m)$ mažėja eksponentiškai m atžvilgiu, tai pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai bet kurioje pusplokštumėje $\sigma > \sigma 0$ su baigtiniu σ_0. Pagrindinės teoremos formulavimui yra reikalinga viena tikimybinė erdvė. Tegul $H(D)$ yra analizinių funkcijų juostoje D aibė su tolygaus konvergavimo kompaktinėse aibėse topologija. Seka $\{g_n(s)\} \subset H(D)$ šioje topologijoje konverguoja į funkciją $g(s) \in H(D)$ tada ir tik tada, kai su kiekviena kompaktine aibe $K \subset D$

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{s\in K} |g_n(s) - g(s)| = 0.$$

Apibrėžkime Dekarto (Descartes) sandaugą

$$\Omega = \prod_{p\in\mathbb{P}} \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$ su visais $p \in \mathbb{P}$. Su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija, begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio (Abel) grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ ($\mathcal{B}(\mathbb{X})$ yra erdvės $\mathbb{X}$ Borelio aibių klasė, t. y. σ algebra, generuota erdvės $\mathbb{X}$ atvirųjų aibių sistemos) galima apibrėžti tikimybinį Haro (Haar) matą m_H. Gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ p-toji komponentė, t. y. $\omega = \{\omega(p) : p \in \mathbb{P}\}$. Dabar tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėšime erdvėje $H(D)$ reikšmes įgyjantį ($H(D)$-reikšmį) atsitiktinį elementą

$$\zeta(s, \omega; \mathfrak{a}) = \prod_{p\in\mathbb{P}} \left(1 + \sum_{\alpha=1}^{\infty} \frac{a_{p^\alpha}\omega^\alpha(p)}{p^{\alpha s}} \right).$$

Magistro darbe įrodome tokią teoremą.

4 teorema. *Tarkime, kad seka* $\mathfrak{a}$ *multiplikatyvioji, aibė* $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ *tiesiškai nepriklausoma virš kūno* $\mathbb{Q}$*, o* $u_N \to \infty$ *ir* $u_N \ll N^2$*, kai* $N \to \infty$*. Tegul* $K \in \mathcal{K}$*, o* $f(s) \in H_0(K)$*. Tuomet su visais* $\varepsilon > 0$*, išskyrus ne daugiau negu skaičiąją* ε *reikšmių aibę, egzistuoja riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta_{u_N}(s + ikh; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\}$$
$$= m_H \left\{ \omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s, \omega; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

1. Vidurkinis artinys

Pagrindinės magistro darbo teoremos įrodyme naudojama tam tikra Dirichle eilutės $\zeta_{u_N}(s;\mathfrak{a})$ aproksimacija periodine dzeta funkcija $\zeta(s;\mathfrak{a})$. Šios aproksimacijos įrodymui mums bus reikalinga Galaherio (Gallagher) lema, kuri sujungia tolydųjį ir diskretųjį tam tikrų funkcijų kvadratinius vidurkius.

1 lema. *Tegul T_0, $T \geqslant \delta > 0$, $\mathcal{T}$ – baigtinė netuščioji aibė intervale $[T_0+\delta/2, T_0+T-\delta/2]$, o*

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t\in\mathcal{T}\\ |t-x|<\delta}} 1.$$

Jeigu $S(t)$ – kompleksines reikšmes įgyjanti, tolydžioji uždarame intervale $[T_0, T+T_0]$ ir bent atvirame intervale (T_0, T_0+T) turinti tolydžiąją išvestinę funkcija, tai tuomet

$$\sum_{t\in\mathcal{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{T_0}^{T_0+T}|S(t)|^2\mathrm{d}t + \left(\int_{T_0}^{T_0+T}|S(t)|^2\mathrm{d}t\int_{T_0}^{T_0+T}|S'(t)|^2\mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Lemos įrodymą galima rasti [8] monografijoje, lema 1.4.

Suformuluosime pagrindinę šio skyriaus lemą.

2 lema. *Tarkime, kad $u_N \to \infty$ ir $u_N \ll N^2$, kai $N\to\infty$. Tuomet su kiekviena kompaktine aibe $K\subset D$ ir $h>0$*

$$\lim_{N\to\infty}\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sup_{s\in K}|\zeta(s+ikh;\mathfrak{a})-\zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a})| = 0.$$

Įrodymas. Tegul $1/2<\sigma<1$ yra fiksuotas, o $T\to\infty$. Tuomet yra gerai žinoma, žr, pvz, [4], kad

$$\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+it,\alpha)|^2\,\mathrm{d}t \ll_{\sigma,\alpha} T$$

ir

$$\int_{-T}^{T}|\zeta'(\sigma+it,\alpha)|^2\,\mathrm{d}t \ll_{\sigma,\alpha} T.$$

Iš šių įverčių ir (1) išraiškos gauname, jog

$$\int_{-T}^{T}|\zeta(\sigma+it;\mathfrak{a})|^2\,\mathrm{d}t \ll_{\sigma,\mathfrak{a}} T$$

ir

$$\int_{-T}^{T}|\zeta'(\sigma+it;\mathfrak{a})|^2\,\mathrm{d}t \ll_{\sigma,\mathfrak{a}} T.$$

Todėl su $\tau\in\mathbb{R}$ turime, kad

$$\int_{0}^{T}|\zeta(\sigma+i\tau+it;\mathfrak{a})|^2\,\mathrm{d}t \ll_{\sigma,\mathfrak{a}} T(1+|\tau|)$$

ir

$$\int_0^T |\zeta'(\sigma+i\tau+it;\mathfrak{a})|^2 \,\mathrm{d}t \ll_{\sigma,\mathfrak{a}} T(1+|\tau|).$$

Pastarieji įverčiai ir 1 lema duoda

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{N}|\zeta(\sigma+ikh+i\tau;\mathfrak{a})|^2 &\ll_h \int_0^{Nh}|\zeta(\sigma+i\tau+it;\mathfrak{a})|^2\,\mathrm{d}t\\ &+\left(\int_0^{Nh}|\zeta(\sigma+i\tau+it;\mathfrak{a})|^2\,\mathrm{d}t\int_0^{Nh}|\zeta'(\sigma+i\tau+it;\mathfrak{a})|^2\,\mathrm{d}t\right)^{1/2}\\ &\ll_{\sigma,\mathfrak{a},h} N(1+|\tau|). \end{aligned}\tag{1.1}$$

Tegul $K\subset D$ yra bet kokia kompaktinė aibė. Tuomet egzistuoja $\varepsilon>0$ toks, kad K yra juostoje $\{s\in\mathbb{C}:1/2+2\varepsilon\leqslant\sigma\leqslant 1-\varepsilon\}$. Su bet kokiu s iš šios juostos turime

$$\theta_1=\sigma-\frac{1}{2}-\varepsilon>0.$$

Iš Melino (Mellin) formulės

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{a-i\infty}^{a+i\infty}\Gamma(s)b^{-s}\,\mathrm{d}s=\mathrm{e}^{-b},\quad a,b>0,$$

gauname tokią išraišką

$$v_u(m)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty}\frac{1}{\theta}\Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right)\left(\frac{m}{u}\right)^{-s}\mathrm{d}s.\tag{1.2}$$

Iš pastarosios išraiškos turime įvertį $v_u(m)\ll_{\theta,u} m^{-\theta}$. Be to, iš tos pačios (1.2) išraiškos gauname, jog

$$\begin{aligned}\zeta_u(s;\mathfrak{a})&=\frac{1}{2\pi i}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^s}\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty}\frac{z}{\theta}\Gamma\left(\frac{z}{\theta}\right)\left(\frac{m}{u}\right)^{-z}\frac{\mathrm{d}z}{z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty}\frac{l_u(z)}{z}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m}{m^{s+z}}\,\mathrm{d}z\\ &=\frac{1}{2\pi i}\int_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty}\zeta(s+z;\mathfrak{a})l_u(z)\,\frac{\mathrm{d}z}{z}.\end{aligned}\tag{1.3}$$

Todėl, (1.3) integralinė išraiška ir pagrindinė reziduumų teorema duoda, kad

$$\zeta_{u_N}(s;\mathfrak{a})-\zeta(s;\mathfrak{a})=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\theta_1-i\infty}^{-\theta_1+i\infty}\zeta(s+z;\mathfrak{a})l_{u_N}(z)\frac{\mathrm{d}z}{z}+\frac{\hat{a}l_{u_N}(1-s)}{1-s}.$$

Vadinasi, su $s\in K$,

$$\begin{aligned}&|\zeta(s+ikh;\mathfrak{a})-\zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a})|\\ &\ll\int_{-\infty}^{\infty}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+ikh+it+i\tau;\mathfrak{a}\right)\right|\frac{|l_{u_N}(1/2+\varepsilon-\sigma+i\tau)|}{|1/2+\varepsilon-\sigma+i\tau|}\,\mathrm{d}\tau+\frac{|\hat{a}||l_{u_N}(1-s-ikh)|}{|1-s-ikh|}\\ &\ll\int_{-\infty}^{\infty}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+ikh+i\tau;\mathfrak{a}\right)\right|\sup_{s\in K}\frac{|l_{u_N}(1/2+\varepsilon-s+i\tau)|}{|1/2+\varepsilon-s+i\tau|}\,\mathrm{d}\tau+\frac{|\hat{a}||l_{u_N}(1-s-ikh)|}{|1-s-ikh|}.\end{aligned}$$

Todėl,

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}|\zeta(s+ikh;\mathfrak{a})-\zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a})| \\
&\quad \ll \int_{-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+ikh+i\tau;\mathfrak{a}\right)\right|\right)\sup_{s\in K}\frac{|l_{u_N}(1/2+\varepsilon-s+i\tau)|}{|1/2+\varepsilon-s+i\tau|}\,\mathrm{d}\tau \\
&\qquad + |\hat{a}|\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\sup_{s\in K}\frac{|l_{u_N}(1-s-ikh)|}{|1-s-ikh|} \overset{\mathrm{def}}{=} I+Z. \qquad (1.4)
\end{aligned}$$

Koši (Cauchy) nelygybė ir (1.1) rodo, kad

$$\begin{aligned}
\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+ikh+i\tau;\mathfrak{a}\right)\right| &\leqslant \left(\frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{N}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+ikh+i\tau;\mathfrak{a}\right)\right|^2\right)^{1/2} \\
&\ll_{\varepsilon,\mathfrak{a},h} (1+|\tau|)^{1/2}. \qquad (1.5)
\end{aligned}$$

Yra gerai žinoma, žr. [3], jog yra tokia konstanta $c>0$, kad

$$\Gamma(\sigma+it) \ll \exp\{-c|t|\} \qquad (1.6)$$

tolygiai, kai $\sigma_1<\sigma<\sigma_2$ su bet kokiu $\sigma_1<\sigma_2$. Todėl, iš $l_u(s)$ apibrėžimo, su visais $s\in K$, gauname

$$\begin{aligned}
\frac{l_{u_N}(1/2+\varepsilon-s+i\tau)}{1/2+\varepsilon-s+i\tau} &\ll_\theta u_N^{1/2+\varepsilon-\sigma}\left|\Gamma\left(\frac{1}{\theta}\left(\frac{1}{2}+\varepsilon-it+i\tau\right)\right)\right| \\
&\ll_\theta u_N^{-\varepsilon}\exp\left\{-\frac{c}{\theta}|\tau-t|\right\} \ll_{\theta,K} u_N^{-\varepsilon}\exp\left\{-\frac{c}{\theta}|\tau|\right\}.
\end{aligned}$$

Šis ir (1.5) įverčiai duoda, jog

$$I \ll_{\varepsilon,\mathfrak{a},h,\theta,K} u_N^{-\varepsilon}\int_{-\infty}^{\infty}(1+|\tau|)^{1/2}\exp\left\{-\frac{c}{\theta}|\tau|\right\}\mathrm{d}\tau \ll_{\varepsilon,\mathfrak{a},h,\theta,K} u_N^{-\varepsilon}. \qquad (1.7)$$

Analogiškai, iš (1.6) įverčio gauname, kad, su visais $s\in K$,

$$\frac{l_{u_N}(1-\sigma-it+ikh)}{1-\sigma-it+ikh} \ll_{\theta,K} u_N^{1-\sigma}\exp\left\{-\frac{ch}{\theta}k\right\}.$$

Vadinasi,

$$Z \ll_{\theta,K,\mathfrak{a}} \frac{u_N^{1/2-2\varepsilon}}{N}\sum_{k=0}^{N}\exp\left\{-\frac{ch}{\theta}k\right\} \ll_{\theta,K,\mathfrak{a},h} u_N^{1/2-2\varepsilon}\frac{\log N}{N}.$$

Kadangi $u_N \ll N^2$, tai pastarasis įvertis, kartu su (1.7) ir (1.4) įverčiais, duoda teoremos tvirtinimą. □

2. Universalumo teoremos įrodymas

Universalumo teoremos (4 teoremos) įrodymas yra tikimybinis ir remiasi silpnuoju tikimybinių matų ir skirstinio funkcijų konvergavimu. Priminsime silpnojo tikimybinių matų konvergavimo apibrėžimą.

1 apibrėžimas. *Sakome, kad matas P_n silpnai konverguoja į matą P, kai $n \to \infty$, jeigu su kiekviena realiąja, tolydžiąja, aprėžtąja funkcija f erdvėje $\mathbb{X}$ galioja lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f \mathrm{d}P_n = \int_{\mathbb{X}} f \mathrm{d}P.$$

Suformuluosime dar vieną universalumo teoremą, kurios pagrindu įrodysime 4 teoremą. Tam mums reikia keleto faktų.

Tegul

$$P_{N,\mathfrak{a},h}(A) = \frac{1}{N+1} \#\{0 \leqslant k \leqslant N : \zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) \in A\},$$

$A \in \mathcal{B}(H(D))$, o $P_{\zeta,\mathfrak{a}}$ yra atsitiktinio elemento $\zeta(s,\omega;\mathfrak{a})$ skirstinys, t. y.

$$P_{\zeta,\mathfrak{a}}(A) = m_H\{\omega \in \Omega : \zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) \in A\}.$$

3 lema. *Tarkime, kad seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvioji, o aibė $L(\mathbb{P},h,\pi)$ – tiesiškai nepriklausoma virš kūno $\mathbb{Q}$. Tuomet $P_{N,\mathfrak{a},h}$ silpnai konverguoja į $P_{\zeta,\mathfrak{a}}$, kai $N \to \infty$. Be to, mato $P_{\zeta,\mathfrak{a}}$ atrama yra aibė $\{g \in H(D) : g(s) \neq 0, \ \text{arba}\ g(s) \equiv 0\} \stackrel{\text{def}}{=} S$.*

Įrodymas. Pirmasis lemos teiginys sutampa su Teorema 3 iš [5] straipsnio, kai svorio funkcija $w(u) \equiv 1$.

Antrojo lemos tvirtinimo įrodymą galima rasti [3] monografijoje. □

Suformuluosime Mergeliano teorema apie analizinių funkcijų aproksimavimą polinomais, žr. [7].

4 lema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė su jungiaisiais papildiniais, o funkcija $f(s)$ yra tolydžioji aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja polinomas $p(s)$ toks, kad*

$$\sup_{s\in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

5 teorema. *Tarkime, kad seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvioji, o aibė $L(\mathbb{P},h,\pi)$ – tiesiškai nepriklausoma virš kūno $\mathbb{Q}$. Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus ne daugiau negu skaičiąją ε reikšmių aibę, egzistuoja riba*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\}$$
$$= m_H\left\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Įrodymas. Kadangi aibėje K $f(s) \neq 0$, todėl, pagal 4 lemą, egzistuoja polinomas $p(s)$ toks, kad

$$\sup_{s \in K} \left| f(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{2.1}$$

Akivaizdu, kad $\mathrm{e}^{p(s)} \in S$. Todėl aibė

$$G_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} \left| g(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\}$$

yra atviroji ir joje yra mato $P_{\zeta,\mathfrak{a}}$ atramos elementų. Vadinasi,

$$P_{\zeta,\mathfrak{a}}(G_\varepsilon) > 0. \tag{2.2}$$

Aibė

$$\mathcal{G}_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

yra funkcijos $f(s)$ atviroji aplinka, o jos uždarinys $\partial \mathcal{G}_\varepsilon$ yra aibė

$$\left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| = \varepsilon \right\}.$$

Vadinasi, uždariniai $\partial \mathcal{G}_{\varepsilon_1}$ ir $\partial \mathcal{G}_{\varepsilon_2}$ nesikerta su skirtingais teigiamaisiais ε_1 ir ε_2. Tai reiškia, kad $P_{\zeta,\mathfrak{a}}(\partial \mathcal{G}_\varepsilon) = 0$ su visais $\varepsilon > 0$, iškyrus ne daugiau negu skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę, t. y., kitaip tariant, aibė $\mathcal{G}_\varepsilon$ yra mato $P_{\zeta,\mathfrak{a}}$ tolydumo aibė su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus ne daugiau negu skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Todėl 3 lemos pirmasis teiginys kartu su silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentu tolydumo aibių terminais, žr., pvz., [2], duoda

$$\lim_{N \to \infty} P_{N,\mathfrak{a},h}(\mathcal{G}_\varepsilon) = P_{\zeta,\mathfrak{a}}(\mathcal{G}_\varepsilon) \tag{2.3}$$

su visais $\varepsilon > 0$, iškyrus ne daugiau negu skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Be to, iš (2.1) nelygybės gauname, kad

$$\sup_{s \in K} |g(s) - f(s)| \leqslant \sup_{s \in K} \left| g(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| + \sup_{s \in K} \left| f(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \varepsilon$$

su $g \in G_\varepsilon$. Vadinasi $\mathcal{G}_\varepsilon \supset G_\varepsilon$. Todėl iš (2.2) nelygybės turime, kad $P_{\zeta,\mathfrak{a}}(\mathcal{G}_\varepsilon) > 0$. Ši nelygybė, mato $P_{N,\mathfrak{a},h}$ ir aibės $\mathcal{G}_\varepsilon$ apibrėžimai kartu su (2.3) lygybe duoda teoremos tvirtinimą. □

Dabar pateiksime pagrindinės magistro darbo teoremos įrodymą.

4 teoremos įrodymas. Išvesime 4 teoremą iš 5 teoremos naudodami 1 lemą ir skirstinio funkcijų silpnąjį konvergavimą.

Apibrėžkime funkcijas

$$F_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon) = P_{N,\mathfrak{a},h}(\mathcal{G}_\varepsilon) = \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + ikh; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon \right\},$$

$$\hat{F}_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon) = \frac{1}{N+1}\#\left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K}|\zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\},$$

ir

$$F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon) = P_{\zeta,\mathfrak{a}}(\mathcal{G}_\varepsilon) = m_H\left\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K}|\zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\}.$$

Funkcijos $F_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$, $\hat{F}_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$ ir $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$, kintamojo ε atžvilgiu, yra skirstinio funkcijos. Iš tiesų, jos yra nedidėjančios, tolydžiosios iš kairės ir $+\infty$ įgyja reikšmę 1, o $-\infty$ – reikšmę 0. Be to, kadangi

$$\partial\mathcal{G}_\varepsilon = \left\{g \in H(D) : \sup_{s\in K}|g(s) - f(s)| \leqslant \varepsilon\right\} \setminus \left\{g \in H(D) : \sup_{s\in K}|g(s) - f(s)| < \varepsilon\right\},$$

gauname, kad

$$\begin{aligned}P_{\zeta,\mathfrak{a}}(\partial\mathcal{G}_\varepsilon) =& m_H\left\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K}|\zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) - f(s)| \leqslant \varepsilon\right\} - m_H\left\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K}|\zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\}\\ =& F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon+0) - F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon).\end{aligned}$$

Vadinasi, $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon+0) = F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$ tada ir tik tada, kai $P_{\zeta,\mathfrak{a}}(\partial\mathcal{G}_\varepsilon) = 0$. Todėl taškas ε yra skirstinio funkcijos $F_{\zeta,\mathfrak{a}}$ tolydumo taškas tada ir tik tada, kai aibė $\mathcal{G}_\varepsilon$ yra mato $P_{\zeta,\mathfrak{a}}$ tolydumo aibė. Iš (2.3) lygybės matome, kad matas $P_{N,\mathfrak{a},h}$ silpnai konverguoja į matą $P_{\zeta,\mathfrak{a}}$, kai $N \to \infty$ su visomis mato $P_{\zeta,\mathfrak{a}}$ tolydumo aibėmis $\mathcal{G}_\varepsilon$. Taigi, reminatis prieš tai išvardintais faktais, skirstinio funkcija $F_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į skirstinio funkciją $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$ visuose jos tolydumo taškuose ε ($F_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$ silpnai konverguoja į $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$, kai $N \to \infty$).

Tegul $\varphi_{N,\mathfrak{a},h}(v)$, $\hat{\varphi}_{N,\mathfrak{a},h}(v)$ ir $\varphi_{\zeta,\mathfrak{a}}(v)$, $v \in \mathbb{R}$, skistinio funkcijų $F_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$, $\hat{F}_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$ ir $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$ charakteristinės funkcijos, atitinkamai. Kadangi $F_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$ silpnai konverguoją į $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$, kai $N \to \infty$, charakteristinių funkcijų tolydumo teorema duoda, kad

$$\lim_{N\to\infty}\varphi_{N,\mathfrak{a},h}(v) = \varphi_{\zeta,\mathfrak{a}}(v) \tag{2.4}$$

su visais $v \in \mathbb{R}$. Turime parodyti, kad $\hat{\varphi}_{N,\mathfrak{a},h}(v)$ taip pat konverguoja į $\varphi_{\zeta,\mathfrak{a}}(v)$, kai $N \to \infty$.

Iš charakteristinės funkcijos apibrėžimo gauname, jog

$$\begin{aligned}\hat{\varphi}_{N,\mathfrak{a},h}(v) - \varphi_{N,\mathfrak{a},h}(v) =& \int_{-\infty}^{\infty} \mathrm{e}^{iv\varepsilon}\,\mathrm{d}\left(\hat{F}_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon) - F_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)\right)\\ =& \frac{1}{N+1}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\exp\left\{iv\sup_{s\in K}|\zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)|\right\}\right.\\ & \left.- \exp\left\{iv\sup_{s\in K}|\zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)|\right\}\right).\end{aligned}$$

Taigi,

$$
\begin{aligned}
|\hat{\varphi}_{N,\mathfrak{a},h}(v) - \varphi_{N,\mathfrak{a},h}(v)| \leqslant & \frac{1}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \Bigg| \exp \Bigg\{ iv \Bigg(\sup_{s \in K} |\zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| \\
& - \sup_{s \in K} |\zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| \Bigg) \Bigg\} - 1 \Bigg| \\
\leqslant & \frac{|v|}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \Bigg| \sup_{s \in K} |\zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| \\
& - \sup_{s \in K} |\zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| \Bigg| \\
\leqslant & \frac{|v|}{N+1} \sum_{k=0}^{N} \sup_{s \in K} |\zeta_{u_N}(s+ikh;\mathfrak{a}) - \zeta(s+ikh;\mathfrak{a})| .
\end{aligned}
$$

Todėl, atsžvelgę į 1 lemą gauname, kad, tolygiai pagal $|v| \leqslant C$ su visais $\infty > C > 0$,

$$
\hat{\varphi}_{N,\mathfrak{a},h}(v) - \varphi_{N,\mathfrak{a},h}(v) = o(1),
$$

kai $N \to \infty$. Iš šio fakto ir (2.4) turime, jog

$$
\lim_{N \to \infty} \hat{\varphi}_{N,\mathfrak{a},h}(v) = \varphi_{\zeta,\mathfrak{a}}(v)
$$

tolygiai pagal $|v| \leqslant C$. Taigi, iš tolydumo teoremos gauname, kad skirstinio funkcija $\hat{F}_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$ silpnai konverguoja į $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$, kai $N \to \infty$, arba $\hat{F}_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$ silpnai konverguoja į $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$ visuose skirstinio funkcijos $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$ tolydumo taškuose ε. Be to, skirstinio funkcija turi daugiausiai skaičiąją aibę trūkio taškų. Pastarasis faktas bei skirstinio funkcijų $\hat{F}_{N,\mathfrak{a},h}(\varepsilon)$ ir $F_{\zeta,\mathfrak{a}}(\varepsilon)$ apibrėžimai įrodo teoremą. □

Lietratūra

[1] B. Bagchi, *The statistical behaviour and universality properties of the Riemann zeta-function and other allied Dirichlet series*, Ph.D. Thesis, Indian Statistical Institute, Calcutta, 1981.

[2] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[3] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[4] A. Laurinčikas and R. Garunkštis, *The Lerch Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 2002.

[5] R. Macaitienė, M. Stoncelis and D. Šiaučiūnas, A weighted discrete universality theorem for periodic zeta-functions, in: *Anal. Probab. Methods Number Theory*, Proc. 6th Int. Conf., Palanga, Lithuania, 11–17 September 2016, A. Dubickas, A. Laurinčikas, E. Manstavičius and G. Stepanauskas (Eds), VU leidykla, Vilnius, 2017, pp. 97–107.

[6] K. Matsumoto, A survey on the theory of universality for zeta and L-functions, in: *Number Theory: Plowing and Starring Through High Wawe Forms*, Proc. 7th China Japan Seminar, M. Kaneko, Sh. Kanemitsu and J. Liu (Eds), Number Theory Appl. Vol. 11, World Sci. Publ. Co., Singapore, 2015, pp. 95–144.

[7] S. N. Mergelyan, Uniform approximations to functions of a complex variable, *Amer. Math. Soc. Translation* **1954** (1954), no. 101, 99 pp.

[8] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes Math., vol. 227, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[9] A. Reich, Werteverteilung von Zetafunktionen, *Arch. Math.* **34** (1980), 440–451.

[10] J. Steuding, *Value-Distribution of L-Functions*, Lecture Notes Math. vol. 1877, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 2007.

[11] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.* **39**(3) (1975), 475–486.

Absoliučiai konverguojančių Dirichle eilučių universalumas

Santrauka

Tegul $\mathfrak{a} = \{a_m : n \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su mažiausiuoju periodu $q \in \mathbb{N}$. Tuomet periodinė dzeta funkcija $\zeta(s; \mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama Dirichle eilute

$$\zeta(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$$

ir analiziniu pratęsimu visoje kompleksinėje plokštumoje. Su periodine dzeta funkcija yra glaudžiai susijusi absoliučiai konverguojanti Dirichle eilutė

$$\zeta_u(s; \mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m v_n(m)}{m^s}.$$

čia

$$v_u(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{u}\right)^{\theta}\right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$\theta > 1/2$ yra fiksuotas skaičius, o $u > 0$.

Magistro darbe yra įrodyta tokia diskrečiojo universalumo teorema.

4 teorema. *Tarkime, kad seka* $\mathfrak{a}$ *multiplikatyvioji, aibė* $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ *tiesiškai nepriklausoma virš kūno* $\mathbb{Q}$*, o* $u_N \to \infty$ *ir* $u_N \ll N^2$*, kai* $N \to \infty$*. Tegul* $K \in \mathcal{K}$*, o* $f(s) \in H_0(K)$*. Tuomet su visais* $\varepsilon > 0$*, išskyrus ne daugiau negu skaičiąją* ε *reikšmių aibę, egzistuoja riba*

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta_{u_N}(s + ikh; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\}$$
$$= m_H \left\{\omega \in \Omega : \sup_{s \in K} |\zeta(s, \omega; \mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0.$$

Universality of Absolutely Convergent Dirichlet Series

Summary

Let $\mathfrak{a} = \{a_m : n \in \mathbb{N}\}$ be a periodic sequence of complex numbers with minimal period $q \in \mathbb{N}$. Then the periodic zeta-function $\zeta(s;\mathfrak{a})$ in the half-plane $\sigma > 1$ is defined by Dirichlet series

$$\zeta(s;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}$$

and by analytic continuation to the whole complex plane. To the periodic zeta-function an absolutely convergent Dirichlet series

$$\zeta_u(s;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m v_n(m)}{m^s},$$

where

$$v_u(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{u}\right)^{\theta}\right\}, \quad m \in \mathbb{N},$$

$\theta > 1/2$ is fixed number, and $u > 0$, is related.

In the Master Thesis, the following theorem of discrete universality was proved.

4 teorema. *Suppose that the sequence $\mathfrak{a}$ is multiplicative, the set $L(\mathbb{P}, h, \pi)$ is linearly independent over $\mathbb{Q}$ and $u_N \to \infty$, $u_N \ll N^2$ as $N \to \infty$. Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then the limit*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta_{u_N}(s + ikh;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\}$$
$$= m_H \left\{\omega \in \Omega : \sup_{s\in K} |\zeta(s,\omega;\mathfrak{a}) - f(s)| < \varepsilon\right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.