VILNIAUS UNIVERSITETAS
ŠIAULIŲ AKADEMIJA

MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
Didžiųjų duomenų analitikos specializacija

Ieva Šimkevičienė

Magistro studijų baigiamasis darbas

Studentų priėmimo į Lietuvos didžiųjų miestų aukštąsias mokyklas lyginamoji statistinė analizė

Darbo vadovas: asist. dr. Vaidotas Kanišauskas

Šiauliai, 2023

Studijuojančiojo, teikiančio baigiamąjį darbą, GARANTIJA

WARRANTY of Final Thesis

Vardas, pavardė *Name, Surname*	**Ieva Šimkevičienė**
Padalinys *Faculty*	**Šiaulių akademija** ***Šiauliai Academy***
Studijų programa *Study Programme*	**Matematika** ***Mathematics***
Darbo pavadinimas *Thesis topic*	**Studentų priėmimo į Lietuvos didžiųjų miestų aukštąsias mokyklas lyginamoji statistinė analizė** ***Comparative statistical analysis of students' admission to the higher education institutions in major cities of Lithuania.***
Darbo tipas *Thesis type*	**Baigiamasis darbas** ***Final Thesis***

Garantuoju, kad mano baigiamasis darbas yra parengtas sąžiningai ir savarankiškai, kitų asmenų indėlio į parengtą darbą nėra. Jokių neteisėtų mokėjimų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

I guarantee that my thesis is prepared in good faith and independently, there is no contribution to this work from other individuals. I have not made any illegal payments related to this work.

Šiame darbe tiesiogiai ar netiesiogiai panaudotos kitų šaltinių citatos yra pažymėtos literatūros nuorodose.

Quotes from other sources directly or indirectly used in this thesis, are indicated in literature references.

Aš, Ieva Šimkevičienė, pateikdamas (-a) šį darbą, patvirtinu (*pažymėti*) ☒

Embargo laikotarpis
Embargo Period

Prašau nustatyti šiam baigiamajam darbui toliau nurodytos trukmės embargo laikotarpį:
I am requesting an embargo of this thesis for the period indicated below:

☐ _________ mėnesių / *months*
(embargo laikotarpis negali viršyti 60 mėn. / *an embargo period shall not exceed 60 months*).

☒ Embargo laikotarpis nereikalingas / *no embargo requested.*

Embargo laikotarpio nustatymo priežastis / *Reason for embargo period*:

TURINYS

ĮVADAS

Aukštasis mokslas visais laikais buvo laikomas visuomenės prioritetu, ekonomikos suklestėjimo, gyvenimo kokybės pamatu. Jis, kaip visuomenės institucija, atspindi tam tikrą visuomenės organizavimo formą, išreiškiamą bendrijos veikla, kurios prioritetas yra pripažįstamas.

Remiantis Lietuvos švietimo koncepcija [5], Lietuvoje veikia valstybinės ir nevalstybinės, universitetinės ir neuniversitetinės aukštosios mokyklos. Aukštosios mokyklos akademinį statusą daugiausia lemia joje teikiamo bendrojo lavinimo ir specializuoto profesinio mokymo lygis ir santykis, mokslinių tyrimų ar meninės veiklos pobūdis. Universitetuose plėtojami fundamentalieji moksliniai tyrimai, o neuniversitetinėse aukštosiose mokyklose vyrauja taikomieji tyrimai. Lietuvoje ypatingai didelis dėmesys skiriamas švietimo sistemos plėtrai, siekiama, kad kuo daugiau žmonių įgytų ne tik pradinį ar vidurinį, bet ir aukštąjį išsilavinimą. Čia taip pat išplėtotas aukštųjų mokyklų skaičius. Veikia 16 universitetų ir 18 kolegijų**.**

Temos aktualumas. Šiuo metu viena iš aktualiausių aukštojo mokslo problemų yra studentų skaičiaus mažėjimas. Studentai ir studijų programos dėl valstybės finansavimo konkuruoja tarpusavyje universitetuose ir kolegijose. Ar tokioje mažoje šalyje, kaip Lietuva, konkurencinė kova dėl valstybinio finansavimo tikslinga? Ar ši finansavimo sistema pasiteisina? O gal jos dėka yra žlugdomos mažesnės provincijų ir regionų aukštosios mokyklos, kurios negali lygintis su sostinės aukštosiomis mokyklomis? Kokią įtaką tai turėjo savarankiško Šiaulių universiteto nykimui? Norint į tokius klausimus atsakyti atliksime krepšelių kiekio, priimtų studentų bei demografinių duomenų palyginimą. Tai padės geriau suprasti temos problemiškumą.

Tyrimo objektas. Duomenys apie priimtų studentų, gautų valstybės finansuojamų vietų, abiturientų, absolventų bei nuolatinių gyventojų skaičių didžiausiuose Lietuvos miestuose 2008–2021 m. laikotarpiu. Duomenys paimti iš statistikos departamento internetinės svetainės ir kolegijų bei universitetų metinių veiklos ataskaitų [7].

Chronologinės ribos. 2008–2021 metai.

Tyrimo tikslas. Atlikti studentų priėmimo į Lietuvos didžiųjų miestų aukštąsias mokyklas lyginamąją statistinę analizę.

Tyrimo uždaviniai.

1. Atlikti gautų valstybės finansuojamų vietų kiekio ir priimtų studentų skaičiaus analizę Lietuvos lygiu.

2. Atlikti į ŠU ir Šiaulių kolegijas priimtų studentų skaičiaus statistinę lyginamąją analizę.

3. Atlikti priimtų studentų skaičiaus didžiųjų miestų ir bendrai visos Lietuvos statistinę lyginamąją analizę.

4. Padalinus ŠU, KU, KTU ir VU priimtų studentų skaičiaus duomenis į du laikotarpius, palyginti tų laikotarpių vidurkius bei apskaičiuoti empirinių vidurkių santykį.

5. Nustatyti, kurias duomenų eilutes galima aprašyti laiko eilučių modeliais. Apskaičiuoti laiko eilučių AR(1), AR(2), AR(3), AR(4) modelius ir nustatyti jų tinkamumą.

6. Atlikti Šiaulių ir Klaipėdos miestų duomenų blokų statistinę analizę. Palyginti šiuos blokus tarpusavyje.

Darbo struktūra. Darbas sudarytas iš įvado, teorinės ir praktinės dalių, išvadų, santraukos, literatūros sąrašo ir priedų.

Teorinėje dalyje pateikiamos pagrindinės darbo sąvokos, informacija apie darbe taikomus matematinius metodus, o praktinėje pateikiamas darbo tyrimas. Išvadose apibendrinami visi gauti rezultatai. Santraukoje trumpai pristatomas magistro darbas. Literatūros sąraše pateikiama darbe naudota literatūra. Prieduose pateikiami skaičiavimai.

1 TEORINĖ DALIS

Šioje dalyje pateikiamos pagrindinės darbo matematinės sąvokos ir formulės.

1.1 PAGRINDINĖS DARBO SĄVOKOS

Pagrindinės sąvokos pateiktos remiantis [3] šaltiniu.

Lietuvos aukštoji mokykla (toliau – aukštoji mokykla) – Lietuvos Respublikoje įregistruotas juridinis asmuo, kurio pagrindinė veikla – organizuoti ir vykdyti studijas, teikti aukštojo mokslo kvalifikacijas, vykdyti fundamentinius ir (arba) taikomuosius mokslinius tyrimus, eksperimentinę plėtrą ir (arba) meno veiklą, taikyti mokslinių tyrimų ir eksperimentinės plėtros rezultatus, kaupti mokslo žinias, plėtoti kūrybinę veiklą ir kultūrą, puoselėti akademinės bendruomenės vertybes ir tradicijas.

Absolventas – asmuo, įgijęs aukštojo mokslo kvalifikaciją.

Studentas – asmuo, studijuojantis aukštojoje mokykloje pagal studijų programą arba doktorantūroje.

Studijos – asmens, įgijusio ne žemesnį kaip vidurinį išsilavinimą, mokymasis aukštojoje mokykloje pagal tam tikrą studijų programą arba disertacijos rengimas.

1.2 PAGRINDINĖS MATEMATINĖS STATISTIKOS SĄVOKOS

Pagrindinės matematinės sąvokos, apibrėžimai ir formulės aprašyti remiantis [6] knyga.

Apibrėžimas. Imtis – stebėtų rezultatų sąrašas.

Apibrėžimas. Variacinė eilutė – imties reikšmių išdėstymas nemažėjančia tvarka. T.y. ${x_1}^* \leq {x_2}^* \leq \ldots \leq {x_n}^*$, čia $x_{min} = {x_1}^*$ – mažiausias elementas, o $x_{max} = {x_n}^*$ – didžiausias imties elementas.

Apibrėžimas. Vidurkis – tai taškas, kuris vidutiniškai artimiausias visiems statistinės eilutės elementams. Vidurkis yra visų statistinės eilutės elementų suma, padalyta iš jų skaičiaus. Empirinis vidurkis apskaičiuojamas:

$$\bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i,$$

Čia n – imties dydis, $x_1, x_2, \ldots, x_n$ – statistinės eilutės elementai.

Apibrėžimas. Mediana – vidurinė variacinės eilutės reikšmė. Ji apskaičiuojama formule:

$$M_e = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, \; jei\; n = 2l + 1, \\ \frac{1}{2}\left(X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)}\right), \; jei\; n = 2l. \end{cases} \qquad (1.2.1)$$

Apibrėžimas. Imties dispersija parodo sklaidą apie vidurkį. Ji randama pagal formulę:

$$S^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2.$$

Apibrėžimas. Imties standartinis nuokrypis yra dažniausiai taikomas sklaidos matas.

$$S = \sqrt{S^2}.$$

1.3 VIDURKIŲ LYGUMO HIPOTEZĖ

Aprašyta remiantis [8] ir [9] knygomis.

1) Tarkime, turime du nepriklausomus normaliuosius dydžius $X \sim N(a_X, S_X^2)$ ir $Y \sim N(a_Y, S_Y^2)$, kurių vidurkiai a_X ir a_Y nežinomi, bei dispersijos nežinomos. Tikriname hipotezę $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$, kur, $\widehat{\sigma_x^2} = S_X^2$, $\widehat{\sigma_y^2} = S_Y^2$, a_X ir a_Y nežinomi, ir $\widehat{a_X} = \bar{X}_x$, $\widehat{a_Y} = \bar{X}_y$. $S_X^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X}_x)^2, S_Y^2 = \frac{1}{m-1}\sum_{i=1}^{m}(X_i - \bar{X}_y)^2$.

Kriterijaus statistika

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2}, S_X^2 > S_Y^2.$$

Sprendimo priėmimo taisyklė. Jei $F_{\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1) < F < F_{1-\frac{\alpha}{2}}(n-1, m-1)$, tai hipotezę H_0 priimame. Čia $F_\beta(n-1, m-1)$ yra Fišerio skirstinio su $n-1$ ir $m-1$ laisvės laipsnių β lygmens kvantilis.

2) Tarkime, turime du nepriklausomus normaliuosius dydžius $X \sim N(a_X, S_X^2)$ ir $Y \sim N(a_Y, S_Y^2)$, kurių vidurkiai a_X ir a_Y nežinomi, bei dispersijos nežinomos. Tarkime, kad hipotezė $H_0 : \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ priimama, $\widehat{\sigma_x^2} = S_X^2$, $\widehat{\sigma_y^2} = S_Y^2$. Tikriname hipotezę:

$$\begin{cases} H_0 : a_X = a_Y, \\ H_1 : a_X \neq a_Y. \end{cases}$$

Lygių dispersijų atveju naudojama Stjudento statistika

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}},$$

turinti Stjudento skirstinį su $(n + m - 2)$ laisvės laipsnių, čia $S^2 = \frac{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}{n+m-2}$ yra jungtinės populiacijos dispersijos S^2 įvertis, o n, m – atitinkamo atsitiktinio dydžio elementų skaičius. Įstatę S^2 išraišką į *t* statistikos formulę gauname:

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2}} \sqrt{\frac{nm(n+m-2)}{n+m}}.$$

Sprendimo priėmimo taisyklė. Tegul reikšmingumo lygmuo lygus α. Hipotezė H_0 atmetama, jeigu $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2)$. Čia $t_{\frac{\alpha}{2}}(n + m - 2)$ yra Stjudento skirstinio su $n + m - 2$ laisvės laipsnių $\frac{\alpha}{2}$ lygmens kritinė reikšmė.

3) Nelygių dispersijų atveju dvi intervalinių duomenų imtys $(X_1, X_2, \dots, X_n)$ ir $(Y_1, Y_2, \dots, Y_n)$ gautos matuojant du nepriklausomus normaliuosius atsitiktinius dydžius $X \sim N(a_X, S_X^2)$ ir $Y \sim N(a_Y, S_Y^2)$. Vidurkiai a_X, a_Y ir dispersijos S_X^2, S_Y^2 nežinomi. Tarkime, kad hipotezė H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ atmetama, $\widehat{\sigma_x^2} = S_X^2$, $\widehat{\sigma_y^2} = S_Y^2$.

Statistinė hipotezė:

$$\begin{cases} H_0: a_X = a_Y, \\ H_1: a_X \neq a_Y. \end{cases}$$

Kriterijaus statistika. Apskaičiuojame

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}},$$

čia $\bar{X}$, $\bar{Y}$ yra imčių vidurkiai, S_X^2 , S_Y^2 – imčių dispersijos, o *n,m* – imčių didumai.

Sprendimo priėmimo taisyklė. Tegul reikšmingumo lygmuo lygus α. Hipotezė H_0 atmetama, jeigu $|t| > t_{\frac{\alpha}{2}}(k)$. Čia $t_{\frac{\alpha}{2}}(k)$ yra Stjudento skirstinio su *k* laisvės laipsnių $\frac{\alpha}{2}$ lygmens kritinė reikšmė. Laisvės laipsnių skaičius k yra mažiausias sveikasis skaičius, tenkinantis sąlygą:

$$k \leq \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{S_X^4}{n^3} + \frac{S_Y^4}{m^3}}.$$

1.4 SERIJŲ KRITERIJUS

Serijų kriterijaus teorija aprašyta remiantis [1] knyga.

Atsitiktinė imtis $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ sudaryta iš nepriklausomų atsitiktinių dydžių. Tačiau konkrečiame modelyje imties elementai $X_1, \dots, X_n$ gali būti neatsitiktiniai ir priklausomi. Norėdami sužinoti, kaip yra iš tikrųjų, tikriname hipotezę H_0: imties elementai $X_1, \dots, X_n$ yra atsitiktiniai ir nepriklausomi. Šiai hipotezei tikrinti taikysime serijų kriterijų su empirine mediana.

Pagal šį kriterijų pirmiausia užrašome imties $X_1, \dots, X_n$ elementus nemažėjančia tvarka.

Pagal (1.2.1) formulę randame imties empirinę medianą M_e. Po to M_e reikšmę lyginame su pradinės imties elementais $X_1, \dots, X_n$. Rašome „+“ jei $X_1 > M_e$ ir „-“, jei $X_1 < M_e$, jei reikšmės sutampa, nerašome nieko. Šią procedūrą tęsiame, kol patikriname visus imties elementus. Gauname „+“-ų ir „-“-ų eilutę. Joje esančių „+“ skaičių žymėsime k_1, o „-“ skaičius bus žymimas – k_2. Bendrą visų serijų skaičių žymėsime raide *N*. $N = N(X^n)$ – serijų kriterijaus statistika.

Nedidelis imties serijų skaičius *N* rodo, kad imties elementai yra gimininingi, lyg būtų iš vienos šeimos. Tuo metu, kai *N* didelis, jis nurodo tarp imties elementų esamą dėsningą kaitą. Abiejais atvejais pažeidžiamas imties elementams keliamas atsitiktinumo ir nepriklausomumo reikalavimas. Tuo remiantis hipotezei H_0 tikrinti galima susidaryti tokią alternatyvą:

$H_1^{(1)}$: imties elementai priklausomi ir neatsitiktiniai.

Hipotezei H_0 tikrinti turime kritinę sritį:

$W_1 = \left\{X^n: N \leq N_{\frac{\alpha}{2}}(A, n_1, n_2) \text{ arba } N \geq N_{\frac{\alpha}{2}}(V, n_1, n_2)\right\}$, kai alternatyva $\mathrm{H}_1^{(1)}$, čia $n_1 = \max(k_1, k_2)$, $n_2 = \min(k_1, k_2)$, $N_\alpha(A, n_1, n_2) = N_\alpha(\text{Apatinė}, n_1, n_2)$ ir $N_\alpha(V, n_1, n_2) = N_\alpha(\text{Viršutinė}, n_1, n_2)$ – tam tikros kritinės reikšmės, kurios priklauso nuo reikšmingumo lygmens *α* ir n_1, n_2 reikšmių, atitinkančių nagrinėjamą imtį.

1.5 AUTOREGRESINIAI PROCESAI

Laiko eilučių teorija aprašyta remiantis [2] knyga.

Laiko eilutė – tai duomenų seka, gauta matuojant kintamojo reikšmes reguliariais laiko intervalais. Viena iš pagrindinių laiko eilučių analizės tikslų yra atrasti duomenų kaitos dėsningumus (taip pat didelius duomenų svyravimus sąlygojantį sezoniškumo efektą) ir pritaikyti matematinius modelius, aprašančius šiuos dėsningumus.

1.5.1 GRYNAI ATSITIKTINIS PROCESAS. BALTASIS TRIUKŠMAS

Procesas $\{X_t, t = 0, \pm1, \pm2, \dots\}$ yra vadinamas *grynai atsitiktiniu*, jeigu jis yra nekoreliuotųjų atsitiktinių dydžių seka. Tai yra paprasčiausias iš visų diskrečiojo laiko modelių ir atitinka tolydžiojo laiko procesą $\{X(t)\}$, kuris neturi atminties: proceso reikšmė $X(t)_t$, įgyjama laiko momentu *t*, yra nekoreliuota su visomis iki laiko $(t-1)$ buvusiomis reikšmėmis (ir su visomis busimomis proceso reikšmėmis). Toks procesas dažniausiai vadinamas baltuoju triukšmu. Kad procesas būtų stacionarus iki antrosios eilės, pakanka, kad jo vidurkis ir dispersija būtų pastovieji dydžiai:

$$E\{X_t\} = m \text{ (pastovus) visiems } t$$

ir

$$E\{(X - m)\} = \sigma, \text{ (pastovi) visiems } t.$$

Tada jo autokovariacinė funkcija

$$R(k) = cov\{X_t, X_{t+k}\} = \begin{cases} \sigma^2, s = 0, \\ 0, s \neq 0. \end{cases}$$

yra tik *k* kintamojo funkcija. Šios sekos autokoreliacinė funkcija užrašoma

$$\rho(k) = \begin{cases} 1, s = 0, \\ 0, s = \pm1, \pm2, \pm3, \dots. \end{cases}$$

Grynai atsitiktinį procesą žymėsime $\{\varepsilon_t\}$ ir tai yra stacionarusis grynai atsitiktinis procesas. Nepriklausomųjų atsitiktinių dydžių $\{e_t\}$ seka yra grynai atsitiktinio proceso atvejis. Jeigu sekos statistinėje analizėje apsiribojama momentais iki antrosios eilės, tada nėra skirtumo tarp $\{\varepsilon_t\}$ ir $\{e_t\}$. Toks grynai atsitiktinis procesas yra dirbtinis, beveik neaptinkamas gyvenime, bet jis yra labai naudingas kaip elementarus blokas, iš kurio galima konstruoti sudėtingesnius modelius.

Norint įvertinti modelio eilę, reikia mokėti įvertinti parametrus. Nemokėdami vertinti modelio parametrų ir eilės, negalime spręsti modelio tinkamumo vieniems ar kitiems duomenims. Todėl kiekvieno modelio kūrimas vyksta dviem etapais:

a) parametrų vertinimas (darant prielaidą, kad modelio eilė yra žinoma),

b) modelio eilės nustatymas.

1.5.2 PIRMOSIOS, ANTROSIOS IR P-TOSIOS EILĖS AUTOREGRESIJOS PROCESAS

Apibrėžimas. Atsitiktinė seka $\{X_t\}$ yra vadinama pirmosios eilės autoregresijos procesu, arba AR(1), jeigu kiekvienas X_t tenkina skirtuminę lygtį

$$X_t - a\,X_{t-1} = \varepsilon_t, \tag{1.4.2.1}$$

čia dydis a yra konstanta, o $\{\varepsilon_t\}$ seka – stacionarusis grynai atsitiktinis procesas. Pastebime, kad (1.4.2.1) lygtį perrašius $X_t = a\,X_{t-1} + \varepsilon_t$, tampa aiški autoregresijos proceso pavadinimo kilmė. Ši lygtis gali būti interpretuojama kaip X_{t-1} tiesinė regresija, t.y. savo paties buvusios reikšmės regresija. Narys ε_t čia atstovauja paklaidai arba atsitiktiniam sužadinimui. Natūralus AR(1) modelio apibendrinimas yra X_t, tiesinis priklausomumas nuo X_{t-1} ir nuo X_{t-2}. Toks modelis vadinamas antrosios eilės autoregresija ir formaliai apibrėžiamas taip:

Apibrėžimas. Atsitiktinė seka $\{X_t\}$ vadinama antrosios eilės autoregresijos procesu, žymimu AR(2), jeigu kiekvienas X_t tenkina skirtuminę lygtį

$$X_t = a_1\,X_{t-1} + a_2\,X_{t-2} + \varepsilon_t,$$

čia a_1, a_2 yra konstantos, o $\{\varepsilon_t\}$ seka – stacionarusis grynai atsitiktinis procesas.

Akivaizdu, kad pirmosios ir antrosios eilės autoregresijos procesų natūralus apibendrinimas yra baigtinės eilės procesas.

Apibrėžimas. Atsitiktinė seka $\{X_t\}$ yra vadinama p-tos eilės autoregresijos procesu arba AR(p), jei kiekvienas X_t tenkina skirtuminę lygtį

$$X_t = a_1 X_{t-1} + a_2 X_{t-2} + \ldots + a_p X_{t-p} + \varepsilon_t,$$

čia $a_1, a_2, \ldots, a_p$ yra konstantos, o $\{\varepsilon_t\}$ seka – stacionarusis grynai atsitiktinis procesas (baltojo triukšmo procesas).

Negriežtai tariant, $\{X_t\}$ seka vadinama *stacionariąja*, jeigu jos savybės nekinta laikui bėgant. Griežtai formuluojant, skiriamas stacionarumas plačiąja ir siaurąja prasme.

Procesas X_t vadinamas stacionariu siaurąja prasme, jei jo daugiamačiai pasiskirstymai nepriklauso nuo postūmio laike, t.y. $t_1, \ldots, t_k \in T, k = 1,2, \ldots, F_{t_1, \ldots, t_k}(\bullet) = F_{t_{1+\tau}, \ldots, t_{k+\tau}}(\bullet), t_{i+\tau} \in T$.

Laiko eilučių analizėje dažniausiai naudojamas kitas apibrėžimas. Procesas X_t vadinamas stacionariu plačiąja prasme, jei jo matematinis vidurkis ir kovariacinė funkcija nepriklauso nuo poslinkio laike, t. y. jei $\forall t, s \in T\ \bar{x}(t) = \bar{x}(0), R(t,s) = R(t-s, 0)$.

Akivaizdu, kad jei procesas X_t yra stacionarus siaurąja prasme ir turi dispersiją, tai jis yra ir stacionarus plačiąja prasme, bet ne atvirkščiai. Tačiau jei procesas X_t yra Gauso (jei jo daugiamačiai pasiskirstymai yra Gauso pasiskirstymo funkcijų rinkinys), jam abu apibrėžimai sutampa.

Taigi stacionaraus proceso X_t matematinis vidurkis nekinta laike $E\{X_t\} = \bar{x}$, o *kovariacinė funkcija* yra vieno argumento funkcija $cov(X_{t+1}, X_t) = E[(X_{t+1} - \bar{x}) \cdot (X_t - \bar{x})] = R(k), \forall t \in T$. Ši funkcija yra neneigiamai apibrėžta: $\forall t_1, \ldots, t_k \in T, x_1, \ldots, x_k : \sum_{i,j=1}^{k} R(t_i - t_j) x_i x_j \geq 0$. Akivaizdu, kad R(•) yra lyginė funkcija, tad $R(-k) = R(k)$. Kiekvienam *k* funkciją $R(k)$ padalijus iš $R(0) \equiv S^2$, turime koreliacinę funkciją $r(k) = cor(X_{t+1}, X_t) = \frac{R(k)}{R(0)}$. Ši funkcija taip pat lyginė, neneigiamai apibrėžta ir $|r(k)| \leq 1$. Reikšmė $r(k)$ parodo kiek stipriai proceso reikšmės dabartyje tiesiškai priklauso nuo reikšmės prieš k laiko vienetų. Koreliacinių ryšių žinojimas palengvina laiko eilučių modelio parinkimą ir identifikavimą.

Turime p-tos eilės autoregresijos procesą $X_t - a_1X_{t-1} - a_2X_{t-2} - \ldots - a_pX_{t-p} = e_t$, kur e_t yra baltas triukšmas, kurio vidurkis lygus nuliui, o dispersija S_e^2 $(t.y.\ \bar{x} = Ee_t = 0, Ee_te_S = S_e^2 d_{t,S})$ ir $\{a_i\}$ yra realūs koeficientai. Perrašius lygtį gauname $X_t = a_1X_{t-1} + a_2X_{t-2} + \ldots + a_pX_{t-p} + e_t$. Trumpiau $X_t = \sum_{i=1}^{p} a_iX_{t-i} + e_t$. Padauginame abi lygties puses iš X_{t+k} $(k \geq p)$ ir imdami gautų reikšmių vidurkį, gauname lygybę: $R(k) = a_1R(k-1) + a_2R(k-2) + \ldots + a_pR(k-p), k = p, p+1, \ldots$, kurią perrašę koreliacijoms turime $r(k) = a_1r_{k-1} + a_2r_{k-2} + \ldots + a_pr_{k-p}$, $k = p, p+1, \ldots$. Šios lygtys vadinamos Yule-Walker lygtimis. Iš jų, turint $r(k)$ galima apskaičiuoti koeficientus $a_1, a_2, \ldots, a_p$.

Šias lygtis galima užrašyti matriciniu pavidalu

$$\begin{pmatrix} \hat{r}(1) \\ \hat{r}(2) \\ \cdots \\ \hat{r}(p) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \hat{r}(0) & \hat{r}(1) & \ldots & \hat{r}(p-1) \\ \hat{r}(1) & \hat{r}(0) & \ldots & \hat{r}(p-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{r}(p-1) & \hat{r}(p-2) & \ldots & \hat{r}(0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \cdots \\ a_p \end{pmatrix}.$$

Praktiškai vietoj $r(k)$ išraiškų vartojami $r(k)$ įverčiai $(\hat{r}(k))$ ir gaunami koeficientų $a_1, a_2, \ldots, a_p$ įverčiai. Pakeitę koreliacijas į jų empirinius analogus gauname:

$$\begin{pmatrix} \widehat{a_1} \\ \widehat{a_2} \\ \cdots \\ \widehat{a_p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \hat{r}(1) & \ldots & \hat{r}(p-1) \\ \hat{r}(1) & 1 & \ldots & \hat{r}(p-2) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \hat{r}(p-1) & \hat{r}(p-2) & \ldots & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{r}(1) \\ \hat{r}(2) \\ \cdots \\ \hat{r}(p) \end{pmatrix}.$$

Pastebime, kad AR(p) atveju atvirkštinės matricos yra neišsigimusios. (Gerai žinoma, kad tam pakanka, kad $R(0) > 0$ ir $R(k) \longrightarrow 0, n \longrightarrow \infty$).

1.5.3 AUTOKOVARIACINĖS FUNKCIJOS ĮVERTIS

Tarkime, kad $X_1, X_2, \ldots, X_n$ yra imtis iš stacionarios sekos X_t su nežinomais vidurkiu ir kovariacija. Ieškant įverčių tiek mažiausiųjų kvadratų metodu, tiek sąlyginių didžiausiojo tikėtinumo metodu reikia spręsti lygtis:

$$\sum_{t=p+1}^{N} \left[X_t - \bar{x} + a_1(X_{t-1} - \bar{x}) + \cdots + a_p\left(X_{t-p} - \bar{x}\right)\right] = 0, \quad (1.4.3.1)$$

$$\sum_{t=p+1}^{N} \left[X_t - \bar{x} + a_1(X_{t-1} - \bar{x}) + \cdots + a_p\left(X_{t-p} - \bar{x}\right)\right] \cdot (X_{t-1} - \bar{x}) = 0. \quad (1.4.3.2)$$

Išsprendę (1.4.3.1) lygtį $\bar{x}$ atžvilgiu, gauname šio dydžio įvertį:

$\hat{x} \approx \frac{1}{N}\sum_{t=1}^{N} X_i = \bar{x}$. (1.4.3.2) įrašę į (1.4.3.1) bei ją pertvarkius, gauname lygčių sistemą

$$\widehat{\mathrm{R}}(\mathrm{k}) + \widehat{\mathrm{a}_1}\widehat{\mathrm{R}}(\mathrm{k}-1) + \ldots + \widehat{\mathrm{a}_\mathrm{p}}\widehat{\mathrm{R}}(\mathrm{k}-\mathrm{p}) = 0, \mathrm{k} = 1, 2, \ldots, \mathrm{p}, \qquad (1.4.3.3)$$

kur $\widehat{\mathrm{R}}(\mathrm{k}) = \frac{1}{n-|k|}\sum_{t=1}^{n-|k|}(X_t - \bar{x})(X_{t+|k|} - \bar{x})$, $0 \leq |k| < n(11)$ sekos $\{X_t\}$ autokovariacinės funkcijos įvertis, o (1.4.3.3) lygtis yra Yule-Walker lygčių analogas, kai teorinės autokovariacinės funkcijos reikšmės *R(k)* (arba autokoreliacinės ρ *(k)*) pakeičiamos įverčiais $\hat{R}(k)$.

Šis įvertis pasižymi tuo, kad su visais $k \geq 1$ matrica

$$\hat{R}_k = \begin{pmatrix} \hat{R}(0) & \hat{R}(1) & \ldots & \hat{R}(p-1) \\ \hat{R}(1) & \hat{R}(0) & \ldots & \hat{R}(p-2) \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \hat{R}(p-1) & \hat{R}(p-2) & \ldots & \hat{R}(0) \end{pmatrix}$$

yra neneigiamai apibrėžta. Matrica $\hat{R}_k$, apibrėžta formule, yra neneigiamai apibrėžta su visais $k \geq 1$.

Nustatant modelio eilę, naudojama formulė dispersijos įverčiui skaičiuoti

$$S_e^2 = \hat{R}(0) - \hat{a}_1\hat{R}(1) - \hat{a}_p\hat{R}(p).$$

$R(k)$ gerai žinomas matematinėje statistikoje metodas, kai tikrosios reikšmės $r(k)$ ar $R(k)$ pakeičiamos atitinkamų funkcijų įverčiais $\hat{r}(k)$ ar $\hat{R}(k)$ gerai žinomas matematinėje statistikoje.

1.5.4 DISPERSIJOS METODO TAIKYMAS

Sakykim, kad AR(p) modelis yra tinkamas nagrinėjamiems duomenims, t.y.

$$\alpha(B)X_t = \varepsilon_t$$

baigtinės, bet nežinomos eilės p. Tikrąją modelio eilę pažymėkime p_0. Nepaslinktasis grynai atsitiktinio proceso $\{\varepsilon_t\}$ dispersijos σ_ε^2 įvertis

$$\hat{\sigma}_\varepsilon^2 = \frac{N-p}{N-2p-1}\left[\hat{R}(0) + \hat{a}_1\hat{R}(1) + \cdots + \hat{a}_p\hat{R}(p)\right] \qquad (1.4.4.1)$$

tiriamas $p = 0,1,2,\ldots$ atžvilgiu.

Jei $p < p_0$, tai $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ turėtų būti didesnė už σ_ε^2 ir mažėdama artėti prie tikrosios reikšmės σ_ε^2, kai p yra didinamas. Kai pasiekiama tikroji modelio reikšmė, $p = p_0$ įvertis $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ stabilizuojasi, naujų narių pridėjimas (1.4.4.1) išraiškoje iš esmės nebesumažina $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ reikšmės. Modelio eilės įverčiu $\hat{p}$ imama ta kintamojo p reikšmė, nuo kurios $\hat{\sigma}_\varepsilon^2$ įvertis stabilizuojasi.

1.6 EMPIRINIS KORELIACIJOS KOEFICIENTAS

Empirinės koreliacijos koeficientas aprašytas remiantis [1] knyga.

Sakykim, kad turime dvimatę atsitiktinę imtį $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n)$, kurios elementai (X_i, Y_i), turintys tą patį dvimatį skirstinį $P_\theta^{(2)}, \theta \in \Theta$, paimti iš nepriklausomų dvimačių atsitiktinių vektorių sekos $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \ldots, (X_n, Y_n), \ldots$. Šią imtį charakterizuoja išsibarstymo diagrama ir dvimatis empirinis skirstinys.

Apibrėžimas. Dvimatės imties išsisklaidymo diagrama vadiname imties taškų $(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n$, atidėtų stačiakampėje koordinačių sistemoje, visumą.

Apibrėžimas. Dvimatės imties empiriniu skirstiniu vadiname sąlyginį skirstinį diskretaus atsitiktinio vektoriaus (X, Y), įgyjančio reikšmes $(X_i, Y_i), i = 1, \ldots, n$ su tikimybe $\frac{1}{n}$, esant sąlygai, kad pasirodė $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$.

To vektoriaus skirstinio skaitinės charakteristikos vadinamos dvimatės imties empirinėmis charakteristikomis. Vadinasi, teorinio dvimatės atsitiktinės imties $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ koreliacijos koeficiento

$$\rho = \frac{M(X_i - MX_i)(Y_i - MY_i)}{\sqrt{DX_i DY_i}},$$

empirinis analogas yra empirinis koreliacijos koeficientas, apskaičiuojamas pagal formulę

$$r = \frac{m_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}},$$

čia

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$S_X = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}, S_Y = \sqrt{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2},$$

$$m_{XY} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}).$$

Koreliacijos koeficientas ρ apibūdina tiesinę priklausomybę tarp dydžių X_i ir Y_i.

Kadangi teorinio (tikrojo) koreliacijos koeficiento ρ tarp X_i ir Y_i nežinome, tai vietoj jo naudojame jo įvertį – empirinį koreliacijos koeficientą *r*.

1.7 HIPOTEZĖ APIE KORELIACIJOS KOEFICIENTĄ

Remsimės [1] knyga. Empirinis koreliacijos koeficientas *r* yra atsitiktinis dydis, todėl turėdami jo reikšmę, apskaičiuotą pagal vieną dvimatės imties realizaciją, negalime būti visiškai tikri, kad ji pakankamai artima tikrajai koreliacijos koeficiento ρ reikšmei. Šiuo atveju daug patikimiau yra patikrinti statistinę hipotezę apie galimą ρ reikšmę. Kadangi praktiškai labai svarbu yra žinoti, ar tarp dydžių X_i ir Y_i yra (tiesinė) priklausomybė ar ne, tai pirmiausia tikrinsime hipotezę $H_0: \rho = 0$.

Tarkime, kad turime dvimatę atsitiktinę imtį (X_1, Y_1), (X_2, Y_2),...,(X_n, Y_n), kurios elementai (X_i, Y_i) turi dvimatį normalųjį skirstinį

$$N_2\left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho\sigma_X\sigma_Y \\ \rho\sigma_X\sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}\right)$$

su parametrais a_1, a_2, $\sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho$, čia ρ – koreliacijos koeficientas tarp X_i ir Y_i.

Kada imties tūris $n > 10$, o $|r|$ artimas vienetui, tada taikoma R. A. Fišerio transformacija

$$Arthr = \frac{1}{2} ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Šiuo atveju, jei teisinga hipotezė $H_0: \rho = \rho_0$, kur ρ_0 – duotas skaičius, tai

$$Arthr \sim N\left(Arth\rho_0, \frac{1}{n-3}\right).$$

Todėl

$$Z = \sqrt{n-3}(Arthr - Arth\rho_0) \sim N(0,1),$$

kai H_0 teisinga.

Tuo remiantis hipotezei $H_0: \rho = \rho_0$ tikrinti su reikšmingumo lygmeniu α sudarome kritinę sritį:

$W_1 = \left\{(X_i, Y_i), i = 1, \dots, n: |Z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\right\}$, jei H_o alternatyva yra $H_1{}^{(1)}: \rho \neq \rho_0$.

1.8 TIESINĖ REGRESIJA

Teorija aprašyta remiantis [1] knyga.

Sakykim, kad turime du atsitiktinius dydžius X ir Y. Apskaičiavę jų koreliacijos koeficientą gauname, kad jis artimas ± 1. Todėl akivaizdu, kad tarp dydžių X ir Y egzistuoja beveik tiesinė priklausomybė, kuri užrašoma per sąlyginį vidurkį

$$M(Y|X=x)=\beta_0+\beta_1 x. \tag{1.7.1}$$

(1.7.1) formulė nusako atsitiktinio dydžio Y tiesinės regresijos lygtį X atžvilgiu. Skaičiai β_0 ir β_1 vadinami tiesinės regresijos parametrais.

Dažnu atveju atsitiktinių dydžių X ir Y tikimybiniai skirstiniai tiksliai nežinomi, todėl tiesinės regresijos lygtį $y=\beta_0+\beta_1 x$ įvertiname pagal (X,Y) stebėjimo rezultatus (x_1,y_1),..., (x_n,y_n), kurie teoriškai yra realizacija atsitiktinės dvimatės imties (X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n), kur $M(Y_i|X_i=x_i)=\beta_0+\beta_1 x_i, i=1,\dots,n$. Toliau daroma prielaida, kad

$$(Y_i|X_i=x_i)\sim N(\beta_0+\beta_1 x_i,\sigma^2),$$

kuri reiškia, kad

$$Y_i=\beta_0+\beta_1 X_i+\varepsilon_i, \tag{1.7.2}$$

čia $\varepsilon_i\sim N(0,\sigma^2), i=1,\dots,n$ – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Kadangi kiekvienai fiksuotai X_i reikšmei x_i mes turime normalųjį atsitiktinio dydžio išsibarstymą, tai pradinės dvimatės imties nagrinėjimas ekvivalentus nagrinėjimui dvimatės imties (X_1,Y_1),...,(X_n,Y_n), kurioje X_1,..., X_n yra neatsitiktiniai dydžiai, o atsitiktiniai dydžiai Y_1 užrašomi (1.7.2) pavidalu. Kitaip sakant, turime iš anksto žinomų skaičių rinkinį (X_1,..., X_n) ir atsitiktinę nepriklausomų dydžių imtį (Y_1,..., Y_n), kur

$$Y_i\sim N(\beta_0+\beta_1 x_i,\sigma^2), i=1,\dots,n, \tag{1.7.3}$$

(1.7.3) formulė nusako tiesinės regresijos modelį.

Tiesinės regresinės analizės uždavinys yra toks: naudojantis imtimi (X_1,Y_1),..., (X_n,Y_n)

1) gauti tinkamiausius (1.7.3) modelio nežinomų parametrų β_0,β_1 ir σ^2 taškinius ir intervalinius įvertinius,
2) patikrinti statistines hipotezes apie parametrus β_0 ir β_1,
3) nustatyti, ar modelis gerai suderintas su imties duomenimis (modelio adekvatumo patikrinimas)

Tiesinės regresijos parametrų β_0 ir β_1 įverčius $\widehat{\beta_0}$ ir $\widehat{\beta_1}$ randame mažiausių kvadratų metodu, minimizuodami dydį

$$S^2=\frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\widehat{\beta_0}-\widehat{\beta_1}X_i)^2\to\min_{\widehat{\beta_0}\widehat{\beta_1}}.$$

Panaudoję būtiną ekstremumo sąlygą $\frac{\partial S^2}{\partial \widehat{\beta_1}} = 0$ ir $\frac{\partial S^2}{\partial \widehat{\beta_0}} = 0$, gauname

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\beta_1} X_i - \widehat{\beta_0}) X_i = 0, \\ \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\beta_1} X_i - \widehat{\beta_0}) = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, turime įverčius

$$\widehat{\beta_0} = \overline{Y} - \widehat{\beta_1}\overline{X}, \qquad \widehat{\beta_1} = \frac{Q_{X,Y}}{Q_X},$$

kur

$$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i \, , \bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i,$$

$$Q_X = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2,$$

$$Q_{X,Y} = \sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})(Y_i - \overline{Y}).$$

(1.7.3) prielaidos dėka galima įsitikinti, kad

$$\frac{S^2(n-2)}{\sigma^2} \sim C(n-2),$$

t.y. turi χ^2 skirstinį su $n-2$ laisvės laipsnių.

Pasirinkę pasikliovimo tikimybę $1-\alpha$, randame parametrų β_0 ir β_1 pasikliautinus atsitiktinius intervalus.

Tiesinės regresijos modelis yra nereikšmingas, jei parametras $\beta_1 = 0$. Hipotezei $H_0: \beta_1 = 0$ patikrinti galima remiantis statistika

$$F = \frac{(\widehat{\beta_1})^2 Q_X}{S^2},$$

kuri turi Fišerio skirstinį su 1 ir $n-2$ laisvės laipsnių, jei hipotezė H_0 teisinga. Pasirenkame reikšmingumo lygmenį α ir hipotezei $H_0: \beta_1 = 0$ tikrinti apibrėžiame kritinę sritį

$$W_1 = \left\{ (X_i, Y_i), i = 1, \dots, n \colon F < F_{\frac{\alpha}{2}}(1, n-2) \text{ arba } F > F_{1-\frac{\alpha}{2}}(1, n-2) \right\},$$

jei H_0 alternatyva yra $H_1^{(1)}: \beta_1 \neq 0$,

čia $F_p(1, n-2)$ – Fišerio skirstinio su 1 ir $n-2$ laisvės laipsnių p eilės kvantilis.

Kada hipotezė $H_0: \beta_1 = 0$ atmetama, tiesinės regresijos modelis laikomas reikšmingu.

Turėdami regresijos tiesės parametrų įverčius, galime nustatyti, ar gautoji lygtis $y = \hat{\beta}_0 + \hat{\beta}_1 x$ teisingai aprašo imties duomenis, t.y. ar ji adekvati jiems.

Tam tikslui apskaičiuojamos statistikos

$$S_1^2 = \frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \overline{Y})^2,$$

$$S^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1}X_i)^2,$$

kur S_1^2 charakterizuoja duomenų nukrypimą nuo vidurio, o S^2 – duomenų nukrypimą nuo regresijos linijos taškų. Sudarome statistiką

$$F_1 = \frac{S_1^2 - S^2}{S^2},$$

kuri turi Fišerio skirstinį su 1 ir $n-2$ laisvės laipsnių, kada teisinga (1.7.3) prielaida. Pasirenkame reikšmingumo lygmenį α ir apskaičiuojame $1-\alpha$ eilės Fišerio skirstinio su 1 ir $n-2$ laisvės laipsnių kvantilį $F_{1-\alpha}(1, n-2)$. Jei dvimatė imtis $(X_1, Y_1), \ldots, (X_n, Y_n)$ tokia, kad

$$F_1 > F_{1-\alpha}(1, n-2),$$

tada regresijos lygtis laikoma adekvačia imties duomenims.

2 PRAKTINĖ DALIS

Tyrime naudojami duomenys nuo 2008 iki 2021 metų. Jei skaičiuosime pagal laiko tėkmę, mes turime tik 14 metų. Su tiek duomenų negalime kokybiškai patikrinti nei duomenų normalumo, nei kitų prielaidų būtinų efektyviam matematinės statistikos metodų taikymui. Šis trūkumas darbe bus kompensuojamas atliekant lyginamąją duomenų analizę įvairiais lygiais. Tai leis pastebėti skirtumus tarp studentų kiekio įvairiose aukštosiose mokyklose. Pagrindinis instrumentas lyginamojoje analizėje bus duomenų diagramos, vidurkių palyginimas, laiko eilutės ir atitinkamų empirinių koreliacijos koeficientų palyginimai.

2.1 ANALIZĖ LIETUVOS MASTU

Šis skyrius padalintas į dvi dalis: gautų valstybės finansuojamų vietos ir į aukštąsias mokyklas priimti studentai. Abiejuose skyriuose atliekama duomenų analizė.

2.1.1 GAUTŲ VALSTYBĖS FINANSUOJAMŲ VIETŲ ANALIZĖ

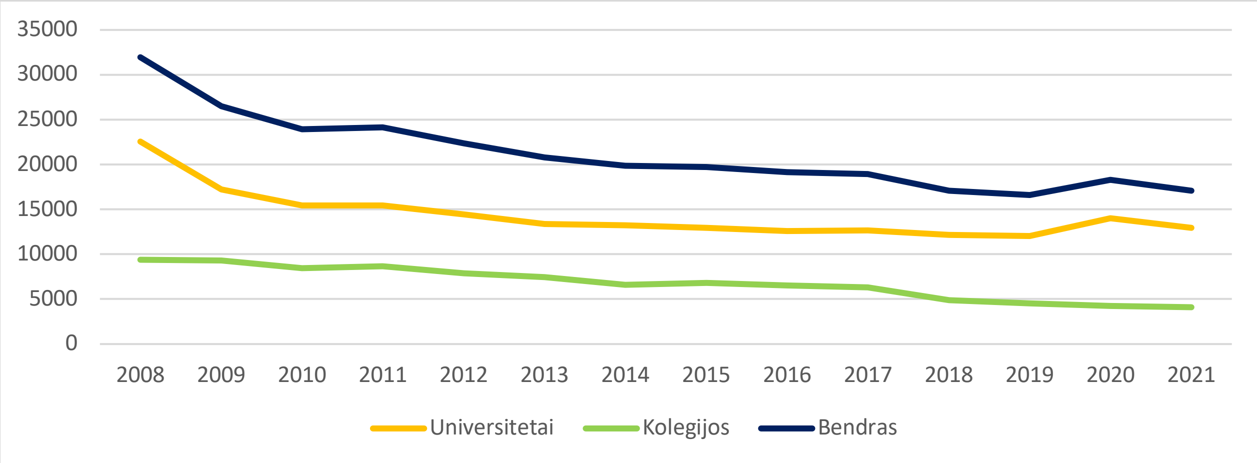
Šiame skyriuje tyrinėsime gautų valstybės finansuojamų vietų skaičiaus dinamiką Lietuvos lygiu per pagrindinį mūsų nagrinėjamą laikotarpį nuo 2008 iki 2021 metų.

1 lentelė. *Gautų valstybės finansuojamų vietų skaičius Lietuvos aukštosiose mokyklose 2008–2021m.*

Metai	Gautų valstybės finansuojamų vietų skaičius universitetuose	Gautų valstybės finansuojamų vietų skaičius kolegijose	Bendras gautų valstybės finansuojamų vietų skaičius Lietuvoje
2008	22562	9395	31957
2009	17214	9287	26501
2010	15469	8438	23907
2011	15466	8672	24138
2012	14433	7921	22354
2013	13367	7455	20822
2014	13222	6637	19859
2015	12943	6814	19757
2016	12612	6558	19170
2017	12643	6307	18950
2018	12165	4891	17056
2019	12039	4568	16607
2020	14052	4231	18283
2021	12965	4105	17070

Mediana	13424	6725,5	19808
Vidurkis	14027,14	6805,64	21173,64
Dispersija	11550895,98	3354547,02	18318178,55
St. Nuokrypis	3398,66	1831,54	4279,97

Iš 1 lentelės matome, kad gautų valstybės finansuojamų vietų vidurkis universitetuose yra daugiau nei dvigubai didesnis, nei kolegijose. Taip pat galime pastebėti, kad per 2008–2021 metus bendras gautų valstybės finansuojamų vietų kiekis sumažėjo 47 procentais.



1 pav. *Gautų valstybės finansuojamų studijų vietų skaičius Lietuvoje 2008–2021m.*

Iš grafiko (1 pav.) matyti, kad gautų finansuojamų studijų vietų skaičius per analizuojamą laikotarpį visuose miestuose mažėjo. Ryškiausiai mažėjimas pastebimas 2009 metais, kai po aukštojo mokslo reformos buvo įvesta studentų krepšelių politika.

2.1.2 PRIIMTŲ STUDENTŲ SKAIČIAUS ANALIZĖ

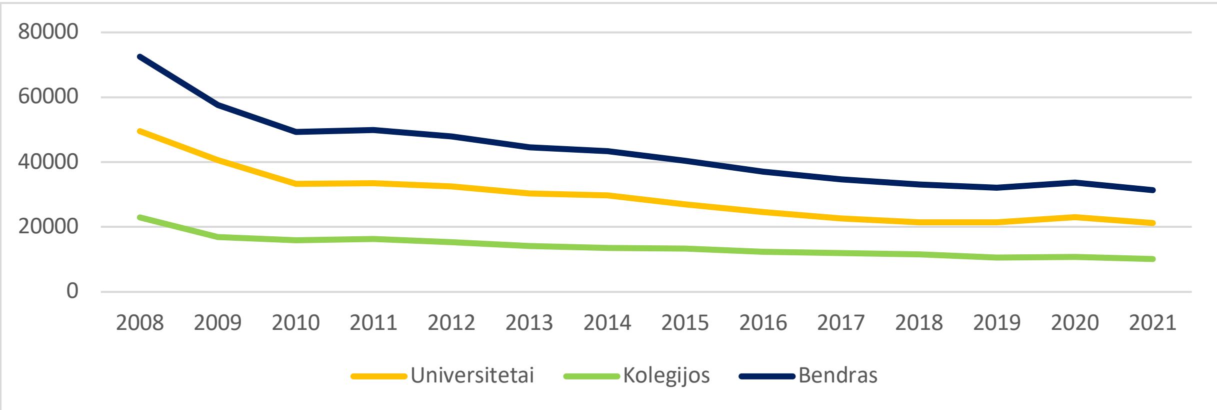
Toliau nagrinėjamas priimtų į universitetus, kolegijas ir bendras studentų skaičius Lietuvos mastu 2008–2021 metais.

2 lentelė. *Priimtų studentų skaičius Lietuvos aukštosiose mokyklose 2008–2021m.*

Metai	Priimtų studentų skaičius universitetuose	Priimtų studentų skaičius kolegijose	Bendras priimtų studentų skaičius Lietuvoje
2008	49545	22959	72504
2009	40659	16993	57652
2010	33391	15958	49349
2011	33432	16374	49806
2012	32524	15423	47947

2013	30371	14235	44606
2014	29713	13585	43298
2015	27059	13263	40322
2016	24669	12368	37037
2017	22701	11992	34693
2018	21519	11671	33190
2019	21430	10661	32091
2020	22987	10763	33750
2021	21232	10135	31367
Mediana	29713	13294,5	41810
Vidurkis	29373,71	14368	43400,86
Dispersija	67828832,37	7724169,23	134196666,75
St. Nuokrypis	8235,83	2779,24	11584,33

Iš 2 lentelės matome, kad priimtų studentų skaičiaus vidurkis kolegijose yra daugiau nei dvigubai mažesnis, nei universitetuose. O per nagrinėjamą 14 metų laikotarpį bendras priimtų studentų skaičius sumažėjo 57 procentais.



2 pav. *Priimtų studentų skaičius Lietuvoje 2008–2021m.*

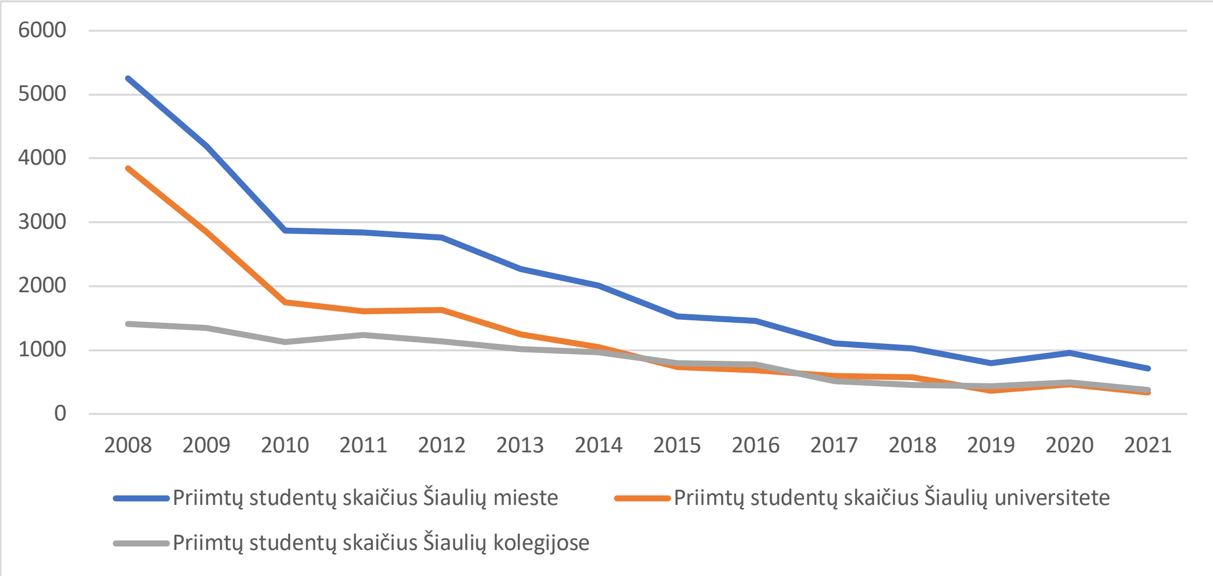
Be ankščiau minėto 2009 metų gautų studentų krepšelių bei priimtų studentų sumažėjimo, galime mažėjimą pastebėti ir 2016 metais, kai po švietimo ir mokslo ministro Dainiaus Pavalkio pasirašyto įstatymo matematikos egzaminas tapo privalomas pretenduojantiems į valstybės finansuojamas vietas aukštosiose mokyklose. Vienintelis priimtų studentų skaičiaus pakilimas matomas 2020 metais. Tam galėjo daryti įtaką, dėl COVID-19 pandemijos apribojimų, sumažėjusios galimybės išvykti studijuoti į užsienio šalis.

2.2 LYGINAMOJI ANALIZĖ ŠIAULIŲ MIESTO LYGIU

Nagrinėsime Šiaulių miesto aukštąsias mokyklas: ŠU ir dvi kolegijas (ŠVK, ŠLK). Nagrinėjimo laikotarpis: 2008–2021 metai. Aprašant Šiaulių universiteto duomenis buvo įtraukiami ir 2021 metai, nors šiais metais Šiaulių universitetas buvo prijungtas prie Vilniaus universiteto ir tapo VU Šiaulių akademija.

3 lentelė. *Priimtų į Šiaulių universitetą ir į Šiaulių kolegijas studentų skaičius 2008–2021m.*

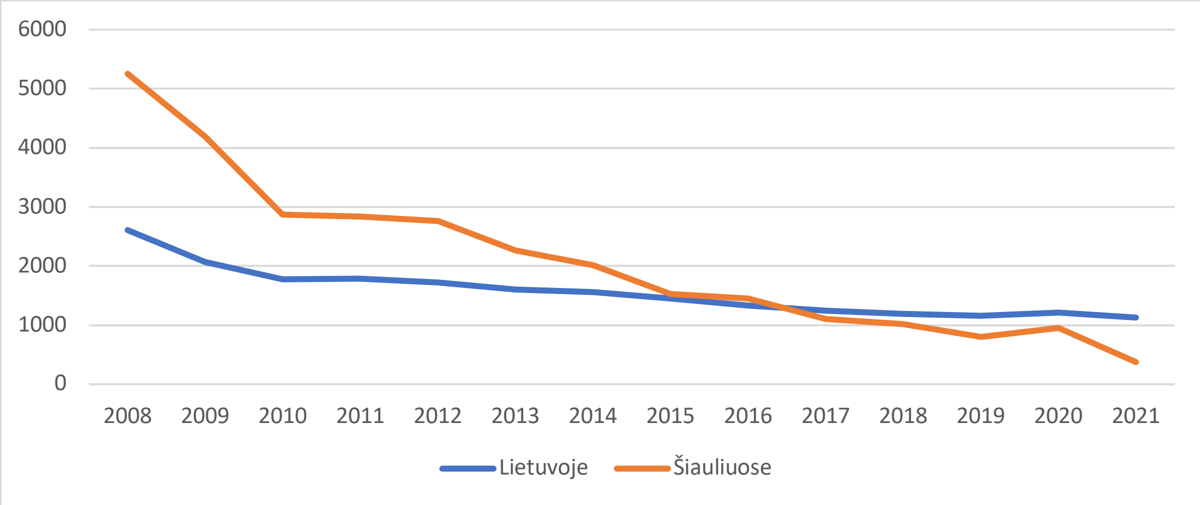
Metai	Priimtų studentų skaičius Šiaulių universitete	Priimtų studentų skaičius Šiaulių kolegijose	Bendras priimtų studentų skaičius Šiaulių mieste
2008	3845	1409	5254
2009	2847	1344	4191
2010	1751	1124	2875
2011	1611	1231	2842
2012	1623	1139	2762
2013	1246	1020	2266
2014	1044	969	2013
2015	735	790	1525
2016	683	771	1454
2017	589	517	1106
2018	570	453	1023
2019	367	432	799
2020	459	496	955
2021	336 (VU ŠA)	375	711
Mediana	889,5	879,5	1769
Vidurkis	1264,71	862,14	2126,86
Dispersija	1043931,3	131175,05	1827946,9
St. Nuokrypis	1021,73	362,18	1352,02



3 pav. *Priimtų į Šiaulių universitetą ir į Šiaulių kolegijas studentų skaičius 2008–2021m.*

Iš 3 lentelės ir 3 paveikslo matome, kad 2015 metais ŠU studentų skaičius ženkliai sumažėjo ir susilygino su priimtų į kolegijas studentų skaičiumi. Šis laikotarpis sutampa su patekimo į Lietuvos aukštąsias mokyklas sąlygų atnaujinimu. Jomis buvo nutarta, kad nuo 2015 metų norint įstoti į universitetą privalu būti išlaikius valstybinį lietuvių kalbos ir literatūros egzaminą, o norint studijuoti kolegijoje – mokyklinį. O visiems stojantiesiems privalu mokėti užsienio kalbą B1 lygiu [4].

Toliau norėdami palyginti priimtų į Šiaulių ir visos Lietuvos aukštąsias mokyklas, dalinsime vidutinį Lietuvos gyventojų skaičių duotuoju laikotarpiu iš vidutinio Šiaulių miesto gyventojų skaičiaus 2008–2021 metais. Šį skaičių padalinsime iš priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje ir palyginsime su Šiauliuose priimtų studentų skaičiumi. Lietuvoje 2008–2021 m. vidutiniškai gyveno $\bar{X} = 2956993{,}79$ gyventojų. Šiauliuose šiuo laikotarpiu buvo $\bar{Y} = 106405{,}86$ gyventojų. Vadinasi Šiauliuose gyveno $\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = 27{,}8$ karto mažiau gyventojų.



4 pav. *Priimtų studentų skaičius į Šiaulių ir visos Lietuvos aukštąsias mokyklas 2008–2021m.*

Iš 4 pav. matome, kad priimtų studentų skaičiaus kreivė kerta priimtų studentų skaičiaus Lietuvos mastu kreivę 2017 metais. Tai galėjo lemti studentų priėmimo nutraukimas Šiaurės Lietuvos kolegijoje. Taip pat matome, kad mažėjimas Šiauliuose atitinka studentų mažėjimą visoje Lietuvoje. Todėl patikrinsime statistinę hipotezę apie galimą ρ reikšmę. Sužinosime, ar tarp 2008–2021 metais priimtų studentų skaičiaus Šiauliuose ir priimtų studentų Lietuvoje skaičiaus atitinkančio Šiaulių miesto gyventojus yra priklausomybė, tikrinsime hipotezę. $H_0: \rho = 0{,}99,$ kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$.

Rasime empirini koreliacijos koeficientą pasinaudoję formule:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} = 0{,}993,$$

čia $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ =2126,86, $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ =1561,18.

Empirinį koreliacijos koeficientą priimtų studentų skaičiaus Šiauliuose ir priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje atitinkančio Šiaulių gyventojų skaičių 2008–2021 metais gavome 0,993 ir tai rodo didelę priklausomybę tarp duomenų. Kadangi empirinis koreliacijos koeficientas yra didelis, patikriname statistinę hipotezę $H_o: \rho = 0{,}99$, imame reikšmingumo lygmenį α=0,05. Panaudosime statistiką:

$$Arthr = \frac{1}{2} ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Įrašome duomenis

$$Arthr = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}993}{1 - 0{,}993} = 2{,}826.$$

$$Arth(0{,}99) = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}99}{1 - 0{,}99} = 2{,}647.$$

$$Z = \sqrt{n-3}\big(Arthr - Arth(0{,}99)\big).$$

$$Z = \sqrt{14-3} \cdot (2{,}826 - 2{,}647) = 0{,}594.$$

Kadangi $|Z| = 0{,}594 \leq 1{,}96 = u_{0{,}975}$, tai hipotezė H_o priimama. Galime teigti, kad statistiniai duomenys neprieštarauja hipotezės $H_0: \rho = 0{,}99$ teisingumui.

Išvada: tarp 2008–2021 metais priimtų studentų skaičiaus Šiauliuose ir priimtų studentų skaičiaus visoje Lietuvoje yra stipri priklausomybė.

Randame tiesinės regresijos lygtį:

Priimti studentai Šiauliuose $\bar{X} = 2126{,}86$,

Priimti studentai Lietuvoje $\bar{Y} = 1561{,}18$.

$Q_Z = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 = 2257332{,}27$.

$Q_{Z,Y} = \sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = 7418283{,}62$.

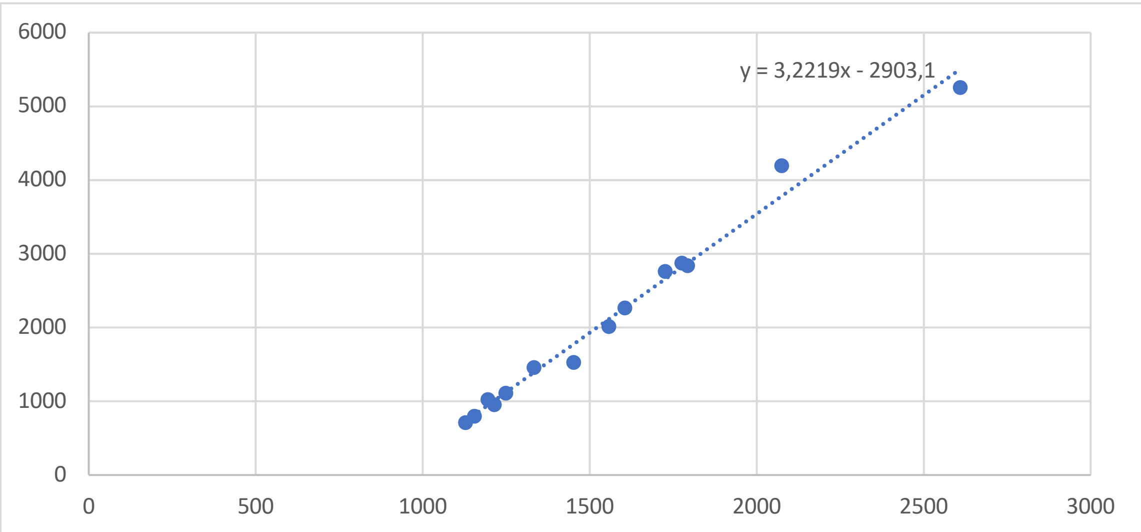
$\widehat{\beta_1} = \frac{Q_{X,Y}}{Q_X} = 3{,}22$.

$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = -2903{,}07$.

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 27595{,}51$.

Apskaičiavę gauname tiesinės regresijos lygtį rodančią priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje (*y*) priklausomybę nuo priimtų studentų skaičiaus Šiauliuose (*x*):

$$y = -2903{,}07 + 3{,}22x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 27595{,}51).$$



5 pav. *Priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje (y) tiesinė priklausomybė nuo priimtų studentų skaičiaus Šiauliuose (x)*

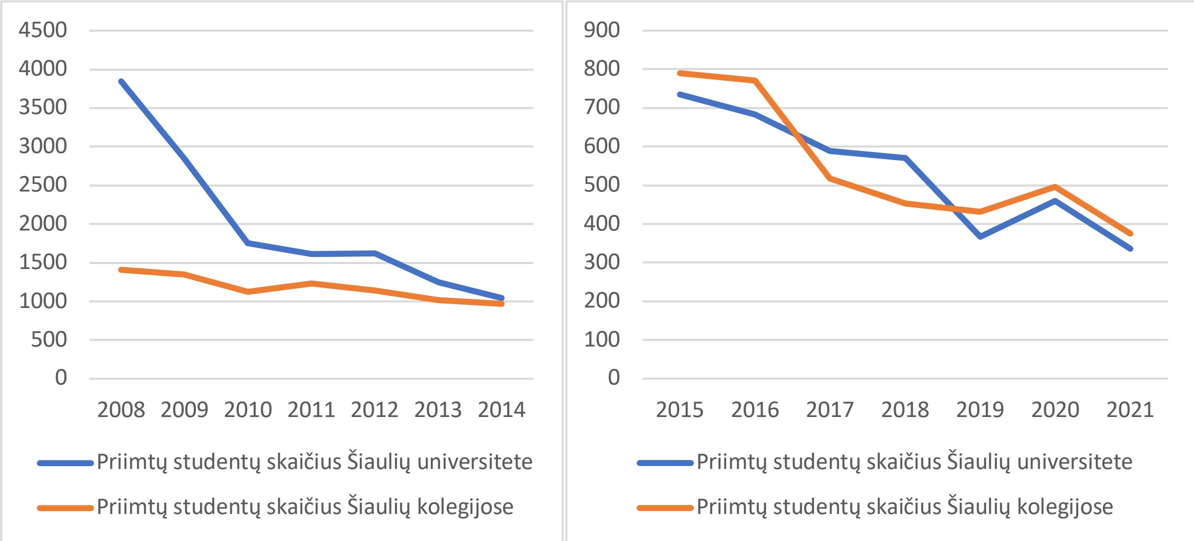
Kadangi iš grafiko (3 pav.) matome, kad ryškus priimtų studentų sumažėjimas vyko 2015 metais, todėl tolimesni skaičiavimai bus atlikti su duomenimis padalintais į dvi dalis: 2008–2014 ir 2015–2021m.

4 lentelė. *Priimtų į Šiaulių universitetą ir į Šiaulių kolegijas studentų skaičius 2008–2014m.*

Metai	Priimtų studentų skaičius Šiaulių universitete	Priimtų studentų skaičius Šiaulių kolegijose
2008	3845	1409
2009	2847	1344
2010	1751	1124
2011	1611	1231
2012	1623	1139
2013	1246	1020
2014	1044	969
Mediana	1623	1139
Vidurkis	1995,29	1176,57
Dispersija	993196,9	26132,29
St. Nuokrypis	996,59	161,65

5 lentelė. *Priimtų į Šiaulių universitetą ir į Šiaulių kolegijas studentų skaičius 2015–2021 m.*

Metai	Priimtų studentų skaičius Šiaulių universitete	Priimtų studentų skaičius Šiaulių kolegijose
2015	735	790
2016	683	771
2017	589	517
2018	570	453
2019	367	432
2020	459	496
2021	336	375
Mediana	570	496
Vidurkis	534,14	547,71
Dispersija	23273,48	27394,57
St. Nuokrypis	152,56	165,51



6 pav. *Priimtų į Šiaulių universitetą ir į Šiaulių kolegijas studentų skaičius 2008–2014 ir 2015–2021m.*

Pateiktuose grafikuose (6 pav.) ir lentelėse (4,5 lentelė) matome kaip pasiskirstė priimtų studentų skaičius Šiaulių universitete ir kolegijose. 2015–2021m. lyginant su 2008–2014m. matomas studentų priėmimo dėsningumo pasikeitimas. Todėl norėdami palyginti šiuos du laikotarpius, toliau tikrinsime vidurkių lygybę.

2.2.1 VIDURKIŲ LYGUMO HIPOTEZĖS TIKRINIMAS

Nustatysime, ar 2008–2014 metų priimtų į ŠU studentų skaičiaus (*X*) vidurkis atitinka 2015–2021 metų (*Y*) vidurkį. Reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$.

Apskaičiuojame vidurkius ir dispersijas:

Vidurkiai: Dispersijos:

$\bar{X} = 1995{,}29.$ $S_X^2 = 993196{,}9.$

$\bar{Y} = 534{,}14.$ $S_Y^2 = 23273{,}48.$

Prieš tikrindami hipotezę turime nustatyti ar dispersijos lygios. Tikriname hipotezę $H_0\colon \sigma_x^2 = \sigma_y^2$, kur $\widehat{\sigma_x^2} = S_X^2$, $\widehat{\sigma_y^2} = S_Y^2$, a_X ir a_Y nežinomi ir $\widehat{a_X} = \bar{X}_x$, $\widehat{a_Y} = \bar{X}_Y, \alpha = 0{,}05$, $n = m = 7$. Kriterijaus statistika

$$F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = 42{,}675049,$$

$F_{0,025}(6,6)=0{,}17182$; $F_{0,975}(6,6)=5{,}82$. Kadangi F nepatenka į intervalą (0,17182; 5,82), tai hipotezę $H_0\colon \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ atmetame ir galime laikyti kad imčių dispersijos yra nelygios. Todėl skaičiavimuose taikysime nelygių dispersijų atvejį.

Formuojame statistinę hipotezę:

$$\begin{cases} H_0: a_X = a_Y \\ H_1: a_X \neq a_Y \end{cases}$$

$$n = m = 7.$$

Apskaičiuojame kriterijaus statistiką:

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}}} = \frac{1995,29 - 534,14}{\sqrt{\frac{993196,9}{7} + \frac{23273,48}{7}}} = \frac{1461,15}{\sqrt{145210,05}} = \frac{1461,15}{381,06} = 3,83.$$

Randame laisvės laipsnių skaičių:

$$k \leq \frac{\left(\frac{S_X^2}{n} + \frac{S_Y^2}{m}\right)^2}{\frac{S_X^4}{n^3} + \frac{S_Y^4}{m^3}} = \frac{\left(\frac{993196,9}{7} + \frac{23273,48}{7}\right)^2}{\frac{993196,9^2}{7^3} + \frac{23273,48^2}{7^3}} = \frac{(145210,05)^2}{\frac{986440082169,61}{343} + \frac{541654871,31}{343}}$$

$$= \frac{21085958621}{2877497775,63} = 7,33.$$

Kadangi $t = 3,83 > 2,365 = t_{0,025}(7)$, tai hipotezė $H_0: a_X = a_Y$ atmetama.

Išvada: 2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų į ŠU studentų skaičiaus vidurkiai statistiškai reikšmingai skiriasi.

Toliau ieškosime šių dviejų laikotarpių empirinių vidurkių santykio. 2008–2014 metais priimtų į ŠU studentų skaičiaus vidurkis $\bar{X} = 1995,29$, 2015–2021 metais priimtų į ŠU studentų skaičiaus vidurkis $\bar{Y} = 534,14$.

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 0,27.$$

Gautas santykis rodo stiprų studentų skaičiaus mažėjimą Šiaulių universitete.

***6 lentelė**. 2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų į Šiaulių universitetą ir į Šiaulių kolegijas studentų skaičiaus vidurkių palyginimas*

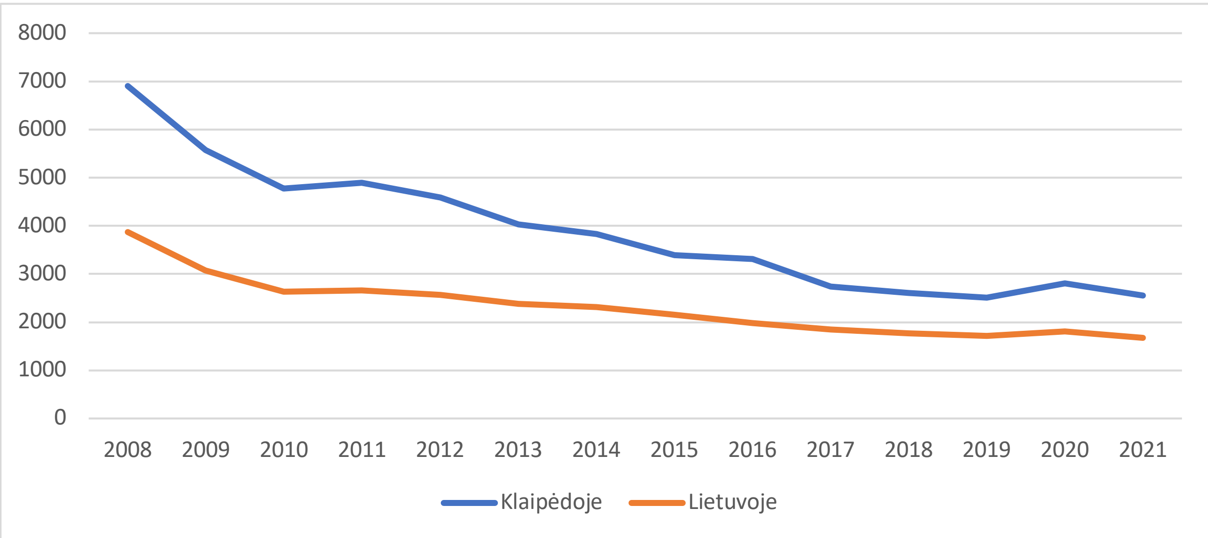
	Kriterijaus statistika t	**Laisvės laipsnių skaičius k**	**Hipotezė H_0 (priimta/atmesta)**	**Empirinių vidurkių santykis**
ŠU	3,83	7	atmesta	0,27
Šiaulių kolegija	7,19	13	atmesta	0,47

„atmesta “ – hipotezė H_0 atmetama, t.y. universiteto ir kolegijų studentų skaičiaus vidurkiai 2008–2014 ir 2015–2021 m. statistiškai reikšmingai skiriasi.

Iš 6 lentelės matome, kad Šiaulių kolegijoje 2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų studentų skaičiaus vidurkiai statistiškai reikšmingai skiriasi, o empirinių vidurkių santykis rodo šiek tiek mažesnį, nei ŠU, bet taip pat labai stiprų priimtų studentų skaičiaus mažėjimą.

2.3 LYGINAMOJI ANALIZĖ KLAIPĖDOS MIESTO LYGIU

Šiame skyriuje taip pat palyginsime Klaipėdos ir visos Lietuvos priimtų studentų dinamiką. Lietuvoje nuo 2008 iki 2021 metų vidutiniškai gyveno $\bar{X} = 2956993{,}79$ gyventojų. Klaipėdoje šiuo laikotarpiu gyveno $\bar{Y} = 157864{,}64$ gyventojų. Gauname, kad Klaipėdoje gyveno $\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = 18{,}7$ karto mažiau gyventojų. Priimtų studentų Lietuvoje skaičių daliname iš 18,7 ir palyginame su Klaipėdoje priimtų studentų skaičiumi.



*7 **pav**. Priimtų studentų skaičius į Klaipėdos ir visos Lietuvos aukštąsias mokyklas 2008–2021m.*

Iš 7 pav. matome, kad priimtų studentų skaičiaus mažėjimas Klaipėdoje atitinka studentų mažėjimą visoje Lietuvoje. Todėl patikrinsime statistinę hipotezę apie galimą ρ reikšmę. Sužinosime, ar tarp 2008–2021 metais priimtų studentų skaičiaus Klaipėdoje ir priimtų studentų skaičiaus santykio visoje Lietuvoje yra priklausomybė, tikrinsime hipotezę. $H_0: \rho = 0{,}99$, kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$.

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} = 0{,}992,$$

čia $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 3892{,}71$, $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i = 2317{,}04$.

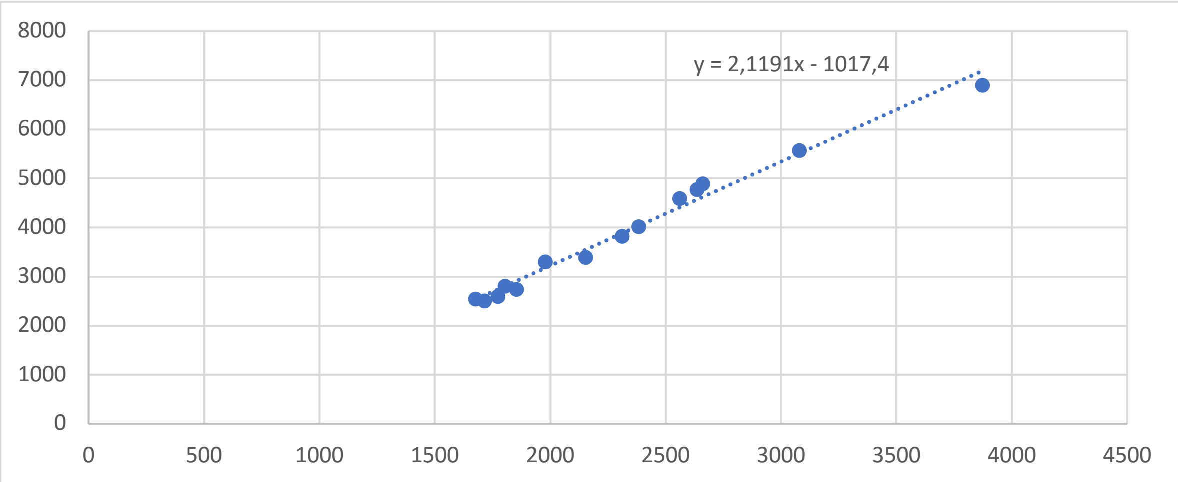
Matome didelę priklausomybę tarp duomenų. Patikriname statistinę hipotezę $H_o: \rho = 0{,}99$. Skaičiavimai pateikti 3 priede.

Gavome $|Z| = 0{,}371 \leq 1{,}96 = u_{0{,}975}$, tai hipotezė H_o priimama.

Išvada: tarp 2008–2021 metais priimtų studentų skaičiaus Klaipėdoje ir priimtų studentų skaičiaus santykio visoje Lietuvoje yra stipri priklausomybė.

Randame tiesinės regresijos lygtį rodančią priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje (*y*) priklausomybę nuo priimtų studentų skaičiaus Klaipėdoje (*x*):

$$y = -1017{,}36 + 2{,}12x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 28665{,}61).$$



8 pav. *Priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje (y) tiesinė priklausomybė nuo priimtų studentų skaičiaus Klaipėdoje (x)*

2.3.1 VIDURKIŲ LYGUMO HIPOTEZĖS TIKRINIMAS

Kadangi Klaipėdoje daugiausiai studentų pritraukusi aukštoji mokykla yra Klaipėdos universitetas, todėl tikrinsime dviejų laikotarpių empirinių vidurkių lygybe. Nustatysime, ar 2008–2014 metų priimtų į KU studentų skaičiaus (*X*) vidurkis atitinka 2015–2021 metų (*Y*) vidurkį. Reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$. Skaičiavimai pateikti 4 priede.

*7 **lentelė**. 2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų į Klaipėdos universitetą studentų skaičius*

Metai	KU	Metai	KU
2008	2263	2015	1081
2009	1902	2016	1213
2010	1753	2017	929
2011	1713	2018	720
2012	1503	2019	850
2013	1484	2020	850

2014	1276	2021	912
Mediana	1713	Mediana	912
Vidurkis	1699,14	Vidurkis	936,43
Dispersija	104331,14	Dispersija	26637,62
St. Nuokrypis	323	St. Nuokrypis	163,21

Apskaičiavę $F = \frac{s_X^2}{s_Y^2} = 3{,}9$ gavome, kad F patenka į intervalą (0,17182; 5,82), todėl $H_0\colon \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ priimama. Kadangi $t = 7{,}88 > 2{,}179 = t_{0{,}025}(12)$, tai hipotezė $H_0\colon a_X = a_Y$ atmetama.

Išvada: 2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų į KU studentų skaičiaus vidurkiai statistiškai reikšmingai skiriasi.

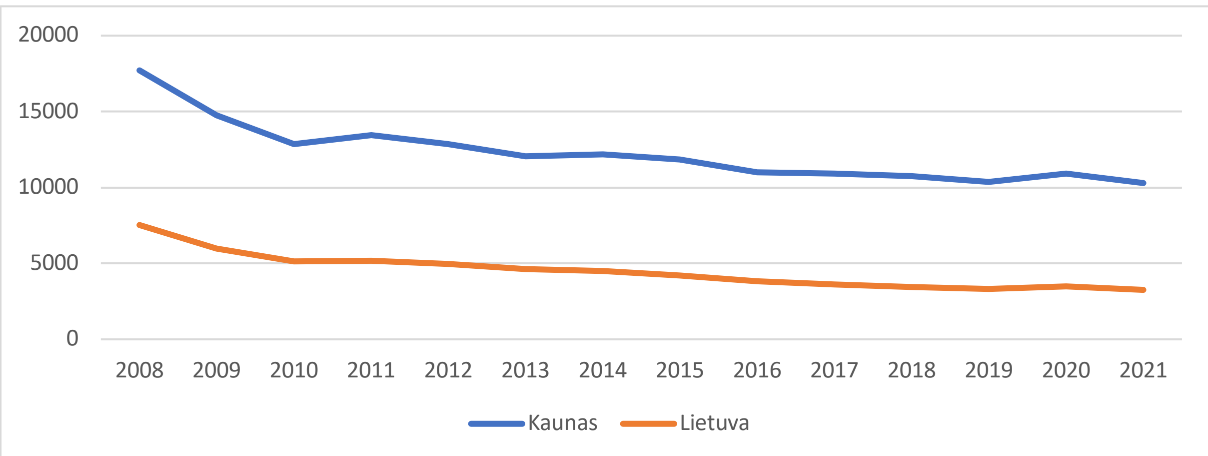
Toliau ieškosime šių dviejų laikotarpių empirinių vidurkių santykio. 2008–2014 metais priimtų į KU studentų skaičiaus vidurkis $\bar{X} = 1699{,}14$, 2015–2021 metais priimtų į KU studentų skaičiaus vidurkis $\bar{Y} = 936{,}43$.

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 0{,}55.$$

Gautas santykis rodo stiprų studentų skaičiaus mažėjimą Klaipėdos universitete.

2.4 LYGINAMOJI ANALIZĖ KAUNO MIESTO LYGIU

Lietuvoje nuo 2008 iki 2021 metų vidutiniškai gyveno $\bar{X} = 2956993{,}79$ gyventojų. Kaune šiuo laikotarpiu gyveno $\bar{Y} = 307049{,}29$ gyventojų. Tai reiškia, kad Kaune gyveno $\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = 9{,}6$ karto mažiau gyventojų. Iš šio skaičiaus padaliname priimtų studentų Lietuvoje skaičių ir palyginame su priimtų studentų skaičiumi Kaune.



***9 pav**. Priimtų studentų skaičius į Kauno ir visos Lietuvos aukštąsias mokyklas 2008-2021m.*

Iš 9 pav matome, kad priimtų studentų skaičiaus mažėjimas Kaune atitinka studentų mažėjimą visoje Lietuvoje. Toliau patikrinsime statistinę hipotezę apie galimą ρ reikšmę. Sužinosime, ar tarp 2008–2021 metais priimtų studentų skaičiaus Kaune ir priimtų studentų skaičiaus santykio visoje Lietuvoje yra priklausomybė, tikrinsime hipotezę $H_0: \rho = 0{,}99$, kai $\alpha = 0{,}05$.

Rasime empirini koreliacijos koeficientą pasinaudoję formule:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} = 0{,}992,$$

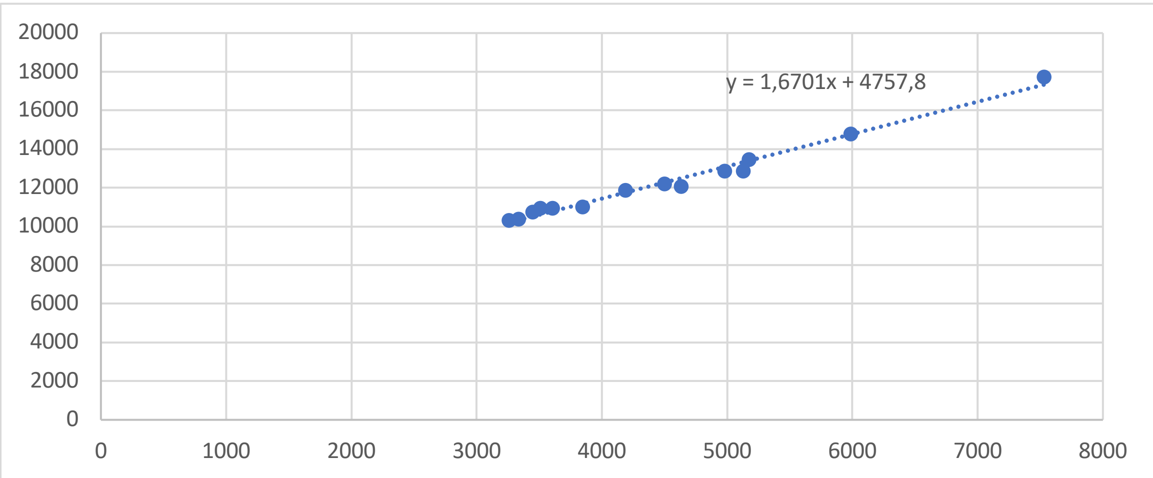
čia $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ =12284,57, $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ =4506,67.

Empirinį koreliacijos koeficientą gavome 0,992. Atlikę skaičiavimus gavome, kad hipotezė H_o priimama. Skaičiavimai pateikti 3 priede.

Išvada: tarp 2008–2021 metais priimtų studentų skaičiaus Kaune ir priimtų studentų skaičiaus santykio visoje Lietuvoje yra stipri priklausomybė.

Randame tiesinės regresijos lygtį rodančią priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje (*y*) priklausomybę nuo priimtų studentų skaičiaus Kaune (*x*):

$$y = 4757{,}76 + 1{,}67x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 69497{,}71).$$



10 pav. *Priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje (y) tiesinė priklausomybė nuo priimtų studentų skaičiaus Kaune (x)*

2.4.1 VIDURKIŲ LYGUMO HIPOTEZĖS TIKRINIMAS

Kauno mieste vidurkių lygumui tikrinti pasirinkome Kauno technologijos universitetą. Nustatysime, ar 2008–2014 metų priimtų į KTU studentų skaičiaus (*X*) vidurkis atitinka 2015–2021 metų (*Y*) vidurkį. Reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$. Skaičiavimai pateikiami 4 priede.

8 lentelė. *2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų į KTU studentų skaičius*

Metai	KTU	Metai	KTU
2008	5863	2015	3283
2009	4040	2016	3161
2010	3155	2017	2980
2011	3787	2018	2617
2012	3329	2019	2525
2013	3650	2020	2415
2014	3462	2021	2239
Mediana	3650	Mediana	2617
Vidurkis	3898	Vidurkis	2745,71
Dispersija	836853,33	Dispersija	157906,9
St. Nuokrypis	914,8	St. Nuokrypis	397,38

Apskaičiavus $F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = 5$, matome, kad jis patenka į intervalą (0,17; 5,82), tai hipotezę H_0: $\sigma_x^2 = \sigma_y^2$ priimame. Galime laikyti kad imčių dispersijos yra lygios.

Kadangi $t = 3{,}05 > 2{,}179 = t_{0{,}025}(12)$, tai hipotezė H_0: $a_X = a_Y$ atmetama.

Išvada: 2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų į KTU studentų skaičiaus vidurkiai statistiškai reikšmingai skiriasi.

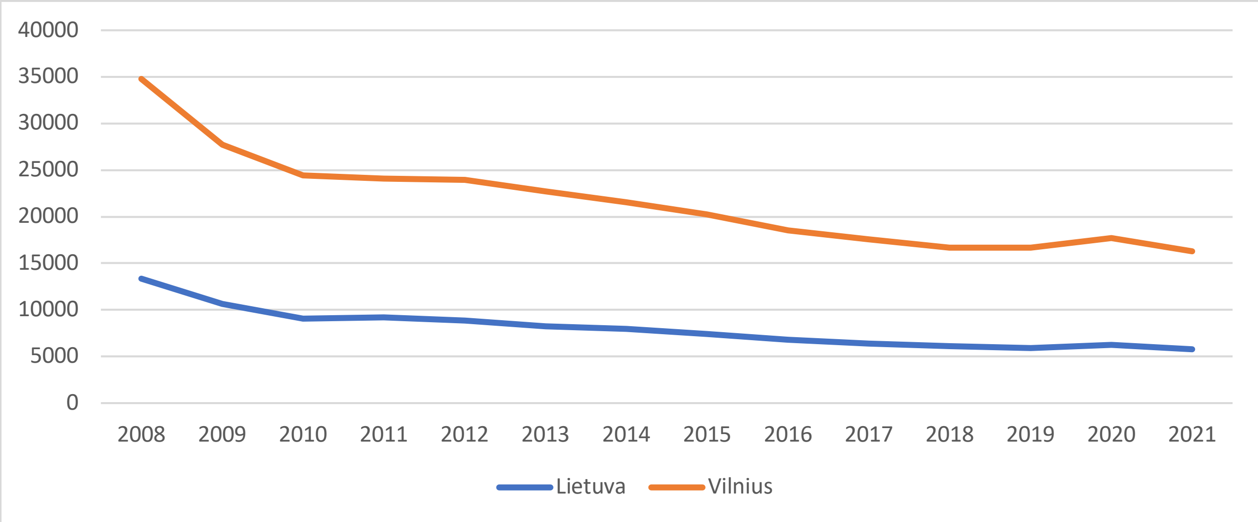
Toliau ieškosime šių dviejų laikotarpių empirinių vidurkių santykio. 2008–2014 metais priimtų į KTU studentų skaičiaus vidurkis $\bar{X} = 3898$, 2015–2021 metais priimtų į KTU studentų skaičiaus vidurkis $\bar{Y} = 2745{,}71$.

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 0{,}7.$$

Gautas santykis rodo vidutinį studentų skaičiaus mažėjimą Kauno technologijos universitete.

2.5 LYGINAMOJI ANALIZĖ VILNIAUS MIESTO LYGIU

Lietuvoje nuo 2008 iki 2021 metų vidutiniškai gyveno $\bar{X} = 2956993{,}79$ gyventojų. Vilniuje šiuo laikotarpiu gyveno $\bar{Y} = 544525{,}07$ gyventojų. Vadinasi Vilniuje gyveno $\frac{\bar{X}}{\bar{Y}} = 5{,}4$ karto mažiau gyventojų. Iš šio skaičiaus padaliname priimtų studentų Lietuvoje skaičių ir palyginame su priimtų studentų skaičiumi Vilniuje.



11 pav. *Priimtų studentų skaičius į Vilniaus ir visos Lietuvos aukštąsias mokyklas 2008-2021m.*

Iš 11 paveikslo matome, kad priimtų studentų skaičiaus mažėjimas Vilniuje atitinka studentų mažėjimą visoje Lietuvoje. Todėl patikrinsime statistinę hipotezę apie galimą ρ reikšmę. Sužinosime, ar tarp 2008–2021 metais priimtų studentų skaičiaus Vilniuje ir priimtų studentų skaičiaus santykio visoje Lietuvoje yra priklausomybė, tikrinsime hipotezę. $H_0: \rho = 0{,}999,$ kai reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$.

Rasime empirini koreliacijos koeficientą pasinaudoję formule:

$$r = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2}} = 0{,}999,$$

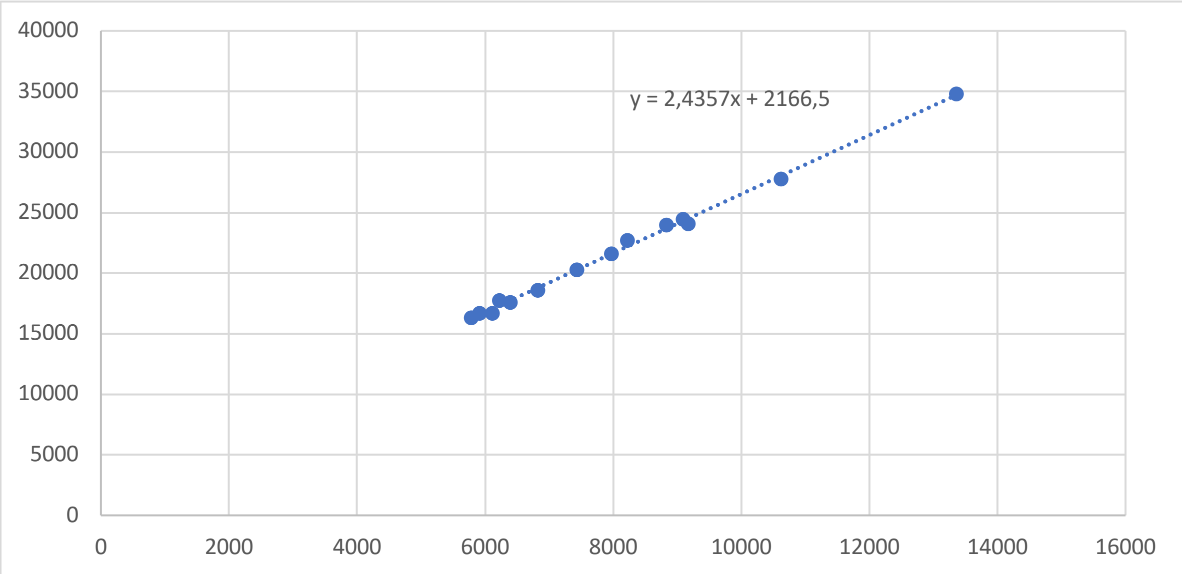
čia $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i$ =21632,78, $\bar{Y} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} Y_i$ =7992,19.

Empirinį koreliacijos koeficientą gavome 0,999 ir tai rodo didelę priklausomybę tarp duomenų. Patikrinus statistinę hipotezę H_o gavome, kad ji priimama. Skaičiavimai pateikti 3 priede.

Išvada: tarp 2008–2021 metais priimtų studentų skaičiaus Vilniuje ir priimtų studentų skaičiaus santykio visoje Lietuvoje yra stipri priklausomybė.

Randame tiesinės regresijos lygtį rodančią priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje (y) priklausomybę nuo priimtų studentų skaičiaus Vilniuje (x):

$$y = 2166{,}45 + 2{,}44x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 85061{,}89).$$



12 pav. *Priimtų studentų skaičiaus Lietuvoje (y) tiesinė priklausomybė nuo priimtų studentų skaičiaus Vilniuje (x)*

2.5.1 VIDURKIŲ LYGUMO HIPOTEZĖS TIKRINIMAS

Kadangi Vilniuje daugiausiai studentų priimta į Vilniaus universitetą, tolimesni skaičiavimai šiame skyriuje bus pateikti Vilniaus universiteto lygiu. Nustatysime, ar 2008–2014 metų priimtų į VU studentų skaičiaus (X) vidurkis atitinka 2015–2021 metų (Y) vidurkį. Reikšmingumo lygmuo $\alpha = 0{,}05$. Skaičiavimai pateikiami 4 priede.

__9 lentelė__. 2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų į VU studentų skaičius

Metai	VU	Metai	VU
2008	6902	2015	5740
2009	6339	2016	5184
2010	5699	2017	5386
2011	5448	2018	5727
2012	5585	2019	5970
2013	5434	2020	7015
2014	5203	2021	6514
Mediana	5585	Mediana	5740
Vidurkis	5801,43	Vidurkis	5933,71
Dispersija	362600,95	Dispersija	408257,57
St. Nuokrypis	602,16	St. Nuokrypis	638,95

Apskaičiavę gavome, kad $F = \frac{S_Y^2}{S_X^2} = 1{,}13$ patenka į intervalą (0,17182; 5,82), tai hipotezę $H_0 \colon \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ priimame ir galime laikyti kad imčių dispersijos yra lygios.

Kadangi $|t| = 0{,}4 < 2{,}179 = t_{0{,}025}(12)$, tai hipotezė $H_0 \colon a_X = a_Y$ priimama.

Išvada: 2008–2014 ir 2015–2021 metais priimtų į VU studentų skaičiaus vidurkiai statistiškai reikšmingai nesiskiria.

Toliau ieškosime šių dviejų laikotarpių empirinių vidurkių santykio. 2008–2014 metais priimtų į VU studentų skaičiaus vidurkis $\bar{X} = 5801{,}43$, 2015–2021 metais priimtų į VU studentų skaičiaus vidurkis $\bar{Y} = 5933{,}71$.

$$\frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = \mathbf{1{,}02}.$$

Gautas santykis rodo studentų skaičiaus padidėjimą Vilniaus universitete.

Išvada: Palyginus priimtų studentų skaičiaus 2015–2021 metų vidurkį su 2008–2014m. vidurkiu gaunama santykio reikšmė yra nuo 0,27 iki 1,02. Šiaulių universitete šis santykis (0,27) rodo prasčiausią situaciją. Klaipėdos universitete situacija šiek tiek geresnė. Čia santykio reikšmė – 0,55, Kauno technologijos universiteto situacija vidutiniška (0,7), o Vilniaus universitete gautas santykis – 1,02. Matome, kad iš šių 4 universitetų tvirčiausiai laikosi VU, nes tai vienintelis iš tirtų universitetų, kuriame priimtų studentų skaičius augo.

2.6 DUOMENŲ NEPRIKLAUSOMUMO IR ATSITIKTINUMO TIKRINIMAS

Naudodami serijų kriterijų patikrinsime ar duomenys nepriklausomi ir atsitiktiniai.

10 lentelė. *Priimtų studentų skaičius Šiaulių universitete 2008–2021 m.*

Metai	Priimtų studentų skaičius Šiaulių universitete
2008	3845
2009	2847
2010	1751
2011	1611
2012	1623
2013	1246
2014	1044
2015	735
2016	683
2017	589
2018	570
2019	367
2020	459
2021	336

Duomenys didėjimo tvarka: 336, 367, 459, 570, 589, 683, 735, 1044, 1246, 1611, 1623, 1751, 2847, 3845

Surandame medianą : $M_e = \frac{1}{2}\left(X_{\left(\frac{14}{2}\right)} + X_{\left(\frac{14}{2}+1\right)}\right) = 889{,}5.$

Lyginame

$$(+++++++)(-------)$$

H_0: duomenys nepriklausomi ir atsitiktiniai.

$N = N($serijų skaičius$) = 2$.

$k_1 = 7, k_2 = 7.$

$n_1 = 7, n_2 = 7.\ \alpha = 0{,}1.$

$N_{0,05}(A, 7{,}7) = 4$

$N_{0,05}(V, 7{,}7) = 12.$

Jeigu $N_{0,05}(A, 7{,}7) < N < N_{0,05}(V, 7{,}7)$, tada H_0 teisinga. Kadangi 4 $\nless$ 2 < 12 H_0 atmetame. Tai reiškia, kad priimtų studentų skaičiaus Šiaulių universitete duomenys priklausomi ir neatsitiktiniai.

Kadangi Šiaulių miestui pagal gyventojų ir priimtų studentų skaičių artimiausias Klaipėdos miestas, toliau tikrinsime Klaipėdos ir Šiaulių akademinio lygmens palyginimui naudojamų duomenų (priimtų studentų, abiturientų, absolventų bei gyventojų skaičiaus) nepriklausomumą ir atsitiktinumą. Tą patį darysime ir su dalimi ankstesniuose skyriuose aprašytų duomenų. Duomenys apskaičiuojami analogiškai. Gautus duomenis surašome į lentelę.

11 lentelė. *Hipotezės tikrinimas faktoriams*

Faktorius	$N_{0,05}(A, n_1, n_2)$	$N_{0,05}(V, n_1, n_2)$	Serijų skaičius	H_0 priimta / atmesta
Priimtų studentų skaičius Šiaulių universitete	4	12	2	-
Priimtų studentų skaičius Šiaulių kolegijose	4	12	2	-
Priimtų studentų skaičius Šiaulių mieste	4	12	2	-
Priimtų studentų skaičius Klaipėdos mieste	4	12	2	-
Priimtų studentų skaičius Kauno mieste	4	12	2	-
Priimtų studentų skaičius Vilniaus mieste	4	12	2	-
Absolventai Šiaulių mieste	4	12	2	-
Absolventai Klaipėdos mieste	4	12	2	-
Bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičius Šiaulių mieste	4	12	2	-
Bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičius Klaipėdos mieste	4	12	2	-
Nuolatinių gyventojų skaičius Šiaulių mieste metų pradžioje	4	12	2	-
Nuolatinių gyventojų skaičius Klaipėdos mieste metų pradžioje	4	12	2	-

Iš 11 lentelės matome, kad H_0 atmesta su visais tirtais duomenimis. Tai reiškia, kad visi duomenys yra priklausomi ir neatsitiktiniai ir tolimesniuose skaičiavimuose galėsime taikyti laiko eilučių teoriją.

2.7 LAIKO EILUTĖS

Toliau bus skaičiuojamos priimtų studentų Šiaulių universitete, priimtų studentų Šiaulių kolegijose, priimtų studentų Šiaulių mieste, priimtų studentų Klaipėdos mieste, priimtų studentų Kauno mieste, priimtų studentų Vilniaus mieste, absolventų Šiaulių mieste, abiturientų Šiaulių mieste, nuolatinių gyventojų skaičiaus Šiaulių mieste, absolventų Klaipėdos mieste, abiturientų Klaipėdos mieste bei nuolatinių gyventojų Klaipėdos mieste laiko eilutės. Nustatomi tinkamiausi modeliai.

2.7.1 PRIIMTŲ STUDENTŲ ŠIAULIŲ UNIVERSITETE LAIKO EILUTĖS

Spręsime lygčių sistemas, gausime įverčius, kurie bus naudojami nustatant modelio eilę ir jo tinkamumą. Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Šiaulių universitete. Stebiniai: 3845, 2847, 1751, 1611, 1623, 1246, 1044, 735, 685, 589, 570, 367, 459, 336. Stebėjimų skaičius: $n = 14$.

Apskaičiuojame šios imties vidurkį pagal formulę $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 1264{,}71$. Imties dispersija: $S^2 = \frac{1}{14}\sum_{i=1}^{14}(X_i - \bar{X})^2 = 969364{,}78 = \hat{R}(0)$.

Daroma prielaida, kad modelio eilė yra žinoma, t.y. $p = 4$. Apskaičiuojami autokovariacinės funkcijos įverčiai pagal formulę:

$\hat{R}(k) = \frac{1}{n-|k|} \cdot \sum_{t=1}^{n-|k|}(X_t - \bar{X}) \cdot \left(X_{t+|k|} - \bar{X}\right)$, kur $0 \leq |k| \leq n$. Žinome, kad $\hat{R}(0) = S^2$

Kadangi eilė yra $p = 4$, tai:

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 655759{,}65$.

Gavome autokovariacinės funkcijos įverčius $\hat{R}(0) = 969364{,}78$ ir $\hat{R}(1) = 655759{,}54$. Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1).

AR(1) modelio pavidalas $X_t = \widehat{a_1} \cdot X_{t-1} + e_t$. Šiam modeliui užrašome Yule-Walker lygtį: $\hat{R}(1) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(0)$. Įrašę atitinkamas reikšmes gauname: $655759{,}54 = \widehat{a_1} \cdot 969364{,}78$.

Apskaičiavus gauname $\widehat{a_1} = 0{,}6765$. Užrašome AR(1) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}6765X_{t-1} + e_t$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 399314{,}61$.

Autokovariacinės funkcijos įverčius $\hat{R}(0) = 969364{,}78$, $\hat{R}(1) = 655759{,}54$, $\hat{R}(2) = 399314{,}61$. Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(2).

AR(2) modelio pavidalas $X_t = \widehat{a_1} \cdot X_{t-1} + \widehat{a_2} \cdot X_{t-2} + e_t$. Šiam modeliui užrašome Yule-Walker lygtis: $\begin{cases} \hat{R}(1) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(0) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(1), \\ \hat{R}(2) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(0). \end{cases}$

Įrašę atitinkamas reikšmes gauname :

$$\begin{cases} 655759{,}54 = \widehat{a_1} \cdot 969364{,}78 + \widehat{a_2} \cdot 655759{,}54, \\ 399314{,}61 = \widehat{a_1} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_2} \cdot 969364{,}78. \end{cases}$$

Išsprendę lygtį gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}7335, \widehat{\mathrm{a}_2} = -0{,}0843$. Užrašome AR(2) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}7335X_{t-1} + (-0{,}0843)X_{t-2} + e_t$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 311360{,}9$.

Autokovariacinės funkcijos įverčius $\hat{R}(0) = 969364{,}78$, $\hat{R}(1) = 655759{,}54$, $\hat{R}(2) = 399314{,}61, \hat{R}(3) = 311360{,}9$. Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(3).

AR(3) modelio pavidalas $X_t = \widehat{a_1} \cdot X_{t-1} + \widehat{a_2} \cdot X_{t-2} + \widehat{a_3} \cdot X_{t-3} + e_t$. Šiam modeliui užrašome Yule-Walker lygtis: $\begin{cases} \hat{R}(1) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(0) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(2), \\ \hat{R}(2) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(0) + \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(1), \\ \hat{R}(3) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(2) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(0). \end{cases}$

Įrašę atitinkamas reikšmes gauname:

$$\begin{cases} 655759{,}54 = \widehat{a_1} \cdot 969364{,}78 + \widehat{a_2} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_3} \cdot 399314{,}61, \\ 399314{,}61 = \widehat{a_1} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_2} \cdot 969364{,}78 + \widehat{a_3} \cdot 655759{,}54, \\ 311360{,}9 = \widehat{a_1} \cdot 399314{,}61 + \widehat{a_2} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_3} \cdot 969364{,}78. \end{cases}$$

Išsprendę lygtį gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}7454$, $\widehat{\mathrm{a}_2} = -0{,}1878, \widehat{\mathrm{a}_3} = 0{,}1412$. Užrašome AR(3) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}7454X_{t-1} + (-0{,}1878)X_{t-2} + 0{,}1412X_{t-3} + e_t$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 213343{,}75$.

Autokovariacinės funkcijos įverčius $\hat{R}(0) = 969364{,}78$, $\hat{R}(1) = 655759{,}54$, $\hat{R}(2) = 399314{,}61$, $\hat{R}(3) = 311360{,}9$, $\hat{R}(4) = 213343{,}75$. Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(4).

AR(4) modelio pavidalas $X_t = \widehat{a_1} \cdot X_{t-1} + \widehat{a_2} \cdot X_{t-2} + \widehat{a_3} \cdot X_{t-3} + \widehat{a_4} \cdot X_{t-4} + e_t$. Šiam modeliui užrašome Yule-Walker lygtis:

$$\begin{cases} \hat{R}(1) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(0) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(2) + \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(3), \\ \hat{R}(2) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(0) + \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(2), \\ \hat{R}(3) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(2) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(0) + \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(1), \\ \hat{R}(4) = \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(3) + \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) + \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(1) + \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(0). \end{cases}$$

Įrašę atitinkamas reikšmes gauname:

$$\begin{cases} 655759{,}54 = \widehat{a_1} \cdot 969364{,}78 + \widehat{a_2} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_3} \cdot 399314{,}61 + \widehat{a_4} \cdot 311360{,}9, \\ 399314{,}61 = \widehat{a_1} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_2} \cdot 969364{,}78 + \widehat{a_3} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_4} \cdot 399314{,}61, \\ 311360{,}9 = \widehat{a_1} \cdot 399314{,}61 + \widehat{a_2} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_3} \cdot 969364{,}78 + \widehat{a_4} \cdot 655759{,}54, \\ 213343{,}75 = \widehat{a_1} \cdot 311360{,}9 + \widehat{a_2} \cdot 399314{,}61 + \widehat{a_3} \cdot 655759{,}54 + \widehat{a_4} \cdot 969364{,}78. \end{cases}$$

Išsprendę lygtį gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}7554$, $\widehat{\mathrm{a}_2} = -0.2012$, $\widehat{\mathrm{a}_3} = 0{,}1942$, $\widehat{\mathrm{a}_4} = -0.071$. Užrašome AR(4) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}7554X_{t-1} + (-0.2012)X_{t-2} + 0{,}1942X_{t-3} + (-0.071)X_{t-4} + e_t$.

Žinodami autokovariacinės funkcijos įverčius ir modelių įverčius, kuriuos apskaičiavome, galime nustatyti modelio eilę ir sužinoti kuris modelis tinkamiausias.

Toliau skaičiuosime skaičiuosime dispersijos įverčius modelio eilei nustatyti. Dispersijos įverčiai skaičiuojami kiekvienam modeliui atskirai. Tam naudosime formulę $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \ldots - \widehat{a_p} \cdot \hat{R}(p)$.

Kai modelis AR(1) gauname formulę: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1)$. Turime įverčius $\hat{R}(0) = 969364{,}78$, $\hat{R}(1) = 655759{,}54$, $\widehat{a_1} = 0{,}6765$. Įrašę šiuos įverčius į formulę gauname: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 969364{,}78 - 0{,}6765 \cdot 655759{,}54 = 525743{,}45$.

Kai modelis AR(2) gauname formulę: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2)$. Turime įverčius $\hat{R}(0) = 969364{,}78$, $\hat{R}(1) = 655759{,}54$, $\hat{R}(2) = 399314{,}61$, $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}7335$, $\widehat{\mathrm{a}_2} =$

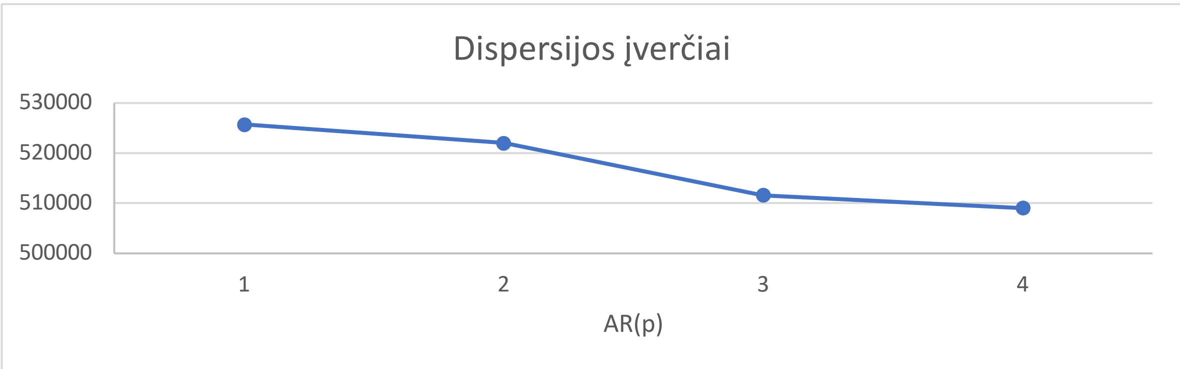
$-0{,}0843$. Įrašę šiuos įverčius į formulę gauname: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 969364{,}78 - 0{,}7335 \cdot 655759{,}54 + 0{,}0843 \cdot 399314{,}61 = 969364{,}78 - 480999{,}62 + 33662{,}22 = 522027{,}38$.

Kai modelis AR(3) gauname formulę: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3)$. Turime įverčius $\hat{R}(0) = 969364{,}78$, $\hat{R}(1) = 655759{,}54$, $\hat{R}(2) = 399314{,}61$, $\hat{R}(3) = 311360{,}9$, $\widehat{a_1} = 0{,}7454$, $\widehat{a_2} = -0{,}1878$, $\widehat{a_3} = 0{,}1412$. Įrašę šiuos įverčius į formulę gauname: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 969364{,}78 - 0{,}7454 \cdot 655759{,}54 + 0{,}1878 \cdot 399314{,}61 - 0{,}1412 \cdot 311360{,}9 = 969364{,}78 - 488803{,}16 + 74991{,}28 - 43964{,}16 = 511588{,}74$.

Kai modelis AR(4) gauname formulę: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4)$. Turime įverčius $\hat{R}(0) = 969364{,}78$, $\hat{R}(1) = 655759{,}54$, $\hat{R}(2) = 399314{,}61$, $\hat{R}(3) = 311360{,}9$, $\hat{R}(4) = 213343{,}75$, $\widehat{a_1} = 0{,}7554$, $\widehat{a_2} = -0.2012$, $\widehat{a_3} = 0{,}1942$, $\widehat{a_4} = -0.071$. Įrašę šiuos įverčius į formulę gauname: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 969364{,}78 - 0{,}7554 \cdot 655759{,}54 + 0{,}2012 \cdot 399314{,}61 - 0{,}1942 \cdot 311360{,}9 + 0{,}071 \cdot 213343{,}75 = 969364{,}78 - 495360{,}76 + 80342{,}1 - 60466{,}29 + 15147{,}41 = 509027{,}24$.

12 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	525743,45	522027,38	511588,74	509027,24



13 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 12 lentelės ir grafiko (13 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 3. Šiuo atveju priimtų studentų skaičiui Šiaulių universitete tinkamiausias modelis yra AR(3).

2.7.2 PRIIMTŲ STUDENTŲ ŠIAULIŲ KOLEGIJOSE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Šiaulių kolegijose. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

13 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,7813			
AR(2)	0,6931	0,1129		
AR(3)	0,7018	0,1662	−0,077	
AR(4)	0,6715	0,2316	0,1993	−0.3936

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 131175{,}05$, $\hat{R}(1) = 102488{,}41$, $\hat{R}(2) = 85842{,}65$, $\hat{R}(3) = 67184{,}62$, $\hat{R}(4) = 33793{,}71$.

Pagal 13 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $X_t = 0{,}7813X_{t-1} + e_t$.

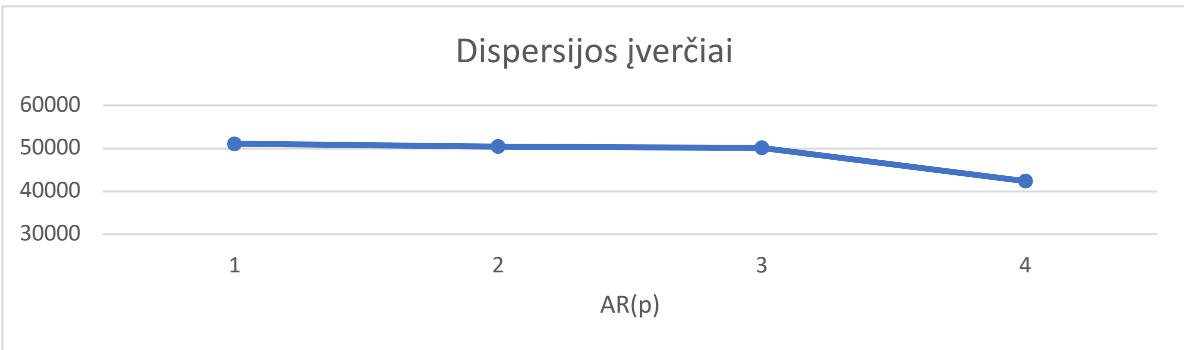
AR(2): $X_t = 0{,}6931X_{t-1} + 0{,}1129X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $X_t = 0{,}7018X_{t-1} + 0{,}1662X_{t-2} + (-0{,}077)X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $X_t = 0{,}6715X_{t-1} + 0{,}2316X_{t-2} + 0{,}1993X_{t-3} + (-0.3936)X_{t-4} + e_t$.

14 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	51100,86	50448,69	50154,85	42384,23



14 pav*. Dispersijos įverčiai*

Iš 14 lentelės ir grafiko (14 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 2. Šiuo atveju priimtų studentų skaičiui Šiaulių kolegijose tinkamiausias modelis yra AR(2).

2.7.3 PRIIMTŲ STUDENTŲ ŠIAULIŲ MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Šiaulių mieste. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

15 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,6745			
AR(2)	0,6623	0,0181		
AR(3)	0,6605	−0,0478	0,0996	
AR(4)	0,6705	−0,0526	0,1661	−0,1008

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 1827946{,}9$, $\hat{R}(1) = 1233014{,}64$, $\hat{R}(2) = 849771{,}74$, $\hat{R}(3) = 684311{,}15$, $\hat{R}(4) = 434713{,}52$.

Pagal 15 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}6745X_{t-1} + e_t$.

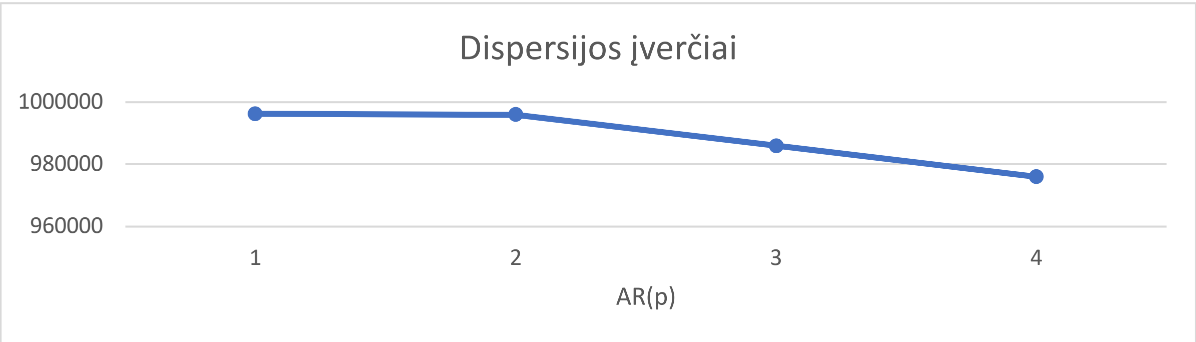
AR(2): $\mathrm{X_t} = 0{,}6623X_{t-1} + 0{,}0181X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $\mathrm{X_t} = 0{,}6605X_{t-1} - 0{,}0478X_{t-2} + 0{,}0996X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 0{,}6705X_{t-1} + (-0{,}0526)X_{t-2} + 0{,}1661X_{t-3} + (-0{,}1008)X_{t-4} + e_t$.

16 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	996278,53	995940,44	986002,43	976015,75



15 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 16 lentelės ir grafiko (15 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 1. Šiuo atveju priimtų studentų skaičiui Šiaulių mieste tinkamiausias modelis yra AR(1).

2.7.4 PRIIMTŲ STUDENTŲ KLAIPĖDOS MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Klaipėdos mieste. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

***17 lentelė.** AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,6821			
AR(2)	0,592	0,132		
AR(3)	0,5852	0,1012	0,052	
AR(4)	0,5956	0,1216	0,1696	−0,2011

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 1744054{,}07$, $\hat{R}(1) = 1189586{,}41$, $\hat{R}(2) = 934504{,}81$, $\hat{R}(3) = 757905{,}04$, $\hat{R}(4) = 416140{,}34$.

Pagal 17 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}6821X_{t-1} + e_t$.

AR(2): $\mathrm{X_t} = 0{,}592X_{t-1} + 0{,}132X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $\mathrm{X_t} = 0{,}5852X_{t-1} + 0{,}1012X_{t-2} + 0{,}052X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 0{,}5956X_{t-1} + 0{,}1216X_{t-2} + 0{,}1696X_{t-3} + (-0{,}2011)X_{t-4} + e_t$.

***18 lentelė.** Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	932659,59	916464,28	913935,67	876976,12

***16 pav**. Dispersijos įverčiai*

Iš 18 lentelės ir grafiko (16 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 2. Šiuo atveju priimtų studentų skaičiui Klaipėdos mieste tinkamiausias modelis yra AR(2).

2.7.5 PRIIMTŲ STUDENTŲ KAUNO MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Kauno mieste. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

19 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,5416			
AR(2)	0,4966	0,0831		
AR(3)	0,4815	−0,0072	0,1819	
AR(4)	0,3816	−0,0032	−0,0822	0,5486

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 4100301{,}19$, $\hat{R}(1) = 2220822{,}17$, $\hat{R}(2) = 1443765{,}05$, $\hat{R}(3) = 1425109{,}72$, $\hat{R}(4) = 2606180{,}8$.

Pagal 19 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}5416X_{t-1} + e_t$.

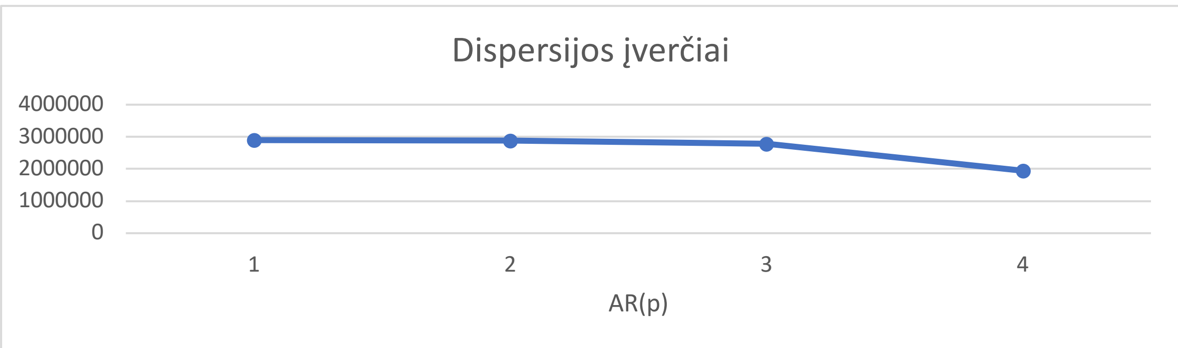
AR(2): $\mathrm{X_t} = 0{,}4966X_{t-1} + 0{,}0831X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $\mathrm{X_t} = 0{,}4815X_{t-1} + (-0{,}0072)X_{t-2} + 0{,}1819X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 0{,}3816X_{t-1} + (-0{,}0032)X_{t-2} + (-0{,}0822)X_{t-3} + 0{,}5486X_{t-4} + e_t$.

20 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	2897450,25	2877418,98	2782177,98	1944744,49



17 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 20 lentelės ir grafiko (17 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 1. Šiuo atveju priimtų studentų skaičiui Kauno mieste tinkamiausias modelis yra AR(1).

2.7.6 PRIIMTŲ STUDENTŲ VILNIAUS MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Vilniaus mieste. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

21 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,6101			
AR(2)	0,5337	0,1252		
AR(3)	0,5246	0,0864	0,0727	
AR(4)	0,5293	0,0919	0,1065	−0,0645

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 27075393{,}26$, $\hat{R}(1) = 16517474{,}84$, $\hat{R}(2) = 12203993{,}72$, $\hat{R}(3) = 9796525{,}64$, $\hat{R}(4) = 6319390{,}48$.

Pagal 21 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}6101X_{t-1} + e_t$.

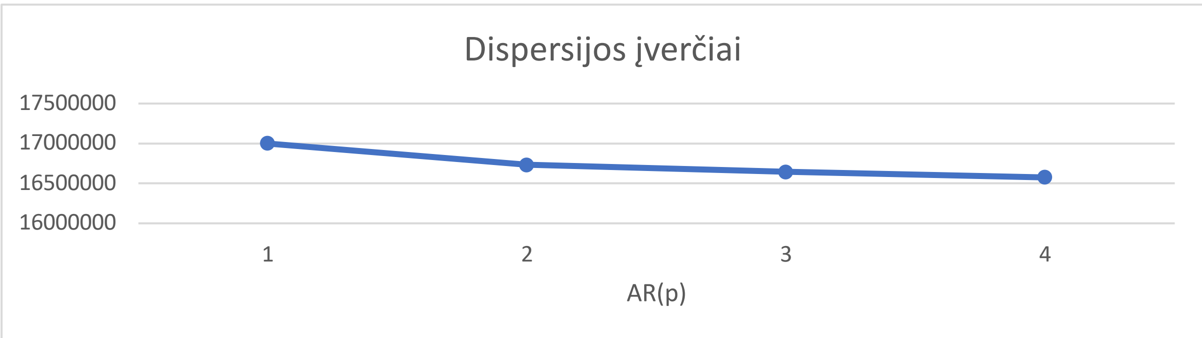
AR(2): $\mathrm{X_t} = 0{,}5337X_{t-1} + 0{,}1252X_{t-2} + e_t$.

AR(3):$\mathrm{X_t} = 0{,}5246X_{t-1} + 0{,}0864X_{t-2} + 0{,}0727X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 0{,}5293X_{t-1} + 0{,}0919X_{t-2} + 0{,}1065X_{t-3} + (-0{,}0645)X_{t-4} + e_t$.

22 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	16998827,71	16732576,96	16644207,09	16574860,74



18 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 22 lentelės ir grafiko (18 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 3. Šiuo atveju priimtų studentų skaičiui Vilniaus mieste tinkamiausias modelis yra AR(3).

2.7.7 ABSOLVENTŲ ŠIAULIŲ MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius absolventų skaičiui Šiaulių mieste. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

23 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,823			
AR(2)	0,8237	−0,0008		
AR(3)	0,8235	0,194	−0,2366	
AR(4)	0,7665	0,2408	−0,0382	−0,2409

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 1091624{,}38$, $\hat{R}(1) = 898440{,}21$, $\hat{R}(2) = 739148{,}22$, $\hat{R}(3) = 524784{,}56$, $\hat{R}(4) = 282966{,}53$.

Pagal 23 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $X_t = 0{,}823X_{t-1} + e_t$.

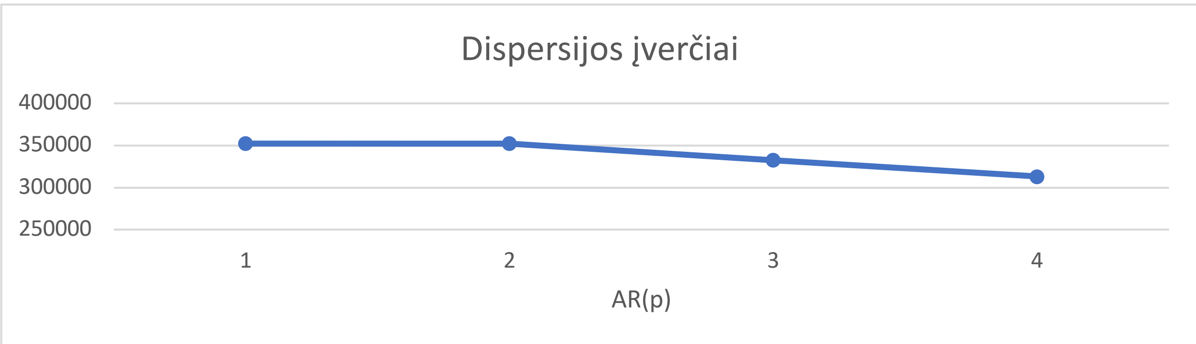
AR(2): $X_t = 0{,}8237X_{t-1} + (-0{,}0008)X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $X_t = 0{,}8235X_{t-1} + 0{,}194X_{t-2} + (-0{,}2366)X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $X_t = 0{,}7665X_{t-1} + 0{,}2408X_{t-2} + (-0{,}0382)X_{t-3} + (-0{,}2409)X_{t-4} + e_t$.

24 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	352180,64	352180,4	332471,31	313183,6



19 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 24 lentelės ir grafiko (19 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 1. Šiuo atveju absolventų skaičiui Šiaulių mieste tinkamiausias modelis yra AR(1).

2.7.8 ABITURIENTŲ ŠIAULIŲ MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiui Šiaulių mieste. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

25 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,8428			
AR(2)	0,9874	−0,1716		
AR(3)	0,9318	0,1483	−0,324	
AR(4)	0,8618	0,1803	−0,1226	−0,2161

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 74715{,}52$, $\hat{R}(1) = 62967{,}1$, $\hat{R}(2) = 49350{,}08$, $\hat{R}(3) = 31112{,}94$, $\hat{R}(4) = 11842{,}35$.

Pagal 25 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}8428X_{t-1} + e_t$.

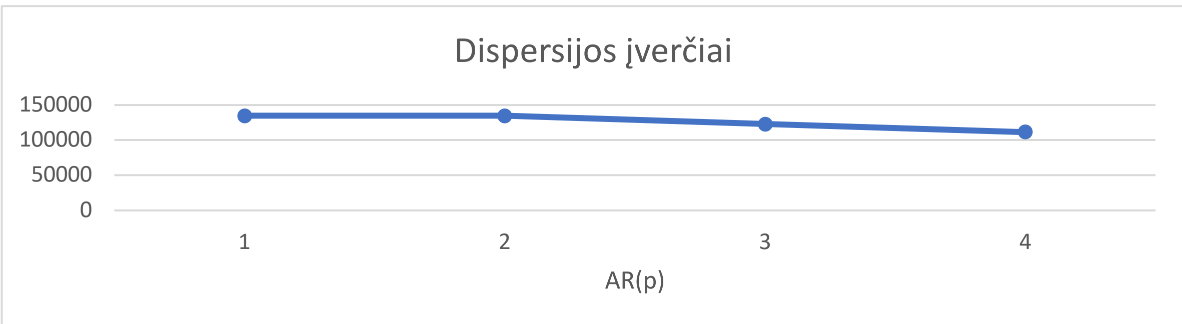
AR(2): $\mathrm{X_t} = 0{,}9874X_{t-1} + (-0{,}1716)X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $\mathrm{X_t} = 0{,}9318X_{t-1} + 0{,}1483X_{t-2} + (-0{,}324)X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 0{,}8618X_{t-1} + 0{,}1803X_{t-2} + (-0{,}1226)X_{t-3} + (-0{,}2161)X_{t-4} + e_t$.

26 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	21649,49	21011,68	18805,78	17927,26



20 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 26 lentelės ir grafiko (20 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 3. Šiuo atveju bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiui Šiaulių mieste tinkamiausias modelis yra AR(3).

2.7.9 GYVENTOJŲ SKAIČIAUS ŠIAULIŲ MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius nuolatinių gyventojų skaičiui Šiaulių mieste metų pradžioje. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

27 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	$0{,}7822$			
AR(2)	$0{,}8083$	$-0{,}0334$		
AR(3)	$0{,}799$	$0{,}193$	$-0{,}2797$	
AR(4)	$0{,}7907$	$0{,}1984$	$-0{,}2562$	$-0{,}0294$

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 36760620{,}9$, $\hat{R}(1) = 28753555{,}98$, $\hat{R}(2) = 22014010{,}12$, $\hat{R}(3) = 12846672{,}7$, $\hat{R}(4) = 6077103{,}92$.

Pagal 27 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}7822X_{t-1} + e_t$.

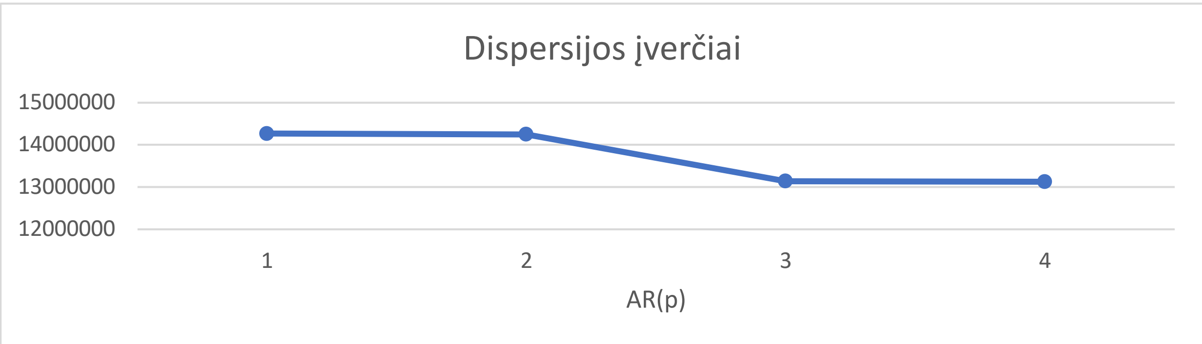
AR(2): $\mathrm{X_t} = 0{,}8083X_{t-1} + (-0{,}0034)X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $\mathrm{X_t} = 0{,}799X_{t-1} + 0{,}193X_{t-2} + (-0{,}2797)X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 0{,}7907X_{t-1} + 0{,}1984X_{t-2} + (-0{,}2562)X_{t-3} + (-0{,}0294)X_{t-4} + e_t$.

28 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	14270060,05	14254145,57	13138878,06	13127526,68



21 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 28 lentelės ir grafiko (21 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 3. Šiuo atveju nuolatinių gyventojų skaičiui Šiaulių mieste tinkamiausias modelis yra AR(3).

2.7.10 ABSOLVENTŲ KLAIPĖDOS MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius absolventų skaičiui Klaipėdos mieste. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

29 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,852			
AR(2)	0,9463	−0,1107		
AR(3)	0,9065	0,2301	−0,3601	
AR(4)	0,8222	0,2839	−0,1481	−0,234

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 874699{,}1$, $\hat{R}(1) = 745249{,}95$, $\hat{R}(2) = 608414{,}17$, $\hat{R}(3) = 407969{,}57$, $\hat{R}(4) = 193192{,}25$.

Pagal 29 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}852X_{t-1} + e_t$.

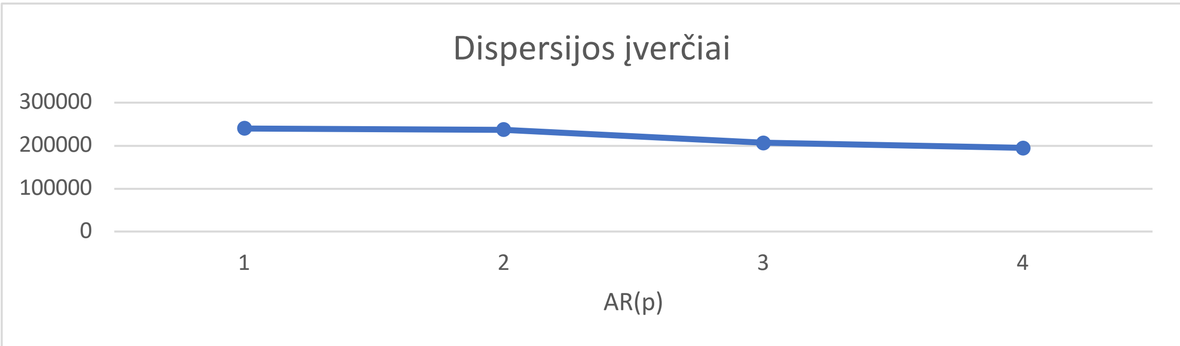
AR(2): $\mathrm{X_t} = 0{,}9463X_{t-1} + (-0{,}1107)X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $\mathrm{X_t} = 0{,}9065X_{t-1} + 0{,}2301X_{t-2} + (-0{,}3601)X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 0{,}8222X_{t-1} + 0{,}2839X_{t-2} + (-0{,}1481)X_{t-3} + (-0{,}234)X_{t-4} + e_t$.

30 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	239740,76	236801,78	206086,92	194806,48



22 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 30 lentelės ir grafiko (22 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 3. Šiuo atveju absolventų skaičiui Klaipėdos mieste tinkamiausias modelis yra AR(3).

2.7.11 ABITURIENTŲ KLAIPĖDOS MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiui Klaipėdos mieste. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

31 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,8249			
AR(2)	1,0844	−0,3147		
AR(3)	1,0901	−0,334	0,0178	
AR(4)	1,0925	−0,3798	0,1675	−0,1373

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 149890{,}18$, $\hat{R}(1) = 123644{,}67$, $\hat{R}(2) = 86922{,}56$, $\hat{R}(3) = 56125{,}2$, $\hat{R}(4) = 28428{,}85$.

Pagal 31 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}8249X_{t-1} + e_t$.

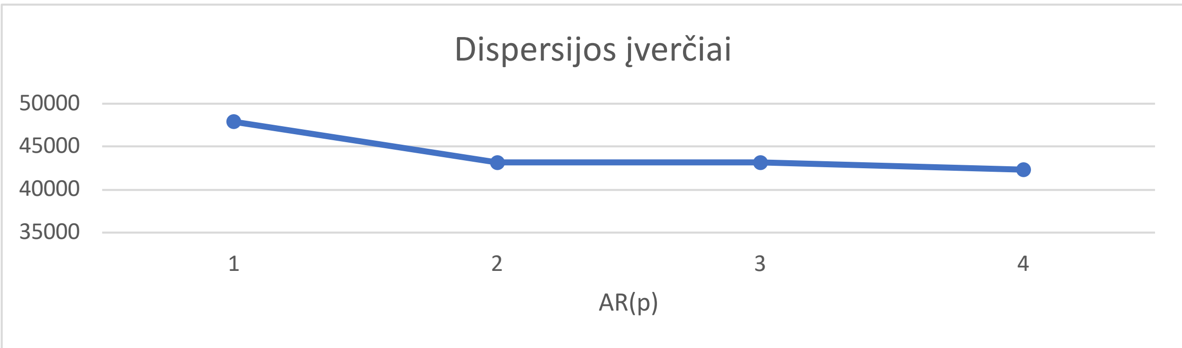
AR(2): $\mathrm{X_t} = 1{,}0844X_{t-1} + (-0{,}3147)X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $\mathrm{X_t} = 1{,}0901X_{t-1} + (-0{,}334)X_{t-2} + 0{,}0178X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 1{,}0925X_{t-1} + (-0{,}3798)X_{t-2} + 0{,}1675X_{t-3} + (-0{,}1373)X_{t-4} + e_t$.

32 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	47895,48	43152,45	43138,78	42325,77



23 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 32 lentelės ir grafiko (23 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 2. Šiuo atveju bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiui Klaipėdos mieste tinkamiausias modelis yra AR(2).

2.7.12 GYVENTOJŲ KLAIPĖDOS MIESTE LAIKO EILUTĖS

Nustatysime laiko eilučių modelius nuolatinių gyventojų skaičiui Klaipėdos mieste metų pradžioje. Skaičiavimai pateikti 2 priede.

33 lentelė. *AR modelių įverčiai*

	$\hat{a}_1$	$\hat{a}_2$	$\hat{a}_3$	$\hat{a}_4$
AR(1)	0,8081			
AR(2)	0,913	−0,1298		
AR(3)	0,8791	0,1084	−0,2609	
AR(4)	0,8689	0,1126	−0,2264	−0,0393

Autokovariacinės funkcijos įverčiai: $\hat{R}(0) = 66932939{,}32$, $\hat{R}(1) = 54086296{,}13$, $\hat{R}(2) = 40689402{,}88$, $\hat{R}(3) = 24167732{,}98$, $\hat{R}(4) = 10707271{,}81$.

Pagal 33 lentelėje pateiktus AR modelių įverčius sudaryti modeliai:

AR(1): $\mathrm{X_t} = 0{,}8081X_{t-1} + e_t$.

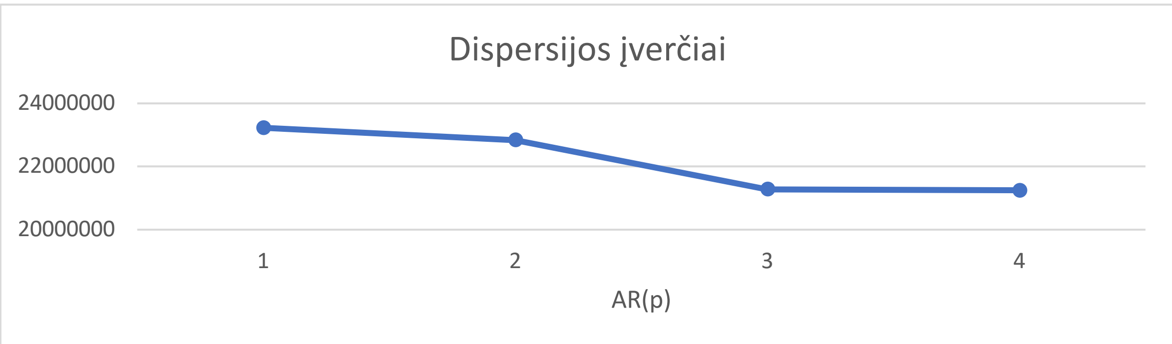
AR(2): $\mathrm{X_t} = 0{,}913X_{t-1} + (-0{,}1298)X_{t-2} + e_t$.

AR(3): $\mathrm{X_t} = 0{,}8791X_{t-1} + 0{,}1084X_{t-2} + (-0{,}2609)X_{t-3} + e_t$.

AR(4): $\mathrm{X_t} = 0{,}8689X_{t-1} + 0{,}1126X_{t-2} + (-0{,}2264)X_{t-3} + (-0{,}0393)X_{t-4} + e_t$.

34 lentelė. *Dispersijos įverčiai*

Modeliai	AR(1)	AR(2)	AR(3)	AR(4)
Dispersijos įverčiai	23227590,98	22835990,87	21281262,33	21248407,18



24 pav. *Dispersijos įverčiai*

Iš 34 lentelės ir grafiko (24 pav.) matyti, kad dispersijos įverčiai stabilizuojasi, kai p = 3. Šiuo atveju nuolatinių gyventojų skaičiui Klaipėdos mieste tinkamiausias modelis yra AR(3).

Išvada: apskaičiavus visus tirtus duomenis gavome, kad laiko eilutes geriausiai aprašo AR(3) modeliai. Jis buvo tinkamiausias 6 duomenų grupėms: priimtų studentų skaičiui Šiaulių universitete, priimtų studentų skaičiui Vilniuje, abiturientų skaičiui Šiauliuose, nuolatinių gyventojų skaičiui Šiaulių mieste, absolventų skaičiui Klaipėdoje bei nuolatinių gyventojų skaičiui Klaipėdos mieste. AR(2) modelis buvo tinkamiausias priimtų studentų skaičiui Šiaulių kolegijose, priimtų studentų skaičiui Klaipėdoje, abiturientų skaičiui Klaipėdoje. O tinkamiausias AR(1) modelis buvo šioms duomenų grupėms: priimtų studentų skaičiui Šiaulių mieste, priimtų studentų skaičiui Kauno mieste ir absolventų skaičiui Šiaulių mieste.

2.8 LYGINAMOJI DUOMENŲ BLOKO ANALIZĖ

Kaip jau minėta ankstesniuose skyriuose, žinome, kad Šiaulių miestui artimiausias Klaipėdos miestas lyginant priimtų studentų ir gyventojų skaičių. Todėl norint palyginti Šiaulių ir Klaipėdos miestų padėtį akademiniame lygmenyje šiems miestams buvo sudaryti priimtų į aukštąsias mokyklas studentų, aukštųjų mokyklų absolventų, bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų ir nuolatinių gyventojų skaičiaus duomenų blokai. Visų pirma, bus nagrinėjama vidinių Šiaulių miesto bloko grupių tarpusavio priklausomybė, tikrinama hipotezė H_0: $\rho = \rho_0$ ir apskaičiuojamos tiesinės regresijos lygtys. Sekančiame skyriuje analogiškai nagrinėjamas Klaipėdos blokas ir galiausiai šie blokai bus lyginami tarpusavyje.

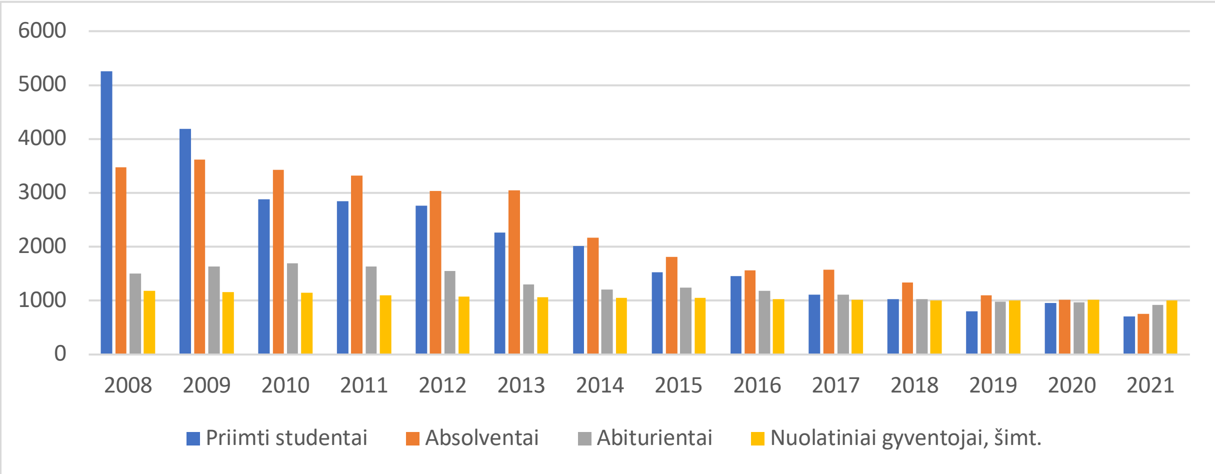
2.8.1 ŠIAULIŲ MIESTAS

Šiame skyriuje nagrinėsime duomenų bloką iš: priimtų studentų skaičiaus, absolventų skaičiaus, bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus bei nuolatinių gyventojų skaičiaus Šiaulių mieste.

35 lentelė. *Priimtų studentų, absolventų, abiturientų bei nuolatinių gyventojų skaičius Šiaulių mieste*

	Priimtų studentų skaičius Šiaulių mieste (X^1)	Absolventų skaičius Šiaulių mieste (Y^1)	Bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičius Šiaulių mieste (Z^1)	Nuolatinių gyventojų skaičius Šiaulių mieste metų pradžioje (U^1)
2008	5254	3469	1505	117829
2009	4191	3614	1636	116196
2010	2875	3433	1690	114506
2011	2842	3321	1629	109748
2012	2762	3040	1555	107689
2013	2266	3049	1296	106470
2014	2013	2163	1208	105610
2015	1525	1807	1247	104569
2016	1454	1567	1180	102981
2017	1106	1580	1105	101214
2018	1023	1341	1032	100575
2019	799	1094	976	100131
2020	955	1017	965	101511
2021	711	754	922	100653

Mediana	1769	1985	1227,5	105089,5
Vidurkis	2126,86	2232,07	1281,86	106405,86
Dispersija	1827946,9	1091624,38	74715,52	36760620,9
St. Nuokrypis	1352,02	1044,81	273,34	6063,05



25 pav. *Priimtų studentų, absolventų, abiturientų bei nuolatinių gyventojų skaičius Šiaulių mieste*

Iš grafiko matomas mažėjimas visose duomenų bloko grupėse. Todėl tikslinga tikrinti priklausomybę tarp visų šių grupių. Toliau patikrinsime statistinę hipotezę apie galimą ρ reikšmę. Sužinosime, ar tarp skaičiaus yra priklausomybė, tikrinsime hipotezę $H_0: \rho = \rho_0$. Apskaičiavus empirinius koreliacijos koeficientus juos surašome į lentelę. Skaičiavimai pateikiami 3 priede.

36 lentelė. *Priimtų studentų ($\boldsymbol{X^1}$), absolventų($\boldsymbol{Y^1}$), abiturientų($\boldsymbol{Z^1}$) bei nuolatinių gyventojų ($\boldsymbol{U^1}$) skaičiaus Šiaulių mieste tarpusavio priklausomybių tikrinimas ir tiesinės regresijos lygtys*

	Koreliacijos koeficientai	Tiesinės regresijos lygtys
(X^1, Y^1)	r=0,894, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$y = 763{,}09 + 0{,}69x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 237920{,}02)$
(X^1, Z^1)`	r=0,832, H_0: ρ=0,8 priimta α=0,05	$x = 1891{,}28 + 0{,}18z + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1860518{,}04)$
(X^1, U^1)	r=0,963, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$x = 2051{,}65 + 0{,}0007u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1968202{,}72)$

(Y^1, Z^1)	r=0,958, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$y = 2022{,}57 + 0{,}16z + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1087880{,}43)$
(Y^1, U^1)	r=0,916, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$y = 2176{,}83 + 0{,}0005u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1176079{,}45)$
(Z^1, U^1)	r=0,892, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$z = 1267{,}78 + 0{,}00019u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 80518{,}55)$

Iš 36 lentelės matome, kad tarp visų šių grupių egzistuoja labai stipri priklausomybė. Mažiausia priklausomybė (r=0,832) pastebėta tarp priimtų į aukštąsias mokyklas studentų skaičiaus ir bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus Šiaulių mieste. Tam galėjo daryti įtaką tai, kad priimtų studentų skaičius per šį laikotarpį mažėjo žymiai greičiau, nei abiturientų skaičius. O šiuo laikotarpiu didžiausia priklausomybė (r=0,963) yra tarp priimtų į aukštąsias mokyklas studentų skaičiaus ir nuolatinių gyventojų skaičiaus metų pradžioje Šiaulių mieste.

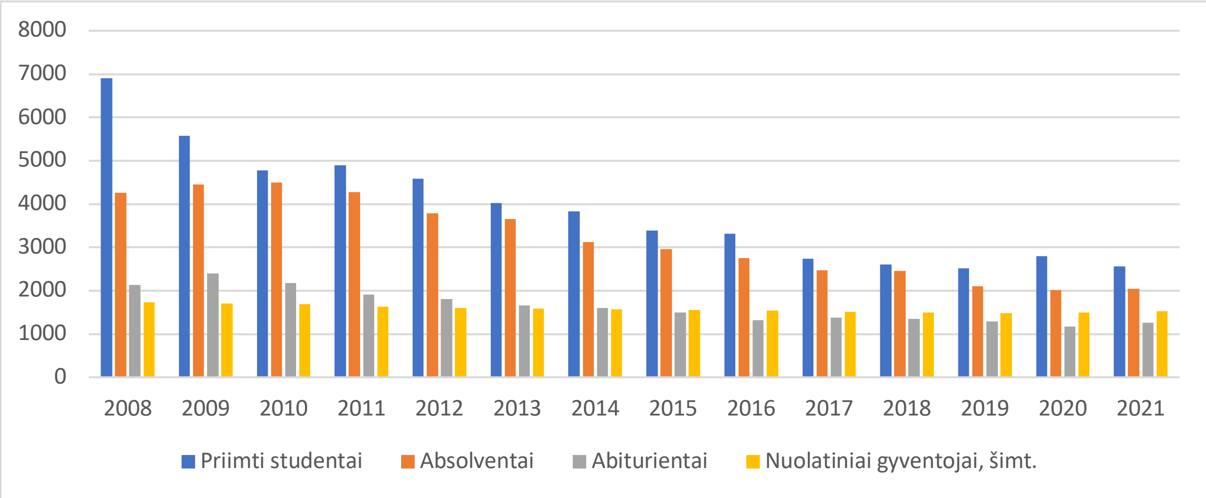
2.8.2 KLAIPĖDOS MIESTAS

Šiame skyriuje analogiškai apžvelgsime Klaipėdos miesto duomenų bloką.

37 lentelė. *Priimtų studentų, absolventų, abiturientų bei nuolatinių gyventojų skaičius Klaipėdos mieste*

	Priimtų studentų skaičius Klaipėdos mieste (X^2)	Absolventų skaičius Klaipėdos mieste (Y^2)	Bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičius Klaipėdos mieste (Z^2)	Nuolatinių gyventojų skaičius Klaipėdos mieste metų pradžioje (U^2)
2008	6903	4259	2132	172686
2009	5574	4448	2393	170699
2010	4777	4489	2168	168134
2011	4897	4277	1910	162898
2012	4590	3790	1804	160142
2013	4026	3648	1657	158541
2014	3824	3124	1593	157305
2015	3392	2964	1503	156141
2016	3309	2759	1323	154326
2017	2739	2476	1380	151309
2018	2602	2450	1354	148908
2019	2509	2103	1292	147892
2020	2802	2006	1168	149116
2021	2554	2038	1258	152008
Mediana	3608	3044	1548	156723
Vidurkis	3892,71	3202,21	1638,21	157864,64

Dispersija	1744054,07	874699,1	149890,18	66932939,32
St. Nuokrypis	1320,63	935,25	387,16	8181,26



26 pav. *Priimtų studentų, absolventų, abiturientų bei nuolatinių gyventojų skaičius Klaipėdos mieste*

Iš 37 lentelės ir grafiko (26 pav.) taip pat matomas mažėjimas visose Klaipėdos duomenų bloko grupėse. Todėl analogiškai tikrinsime priklausomybę tarp visų šių grupių. Apskaičiavus empirinius koreliacijos koeficientus juos surašome į lentelę. Skaičiavimai pateikiami 3 priede.

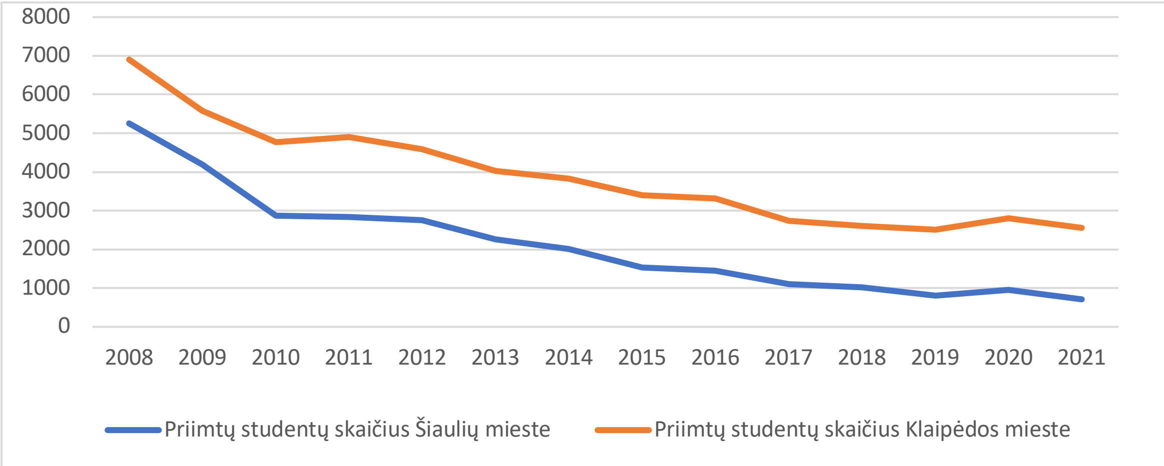
38 lentelė. *Priimtų studentų ($\boldsymbol{X^2}$), absolventų($\boldsymbol{Y^2}$), abiturientų($\boldsymbol{Z^2}$) bei nuolatinių gyventojų ($\boldsymbol{U^2}$) Klaipėdos mieste tarpusavio priklausomybių tikrinimas ir tiesinės regresijos lygtys*

	Koreliacijos koeficientai	Tiesinės regresijos lygtys
(X^2, Y^2)	r=0,905, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$y = 706{,}04 + 0{,}64x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 170690{,}72)$
(X^2, Z^2)\`	r=0,908, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$x = 3611{,}98 + 0{,}17z + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1721780{,}17)$
(X^2, U^2)	r=0,963, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$x = 3826{,}01 + 0{,}0004u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1879877{,}98)$
(Y^2, Z^2)	r=0,957, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$y = 2992{,}7 + 0{,}13z + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 854238{,}36)$
(Y^2, U^2)	r=0,942, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$y = 3156{,}02 + 0{,}0003u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 943028{,}21)$
(Z^2, U^2)	r=0,962, H_0: ρ=0,9 priimta α=0,05	$z = 1618{,}68 + 0{,}0001u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 161565{,}41)$

Iš 38 lentelės matome, kad tarp visų šių grupių egzistuoja labai stipri priklausomybė. Didžiausia priklausomybė (r=0,963) yra tarp priimtų į aukštąsias mokyklas studentų skaičiaus ir nuolatinių gyventojų skaičiaus metų pradžioje Klaipėdoje.

2.8.3 ŠIAULIŲ IR KLAIPĖDOS MIESTŲ PALYGINIMAS

Grafiniu būdu palyginsime Šiaulių ir Klaipėdos duomenų blokų duomenis.



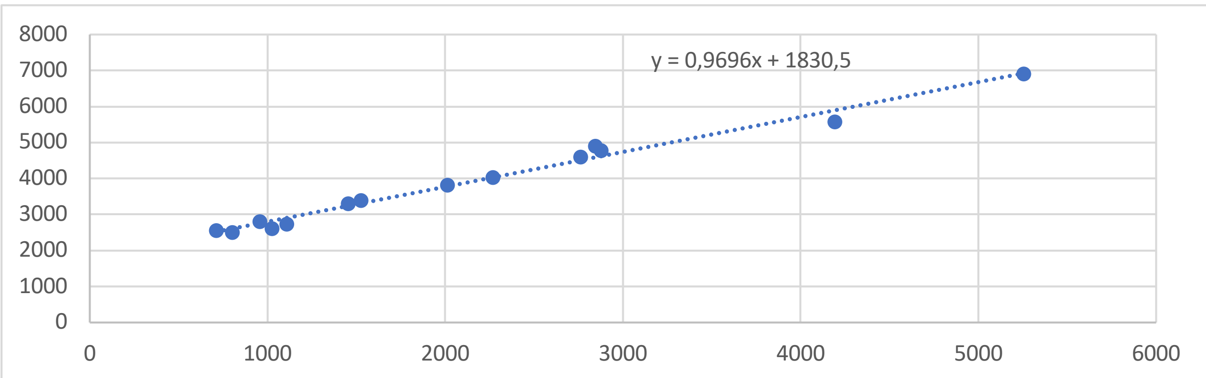
27 pav. *Priimtų studentų skaičius Šiaulių ir Klaipėdos miestuose*

Matome, kad abiejų miestų priimtų studentų kreivės mažėja gana tolygiai. Abiejose kreivėse matomas nedidelis augimas 2020 metais. Apskaičiavus šių duomenų grupių empirinį koreliacijos koeficientą gavome, kad tarp jų egzistuoja labai stipri priklausomybė (r=0,993). Kadangi empirinis koreliacijos koeficientas yra didelis, buvo tikrinama statistinė hipotezė $H_o: \rho = 0{,}99$, α=0,05. Skaičiavimai pateikiami 3 priede.

Kadangi $|Z| = 0{,}594 \leq 1{,}96 = u_{0{,}975}$, tai hipotezė H_o priimama.

Gavome tiesinės regresijos lygtį rodančią priimtų studentų skaičiaus Klaipėdoje (y) priklausomybę nuo priimtų studentų skaičiaus Šiauliuose (x):

$$y = 1830{,}54 + 0{,}97x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 27727{,}44).$$

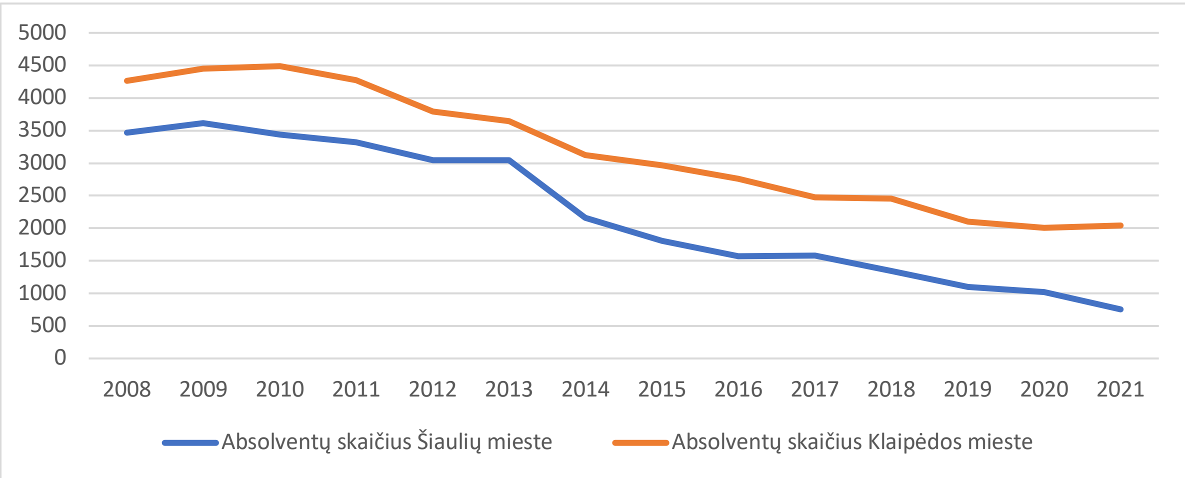


28 pav. *Priimtų studentų skaičiaus Klaipėdoje (y) tiesinė priklausomybė nuo priimtų studentų skaičiaus Šiauliuose (x)*

25 ir 26 paveiksluose taip pat matome, kad Klaipėdos duomenų bloko atitinkami duomenys yra tam tikru skaičiumi didesni, nei Šiaulių miesto duomenys. Todėl ieškosime to skaičiaus kiekvienoje bloko grupėje. Šiuo atveju Klaipėdos miesto priimtų į aukštąsias mokyklas studentų skaičiaus vidurkį dalinsime iš Šiaulių miesto priimtų į aukštąsias mokyklas studentų skaičiaus vidurkio.

Šiaulių miesto priimtų į aukštąsias mokyklas studentų skaičiaus vidurkis $\bar{X} = 2126{,}86$, Klaipėdos miesto priimtų į aukštąsias mokyklas studentų skaičiaus vidurkis $\bar{Y} = 3892{,}71$. Šių dviejų miestų empirinių vidurkių santykis:

$$a_1 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 1{,}83.$$



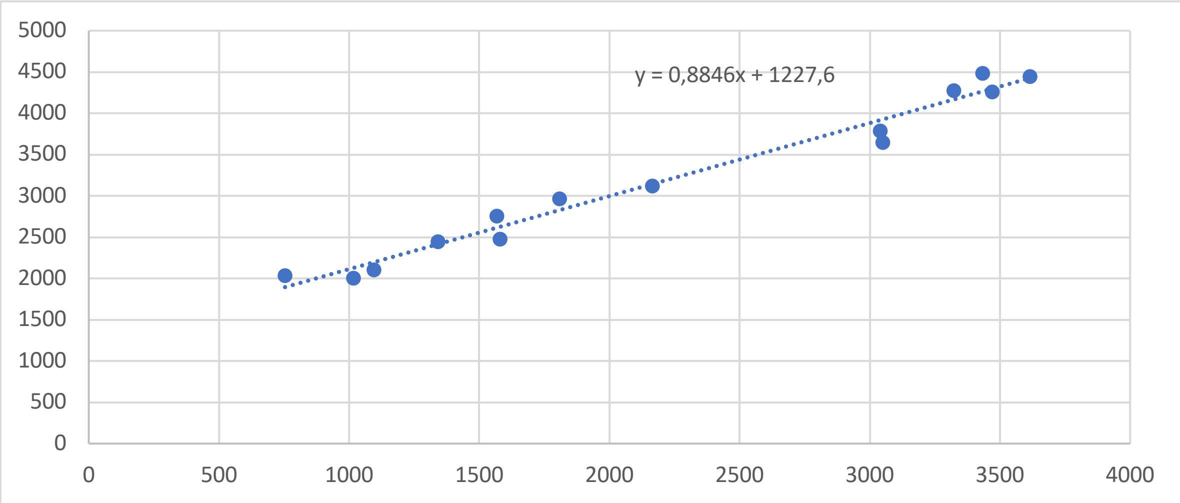
29 pav. *Aukštųjų mokyklų absolventų skaičius Šiaulių ir Klaipėdos miestuose*

Grafike (29 pav.) matome, kad absolventų skaičius Šiaulių mieste vis dar sparčiai mažėja, kai tuo tarpu absolventų skaičius Klaipėdos mieste paskutiniais 2019–2021 metais išlieka stabilus. Tarp absolventų skaičiaus Šiaulių ir Klaipėdos miestuose egzistuoja stipri priklausomybė (r=0,988) Patikriname statistinę hipotezę $H_o: \rho = 0{,}99$, α=0,05. Skaičiavimai pateikiami 3 priede.

Kadangi $|Z| = 0{,}305 \leq 1{,}96 = u_{0{,}975}$, tai hipotezė H_o priimama.

Gauname tiesinės regresijos lygtį išreiškiančią aukštųjų mokyklų absolventų skaičiaus Klaipėdoje (y) priklausomybę nuo aukštųjų mokyklų absolventų skaičiaus Šiauliuose (x):

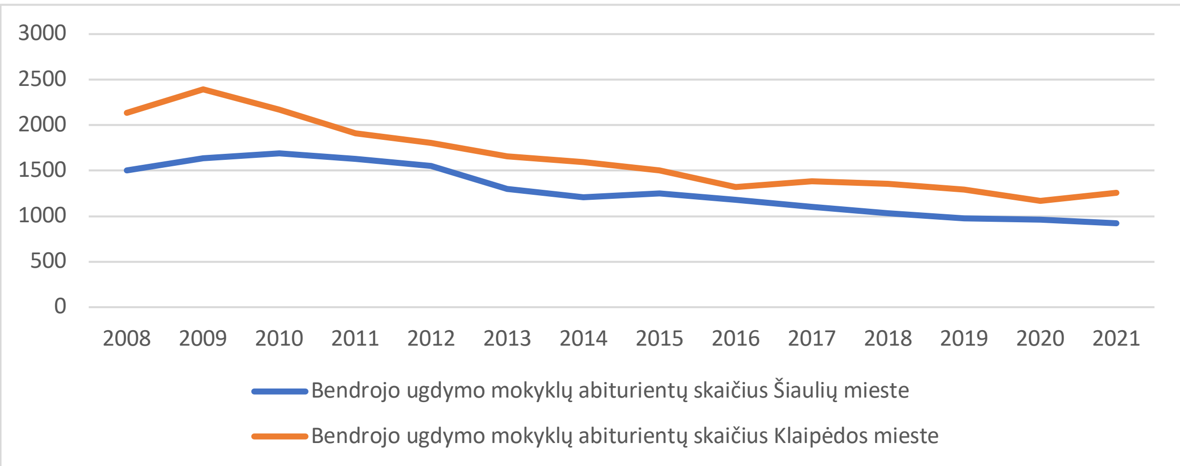
$$y = 1227{,}63 + 0{,}88x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 22107{,}02).$$



30 pav. *Aukštųjų mokyklų absolventų skaičiaus Klaipėdoje (y) tiesinė priklausomybė nuo aukštųjų mokyklų absolventų skaičiaus Šiauliuose (x)*

Analogiškai priimtų studentų skaičiui, Klaipėdos miesto aukštųjų mokyklų absolventų skaičiaus vidurkį dalinsime iš Šiaulių miesto aukštųjų mokyklų absolventų skaičiaus vidurkio. Šiaulių miesto aukštųjų mokyklų absolventų skaičiaus vidurkis $\bar{X} = 2232{,}07$, Klaipėdos miesto aukštųjų mokyklų absolventų skaičiaus vidurkis $\bar{Y} = 3202{,}21$. Šių dviejų miestų empirinių vidurkių santykis:

$$a_2 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 1{,}43.$$



31 pav*. Bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičius Šiaulių ir Klaipėdos miestuose*

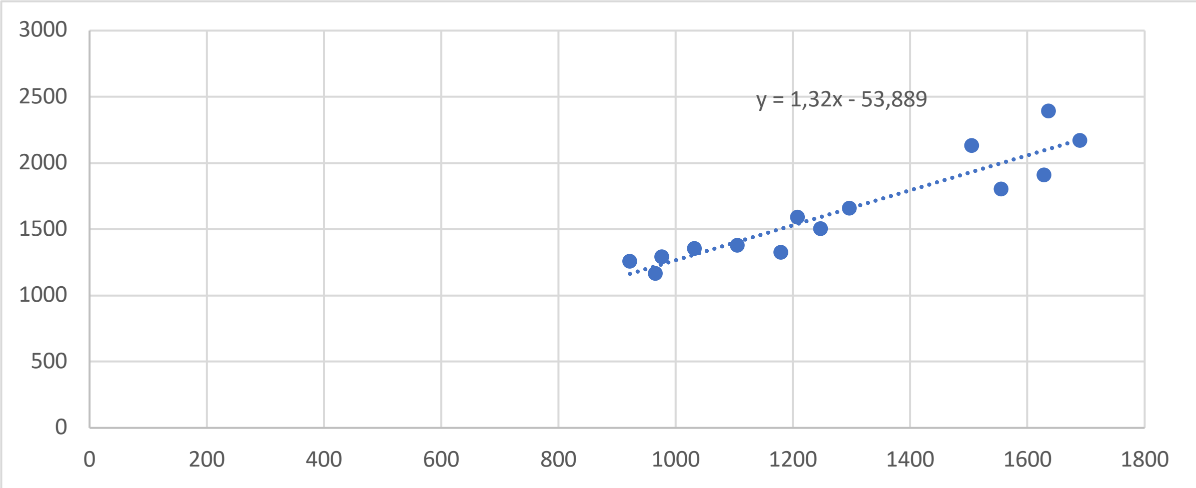
31 pav. nuo 2008 metų abiejuose miestuose matomas abiturientų skaičiaus augimas. Klaipėdoje šis augimas baigėsi ankščiau – 2009 metais. Nuo šių metų pastebimas žymus abiturientų skaičiaus mažėjimas, kai tuo tarpu Šiauliuose abiturientų didėjimas pastebimas iki 2010 m. Po kurių bendrojo ugdymo mokyklas baigusių mokinių skaičius mažėjo ne taip

drastiškai. Tarp jų egzistuoja labai stipri priklausomybė (r=0,932). Patikriname statistinę hipotezę $H_o: \rho = 0,9$, α=0,05. Skaičiavimai pateikiami 3 priede.

Kadangi $|Z| = 0,667 \leq 1,96 = u_{0,975}$, tai hipotezė H_o priimama. Galime teigti, kad statistiniai duomenys neprieštarauja hipotezės $H_0: \rho = 0,9$ teisingumui.

Randame tiesinės regresijos lygtį išreiškiančią bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus Klaipėdoje (*y*) priklausomybę nuo bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus Šiauliuose (*x*):

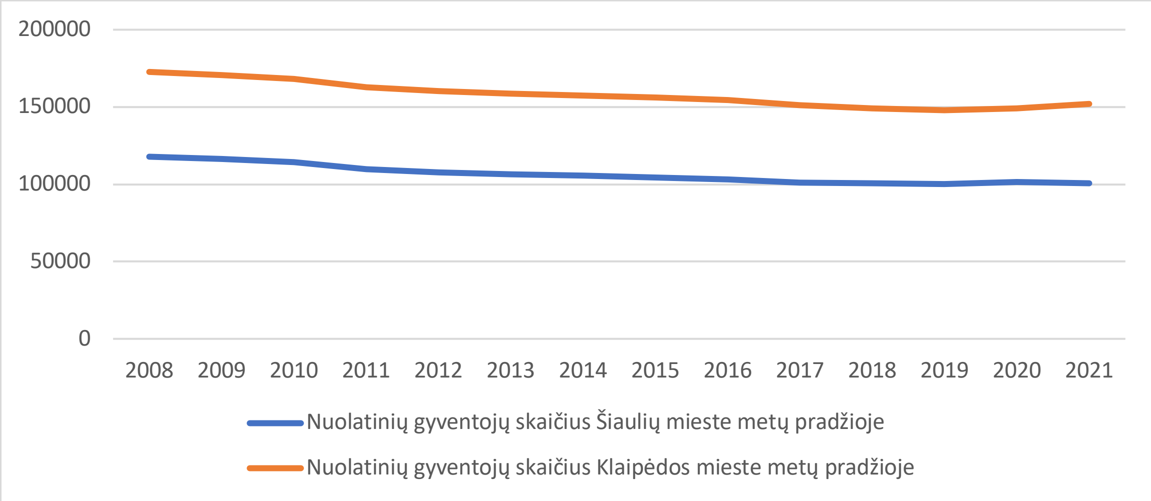
$$y = -53,89 + 1,32x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 21339,4).$$



32 pav. *Bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus Klaipėdoje (y) tiesinė priklausomybė nuo bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus Šiauliuose (x)*

Skaičiuosime Klaipėdos miesto bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus ir Šiaulių miesto bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus empirinių vidurkių santykį. Šiaulių miesto bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus vidurkis $\bar{X} =$ 1281,86, Klaipėdos miesto bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus vidurkis $\bar{Y} = 1638,21$.

$$a_3 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 1,27.$$



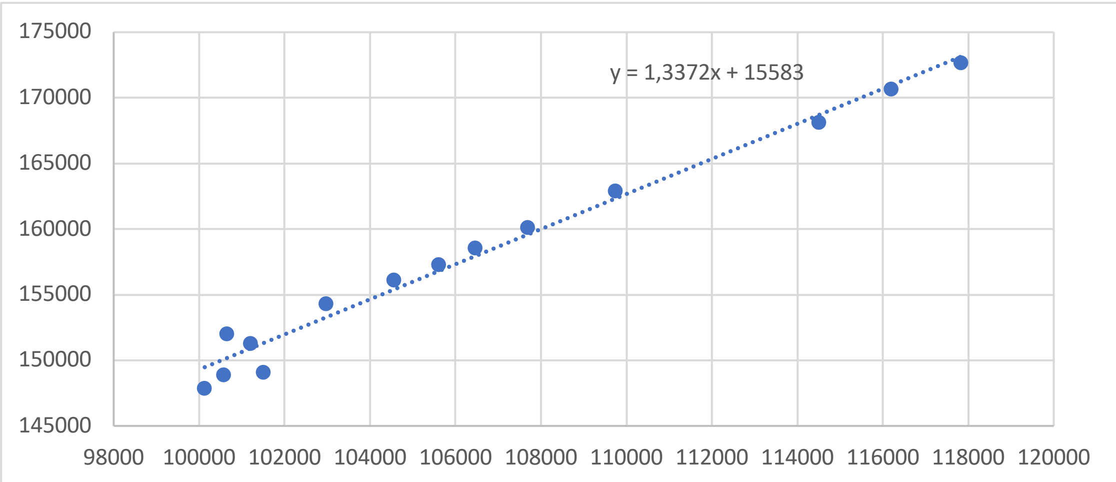
33 pav. *Nuolatinių gyventojų skaičius metų pradžioje Šiaulių ir Klaipėdos miestuose*

Grafike (33 pav.) matome stabilų nuolatinių gyventojų skaičiaus mažėjimą Šiauliuose, o Klaipėdoje matyti nedidelis gyventojų skaičiaus pakilimas 2020–2021 metais. Palyginus šiuos duomenis taip pat gauname labai stiprią priklausomybę (r=0,991). Patikriname statistinę hipotezę $H_o: \rho = 0{,}99$, imame reikšmingumo lygmenį α=0,05. Skaičiavimai pateikiami 3 priede.

Kadangi $|Z| = 0{,}176 \leq 1{,}96 = u_{0{,}975}$, tai hipotezė H_o priimama.

Randame tiesinės regresijos lygtį išreiškiančią nuolatinių gyventojų skaičiaus Klaipėdoje (*y*) priklausomybę nuo nuolatinių gyventojų skaičiaus Šiauliuose (*x*):

$$y = 15583{,}15 + 1{,}34x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1305650{,}81).$$



34 pav. *Nuolatinių gyventojų skaičiaus Klaipėdoje (y) tiesinė priklausomybė nuo nuolatinių gyventojų skaičiaus Šiauliuose (x)*

Apskaičiavus Klaipėdos miesto nuolatinių gyventojų ir Šiaulių miesto nuolatinių gyventojų skaičiaus empirinių vidurkių santykį. Šiaulių miesto nuolatinių gyventojų skaičiaus vidurkis $\bar{X} = 106405{,}86$, Klaipėdos miesto nuolatinių gyventojų skaičiaus vidurkis $\bar{Y} = 157864{,}64$.

$$a_4 = \frac{\bar{Y}}{\bar{X}} = 1{,}48.$$

Palyginus Šiaulių ir Klaipėdos visų 4 duomenų blokų grupių empirinių vidurkių santykius gavome: $a_1 = 1{,}83$, $a_2 = 1{,}43$, $a_3 = 1{,}27$, $a_4 = 1{,}48$. Radę šių skaičių aritmetinį vidurkį galėsime jį laikyti Klaipėdos ir Šiaulių duomenų skirtumo konstanta. Gavome $\bar{a} = \frac{1}{4}\sum_{i=1}^{n} a_i = 1{,}5$. Šis dydis charakterizuoja Klaipėdos miesto aukštesnę poziciją būsimų aukštojo mokslo studentų požiuriu lyginant su Šiaulių miestu.

Išvada: išnagrinėjus Šiaulių ir Klaipėdos duomenų blokus matome, kad kiekvienas bloko elementas koreliuoja tarpusavyje, tai reiškia, kad nagrinėjamų duomenų parinkimas buvo tinkamas. Taip pat matome, kad Šiaulių mieste kompleksiškai mažėja abiturientų, absolventų, priimtų studentų ir nuolatinių gyventojų skaičius. Palyginus šių dviejų miestų duomenų blokų atskirų grupių empirinių vidurkių santykius: $a_1 = 1{,}83$, $a_2 = 1{,}43$, $a_3 = 1{,}27$, $a_4 = 1{,}48$, radome šių skaičių aritmetinį vidurkį $\bar{a} = 1{,}5$. Kurį galime laikyti duomenų skirtumo konstanta. Taigi gavome, kad Klaipėdos miestas laikosi 1,5 karto tvirčiau lyginant su Šiaulių miestu. Vadinasi ten padėtis geresnė, bet dėl duomenų mažėjimo ilgesnio laiko perspektyvoje padėtis gali tapti katastrofiška.

IŠVADOS

1. Atlikus gautų valstybės finansuojamų vietų ir priimtų studentų duomenų analizę Lietuvos lygiu, nustatytas labai panašus duomenų mažėjimas. Didžiausias sumažėjimas – 2009 m., vienintelis pakilimas – 2020 metais.
2. Atlikus statistinę lyginamąją analizę ŠU ir Šiaulių kolegijų gavome, kad abiejose grupėse 2008–2014 ir 2015–2021 vidurkiai statistiškai reikšmingai skiriasi, o šių laikotarpių empirinių vidurkių santykis rodo labai stiprų priimtų studentų skaičiaus mažėjimą ŠU (0,27) ir šiek tiek mažesnį mažėjimą Šiaulių kolegijose (0,47).
3. Atlikus priimtų studentų į didžiųjų miestų ir bendrai Lietuvos aukštąsias mokyklas lyginamąją statistinę analizę gavome, kad priimtų studentų skaičiaus mažėjimas ryškiausiai pastebimas Šiauliuose.
4. Padalinus ŠU, KU, KTU ir VU priimtų studentų skaičiaus duomenis į du laikotarpius (2008–2014 ir 2015–2021) ir apskaičiavus laikotarpių empirinių vidurkių santykį gauname stiprų studentų skaičiaus sumažėjimą ŠU (0,27), KU (0,55), vidutinį sumažėjimą KTU (0,7) ir studentų skaičiaus padidėjimą VU (1,02).
5. Rasti laiko eilučių AR(1), AR(2), AR(3), AR(4) modeliai ir apskaičiavus dispersijos įverčius buvo nustatyta, kad daugumoje atvejų laiko eilutes geriausiai aprašo AR(3) modeliai.
6. Atlikus Šiaulių ir Klaipėdos miestų duomenų blokų statistinę analizę gavome, kad Klaipėdos miestas akademiniame lygmenyje laikosi 1,5 karto tvirčiau lyginant su Šiaulių miestu.

LITERATŪRA

1. V. Kanišauskas, *Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pagrindai.* Šiauliai: Šiaulių universiteto leidykla, 2000.
2. N. Kligienė, *Įvadas į atsitiktinių sekų statistinę analizę*. Vilnius, 1998.
3. Lietuvos Respublikos Seimas, Lietuvos Respublikos mokslo ir studijų įstatymas [žiūrėta 2023-04-12]. Prieiga per internetą < https://e-seimas.lrs.lt/portal/legalAct/lt/TAD/TAIS.343430/asr>
4. Lietuvos Respublikos Seimas, Įsakymas dėl asmenų, pretenduojančių į valstybės finansuojamas pirmosios pakopos ir vientisųjų studijų vietas, mokymosi rezultatų minimalių rodiklių nustatymo [žiūrėta 2023-03-20]. Prieiga per internetą
< https://www.e-tar.lt/portal/lt/legalAct/TAR.24FD764A978C>
5. Lietuvos švietimo koncepcija, Lietuvos švietimo, mokslo ir sporto ministerija [žiūrėta 2023-03-20]. Prieiga per internetą
< https://smsm.lrv.lt/uploads/smsm/documents/files/kiti/koncepcija2.htm - 5>
6. Bakštys A., *Statistikos namų darbai su skaičiuokle MS EXCEL,* mokomoji knyga. Vilnius: BMK leidykla, 2015.
7. Statistiko departamento duomenys, [žiūrėta 2023-05-20] Prieiga per internetą <https://osp.stat.gov.lt/statistiniu-rodikliu-analize?indicator=S3R407#/>
8. V. Čekanavičius, G. Murauskas, *Statistika ir jos taikymai: 1 dalis*, TEV, Vilnius, 2006.
9. Э. А. Вуколов и др., Сборник задач по математике для втузов, Ч. 3., Теория вероятностей и математическая статисиска, Учебное пособие для втузов, Под ред. А. В. Ефимова, Наука, Москва, 1990.

Studentų priėmimo į Lietuvos didžiųjų miestų aukštąsias mokyklas lyginamoji statistinė analizė

SANTRAUKA

Magistrinio darbo tyrimo objektas – Duomenys apie priimtų studentų, gautų valstybės finansuojamų vietų, abiturientų, absolventų bei nuolatinių gyventojų skaičių didžiausiuose Lietuvos miestuose 2008–2021 m. laikotarpiu. Darbo tikslas – atlikti studentų priėmimo į Lietuvos didžiųjų miestų aukštąsias mokyklas lyginamąją statistinę analizę. Tam buvo iškelti 6 uždaviniai: atlikti gautų valstybės finansuojamų vietų kiekio ir priimtų studentų skaičiaus analizę Lietuvos lygiu; atlikti į ŠU ir Šiaulių kolegijas priimtų studentų skaičiaus statistinę lyginamąją analizę, atlikti priimtų studentų skaičiaus didžiųjų miestų ir bendrai visos Lietuvos statistinę lyginamąją analizę; padalinus ŠU, KU, KTU ir VU priimtų studentų skaičiaus duomenis į du laikotarpius, palyginti tų laikotarpių vidurkius bei apskaičiuoti empirinių vidurkių santykį; nustatyti, kurias duomenų eilutes galima aprašyti laiko eilučių modeliais. Apskaičiuoti laiko eilučių AR(1), AR(2), AR(3), AR(4) modelius ir nustatyti jų tinkamumą; atlikti Šiaulių ir Klaipėdos miestų duomenų blokų statistinę analizę ir palyginti juos tarpusavyje.

Magistro darbe gauti rezultatai – atlikus gautų valstybės finansuojamų vietų ir priimtų studentų duomenų analizę Lietuvos lygiu, nustatytas labai panašus duomenų mažėjimas. Didžiausias sumažėjimas – 2009 m., vienintelis pakilimas – 2020 metais. Atlikus statistinę lyginamąją analizę ŠU ir Šiaulių kolegijų gavome, kad abiejose grupėse 2008–2014 ir 2015–2021 vidurkiai statistiškai reikšmingai skiriasi, o šių laikotarpių empirinių vidurkių santykis rodo labai stiprų priimtų studentų skaičiaus mažėjimą ŠU (0,27) ir šiek tiek mažesnį mažėjimą Šiaulių kolegijose (0,47). Atlikus priimtų studentų į didžiųjų miestų ir bendrai Lietuvos aukštąsias mokyklas lyginamąją statistinę analizę gavome, kad priimtų studentų skaičiaus mažėjimas ryškiausiai pastebimas Šiauliuose. Padalinus ŠU, KU, KTU ir VU priimtų studentų skaičiaus duomenis į du laikotarpius (2008–2014 ir 2015–2021) ir apskaičiavus laikotarpių empirinių vidurkių santykį gauname stiprų studentų skaičiaus sumažėjimą ŠU (0,27), KU (0,55), vidutinį sumažėjimą KTU (0,7) ir studentų skaičiaus padidėjimą VU (1,02). Rasti laiko eilučių AR(1), AR(2), AR(3), AR(4) modeliai ir apskaičiavus dispersijos įverčius buvo nustatyta, kad laiko eilutes geriausiai aprašo AR(3) modeliai. Atlikus Šiaulių ir Klaipėdos miestų duomenų blokų statistinę analizę gavome, kad Klaipėdos miestas akademiniame lygmenyje laikosi 1,5 karto tvirčiau lyginant su Šiaulių miestu.

Comparative statistical analysis of students' admission to the higher education institutions in major cities of Lithuania

SUMMARY

Object of the Master’s thesis – data regarding admitted students, government funded students, graduates, number of permanent residents in the major cities of Lithuania between 2008 and 2021. Aim of the Master’s thesis – to complete comparative method of statistical analysis of student admission to higher education institutions in Lithuania. In order to complete it, 6 objectives were raised: firstly, to complete a comparative analysis of total government funded students against the number of admitted students total in the scope of Lithuania. Secondly, to carry out statistical comparative analysis of students admitted to Šiauliai University and Šiauliai College, Thirdly, to complete comparative analysis of students admitted in major Lithuanian cities against total Lithuanian students admitted. Fourthly, to divide students admitted to Šiauliai University, Kaunas University, Kaunas University of Technology and Vilnius University into two time periods, compare the averages of these periods and to calculate the empiric ratio of these averages; to find out which lines of data could be described with lines of time pattern. One of the goals is to calculate lines of time AR(1), AR(2), AR(3), AR(4) patterns and ascertain their suitability. And lastly, to complete Šiauliai and Klaipėda cities data blocks statistical analysis and compare them with each other.

Results were gained in this Master’s thesis by completing the number of government funded and total students data analysis in the scope of Lithuania, and it was concluded that these numbers are decreasing similarly. The most significant diminution in 2009 and single increase in 2020. By completing statistical comparative analysis of Šiauliai University and Šiauliai College it was revealed, that in time periods of 2008–2014 and 2015–2021 average numbers have a statistically significant difference and empirical ratio of these averages shows that the number of the most gifted students is decreasing in Šiauliai University (0,27), and this decrease is milder in Šiauliai Colleges (0,47). By completing statistical comparative analysis of admitted students in major cities of Lithuania and total number of students accepted to Lithuanian higher education it was concluded that the most significant decrease of accepted students is most clearly visible in the Šiauliai City. By dividing number of students admitted to Šiauliai University, Kaunas University, Kaunas University of Technology and Vilnius University into two time periods (2008–2014 and 2015–2021) empirical average ratio of these periods was calculated which reveals a strong decrease of students in Šiauliai University (0,27), Kaunas University (0,55), average decrease in Kaunas University of Technology (0,7) while the number of students increased in Vilnius University (1,02). Lines of time patterns AR(1), AR(2), AR(3),

AR(4) were discovered and dispersion estimates were calculated. As a result, it was concluded that, lines of time were described the most suitably in the AR(3) pattern. And finally, by completing Šiauliai and Klaipėda cities data blocks statistical analysis it was revealed, that Klaipėda city is 1,5 times more powerful in the academic level than Šiauliai city.

PRIEDAI

1 priedas

	Priimtų studentų skaičius Šiaulių universitete	Priimtų studentų skaičius Šiaulių valstybinėje kolegijoje	Priimtų studentų skaičius Šiaurės Lietuvos kolegijoje	Nuolatinių gyventojų skaičius Šiaulių mieste metų pradžioje	Bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičius Šiaulių mieste	Aukštųjų mokyklų absolventų skaičius Šiaulių mieste
2008	3845	962	447	117829	3492	3469
2009	2847	925	419	116196	3713	3614
2010	1751	781	343	114506	3735	3433
2011	1611	945	286	109748	3763	3321
2012	1623	908	231	107689	3435	3040
2013	1246	816	204	106470	2971	3049
2014	1044	791	178	105610	2786	2163
2015	735	660	130	104569	2768	1807
2016	683	578	193	102981	2501	1567
2017	589	517	priėmimas nutrauktas	101214	2357	1580
2018	570	453		100575	2243	1341
2019	367	432		100131	2043	1094
2020	459	496		101511	1978	1017
2021	VUŠA (336)	375		100653	1872	754

	Priimtų studentų skaičius universitetuose	Priimtų studentų skaičius kolegijose	Gautų valstybės finansuojamų vietų skaičius universitetuose	Gautų valstybės finansuojamų vietų skaičius kolegijose
2008	49545	22959	22562	9395
2009	40659	16993	17214	9287
2010	33391	15958	15469	8438
2011	33432	16374	15466	8672
2012	32524	15423	14433	7921
2013	30371	14235	13367	7455
2014	29713	13585	13222	6637
2015	27059	13263	12943	6814
2016	24669	12368	12612	6558
2017	22701	11992	12643	6307
2018	21519	11671	12165	4891
2019	21430	10661	12039	4568
2020	22987	10763	14052	4231
2021	21232	10135	12965	4105

	Priimtų į aukštąsias mokyklas studentų skaičius	Gautų studentų krepšelių skaičius	Nuolatinių gyventoju skaičius metų pradžioje
2008	72504	31957	3212605
2009	57652	26501	3183856
2010	49349	23907	3141976
2011	49806	24138	3052588
2012	47947	22354	3003641
2013	44606	20822	2971905
2014	43298	19859	2943472
2015	40322	19757	2943472
2016	37037	19170	2888558
2017	34693	18950	2847904
2018	33190	17056	2808901
2019	32091	16607	2794184
2020	33750	18283	2794090
2021	31367	17070	2810761

	Priimtų studentų skaičius Klaipėdos mieste	Absolventų skaičius Klaipėdos mieste	Bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičius Klaipėdos mieste	Nuolatinių gyventojų skaičius Klaipėdos mieste metų pradžioje
2008	6903	4259	2132	172686
2009	5574	4448	2393	170699
2010	4777	4489	2168	168134
2011	4897	4277	1910	162898
2012	4590	3790	1804	160142
2013	4026	3648	1657	158541
2014	3824	3124	1593	157305
2015	3392	2964	1503	156141
2016	3309	2759	1323	154326
2017	2739	2476	1380	151309
2018	2602	2450	1354	148908
2019	2509	2103	1292	147892
2020	2802	2006	1168	149116
2021	2554	2038	1258	152008

	Nuolatinių gyventojų skaičius Kauno mieste metų pradžioje	Nuolatinių gyventojų skaičius Vilniaus mieste metų pradžioje	Priimtų studentų skaičius Kauno mieste	Priimtų studentų skaičius Vilniaus mieste
2008	339535	541596	17714	34779
2009	335393	542959	14773	27743
2010	329642	543191	12859	24401
2011	317319	536127	13435	24079
2012	310773	533279	12856	23956
2013	306888	537152	12048	22692
2014	304012	539707	12199	21576
2015	301357	542626	11856	20230
2016	297846	543493	11002	18547
2017	292691	545280	10929	17547
2018	288363	547484	10729	16677
2019	286754	552131	10359	16651
2020	289364	561836	10932	17694
2021	298753	556490	10293	16287

priimti studentai	KU	VU	ŠU	KTU
2008	2263	6902	3845	5863
2009	1902	6339	2847	4040
2010	1753	5699	1751	3155
2011	1713	5448	1611	3787
2012	1503	5585	1623	3329
2013	1484	5434	1246	3650
2014	1276	5203	1044	3462

priimti studentai	KU	VU	ŠU	KTU
2015	1081	5740	735	3283
2016	1213	5184	683	3161
2017	929	5386	589	2980
2018	720	5727	570	2617
2019	850	5970	367	2525
2020	850	7015	459	2415
2021	912	6514	(VU ŠA) 336	2239

2 priedas

1. Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Šiaulių kolegijose. Stebiniai:

1409, 1344, 1124, 1231, 1139, 1020, 969, 790, 771, 517, 453, 432, 496, 375. n=14. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 862{,}14.\ S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 131175{,}05 = \hat{R}(0).$

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 102488{,}41$

Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $102488{,}41 = \widehat{a_1} \cdot 131175{,}05$.

Gauname $\widehat{a_1} = 0{,}7813$. Užrašome AR(1) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}7813X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = 131175{,}05 - 0{,}7813 \cdot 102488{,}41 = 51100{,}86$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 85842{,}65$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):
$$\begin{cases} 102488{,}41 = \widehat{a_1} \cdot 131175{,}05 + \widehat{a_2} \cdot 102488{,}41, \\ 85842{,}65 = \widehat{a_1} \cdot 102488{,}41 + \widehat{a_2} \cdot 131175{,}05. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}6931, \widehat{\mathrm{a}_2} = 0{,}1129$. Užrašome AR(2) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}6931X_{t-1} + 0{,}1129X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = 131175{,}05 - 0{,}6931 \cdot 102488{,}41 - 0{,}1129 \cdot 85842{,}65 = 131175{,}05 - 71034{,}72 - 9691{,}64 = 50448{,}69$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 67184{,}62$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):

$$\begin{cases} 102488{,}41 = \widehat{a_1} \cdot 131175{,}05 + \widehat{a_2} \cdot 1102488{,}41 + \widehat{a_3} \cdot 85842{,}65, \\ 85842{,}65 = \widehat{a_1} \cdot 102488{,}41 + \widehat{a_2} \cdot 131175{,}05 + \widehat{a_3} \cdot 102488{,}41, \\ 67184{,}62 = \widehat{a_1} \cdot 85842{,}65 + \widehat{a_2} \cdot 102488{,}41 + \widehat{a_3} \cdot 131175{,}05. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}7018$, $\widehat{\mathrm{a}_2} = 0{,}1662, \widehat{\mathrm{a}_3} = -0{,}077$. Užrašome AR(3) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}7018X_{t-1} + 0{,}1662X_{t-2} + (-0{,}077)X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = 131175{,}05 - 0{,}7018 \cdot 102488{,}41 - 0{,}1662 \cdot 85842{,}65 + 0{,}077 \cdot 67184{,}62 = 131175{,}05 - 71926{,}37 - 14267{,}05 + 5173{,}22 = 50154{,}85$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 33793{,}71$.

Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 102488{,}41 = \widehat{a_1} \cdot 131175{,}05 + \widehat{a_2} \cdot 102488{,}41 + \widehat{a_3} \cdot 85842{,}65 + \widehat{a_4} \cdot 67184{,}62, \\ 85842{,}65 = \widehat{a_1} \cdot 102488{,}41 + \widehat{a_2} \cdot 131175{,}05 + \widehat{a_3} \cdot 102488{,}41 + \widehat{a_4} \cdot 85842{,}65, \\ 67184{,}62 = \widehat{a_1} \cdot 85842{,}65 + \widehat{a_2} \cdot 102488{,}41 + \widehat{a_3} \cdot 131175{,}05 + \widehat{a_4} \cdot 102488{,}41, \\ 33793{,}71 = \widehat{a_1} \cdot 67184{,}62 + \widehat{a_2} \cdot 85842{,}65 + \widehat{a_3} \cdot 102488{,}41 + \widehat{a_4} \cdot 131175{,}05. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}6715$, $\widehat{a_2} = 0{,}2316, \widehat{a_3} = 0{,}1993, \widehat{a_4} = -0.3936$. Užrašome AR(4) modelį $X_t = 0{,}6715X_{t-1} + 0{,}2316X_{t-2} + 0{,}1993X_{t-3} + (-0.3936)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = 131175{,}05 - 0{,}6715 \cdot 102488{,}41 - 0{,}2316 \cdot 85842{,}65 - 0{,}1993 \cdot 67184{,}62 + 0.3936 \cdot 33793{,}71 = 131175{,}05 - 68820{,}97 - 19881{,}16 - 13389{,}89 + 13301{,}20 = 42384{,}23$.

2. Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Šiaulių mieste. Stebiniai:

5254, 4191, 2875, 2842, 2762, 2266, 2013, 1525, 1454, 1106, 1023, 799, 955, 711 . n=14. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 2126{,}86$. $S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 1827946{,}9 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 1233014{,}64$.

Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(1): $1233014{,}64 = \widehat{a_1} \cdot 1827946{,}9$.

Gauname $\widehat{a_1} = 0{,}6745$. AR(1) modelis $X_t = 0{,}6745X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 996278{,}53$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 849771{,}74$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):
$$\begin{cases} 1233014{,}64 = \widehat{a_1} \cdot 1827946{,}9 + \widehat{a_2} \cdot 1233014{,}64, \\ 849771{,}74 = \widehat{a_1} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_2} \cdot 1827946{,}9. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}6623, \widehat{a_2} = 0{,}0181$. Užrašome AR(2) modelį $X_t = 0{,}6623X_{t-1} + 0{,}0181X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 995940{,}44$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 684311{,}15$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):
$$\begin{cases} 1233014{,}64 = \widehat{a_1} \cdot 1827946{,}9 + \widehat{a_2} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_3} \cdot 849771{,}74, \\ 849771{,}74 = \widehat{a_1} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_2} \cdot 1827946{,}9 + \widehat{a_3} \cdot 1233014{,}64, \\ 684311{,}15 = \widehat{a_1} \cdot 849771{,}74 + \widehat{a_2} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_3} \cdot 1827946{,}9. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}6605$, $\widehat{\mathrm{a}_2} = -0{,}0478$, $\widehat{\mathrm{a}_3} = 0{,}0996$. AR(3) modelis $\mathrm{X_t} = 0{,}6605X_{t-1} - 0{,}0478X_{t-2} + 0{,}0996X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 986002{,}43$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 434713{,}52$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 1233014{,}64 = \widehat{a_1} \cdot 1827946{,}9 + \widehat{a_2} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_3} \cdot 849771{,}74 + \widehat{a_4} \cdot 684311{,}15, \\ 849771{,}74 = \widehat{a_1} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_2} \cdot 1827946{,}9 + \widehat{a_3} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_4} \cdot 849771{,}74, \\ 684311{,}15 = \widehat{a_1} \cdot 849771{,}74 + \widehat{a_2} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_3} \cdot 1827946{,}9 + \widehat{a_4} \cdot 1233014{,}64, \\ 434713{,}52 = \widehat{a_1} \cdot 684311{,}15 + \widehat{a_2} \cdot 849771{,}74 + \widehat{a_3} \cdot 1233014{,}64 + \widehat{a_4} \cdot 1827946{,}9. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}6705$, $\widehat{\mathrm{a}_2} = -0{,}0526$, $\widehat{\mathrm{a}_3} = 0{,}1661$, $\widehat{\mathrm{a}_4} = -0{,}1008$. AR(4) modelis $\mathrm{X_t} = 0{,}6705X_{t-1} + (-0{,}0526)X_{t-2} + 0{,}1661X_{t-3} + (-0{,}1008)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 976015{,}75$.

3. Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Klaipėdos mieste. Stebiniai:

6903, 5574, 4777, 4897, 4590, 4026, 3824, 3392, 3309, 2739, 2602, 2509, 2802, 2554. n=14.

$\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 3892{,}71$. $S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 1744054{,}07 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 1189586{,}41$. Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $1189586{,}41 = \widehat{a_1} \cdot 1744054{,}07$.

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}6821$. AR(1) modelis $\mathrm{X_t} = 0{,}6821X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 932659{,}59$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 934504{,}81$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):
$$\begin{cases} 1189586{,}41 = \widehat{a_1} \cdot 1744054{,}07 + \widehat{a_2} \cdot 1189586{,}41, \\ 934504{,}81 = \widehat{a_1} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_2} \cdot 1744054{,}07. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}592, \widehat{a_2} = 0{,}132$. Užrašome AR(2) modelį $X_t = 0{,}592X_{t-1} + 0{,}132X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 916464{,}28$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 757905{,}04$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):

$$\begin{cases} 1189586{,}41 = \widehat{a_1} \cdot 1744054{,}07 + \widehat{a_2} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_3} \cdot 934504{,}81, \\ 934504{,}81 = \widehat{a_1} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_2} \cdot 1744054{,}07 + \widehat{a_3} \cdot 1189586{,}41, \\ 757905{,}04 = \widehat{a_1} \cdot 934504{,}81 + \widehat{a_2} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_3} \cdot 1744054{,}07. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}5852$, $\widehat{a_2} = 0{,}1012$, $\widehat{a_3} = 0{,}052$. Užrašome AR(3) modelį $X_t = 0{,}5852X_{t-1} + 0{,}1012X_{t-2} + 0{,}052X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 913935{,}67$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 416140{,}34$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 1189586{,}41 = \widehat{a_1} \cdot 1744054{,}07 + \widehat{a_2} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_3} \cdot 934504{,}81 + \widehat{a_4} \cdot 757905{,}04, \\ 934504{,}81 = \widehat{a_1} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_2} \cdot 1744054{,}07 + \widehat{a_3} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_4} \cdot 934504{,}81, \\ 757905{,}04 = \widehat{a_1} \cdot 934504{,}81 + \widehat{a_2} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_3} \cdot 1744054{,}07 + \widehat{a_4} \cdot 1189586{,}41, \\ 416140{,}34 = \widehat{a_1} \cdot 757905{,}04 + \widehat{a_2} \cdot 934504{,}81 + \widehat{a_3} \cdot 1189586{,}41 + \widehat{a_4} \cdot 1744054{,}07. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}5956$, $\widehat{a_2} = 0{,}1216, \widehat{a_3} = 0{,}1696, \widehat{a_4} = -0{,}2011$. Užrašome AR(4) modelį $X_t = 0{,}5956X_{t-1} + 0{,}1216X_{t-2} + 0{,}1696X_{t-3} + (-0{,}2011)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 876976{,}12$.

4. Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Kauno mieste. Stebiniai:

17714, 14773, 12859, 13435, 12856, 12048, 12199, 11856, 11002, 10929, 10729, 10359, 10932, 10293. n=14. $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 12284{,}57$. $S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 4100301{,}19 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 2220822{,}17$.

Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $2220822{,}17 = \widehat{a_1} \cdot 4100301{,}19$.

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}5416$. Užrašome AR(1) modelį $X_t = 0{,}5416X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 2897450{,}25$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 1443765{,}05$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):
$$\begin{cases} 2220822{,}17 = \widehat{a_1} \cdot 4100301{,}19 + \widehat{a_2} \cdot 2220822{,}17, \\ 1443765{,}05 = \widehat{a_1} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_2} \cdot 4100301{,}19. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}4966, \widehat{a_2} = 0{,}0831$. Užrašome AR(2) modelį $X_t = 0{,}4966X_{t-1} + 0{,}0831X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 2877418{,}98$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 1425109{,}72$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):

$$\begin{cases} 2220822{,}17 = \widehat{a_1} \cdot 4100301{,}19 + \widehat{a_2} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_3} \cdot 1443765{,}05, \\ 1443765{,}05 = \widehat{a_1} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_2} \cdot 4100301{,}19 + \widehat{a_3} \cdot 2220822{,}17, \\ 1425109{,}72 = \widehat{a_1} \cdot 1443765{,}05 + \widehat{a_2} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_3} \cdot 4100301{,}19. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}4815$, $\widehat{a_2} = -0{,}0072, \widehat{a_3} = 0{,}1819$. Užrašome AR(3) modelį $X_t = 0{,}4815X_{t-1} + (-0{,}0072)X_{t-2} + 0{,}1819X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 2782177{,}98$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 2606180{,}8$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 2220822{,}17 = \widehat{a_1} \cdot 4100301{,}19 + \widehat{a_2} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_3} \cdot 1443765{,}05 + \widehat{a_4} \cdot 1425109{,}72, \\ 1443765{,}05 = \widehat{a_1} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_2} \cdot 4100301{,}19 + \widehat{a_3} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_4} \cdot 1443765{,}05, \\ 1425109{,}72 = \widehat{a_1} \cdot 1443765{,}05 + \widehat{a_2} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_3} \cdot 4100301{,}19 + \widehat{a_4} \cdot 2220822{,}17, \\ 2606180{,}8 = \widehat{a_1} \cdot 1425109{,}72 + \widehat{a_2} \cdot 1443765{,}05 + \widehat{a_3} \cdot 2220822{,}17 + \widehat{a_4} \cdot 4100301{,}19. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}3816$, $\widehat{a_2} = -0{,}0032, \widehat{a_3} = -0{,}0822, \widehat{a_4} = 0{,}5486$. Užrašome AR(4) modelį $X_t = 0{,}3816X_{t-1} + (-0{,}0032)X_{t-2} + (-0{,}0822)X_{t-3} + 0{,}5486X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 1944744{,}49$.

5. Nustatysime laiko eilučių modelius priimtų studentų skaičiui Vilniaus mieste. Stebiniai:

34779, 27743, 24401, 24079, 23956, 22692, 21576, 20230, 18547, 17547, 16677, 16651, 17694, 16287. n=14, $\bar{X} = \frac{1}{n}$, $S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 27075393{,}26 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k=1$ ir $p=1$, $\hat{R}(1)=\frac{1}{n-1}\cdot\sum_{t=1}^{n-1}(X_t-\bar{X})\cdot(X_{t+1}-\bar{X})=\frac{1}{13}\cdot\sum_{t=1}^{13}(X_t-\bar{X})\cdot(X_{t+1}-\bar{X})=16517474{,}84$.

Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $16517474{,}84=\widehat{a_1}\cdot 27075393{,}26$.

Gavome $\widehat{a_1}=0{,}6101$. Užrašome AR(1) modelį $\mathrm{X_t}=0{,}6101X_{t-1}+e_t$.

Dispersijos įvertis: : $\hat{S}_e^2=\hat{R}(0)-\widehat{a_1}\cdot\hat{R}(1)=16998827{,}71$.

b) Kai $k=2$ ir $p=2$, $\hat{R}(2)=\frac{1}{n-2}\cdot\sum_{t=1}^{n-2}(X_t-\bar{X})\cdot(X_{t+2}-\bar{X})=\frac{1}{12}\cdot\sum_{t=1}^{12}(X_t-\bar{X})\cdot(X_{t+2}-\bar{X})=12203993{,}72$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):

Įrašę atitinkamas reikšmes gauname:

$$\begin{cases}16517474{,}84=\widehat{a_1}\cdot 27075393{,}26+\widehat{a_2}\cdot 16517474{,}84,\\ 12203993{,}72=\widehat{a_1}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_2}\cdot 27075393{,}26.\end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1}=0{,}5337, \widehat{\mathrm{a}_2}=0{,}1252$. Užrašome AR(2) modelį $\mathrm{X_t}=0{,}5337X_{t-1}+0{,}1252X_{t-2}+e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2=\hat{R}(0)-\widehat{a_1}\cdot\hat{R}(1)-\widehat{a_2}\cdot\hat{R}(2)=16732576{,}96$.

c) Kai $k=3$ ir $p=3$, $\hat{R}(3)=\frac{1}{n-3}\cdot\sum_{t=1}^{n-3}(X_t-\bar{X})\cdot(X_{t+3}-\bar{X})=\frac{1}{11}\cdot\sum_{t=1}^{11}(X_t-\bar{X})\cdot(X_{t+3}-\bar{X})=9796525{,}64$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):

$$\begin{cases}16517474{,}84=\widehat{a_1}\cdot 27075393{,}26+\widehat{a_2}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_3}\cdot 12203993{,}72,\\ 12203993{,}72=\widehat{a_1}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_2}\cdot 27075393{,}26+\widehat{a_3}\cdot 16517474{,}84,\\ 9796525{,}64=\widehat{a_1}\cdot 12203993{,}72+\widehat{a_2}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_3}\cdot 27075393{,}26.\end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1}=0{,}5246$, $\widehat{\mathrm{a}_2}=0{,}0864, \widehat{\mathrm{a}_3}=0{,}0727$. Užrašome AR(3) modelį $\mathrm{X_t}=0{,}5246X_{t-1}+0{,}0864X_{t-2}+0{,}0727X_{t-3}+e_t$.

Dispersijos įvertis: : $\hat{S}_e^2=\hat{R}(0)-\widehat{a_1}\cdot\hat{R}(1)-\widehat{a_2}\cdot\hat{R}(2)-\widehat{a_3}\cdot\hat{R}(3)=16644207{,}09$.

d) Kai $k=4$ ir $p=4$, $\hat{R}(4)=\frac{1}{n-4}\cdot\sum_{t=1}^{n-4}(X_t-\bar{X})\cdot(X_{t+4}-\bar{X})=\frac{1}{10}\cdot\sum_{t=1}^{10}(X_t-\bar{X})\cdot(X_{t+4}-\bar{X})=6319390{,}48$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases}16517474{,}84=\widehat{a_1}\cdot 27075393{,}26+\widehat{a_2}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_3}\cdot 12203993{,}72+\widehat{a_4}\cdot 9796525{,}64,\\ 12203993{,}72=\widehat{a_1}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_2}\cdot 27075393{,}26+\widehat{a_3}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_4}\cdot 12203993{,}72,\\ 9796525{,}64=\widehat{a_1}\cdot 12203993{,}72+\widehat{a_2}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_3}\cdot 27075393{,}26+\widehat{a_4}\cdot 16517474{,}84,\\ 6319390{,}48=\widehat{a_1}\cdot 9796525{,}64+\widehat{a_2}\cdot 12203993{,}72+\widehat{a_3}\cdot 16517474{,}84+\widehat{a_4}\cdot 27075393{,}26.\end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1}=0{,}5293$, $\widehat{\mathrm{a}_2}=0{,}0919, \widehat{\mathrm{a}_3}=0{,}1065, \widehat{\mathrm{a}_4}=-0{,}0645$. Užrašome AR(4) modelį $\mathrm{X_t}=0{,}5293X_{t-1}+0{,}0919X_{t-2}+0{,}1065X_{t-3}+(-0{,}0645)X_{t-4}+e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 16574860{,}74$.

6. Nustatysime laiko eilučių modelius absolventų skaičiui Šiaulių mieste. Stebiniai:

3469, 3614, 3433, 3321, 3040, 3049, 2163, 1807, 1567, 1580, 1341, 1094, 1017, 754. n=14, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 2232{,}07, S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 1091624{,}38 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 898440{,}21$.

   Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $898440{,}21 = \widehat{a_1} \cdot 1091624{,}38$.

   Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}823$. Užrašome AR(1) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}823X_{t-1} + e_t$.

   Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 352180{,}64$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 739148{,}22$.

   Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):
   $$\begin{cases} 898440{,}21 = \widehat{a_1} \cdot 1091624{,}38 + \widehat{a_2} \cdot 898440{,}21, \\ 739148{,}22 = \widehat{a_1} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_2} \cdot 1091624{,}38. \end{cases}$$

   Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}8237, \widehat{a_2} = -0{,}0008$. Užrašome AR(2) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}8237X_{t-1} + (-0{,}0008)X_{t-2} + e_t$.

   Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 35180{,}4$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 524784{,}56$

   Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):

   $$\begin{cases} 898440{,}21 = \widehat{a_1} \cdot 1091624{,}38 + \widehat{a_2} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_3} \cdot 739148{,}22, \\ 739148{,}22 = \widehat{a_1} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_2} \cdot 1091624{,}38 + \widehat{a_3} \cdot 898440{,}21, \\ 524784{,}56 = \widehat{a_1} \cdot 739148{,}22 + \widehat{a_2} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_3} \cdot 1091624{,}38. \end{cases}$$

   Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}8235$, $\widehat{a_2} = 0{,}194, \widehat{a_3} = -0{,}2366$. Užrašome AR(3) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}8235X_{t-1} + 0{,}194X_{t-2} + (-0{,}2366)X_{t-3} + e_t$.

   Dispersijos įvertis: : $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 332471{,}31$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 282966{,}53$.

   Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 898440{,}21 = \widehat{a_1} \cdot 1091624{,}38 + \widehat{a_2} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_3} \cdot 739148{,}22 + \widehat{a_4} \cdot 524784{,}56, \\ 739148{,}22 = \widehat{a_1} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_2} \cdot 1091624{,}38 + \widehat{a_3} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_4} \cdot 739148{,}22, \\ 524784{,}56 = \widehat{a_1} \cdot 739148{,}22 + \widehat{a_2} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_3} \cdot 1091624{,}38 + \widehat{a_4} \cdot 898440{,}21, \\ 282966{,}53 = \widehat{a_1} \cdot 524784{,}56 + \widehat{a_2} \cdot 739148{,}22 + \widehat{a_3} \cdot 898440{,}21 + \widehat{a_4} \cdot 1091624{,}38. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}7665$, $\widehat{a_2} = 0{,}2408, \widehat{a_3} = -0{,}0382, \widehat{a_4} = -0{,}2409$. Užrašome AR(4) modelį $X_t = 0{,}7665X_{t-1} + 0{,}2408X_{t-2} + (-0{,}0382)X_{t-3} + (-0{,}2409)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 313183{,}6$.

7. Nustatysime laiko eilučių modelius bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus Šiaulių mieste. Stebiniai:1505, 1636, 1690, 1629, 1555, 1296, 1208, 1247, 1180, 1105, 1032, 976, 965, 922. n=14, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 1281{,}86, S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 74715{,}52 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 62967{,}1$.

Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $62967{,}1 = \widehat{a_1} \cdot 74715{,}52$.

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}8428$. Užrašome AR(1) modelį $X_t = 0{,}8428X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 21649{,}49$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 49350{,}08$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):

$$\begin{cases} 62967{,}1 = \widehat{a_1} \cdot 74715{,}52 + \widehat{a_2} \cdot 62967{,}1, \\ 49350{,}08 = \widehat{a_1} \cdot 62967{,}1, + \widehat{a_2} \cdot 74715{,}52. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}9874, \widehat{a_2} = -0{,}1716$. Užrašome AR(2) modelį $X_t = 0{,}9874X_{t-1} + (-0{,}1716)X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 21011{,}68$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 31112{,}94$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):

$$\begin{cases} 62967{,}1 = \widehat{a_1} \cdot 74715{,}52 + \widehat{a_2} \cdot 62967{,}1 + \widehat{a_3} \cdot 49350{,}08, \\ 49350{,}08 = \widehat{a_1} \cdot 62967{,}1 + \widehat{a_2} \cdot 74715{,}52 + \widehat{a_3} \cdot 62967{,}1, \\ 31112{,}94 = \widehat{a_1} \cdot 49350{,}08 + \widehat{a_2} \cdot 62967{,}1 + \widehat{a_3} \cdot 74715{,}52. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}9318$, $\widehat{a_2} = 0{,}1483, \widehat{a_3} = -0{,}324$. Užrašome AR(3) modelį $X_t = 0{,}9318X_{t-1} + 0{,}1483X_{t-2} + (-0{,}324)X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 18805{,}78.$

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 11842{,}35.$

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 62967{,}1, = \widehat{a_1} \cdot 74715{,}52 + \widehat{a_2} \cdot 62967{,}1, + \widehat{a_3} \cdot 49350{,}08 + \widehat{a_4} \cdot 31112{,}94, \\ 49350{,}08 = \widehat{a_1} \cdot 62967{,}1, + \widehat{a_2} \cdot 74715{,}52 + \widehat{a_3} \cdot 62967{,}1, + \widehat{a_4} \cdot 49350{,}08, \\ 31112{,}94 = \widehat{a_1} \cdot 49350{,}08 + \widehat{a_2} \cdot 62967{,}1, + \widehat{a_3} \cdot 74715{,}52 + \widehat{a_4} \cdot 62967{,}1, \\ 11842{,}35 = \widehat{a_1} \cdot 31112{,}94 + \widehat{a_2} \cdot 49350{,}08 + \widehat{a_3} \cdot 62967{,}1, + \widehat{a_4} \cdot 74715{,}52. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}8618$, $\widehat{a_2} = 0{,}1803, \widehat{a_3} = -0{,}1226, \widehat{a_4} = -0{,}2161$. Užrašome AR(4) modelį $X_t = 0{,}8618X_{t-1} + 0{,}1803X_{t-2} + (-0{,}1226)X_{t-3} + (-0{,}2161)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 17927{,}26.$

8. Nustatysime laiko eilučių modelius nuolatinių gyventojų skaičiui Šiaulių mieste metų pradžioje. Stebiniai:

117829, 116196, 114506, 109748, 107689, 106470, 105610, 104569, 102981, 101214, 100575, 100131, 101511, 100653. n=14, $\bar{X} = \frac{1}{n}$, $S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 36760620{,}9 = \hat{R}(0).$

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 28753555{,}98.$

Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $28753555{,}98 = \widehat{a_1} \cdot 36760620{,}9.$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}7822$. Užrašome AR(1) modelį $X_t = 0{,}7822X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 14270060{,}05.$

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 22014010{,}12.$

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):

$$\begin{cases} 28753555{,}98 = \widehat{a_1} \cdot 36760620{,}9 + \widehat{a_2} \cdot 28753555{,}98, \\ 22014010{,}12 = \widehat{a_1} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_2} \cdot 36760620{,}9. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}8083, \widehat{a_2} = -0{,}0334$. Užrašome AR(2) modelį $X_t = 0{,}8083X_{t-1} + (-0{,}0034)X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 14254145{,}57.$

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 12846672{,}7.$

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):

$$\begin{cases} 28753555{,}98 = \widehat{a_1} \cdot 36760620{,}9 + \widehat{a_2} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_3} \cdot 22014010{,}12, \\ 22014010{,}12 = \widehat{a_1} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_2} \cdot 36760620{,}9 + \widehat{a_3} \cdot 28753555{,}98, \\ 12846672{,}7 = \widehat{a_1} \cdot 22014010{,}12 + \widehat{a_2} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_3} \cdot 36760620{,}9. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}799$, $\widehat{a_2} = 0{,}193, \widehat{a_3} = -0{,}2797$. Užrašome AR(3) modelį $X_t = 0{,}799X_{t-1} + 0{,}193X_{t-2} + (-0{,}2797)X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 13138878{,}06$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 6077103{,}92$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 28753555{,}98 = \widehat{a_1} \cdot 36760620{,}9 + \widehat{a_2} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_3} \cdot 22014010{,}12 + \widehat{a_4} \cdot 12846672{,}7, \\ 22014010{,}12 = \widehat{a_1} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_2} \cdot 36760620{,}9 + \widehat{a_3} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_4} \cdot 22014010{,}12, \\ 12846672{,}7 = \widehat{a_1} \cdot 22014010{,}12 + \widehat{a_2} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_3} \cdot 36760620{,}9 + \widehat{a_4} \cdot 28753555{,}98, \\ 6077103{,}92 = \widehat{a_1} \cdot 12846672{,}7 + \widehat{a_2} \cdot 22014010{,}12 + \widehat{a_3} \cdot 28753555{,}98 + \widehat{a_4} \cdot 36760620{,}9. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}7907$, $\widehat{a_2} = 0{,}1984, \widehat{a_3} = -0{,}2562, \widehat{a_4} = -0{,}0294$. Užrašome AR(4) modelį $X_t = 0{,}7907X_{t-1} + 0{,}1984X_{t-2} + (-0{,}2562)X_{t-3} + (-0{,}0294)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 13127526{,}68$.

9. Nustatysime laiko eilučių modelius absolventų skaičiui Klaipėdos mieste metų pradžioje. Stebiniai:

4259, 4448, 4489, 4277, 3790, 3648, 3124, 2964, 2759, 2476, 2450, 2103, 2006, 2038. n=14, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 3202{,}21$, $S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 874699{,}1 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 745249{,}95$.

Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $745249{,}95 = \widehat{a_1} \cdot 874699{,}1$.

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}852$. Užrašome AR(1) modelį $X_t = 0{,}852X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 239740{,}76$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 608414{,}17$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):

Įrašę atitinkamas reikšmes gauname: $\begin{cases} 745249{,}95 = \widehat{a_1} \cdot 874699{,}1 + \widehat{a_2} \cdot 745249{,}95, \\ 608414{,}17 = \widehat{a_1} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_2} \cdot 874699{,}1. \end{cases}$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}9463, \widehat{a_2} = -0{,}1107$. Užrašome AR(2) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}9463X_{t-1} + (-0{,}1107)X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 236801{,}78$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 407969{,}57$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):
$$\begin{cases} 745249{,}95 = \widehat{a_1} \cdot 874699{,}1 + \widehat{a_2} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_3} \cdot 608414{,}17, \\ 608414{,}17 = \widehat{a_1} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_2} \cdot 874699{,}1 + \widehat{a_3} \cdot 745249{,}95, \\ 407969{,}57 = \widehat{a_1} \cdot 608414{,}17 + \widehat{a_2} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_3} \cdot 874699{,}1. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}9065$, $\widehat{a_2} = 0{,}2301, \widehat{a_3} = -0{,}3601$. Užrašome AR(3) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}9065X_{t-1} + 0{,}2301X_{t-2} + (-0{,}3601)X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 206086{,}92$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 193192{,}25$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 745249{,}95 = \widehat{a_1} \cdot 874699{,}1 + \widehat{a_2} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_3} \cdot 608414{,}17 + \widehat{a_4} \cdot 407969{,}57, \\ 608414{,}17 = \widehat{a_1} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_2} \cdot 874699{,}1 + \widehat{a_3} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_4} \cdot 608414{,}17, \\ 407969{,}57 = \widehat{a_1} \cdot 608414{,}17 + \widehat{a_2} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_3} \cdot 874699{,}1 + \widehat{a_4} \cdot 745249{,}95, \\ 193192{,}25 = \widehat{a_1} \cdot 407969{,}57 + \widehat{a_2} \cdot 608414{,}17 + \widehat{a_3} \cdot 745249{,}95 + \widehat{a_4} \cdot 874699{,}1 \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 0{,}8222$, $\widehat{a_2} = 0{,}2839, \widehat{a_3} = -0{,}1481, \widehat{a_4} = -0{,}234$. Užrašome AR(4) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}8222X_{t-1} + 0{,}2839X_{t-2} + (-0{,}1481)X_{t-3} + (-0{,}234)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 194806{,}48$.

10. Nustatysime laiko eilučių modelius bendrojo ugdymo mokyklų abiturientų skaičiaus Klaipėdos mieste. Stebiniai: 2132, 2393, 2168, 1910, 1804, 1657, 1593, 1503, 1323, 1380, 1354,1292, 1168, 1258. n=14, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 1638{,}21$. $S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 149890{,}18 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 123644{,}67$.

Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $123644{,}67 = \widehat{a_1} \cdot 149890{,}18$.

Apskaičiavus gauname $\widehat{a_1} = 0{,}8249$. Užrašome AR(1) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}8249X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 47895{,}48$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 86922{,}56$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):

$$\begin{cases} 123644{,}67 = \widehat{a_1} \cdot 149890{,}18 + \widehat{a_2} \cdot 123644{,}67, \\ 86922{,}56 = \widehat{a_1} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_2} \cdot 149890{,}18. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 1{,}0844, \widehat{a_2} = -0{,}3147$. Užrašome AR(2) modelį $X_t = 1{,}0844X_{t-1} + (-0{,}3147)X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 43152{,}45$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 56125{,}2$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):

$$\begin{cases} 123644{,}67 = \widehat{a_1} \cdot 149890{,}18 + \widehat{a_2} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_3} \cdot 86922{,}56, \\ 86922{,}56 = \widehat{a_1} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_2} \cdot 149890{,}18 + \widehat{a_3} \cdot 123644{,}67, \\ 56125{,}2 = \widehat{a_1} \cdot 86922{,}56 + \widehat{a_2} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_3} \cdot 149890{,}18. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 1{,}0901$, $\widehat{a_2} = -0{,}334, \widehat{a_3} = 0{,}0178$. Užrašome AR(3) modelį $X_t = 1{,}0901X_{t-1} + (-0{,}334)X_{t-2} + 0{,}0178X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 43138{,}78$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 28428{,}85$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 123644{,}67 = \widehat{a_1} \cdot 149890{,}18 + \widehat{a_2} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_3} \cdot 86922{,}56 + \widehat{a_4} \cdot 56125{,}2, \\ 86922{,}56 = \widehat{a_1} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_2} \cdot 149890{,}18 + \widehat{a_3} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_4} \cdot 86922{,}56, \\ 56125{,}2 = \widehat{a_1} \cdot 86922{,}56 + \widehat{a_2} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_3} \cdot 149890{,}18 + \widehat{a_4} \cdot 123644{,}67, \\ 28428{,}85 = \widehat{a_1} \cdot 56125{,}2 + \widehat{a_2} \cdot 86922{,}56 + \widehat{a_3} \cdot 123644{,}67 + \widehat{a_4} \cdot 149890{,}18. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{a_1} = 1{,}0925$, $\widehat{a_2} = -0{,}3798, \widehat{a_3} = 0{,}1675, \widehat{a_4} = -0{,}1373$. Užrašome AR(4) modelį $X_t = 1{,}0925X_{t-1} + (-0{,}3798)X_{t-2} + 0{,}1675X_{t-3} + (-0{,}1373)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 42325{,}77$.

11. Nustatysime laiko eilučių modelius nuolatinių gyventojų skaičiui Klaipėdos mieste metų pradžioje. Stebiniai:

172686, 170699, 168134, 162898, 160142, 158541, 157305, 156141, 154326, 151309, 148908, 147892, 149116, 152008. n=14, $\bar{X} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = 157864{,}64$. $S^2 = \frac{1}{13}\sum_{i=1}^{13}(X_i - \bar{X})^2 = 66932939{,}32 = \hat{R}(0)$.

a) Kai $k = 1$ ir $p = 1$, $\hat{R}(1) = \frac{1}{n-1} \cdot \sum_{t=1}^{n-1}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = \frac{1}{13} \cdot \sum_{t=1}^{13}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+1} - \bar{X}) = 54086296{,}13$.

Sudarome Yule-Walker lygtį autoregresijos modeliui AR(1): $54086296{,}13 = \widehat{a_1} \cdot 66932939{,}32$.

Apskaičiavus gauname $\widehat{a_1} = 0{,}8081$. Užrašome AR(1) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}8081X_{t-1} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) = 23227590{,}98$.

b) Kai $k = 2$ ir $p = 2$, $\hat{R}(2) = \frac{1}{n-2} \cdot \sum_{t=1}^{n-2}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = \frac{1}{12} \cdot \sum_{t=1}^{12}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+2} - \bar{X}) = 40689402{,}88$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(2):
$$\begin{cases} 54086296{,}13 = \widehat{a_1} \cdot 66932939{,}32 + \widehat{a_2} \cdot 54086296{,}13, \\ 40689402{,}88 = \widehat{a_1} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_2} \cdot 66932939{,}32. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}913, \widehat{\mathrm{a}_2} = -0{,}1298$. Užrašome AR(2) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}913X_{t-1} + (-0{,}1298)X_{t-2} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) = 22835990{,}87$.

c) Kai $k = 3$ ir $p = 3$, $\hat{R}(3) = \frac{1}{n-3} \cdot \sum_{t=1}^{n-3}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = \frac{1}{11} \cdot \sum_{t=1}^{11}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+3} - \bar{X}) = 24167732{,}98$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(3):
$$\begin{cases} 54086296{,}13 = \widehat{a_1} \cdot 66932939{,}32 + \widehat{a_2} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_3} \cdot 40689402{,}88, \\ 40689402{,}88 = \widehat{a_1} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_2} \cdot 66932939{,}32 + \widehat{a_3} \cdot 54086296{,}13, \\ 24167732{,}98 = \widehat{a_1} \cdot 40689402{,}88 + \widehat{a_2} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_3} \cdot 66932939{,}32. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}8791$, $\widehat{\mathrm{a}_2} = 0{,}1084, \widehat{\mathrm{a}_3} = -0{,}2609$. Užrašome AR(3) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}8791X_{t-1} + 0{,}1084X_{t-2} + (-0{,}2609)X_{t-3} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) = 21281262{,}33$.

d) Kai $k = 4$ ir $p = 4$, $\hat{R}(4) = \frac{1}{n-4} \cdot \sum_{t=1}^{n-4}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = \frac{1}{10} \cdot \sum_{t=1}^{10}(X_t - \bar{X}) \cdot (X_{t+4} - \bar{X}) = 10707271{,}81$.

Sudarome Yule-Walker lygtis autoregresijos modeliui AR(4):

$$\begin{cases} 54086296{,}13 = \widehat{a_1} \cdot 66932939{,}32 + \widehat{a_2} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_3} \cdot 40689402{,}88 + \widehat{a_4} \cdot 24167732{,}98, \\ 40689402{,}88 = \widehat{a_1} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_2} \cdot 66932939{,}32 + \widehat{a_3} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_4} \cdot 40689402{,}88, \\ 24167732{,}98 = \widehat{a_1} \cdot 40689402{,}88 + \widehat{a_2} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_3} \cdot 66932939{,}32 + \widehat{a_4} \cdot 54086296{,}13, \\ 10707271{,}81 = \widehat{a_1} \cdot 24167732{,}98 + \widehat{a_2} \cdot 40689402{,}88 + \widehat{a_3} \cdot 54086296{,}13 + \widehat{a_4} \cdot 66932939{,}32. \end{cases}$$

Gavome $\widehat{\mathrm{a}_1} = 0{,}8689$, $\widehat{\mathrm{a}_2} = 0{,}1126, \widehat{\mathrm{a}_3} = -0{,}2264, \widehat{\mathrm{a}_4} = -0{,}0393$. Užrašome AR(4) modelį $\mathrm{X_t} = 0{,}8689X_{t-1} + 0{,}1126X_{t-2} + (-0{,}2264)X_{t-3} + (-0{,}0393)X_{t-4} + e_t$.

Dispersijos įvertis: $\hat{S}_e^2 = \hat{R}(0) - \widehat{a_1} \cdot \hat{R}(1) - \widehat{a_2} \cdot \hat{R}(2) - \widehat{a_3} \cdot \hat{R}(3) - \widehat{a_4} \cdot \hat{R}(4) = 21248407{,}18$.

3 priedas

1. Turime priimtų studentų skaičių Klaipėdoje (X: 6903, 5574, 4777, 4897, 4590, 4026, 3824, 3392, 3309, 2739, 2602, 2509, 2802, 2554) ir visos Lietuvos priimtų studentų skaičių padalintą iš 18,7 (Y:3871, 3078, 2635, 2659, 2560, 2381, 2312, 2153, 1977, 1852, 1772, 1713, 1802, 1675). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}99\,, H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}99, \alpha = 0{,}05$.

   Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 3892{,}71, \bar{Y} = 2317{,}04,\ \ r = 0{,}992$.

   $$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}992}{1 - 0{,}992} = 2{,}759$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (2{,}759 - 2{,}647)\right| = 0{,}371 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{10536803{,}25}{4972261{,}95} = 2{,}12.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = -1017{,}36.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 28665{,}61.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = -1017{,}36 + 2{,}12x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 28665{,}61)$.

2. Turime priimtų studentų skaičių Kaune (X:17714, 14773, 12859, 13435, 12856, 12048, 12199, 11856, 11002, 10929, 10729, 10359, 10932, 10293) ir visos Lietuvos priimtų studentų skaičių padalintą iš 9,6 (Y:7529, 5986, 5124, 5172, 4979, 4632, 4496, 4187, 3846, 3602, 3446, 3332, 3505, 3257). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}99\,, H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}99, \alpha = 0{,}05$.

   Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 4506{,}67, \bar{Y} = 12284{,}57,\ \ r = 0{,}992$.

   $$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}992}{1 - 0{,}992} = 2{,}759$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (2{,}759 - 2{,}647)\right| = 0{,}371 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{31416334{,}77}{18810504{,}36} = 1.67.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = 4757{,}76.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 69497{,}71.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 4757{,}76 + 1{,}67x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 69497{,}71)$.

3. Turime priimtų studentų skaičių Vilniuje (X:34779, 27743, 24401, 24079, 23956, 22692, 21576, 20230, 18547, 17546, 16677, 16651, 17694, 16287) ir visos Lietuvos priimtų studentų skaičių padalintą iš 5,4 (Y:13351, 10617, 9088, 9172, 8829, 8214, 7973, 7425,

6820, 6112, 5909, 6215, 5776). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}999$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}999, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 7992{,}19$, $\bar{Y} = 21632{,}79$, $r = 0{,}999$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}999}{1 - 0{,}999} = 3{,}8,$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (3{,}8 - 3{,}8)\right| = 0 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{144091522{,}43}{59158890{,}27} = 2{,}44.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = 2166{,}45.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 85061{,}89.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 2166{,}45 + 2{,}44x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 85061{,}89)$.

4. Turime į aukštąsias mokyklas priimtų studentų skaičių Šiauliuose (X: 5254, 4191, 2875, 2842, 2762, 2266, 2013, 1525, 1454, 1106, 1023, 799, 955, 711) ir absolventų skaičių Šiauliuose (Y: 3469, 3614, 3433, 3321, 3040, 3049, 2163, 1807, 1567, 1580, 1341, 1094, 1017, 754). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 2126{,}86$, $\bar{Y} = 2232{,}07$, $r = 0{,}894$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}894}{1 - 0{,}894} = 1{,}442$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}442 - 1{,}472)\right| = 0{,}099 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{16412882{,}14}{23763309{,}71} = 0{,}69.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = 763{,}09.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n} (Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 237920{,}02.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 763{,}09 + 0{,}69x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 237920{,}02)$.

5. Turime į aukštąsias mokyklas priimtų studentų skaičių Šiauliuose (X: 5254, 4191, 2875, 2842, 2762, 2266, 2013, 1525, 1454, 1106, 1023, 799, 955, 711) ir bendro ugdymo mokyklų abiturientų skaičių Šiauliuose (Z:1505, 1636, 1690, 1629, 1555, 1296, 1208, 1247, 1180, 1105, 1032, 976, 965, 922). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}8$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}8, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 2126{,}86$, $\bar{Z} = 1281{,}86$, $r = 0{,}832$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}832}{1 - 0{,}832} = 1{,}195$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}195 - 1{,}099)\right| = 0{,}318 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.

Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})(X_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2} = 0{,}18.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{X} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{Z} = 1891{,}28.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot Z_i)^2 = 1860518{,}04.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $x = 1891{,}28 + 0{,}18z + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1860518{,}04)$.

6. Turime į aukštąsias mokyklas priimtų studentų skaičių Šiauliuose (X: 5254, 4191, 2875, 2842, 2762, 2266, 2013, 1525, 1454, 1106, 1023, 799, 955, 711) ir nuolatinių gyventojų skaičių Šiauliuose (U:117829, 116196, 114506, 109748, 107689, 106470, 105610, 104569, 102981, 101214, 100575, 100131, 101511, 100653). Tikriname hipotezę $H_0\colon \rho = 0{,}9\,, H_1^{(1)}\colon \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 2126{,}86, \bar{U} = 106405{,}86,\ \ r = 0{,}963$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}963}{1 - 0{,}963} = 1{,}986$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}986 - 1{,}472)\right| = 1{,}705 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U})(X_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U})^2} = 0{,}0007.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{X} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{U} = 2051{,}65.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot U_i)^2 = 1968202{,}72.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $x = 2051{,}65 + 0{,}0007u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1968202{,}72)$.

7. Turime absolventų skaičių Šiauliuose (Y: 3469, 3614, 3433, 3321, 3040, 3049, 2163, 1807, 1567, 1580, 1341, 1094, 1017, 754) ir bendro ugdymo mokyklų abiturientų skaičių Šiauliuose (Z:1505, 1636, 1690, 1629, 1555, 1296, 1208, 1247, 1180, 1105, 1032, 976, 965, 922). Tikriname hipotezę $H_0\colon \rho = 0{,}9\,, H_1^{(1)}\colon \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{Y} = 2232{,}07, \bar{Z} = 1281{,}86,\ \ r = 0{,}958$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}958}{1 - 0{,}958} = 1{,}921$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}921 - 1{,}472)\right| = 1{,}489 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})(Z_i-\bar{Z})}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i-\bar{Y})^2} = 0{,}16.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Z} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{Y} = 2022{,}57.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot Y_i)^2 = 1087880{,}43.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 2022{,}57 + 0{,}16z + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1087880{,}43)$.

8. Turime absolventų skaičių Šiauliuose (Y: 3469, 3614, 3433, 3321, 3040, 3049, 2163, 1807, 1567, 1580, 1341, 1094, 1017, 754) ir nuolatinių gyventojų skaičių Šiauliuose

(U:117829, 116196, 114506, 109748, 107689, 106470, 105610, 104569, 102981, 101214, 100575, 100131, 101511, 100653). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9\,, H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{Y} = 2232{,}07, \bar{U} = 106405{,}86, \ \ r = 0{,}916$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}916}{1 - 0{,}916} = 1{,}564$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}564 - 1{,}472)\right| = 0{,}305 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.

Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(U_i - \bar{U})}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = 0{,}0005.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{U} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{Y} = 2176{,}83.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(U_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot Y_i)^2 = 1176079{,}45.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 2176{,}83 + 0{,}0005u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1176079{,}45)$.

9. Turime bendro ugdymo mokyklų abiturientų skaičių Šiauliuose (Z:1505, 1636, 1690, 1629, 1555, 1296, 1208, 1247, 1180, 1105, 1032, 976, 965, 922) ir nuolatinių gyventojų skaičių Šiauliuose (U:117829, 116196, 114506, 109748, 107689, 106470, 105610, 104569, 102981, 101214, 100575, 100131, 101511, 100653). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9\,, H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{Z} = 1281{,}86, \bar{U} = 106405{,}86, \ \ r = 0{,}892$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}892}{1 - 0{,}892} = 1{,}432$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}432 - 1{,}472)\right| = 0{,}133 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.

Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U})(Z_i - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U})^2} = \frac{19220845{,}71}{971301{,}71} = 0{,}0001.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Z} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{U} = 1267{,}78.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot U_i)^2 = 80518{,}55.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $z = 1267{,}78 + 0{,}00019u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 80518{,}55)$.

10. Turime priimtų studentų skaičių Klaipėdoje (X: 6903, 5574, 4777, 4897, 4590, 4026, 3824, 3392, 3309, 2739, 2602, 2509, 2802, 2554) ir absolventų skaičių Klaipėdoje (Y:4259, 4448, 4277, 3790, 3648, 3124, 2964, 2759, 2476, 2450, 2103, 2006, 2038). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9\,, H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 3892{,}71, \bar{Y} = 3202{,}21, \ \ r = 0{,}905$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}905}{1 - 0{,}905} = 1{,}499$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}499 - 1{,}472)\right| = 0{,}09 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.

Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})(Y_i-\bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i-\bar{X})^2} = \frac{14538674{,}86}{22672702{,}86} = 0{,}64.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = 706{,}04.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 170690{,}72.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 706{,}04 + 0{,}64x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 170690{,}72)$.

11. Turime priimtų studentų skaičių Klaipėdoje (X: 6903, 5574, 4777, 4897, 4590, 4026, 3824, 3392, 3309, 2739, 2602, 2509, 2802, 2554) ir abiturientų skaičių Klaipėdoje (Z: 2132, 2393, 2168, 1910, 1804, 1657, 1593, 1503, 1323, 1380, 1354, 1292, 1168, 1258).

    Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

    Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 3892{,}71$, $\bar{Z} = 1638{,}21$, $r = 0{,}908$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}908}{1 - 0{,}908} = 1{,}516$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}516 - 1{,}472)\right| = 0{,}146 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})(X_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(Z_i-\bar{Z})^2} = 0{,}17.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{X} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{Z} = 3611{,}98.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot Z_i)^2 = 1721780{,}17.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $x = 3611{,}98 + 0{,}17z + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1721780{,}17)$.

12. Turime priimtų studentų skaičių Klaipėdoje (X: 6903, 5574, 4777, 4897, 4590, 4026, 3824, 3392, 3309, 2739, 2602, 2509, 2802, 2554) ir nuolatinių gyventojų skaičių Klaipėdoje (U:172696, 170699, 168134, 162898, 160142, 158541, 157305, 156141, 154326, 151309, 148908, 147892, 149116, 152009). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

    Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 3892{,}71$, $\bar{U} = 157864{,}64$, $r = 0{,}963$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}963}{1 - 0{,}963} = 1{,}986$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}986 - 1{,}472)\right| = 1{,}705 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U})(X_i-\bar{X})}{\sum_{i=1}^{n}(U_i-\bar{U})^2} = 0{,}0004.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{X} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{U} = 3826{,}01.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(X_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot U_i)^2 = 1879877{,}98.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $x = 3826{,}01 + 0{,}0004u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1879877{,}98)$.

13. Turime absolventų skaičių Klaipėdoje (Y:4259, 4448, 4277, 3790, 3648, 3124, 2964, 2759, 2476, 2450, 2103, 2006, 2038) ir abiturientų skaičių Klaipėdoje (Z: 2132, 2393,

2168, 1910, 1804, 1657, 1593, 1503, 1323, 1380, 1354, 1292, 1168, 1258). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{Y} = 3202{,}21$, $\bar{Z} = 1638{,}21$, $r = 0{,}957$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}957}{1 - 0{,}957} = 1{,}909$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}909 - 1{,}472)\right| = 1{,}446 < u_{0,975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(Z_i - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = 0{,}13.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Z} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{Y} = 2992{,}7.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n}(Z_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot Y_i)^2 = 854238{,}36.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 2992{,}7 + 0{,}13z + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 854238{,}36)$.

14. Turime absolventų skaičių Klaipėdoje (Y:4259, 4448, 4277, 3790, 3648, 3124, 2964, 2759, 2476, 2450, 2103, 2006, 2038) ir nuolatinių gyventojų skaičių Klaipėdoje (U:172696, 170699, 168134, 162898, 160142, 158541, 157305, 156141, 154326, 151309, 148908, 147892, 149116, 152009). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

    Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{Y} = 3202{,}21$, $\bar{U} = 157864{,}64$, $r = 0{,}942$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}942}{1 - 0{,}942} = 1{,}756$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}756 - 1{,}472)\right| = 0{,}942 < u_{0,975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})(U_i - \bar{U})}{\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \bar{Y})^2} = 0{,}0003.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{U} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{Y} = 3156{,}02.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n}(U_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot Y_i)^2 = 943028{,}21.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 3156{,}02 + 0{,}0003u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 943028{,}21)$.

15. Turime abiturientų skaičių Klaipėdoje (Z: 2132, 2393, 2168, 1910, 1804, 1657, 1593, 1503, 1323, 1380, 1354, 1292, 1168, 1258) ir nuolatinių gyventojų skaičių Klaipėdoje (U:172696, 170699, 168134, 162898, 160142, 158541, 157305, 156141, 154326, 151309, 148908, 147892, 149116, 152009). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

    Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{Z} = 1638{,}21$, $\bar{U} = 157864{,}64$, $r = 0{,}962$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}962}{1 - 0{,}962} = 1{,}972$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}972 - 1{,}472)\right| = 1{,}658 < u_{0,975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U})(Z_i - \bar{Z})}{\sum_{i=1}^{n}(U_i - \bar{U})^2} = \frac{19220845{,}71}{971301{,}71} = 0{,}0001.$$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{Z} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{U} = 1618{,}68.$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Z_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot U_i)^2 = 161565{,}41.$$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $z = 1618{,}68 + 0{,}0001u + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 161565{,}41)$.

16. Turime į aukštąsias mokyklas priimtų studentų skaičių Šiauliuose (X: 5254, 4191, 2875, 2842, 2762, 2266, 2013, 1525, 1454, 1106, 1023, 799, 955, 711) ir priimtų studentų skaičių Klaipėdoje (Y: 6903, 5574, 4777, 4897, 4590, 4026, 3824, 3392, 3309, 2739, 2602, 2509, 2802, 2554). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}99\,, H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}99, \alpha = 0{,}05$.

    Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 2126{,}86, \bar{Y} = 3892{,}71, \ \ r = 0{,}993$.

    $$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}993}{1 - 0{,}993} = 2{,}826$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (2{,}826 - 2{,}647)\right| = 0{,}594 < u_{0,975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{23040653{,}43}{23763309{,}71} = 0{,}97.$$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = 1830{,}54.$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 27727{,}44.$$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 1830{,}54 + 0{,}97x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 27727{,}44)$.

17. Turime absolventų skaičių Šiauliuose (X: 3469, 3614, 3433, 3321, 3040, 3049, 2163, 1807, 1567, 1580, 1341, 1094, 1017, 754) ir absolventų skaičių Klaipėdoje (Y:4259, 4448, 4277, 3790, 3648, 3124, 2964, 2759, 2476, 2450, 2103, 2006, 2038) Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}99\,, H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}99, \alpha = 0{,}05$.

    Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 2232{,}07, \bar{Y} = 3202{,}21, \ \ r = 0{,}988$.

    $$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}988}{1 - 0{,}988} = 2{,}555$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (2{,}555 - 2{,}647)\right| = 0{,}305 < u_{0,975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{12554033{,}79}{214191116{,}93} = 0{,}88.$$

$$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = 1227{,}63.$$

$$\sigma^2 = \frac{1}{n-2}\sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 22107{,}02.$$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 1227{,}63 + 0{,}88x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 22107{,}02)$.

18. Turime bendro ugdymo mokyklų abiturientų skaičių Šiauliuose (X:1505, 1636, 1690, 1629, 1555, 1296, 1208, 1247, 1180, 1105, 1032, 976, 965, 922) ir absolventų skaičių Klaipėdoje (Y:4259, 4448, 4277, 3790, 3648, 3124, 2964, 2759, 2476, 2450, 2103, 2006, 2038). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}9$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}9, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 1281{,}86$, $\bar{Y} = 1638{,}21$, $r = 0{,}932$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}932}{1 - 0{,}932} = 1{,}673$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (1{,}673 - 1{,}472)\right| = 0{,}667 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{1282157{,}43}{971301{,}71} = 1{,}32.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = -53{,}89.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 21339{,}4.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = -53{,}89 + 1{,}32x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 21339{,}4)$.

19. Turime nuolatinių gyventojų skaičių Šiauliuose (X:117829, 116196, 114506, 109748, 107689, 106470, 105610, 104569, 102981, 101214, 100575, 100131, 101511, 100653) ir nuolatinių gyventojų skaičių Klaipėdoje (Y:172696, 170699, 168134, 162898, 160142, 158541, 157305, 156141, 154326, 151309, 148908, 147892, 149116, 152009). Tikriname hipotezę $H_0: \rho = 0{,}99$, $H_1^{(1)}: \rho \neq 0{,}99, \alpha = 0{,}05$.

Atliekant skaičiavimus gavome: $\bar{X} = 106405{,}86$, $\bar{Y} = 157864{,}64$, $r = 0{,}991$.

$$Arth\, r = \frac{1}{2} ln \frac{1 + 0{,}991}{1 - 0{,}991} = 2{,}7$$

Kadangi $|Z| = \left|\sqrt{11} \cdot (2{,}7 - 2{,}647)\right| = 0{,}176 < u_{0{,}975} = 1{,}96$, tai H_0 priimame.
Randame tiesinės regresijos lygtį:

$\widehat{\beta_1} = \frac{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sum_{i=1}^{n}(X_i - \bar{X})^2} = \frac{639012076{,}29}{477888071{,}71} = 1{,}34.$

$\widehat{\beta_0} = \bar{Y} - \widehat{\beta_1} \cdot \bar{X} = 15583{,}15.$

$\sigma^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^{n}(Y_i - \widehat{\beta_0} - \widehat{\beta_1} \cdot X_i)^2 = 1305650{,}81.$

Gauname tiesinės regresijos lygtį $y = 15583{,}15 + 1{,}34x + \varepsilon, \varepsilon \sim N(0; 1305650{,}81)$.

4 priedas

1. Turime Klaipėdos universiteto priimtų studentų skaičių 2008–2014 (X: 2263, 1902, 1753, 1713, 1503, 1484, 1276) ir 2015-2021 metais (Y:1081, 1213, 929, 720, 850, 850, 912). $\alpha = 0{,}05$. $n = m = 7$. $\bar{X} = 1699{,}14$, $S_X^2 = 104331{,}14$, $\bar{Y} = 936{,}43$, $S_Y^2 = 26637{,}62$. Kadangi $F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = 3{,}9$ patenka į intervalą (0,17182; 5,82), tai hipotezę $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ priimame ir galime laikyti kad imčių dispersijos yra lygios.

   Hipotezės: $H_0: a_X = a_Y, H_1: a_X \neq a_Y$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{1699{,}14 - 936{,}43}{\sqrt{\frac{((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2)}{n+m-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{762{,}71}{96{,}72} = 7{,}88.$$

   Kadangi, $t = 7{,}88 > 2{,}179 = t_{0{,}025}(12)$, tai hipotezė $H_0: a_X = a_Y$ atmetama.

2. Turime Kauno technologijos universiteto priimtų studentų skaičių 2008–2014 (X:5863, 4040, 3155, 3787, 3329, 3650, 3462) ir 2015-2021 metais (Y:3283, 3161, 2980, 2617, 2525, 2415, 2239). $\alpha = 0{,}05$. $n = m = 7$. $\bar{X} = 3898$, $S_X^2 = 836853{,}33$, $\bar{Y} = 2745{,}71$, $S_Y^2 = 157906{,}9$. Kadangi $F = \frac{S_X^2}{S_Y^2} = 5{,}3$ patenka į intervalą (0,17182; 5,82), tai hipotezę $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ priimame ir galime laikyti kad imčių dispersijos yra lygios.

   Hipotezės: $H_0: a_X = a_Y, H_1: a_X \neq a_Y$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{3898 - 2745{,}71}{\sqrt{\frac{((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2)}{n+m-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{1152{,}29}{276{,}97} = 3{,}05.$$

   Kadangi, $t = 3{,}05 > 2{,}179 = t_{0{,}025}(12)$, tai hipotezė $H_0: a_X = a_Y$ atmetama.

3. Turime Vilniaus universiteto priimtų studentų skaičių 2008–2014 (X:6902, 6339, 5699, 5448, 5585, 5434, 5203) ir 2015-2021 metais (Y:5740, 5184, 5386, 5727, 5970, 7015, 6514). $\alpha = 0{,}05$. $n = m = 7$. $\bar{X} = 5801{,}43$, $S_X^2 = 362600{,}95$, $\bar{Y} = 5933{,}71$, $S_Y^2 = 408257{,}57$. Kadangi $F = \frac{S_Y^2}{S_X^2} = 1{,}13$ patenka į intervalą (0,17182; 5,82), tai hipotezę $H_0: \sigma_x^2 = \sigma_y^2$ priimame ir galime laikyti kad imčių dispersijos yra lygios.

   Hipotezės: $H_0: a_X = a_Y, H_1: a_X \neq a_Y$

$$t = \frac{\bar{X} - \bar{Y}}{\sqrt{S^2\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{5801{,}43 - 5933{,}71}{\sqrt{\frac{((n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2)}{n+m-2}\left(\frac{1}{n} + \frac{1}{m}\right)}} = \frac{-132{,}28}{331{,}85} = -0{,}4.$$

   Kadangi, $|t| = 0{,}4 < 2{,}179 = t_{0{,}025}(12)$, tai hipotezė $H_0: a_X = a_Y$ priimama.