

VILNIAUS UNIVERSITETAS MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKA
BAKALAURO STUDIJŲ PROGRAMA

Statistiniai metodai investicijų rizikai valdyti

Statistical methods for investment risk management

Baigiamasis bakalauro darbas

Atliko: Vaida Lebedevaitė
VU el. p.: vaida.lebedevaite@mif.stud.vu.lt
Vadovas: doc. dr. Martynas Manstavičius

Vilnius

2023

Turinys

Santrauka 1

Abstract 1

1. ĮVADAS 2

2. LITERATŪROS APŽVALGA/TEORINĖ DALIS 3

2.1 Rizikos sąvoka ir rūšys 3

2.2 Rizikos valdymas 4

2.2.1 Strategijos 4

2.3. Statistiniai rodikliai 4

2.3.1. Grąža ir rizika 5

2.3.2 Kiti investicinio portfelio rodikliai 7

2.3.3. Statistiniai metodai 8

3. PRAKTINĖ DALIS 14

3.1 Analizė 15

5. ŠALTINIAI 22

6. Priedas, R kodas 25

Santrauka

Bakalauro baigiamajame darbe yra pristatomi du statistiniai metodai rizikai valdyti investuojant į akcijas: modernaus portfelio teorija ir sąlyginės vertės pokyčio rizikos mato optimizavimas, kuris pasirenkamas kaip alternatyva vertės pokyčio rizikos mato optimizavimui. Darbas sudarytas iš dviejų dalių: teorinės ir praktinės.

Teorinėje dalyje yra nagrinėjami reikalingi statistiniai rodikliai, paaiškinta kaip yra susiję, jų reikšmė. Taip pat išvestos formulės portfeliui ir akcentuojamos jų svarbiausios dalys. Apibrėžtos statistinės charakteristikos: vidutinė grąža, standartinis nuokrypis, koreliacijos ir kovariacijos. Vėliau prieinama prie statistinių metodų istorijos ir apibrėžimų. Modernaus portfelio teorija (MPT), vertės pokyčio rizikos matas (VaR) ir sąlyginis vertės pokyčio rizikos matas (CVaR) yra nagrinėjami plačiau. Praktinėje dalyje teorija pritaikyta analizuojant realius duomenis ištrauktus iš Yahoo Finance platformos. Statistinės charakteristikos paskaičiuotos keturioms pasirinktoms akcijoms RStudio aplinkoje. Taikant modernaus portfelio teoriją ir CVaR optimizavimą suformuoti akcijų krepšeliai. Jų pagrindinės statistinės charakteristikos palyginamos. Gauti rezultatai interpretuoti, vizualiai atvaizduoti bei padarytos išvados.

Raktiniai žodžiai: rizika, grąža, portfelis, VaR, CVaR, modernaus portfelio teorija, CVaR optimizavimas.

Abstract

The thesis presents two statistical approaches to risk management when investing in stocks: Modern Portfolio Theory and Conditional Value at Risk optimization, which is selected as an alternative for Value at Risk optimization. The thesis consists of two parts: theoretical and practical.

The theoretical part deals with the statistical measures, explaining how they are related, their significance. The formulas are also derived for a portfolio, and their most important parts are highlighted. Mean return, standard deviation, correlation and covariance are the defined statistical characteristics. This is followed by definitions of the Modern Portfolio Theory (MPT), Value at Risk (VaR) and Conditional Value a Risk (CVaR). In the practical part, the theory is applied by analysing real data extracted from the Yahoo Finance platform. Statistical measures are calculated for four selected stocks in R programming language. A portfolio of stocks is constructed using Modern Portfolio Theory and CVaR optimization. Portfolios main statistical characteristics are compared. The results obtained are interpreted, visualized and conclusions drawn.

Keywords: risk, return, portfolio, VaR, CVaR, Modern Portfolio Theory, CVaR optimization.

1. ĮVADAS

Šiais laikais, kaip niekada, yra lengva investuoti. Pasak Lietuvos banko pradedant investuoti pirmasis ir pagrindinis žingsnis yra vertybinių popierių sąskaitos atidarymas finansų maklerio įmonėje [4]. Tai padaryti paprasta, nes yra gausu internetinių finansinių maklerių tinklapių, kurie net dovanoja akciją mainais už užsiregistravimą platformoje. Taip pat augant socialinės medijos įtakai tampa vis labiau populiaru investuoti nepriklausomai nuo patirties ar turimų žinių. Internete lengvai galima rasti finansinį raštingumą ugdančios informacijos įvairiomis pasaulio kalbomis, lietuvių kalbą įkaitant. Nepaisant to, nemažai randama ir informacijos kaip greitai praturtėti investuojant į įmonių akcijas, obligacijas, investicinius fondus, kriptovaliutas ir kitus finansinius instrumentus. Asmenys greitai įtikėję dviguba, ar dar didesne, grąža pamiršta, jog rizikuoja savo finansine padėtimi. Nemokamų pietų nėra, todėl ir investuodami žmonės prisiima riziką.

Rizikų srities viena pagrindinių funkcijų yra tirti riziką ir jos valdymą specifinėse srityse kaip investavimas [1]. Šiai rizikai apibūdinti nėra vieno bendro apibrėžimo, tačiau remiantis mokslinės literatūros informacija, galima apibrėžti pagal bendrą bruožą – nuostolio patyrimas ateityje, neapibrėžtumas. Investicijų grąža stipriai koreliuoja su rizikos lygiu. Fundamentalus teiginys apibūdinantis investavimo riziką – kuo didesnis grąžų svyravimas, tuo didesnė rizika, bet tuo pačiu didesnė grąžos tikimybė, kuri taip pat gali virsti nuostoliu.

Taigi investicija yra išlaidos siekiant pelno, kurios yra skirstomos į du tipus [2]. Fiksuotos – nekilnojamas turtas, automobiliai, įrenginiai bei piniginės – akcijos, obligacijos, vertybiniai popieriai ir pan. Bakalauriniame darbe yra koncentruojamasi į pinigines investicijas, konkrečiau – akcijas. Darbas paremtas teorijos taikymu iš investuotojo perspektyvos.

Pirmoje darbo dalyje yra aptariama reikalinga teorinė informacija, o antroje dalyje teorija yra pritaikoma darant pasirinktų akcijų analitinį tyrimą. Galiausiai, pateikiamos išvados ir rekomendacijos.

Tyrimo objektas: iš keturių įmonių akcijų suformuoti du portfeliai. Vienas portfelis atitinkantis modernaus portfelio teoriją, kitas optimizuoto CVaR portfelis.

Darbo tikslai:

- Išnagrinėti statistinius metodus ir susijusius statistinius rodiklius.
- Taikant aprašytą teoriją rasti MPT portfelį ir optimizuoto CVaR portfelį, juos palyginti.
- Išanalizuoti gautus rezultatus ir pateikti išvadas.

2. LITERATŪROS APŽVALGA/TEORINĖ DALIS

2.1 Rizikos sąvoka ir rūšys

Vieno apibrėžimo rizikai nėra, tačiau rizika dažniausiai siejama su neigiamais padariniais ateityje ir neapibrėžtumu. Remiantis moksline literatūra [1], investavimo riziką galima sutapatinti su tikimybe, kad investicija uždirbs mažiau nei buvo tikimasi arba praras vertę ir taps nuostolinga. Yra išskiriama diversifikuojama ir nediversifikuojama rizika, dar vadinamos atitinkamai nesisteminė ir sisteminė rizika. Šių rizikų valdymo būdai bus pateikti sekančiame skyrelyje plačiau paaiškinus H. Markowitz modernaus portfelio teoriją.

Be investavimo rizikos investuotojas taip pat turėtų įsivertinti ir kitas susijusias rizikos rūšis prieš priimdamas sprendimą dėl savo kapitalo. Toliau, trumpai apie pagrindines rūšis ir jų esminius bruožus pagal šaltinius [5] ir [6].

- Kredito rizika – rizika patirti nuostolius dėl antros pusės įsipareigojimų nevykdymo. Paprastai ji vertinama remiantis „banginių“ reitingų agentūrų (Moody’s, Fitch ir Standard&Poor‘s) kredito reitingais. Tai reiškia, investuotojas prieš sudarydamas sandorį, turėtų atsižvelgti į reitingą bei suprasti įmonių finansinių ataskaitų rodiklius.
- Likvidumo rizika. Ekonomine prasme likvidumas yra žinomas, kaip galėjimas greitai aktyvus įkeisti į grynuosius pinigus. Taigi, jei be sunkumų galima parduoti investiciją ir gauti už tai grynų pinigų, laikoma, jog aktyvas yra likvidus. Rizika atsiranda, kai rinkoje nėra pakankamos paklausos arba rinka yra nelikvidi.
- Rinkos rizika apibrėžiama kaip nuostolis dėl nepalankių veiksnių kaip kainų pokyčių, svyravimų perparduodant aktyvus. Rinkos rizikai turi įtakos tokie veiksniai kaip [5]:
    - Infliacijos rizika – rizika kai patiriamas pinigų nuvertėjimas dėl padidėjusių prekių ir paslaugų kainų.
    - Palūkanų normos rizika – kai palūkanų norma paveikia fiksuotų pajamų investicijas (vekselius, obligacijas).
    - Politinė rizika – kai pokyčiai politinėje pozicijoje, tvarkoje gali turėti įtakos investicijos vertei.
    - Valiutų kurso rizika – rizika kai investuota valiutos vertė sumažėja kitų valiutų atžvilgiu.
    - Koncentracijos rizika – rizika atsiranda, kai pinigai yra suinvestuoti į tam tikrą turtą ar sektorių.

2.2 Rizikos valdymas

2.2.1 Strategijos

Vieno universalaus būdo rizikai valdyti nėra, tačiau galima rasti daugybę straipsnių ir publikacijų nagrinėjančių investavimo riziką [5]. Investavimo rizikai valdyti galima išskirti kelias strategijas:

- Neinvestuoti

  Nerizikingų investicijų nėra. Net labai saugia investicija laikomi banko indeliai gali būti paveikti infliacijos bei kredito rizikos [18]. Nors ir infliacija yra visiškai nesuvaldoma rizikos rūšis, tačiau vienintelis būdas siekiant beveik pilnai išvengti investavimo rizikos yra neinvestuoti. Kitais žodžiais, neinvestuojant, nebus ką prarasti.

- Diversifikuoti finansinį portfelį

  Investuojant į įvairų turtą yra sumažinama bendra viso portfelio nesisteminė rizika. Įvairiu turtu yra laikomos skirtingos turto klasės (akcijos, obligacijos, vekseliai ir kiti instrumentai), skirtingi verslo sektoriai (energetika, aviacija, automobilių pramonė ir kita), skirtingi geografiniai regionai (Europa, Šiaurės Amerika, Pietų Amerika, Afrika, Azija, Australija). Jeigu investicijos nėra sutelktos į vieną pasirinktą turto vienetą bei yra tinkamai paskirstyta riziką, tai viso portfelio vertė stipriai nepasikeis vienai iš rizikų neigiamai paveikus portfelio aktyvą.

- Taikyti statistinius metodus.

  Statistinių rodiklių apskaičiavimas gali būti naudingas vertinant rizikos bei nuostolių dydį. Juos žinant ir teisingai interpretuojant galima išvengti arba įsivertinti galimus nuostolius, kas ir yra pagrindinis investicijų rizikos vertinimo tikslas. Dažnai naudojami statistiniai metodai rizikos vertinime yra portfelio optimizavimas pagal CVaR bei modernaus portfelio teoriją. Yra ir kitų svarbių metodų, tačiau šie bus taikomi praktinėje dalyje vertinant pasirinktų akcijų portfelį.

2.3. Statistiniai rodikliai

Pirmiausia, reikia apsibrėžti sąvokas, kurios bus vartojamos darbe. Remiamasi Lietuvos banko ir Swedbank pateiktomis sąvokomis bei kituose šaltiniuose pateikta literatūra.

Apibrėžimas 1 *([2]). Investavimas – tai turimų lėšų išleidimas dabar norint išsaugoti ir padidinti jų vertę ateityje.*

Apibrėžimas 3. *Aktyvas – finansinės priemonės rūšis, kurią įsigijus suteikiama teisė į turtą. Aktyvas gali būti nematerialus (finansinis instrumentas) ir materialus (fizinis turtas).*

Apibrėžimas 2 *([19]).* *Finansinis instrumentas – tai yra investicinio turto vienetas, kuriam įsigyti buvo sudaryta sutartis arba dokumentas, dėl finansinio sandorio sudarymo. Finansinių instrumentų rinkinį žymėsime* $A_1, A_2, \cdots, A_n$, *čia* $n \in \mathbb{N}$, *o* A_i *žymi i-ojo instrumento kainą.*

Apibrėžimas 4 *([4]).* *Akcijos – tai finansinio turto rūšis. Akcijų turėtojai įgyja tam tikrų turtinių ir neturtinių teisių, pavyzdžiui, teisę dalyvauti valdant bendrovę, t. y. balsuoti visuotiniuose akcininkų susirinkimuose, teisę gauti dividendus, teisę į bendrovės turto dalį likvidavus bendrovę, susipažinti su bendrovės informacija bei dokumentais ir kt. Akcijos šiame darbe dar bus vadinamos aktyvais.*

Apibrėžimas 5*.* *Investicijos grąža – dydis parodantis pelną arba nuostolį, gautą iš investavimo.*

Apibrėžimas 6 *([15]).* *Portfelis – visų turimų finansinių instrumentų rinkinys. Šiame darbe portfeliu bus vadinamas svorių vektorius* $(w_1, w_2, \cdots, w_n)$. *Portfelio kainos iš n aktyvų matematinė išraiška yra* $P = w_1A_1 + w_2A_2 + \cdots + w_nA_n$. *Finansinių instrumentų rinkinio svoriai yra tokie, kad,* $\sum_{i=1}^{n} w_i = 1$ *ir apriboti* $0 \leq w_i \leq 1$.

Finansų sektoriuje yra išskiriami rodikliai pagrįsti atsitiktinių dydžių momentais arba kvantiliais. Kvantiliais pagrįsti yra lengvai suprantami. Jų nepatikimumo pusė, tai kad daroma prielaida, jog galimų nuostolių pasiskirstymas pasirinktame laiko tarpe yra stacionarus ir praeities rezultatai rodo būsimus rezultatus. Praktikoje taip gali būti ne visada. Momentais pagrįsti rodikliai yra lengvai paskaičiuojamos statistinių dydžių charakteristikos, tačiau jie labai jautrūs nuokrypiams. Toliau bus aptariami rodikliais pagrįsti atsitiktinių dydžių momentais.

2.3.1. Grąža ir rizika

Kiekvieno investuotojo tikslas yra uždirbti pelną iš investicijų. Pelnas tai yra teigiamas skirtumas, kuris susidaro kainoms kintant. Šiam tikslui yra skaičiuojamos **aktyvų grąžos** ir lyginamos tarpusavyje, todėl yra svarbu suprasti iš ko susideda šis statistinis dydis. Išreiškime aktyvų grąžas matematiškai.

Turime finansinį instrumentą, kurio (atsitiktinė) kaina yra *A.* Jo istorinis laikotarpis $[0, T]$ suskirstytas į vienodo ilgio intervalus, o $\mathrm{g}_0, \mathrm{g}_1, \ldots \mathrm{g}_\mathrm{k}$ yra istorinės (empirinės) uždarymo vertės laiko momentais $\mathrm{t}_0, \mathrm{t}_1, \ldots \mathrm{t}_\mathrm{k}$,. Tuomet, aktyvo **istorinė** (empirinė) **grąža** r_j laiko momentu $\mathrm{t}_j, 0 < \mathrm{j} \leq \mathrm{k}$ yra lygi:

$$\mathrm{r}_j = \frac{\mathrm{g}_j - \mathrm{g}_{\mathrm{j}-1}}{\mathrm{g}_{\mathrm{j}-1}}. \qquad (1)$$

Žinant vieno laikotarpio grąžą, galima rasti finansinio instrumento visų grąžų empirinį (aritmetinį) vidurkį, kuris būtų lygus:

$$\hat{\mu} = \frac{\mathrm{r}_1 + \mathrm{r}_2 + \cdots + \mathrm{r}_\mathrm{n}}{\mathrm{n}} = \frac{1}{\mathrm{n}}\sum_{\mathrm{i}=1}^{\mathrm{n}} \mathrm{r}_\mathrm{i}. \quad (2)$$

Yra skaičiuojamas empirinis vidurkis, nes grąžos yra randamos iš akcijų istorinių duomenų. Teorinis vidurkis yra taip pat svarbu investicijų rizikų valdyme. Šis vidurkis taikomas teoriniams modeliams, kuriuose laikoma, kad duomenys pasiskirstę pagal tam tikrą pasiskirstymo funkciją. Finansų srityje yra mėgstama taikyti normalųjį skirstinį dėl jo paprastumo. Prisiminkime, kas yra normalusis arba Gauso atsitiktinis dydis.

***Apibrėžimas 7** ([21]). Laikoma, kad atsitiktinis dydis ξ turi normalųjį skirstinį su parametrais μ ir σ^2, jei jo tankio funkcija yra*

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}, \qquad -\infty < x < \infty. \quad (3)$$

Tuomet, normaliojo atsitiktinio dydžio ξ pasiskirstymo funkcija yra lygi:

$$F(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{x} e^{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}} dt. \quad (4)$$

Taigi, jei atsitiktinis dydis yra Gauso atsitiktinis dydis, jis yra žymimas $\xi \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$. Atsitiktinio dydžio pasiskirsčiusio pagal normalųjį skirstinį **teorinis vidurkis** lygus:

$$\mu = \int_{-\infty}^{\infty} xf(x)dx = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} xe^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}} dx. \quad (5)$$

Dažnai neužtenka turėti vieno aktyvo tikėtinos grąžos. Taigi, nesunkiai galima paskaičiuoti viso **portfelio** empirinį **grąžų vidurkį**:

$$\widehat{\mu_P} = \mathrm{w}_1\widehat{\mu_1} + \mathrm{w}_2\widehat{\mu_2} + \mathrm{w}_3\widehat{\mu_3} + \cdots + \mathrm{w}_n\widehat{\mu_n} = \sum_{i=1}^{n} \mathrm{w}_\mathrm{i}\widehat{\mu_i}. \quad (6)$$

Čia turimų finansinių instrumentų empirinės grąžos yra atvaizduojamos vektoriumi $(\widehat{\mu_1}, \widehat{\mu_2}, \cdots, \widehat{\mu_\mathrm{n}})$. Investuojamos dalys į pasirinktus finansinius instrumentus yra svoriai $\mathrm{w} = (\mathrm{w}_1, \mathrm{w}_2, \cdots, \mathrm{w}_\mathrm{n})$, kurių suma lygi 1, o kiekvieno aktyvo svoris neneigiamas.

Nors grąžos yra svarbus aspektas investicijų analizėje, tačiau jų neužtenka norint susidaryti pilną vaizdą. Išsamesnei analizei reikia įsivertinti riziką. Investavime standartinis nuokrypis yra suprantamas kaip **rizika**. Standartinis nuokrypis parodo vidutinę duomenų sklaidą apie vidurkį. Didesnis nutolimas identifikuoja, kad yra sunkiau nuspėti kaip elgsis pasirinktas aktyvas. Taip investuotojas gali įvertinti, kiek vidutiniškai gali skirtis turtas nuo tikimosi rezultato. Didesnė standartinio nuokrypio reikšmė (vertinant tos pačios rūšies akcijas)

identifikuoja aukštesnę riziką ir didesnius svyravimus. Individualaus **aktyvo** empirinė **rizika** yra apskaičiuojama traukiant šaknį iš dispersijos įverčio:

$$\widehat{\sigma_A} = \sqrt{\frac{\sum_{i=1}^{n}(\widehat{\mu_A} - r_i)^2}{n-1}}. \quad (7)$$

Visų turimų aktyvų rizikas apibūdina empirinių standartinių nuokrypių vektorius $(\widehat{\sigma_1}, \widehat{\sigma_2}, \cdots, \widehat{\sigma_n})$. Įsivertinti kiekvieno aktyvo standartinį nuokrypį yra svarbu ne tik norint suprasti individualų elgesį, bet ir analizuojant aktyvų portfelį. Dažnai investuotojas renkasi investuoti į kelis aktyvus, taip formuojamas portfelis. Turint kiekvienos akcijos standartinį nuokrypį nesunku paskaičiuoti viso **portfelio** empirinę **riziką**:

$$\widehat{\sigma_P} = \sqrt{\sum_{i,j} \hat{\rho}_{ij}\widehat{\sigma_i}\widehat{\sigma_j}w_i w_j}. \quad (8)$$

Čia $\hat{\rho}_{ij}$ yra koreliacijos koeficientas, kuris, kai $j = i$, lygus 1. Jis bus nagrinėjamas sekančiame skyrelyje.

Žinoma, yra ir neigiama pusė naudojant standartinį nuokrypį vertinimams. Akcijos kainos svyravimai gali būti pastovūs mėnesius ar metus, tačiau staigūs pokyčiai padaryti įtaką kainai. Taigi investuotojui svarbu įsigilinti į sutarties, sudarytos su finansų makleriu, sąlygas nenugalimos jėgos (*force majeure)* atveju bei taikyti kombinaciją kitų statistinių rizikos valdymo būdų.

2.3.2 Kiti investicinio portfelio rodikliai

Siekiant efektyvaus portfelio suformavimo yra svarbu įsivertinti aktyvų priklausomybę. Aktyvų **koreliacija** - tai akcijų tarpusavio ryšys. Šis statistinis rodiklis naudojamas investicijose norint palyginti dviejų ar daugiau aktyvų priklausomumo lygį. Rodiklis svarbus, nes diversifikuojant portfelį yra siekiama, jog vieno aktyvo vertei krintant ji būtų kompensuojama kito grąža.

Koreliacijos reikšmių sritis svyruoja nuo -1 iki +1. Jei koreliacijos koeficientas yra arti 1, investicijas sieja labai stipri priklausomybė ir kintant rinkos situacijai koreliuotos investicijos patirs panašų pokytį. Bei priešingai, jei koreliacija arti -1, aktyvų pokyčiai bus linkę būti su priešingų ženklų. Taigi, kai $i \neq j$, koreliacijos koeficientas tarp dviejų aktyvų, randamas pagal formulę:

$$\rho_{ij} = \frac{cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (9)$$

čia kaip ir anksčiau laikotarpis $[0, T]$ yra susiskirstytas į k lygių periodų. Tuomet,

$R_{i,n} = \frac{A_{i,n} - A_{i,n-1}}{A_{i,n-1}}$ ir $R_{j,n} \frac{A_{j,n} - A_{j,n-1}}{A_{j,n-1}}, 0 < n \leq k$ yra dviejų aktyvų atsitiktinės teorinės grąžos.

Svarbu akcentuoti, kad koreliacijos koeficientas yra naudojamas skaičiuojant viso portfelio riziką. Be to, plačiau išskleidus teorinės koreliacijos tarp dviejų aktyvų formulę:

$$\rho_{ij} = \frac{cov(R_i, R_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\mathbb{E}(R_i R_j) - \mathbb{E}R_i \mathbb{E}R_j}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\mathbb{E}(R_i R_j) - \mu_i \mu_j}{\sigma_i \sigma_j}, \quad (10)$$

matosi kitų, jau minėtų, rodiklių integravimas tolimesniuose skaičiavimuose. Formulėje naudojami dydžiai standartinis nuokrypis ir vidurkis jau yra aptarti darbe. Toliau, bus plačiau paaiškinta **kovariacija** ir jos reikšmė valdant investicijų riziką.

Teorinės kovariacijos galimos, tik jei egzistuoja atsitiktinių dydžių antrieji momentai (dispersijos). Tuomet kovariacija yra lygi vidurkinei sandaugai:

$$cov(R_i, R_j) = \mathbb{E}(R_i - \mathbb{E}R_i)(R_j - \mathbb{E}R_j) = \mathbb{E}R_i R_j - \mathbb{E}R_i \mathbb{E}R_j. \quad (11)$$

Šis statistinis rodiklis parodo dviejų aktyvų tiesinę priklausomybę – judėjimo kryptį. Jeigu kovariacija daugiau už 0, dydžiai laikomi teigiamai koreliuotais ir manoma, jog aktyvai juda ta pačia kryptimi. Bei priešingai, jei neigiama koreliacija – juda priešinga kryptimi. Formuojant diversifikuotą portfelį siekiama neigiama aktyvų koreliacija arba teigiama, bet arčiau nulio.

Visgi, dažnai yra reikalingi empiriniai koreliacijų ir kovariacijos rodikliai. Panašiai kaip (9) formulėje empiriniai rodikliai skaičiuojami pagal formulę:

$$\widehat{\rho_{ij}} = \frac{cov(\hat{R}_i, \hat{R}_j)}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j} = \frac{\sum(\hat{R}_i - \hat{\mu}_i)(\hat{R}_j - \hat{\mu}_j)}{\hat{\sigma}_i \hat{\sigma}_j} = \frac{1}{n-1} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{\hat{R}_{i,k} - \hat{\mu}_i}{\hat{\sigma}_i}\right)\left(\frac{\hat{R}_{j,k} - \hat{\mu}_j}{\hat{\sigma}_j}\right). \quad (12)$$

2.3.3. Statistiniai metodai

Apie 1952 metus investavimo rizikos valdymo srityje įvyko perversmas. Amerikiečių ekonomistas H. Markowitz pristatė **modernaus portfelio teoriją** (angl. Modern Portfolio Theory), sutrumpinus MPT. Originaliai MPT pradėta plėtoti autoriaus disertacijoje statistikos srityje. Teorijai sulaukus didelio susidomėjimo ji buvo detalizuota autoriaus knygoje pavadinimu *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments (1952)* [24]. MPT padėjo didelį pagrindą ekonomikos ir finansų srityje. Po kelių metų ekonomistas J. Tobin išleido savo darbą pavadinimu *Liquidity Preference as Behavior Toward Risk* [22], kurioje suformuojamos efektyvumo fronto ir kapitalo rinkos linijos sąvokos. Dar vėliau, buvo išplėtota W. Sharpe, J. Lintner ir J. Mossin darbe [25], kuriame suformuota kitas svarbus statistinis modelis - kapitalo turto įkainojimo modelis (angl. Capital Asset Pricing Model).

Modernaus portfelio teorija siūlo investuotojui rinktis tokį portfelį, kurio rizika būtų maksimaliai sumažinta, o grąža lygi konkrečiam grąžos lygiui arba maksimizuota pagal rizikos

lygį. Pagrindinis teorijos trūkumas tai, kad remiamasi nemažai prielaidų. Pagal šaltinį [17], jos yra tokios:

1. Investuotojai elgiasi racionaliai.
2. Investuotojai sutinka prisiimti didesnę riziką tik su sąlyga, kad gaus didesnę grąžą.
3. Investuotojai laiku gauna visą susijusią informaciją su investiciniais sprendimais.
4. Investuotojai gali skolintis ir skolinti neribotą pinigų kiekį už nerizikingą palūkanų normą.
5. Rinka yra tobula – didelė homogeniškų produktų pasiūla ir jiems yra paklausa.
6. Nėra taikomi mokesčiai ir išlaidos norint įsigyti finansinį instrumentą.
7. Galima įsigyti vertybinių popierių, kurių individualūs rezultatai nepriklauso nuo kitų portfelio investicijų.

Autorius teigė, kad renkantis portfelį reikia įsivertinti sisteminę ir nesisteminę riziką. Nesisteminė yra mažinama diversifikuojant portfelį, o sisteminė rizika tai rizika, kurios negalima išvengti. Taip yra, nes įmonė yra veikiama daug veiksnių ir tų veiksnių sukeliamos visos rizikos neįmanoma išvengti. Sisteminė rizika veikia didžiąją dalį įmonių. H. Markovitz pristatė beta koeficientą, kuris atitinka sisteminę riziką.

Beta rodiklis padeda susidaryti bendrą vaizdą aktyvo ar portfelio ryšio su visą rinką. Jis parodo kiek panašūs finansinio instrumento svyravimai lyginant su visa rinka. Aktyvo beta yra lygus kovariacijai tarp individualaus aktyvo ir visų rinkoje esančių akcijų grąžų, padalintas iš rinkos dispersijos:

$$\beta_i = \frac{cov(R_i, R_M)}{\hat{\sigma}_M^2}, \tag{13}$$

čia

R_i $-$ $aktyvo\ grąža,$

R_M $-$ $visos\ rinkos\ grąžos,$

$\hat{\sigma}_M$ $-$ $visos\ rinkos\ rizika.$

Portfelio beta koeficientas yra svertinė atskirų aktyvų betų suma, atsižvelgiant į jų svorius portfelyje [9]:

$$\beta_P = \beta_1 w_1 + \beta_2 w_2 + \cdots + \beta_n w_n. \tag{14}$$

Beta rodo finansinio instrumento priklausomumą nuo visos rinkos, tuo pačiu nurodo riziką: kuo didesnė reikšmė, tuo svyravimai didesni ir rizika aukštesnė. Įgaunamos reikšmės:

- $\beta < 0$, investicija juda priešinga linkme nei visa rinka.
- $\beta = 0$, investicija nekoreliuoja su rinka, todėl visa rinka neturi poveikio investicijos grąžai.
- $0 < \beta < 1$, beta svyruoja mažiau nei rinka. Tačiau mažesnė rizika – mažesnė grąža.

- $\beta = 1$, rizika tokia pati kaip visos rinkos.
- $\beta > 1$, beta svyruoja daugiau nei rinka. Tačiau didesnė rizika – didesnė grąža.

Toliau, apie kvantiliais pagrįstas statistines charakteristikas: vertės pokyčio riziką (*angl. VaR – Value at Risk*) ir sąlyginė vertės pokyčio riziką (*angl. CVaR – Conditional Value at Risk*). Šie matai populiarūs finansų institucijose ir tarp individualių investuotojų, nes apibendrina investavimo riziką vienu skaičiumi. Tačiau nėra apsiribojama tik šiais rizikos matais, jie dažnai naudojami kombinuojant su kitais metodais kaip modernaus portfelio teorija, testavimas nepalankiausiomis sąlygomis (*ang. stress testing*) ir scenarijų analizė (*angl. scenario analysis*).

VaR sąvoka finansinėse institucijose pradėta vartoti visai neseniai (apie 1990 metus). Pirmasis bankas, pradėjęs taikyti ir pasidalinęs viešai supaprastinta savo modelio versija, buvo JPMorgan Chase & Co – finansų institucija Jungtinėse Amerikos Valstijose. Tuo metu buvo pateikiamos ilgos ir detalios rizikos ataskaitos, kurias sunkiai suprasdavo įmonės vadovybė. Šiai problemai spręsti buvo pritaikyta Markovitz modernaus portfelio teoriją ir buvo išrastas VaR skaičiavimo būdas [5]. Tuo tarpu, CVaR matą ištyrinėjo matematikai R. Tyrrell Rockafellar ir Stanislav Uryasev XXI amžiaus pradžioje [3]. Jie teigė, kad CVaR yra panašus į VaR, tačiau galutinis pasirinkimas dėl kriterijaus naudojimo priklauso nuo matematinės savybių. Abu matai atsižvelgia į pelno (dešinė uodegos pusė) arba nuostolio (kairė uodegos pusė) grąžų tankio funkciją, tačiau jei skaičiuojama pagal dešinę uodegos pusę, tai imamas pelnas su minuso ženklu [6].

VaR mato reikšmei rasti yra taikomi kelis skaičiavimo būdai: parametrinis, istorinės simuliacijos ir Monte Karlo [26]. Nėra sutariama, kuris būdas yra tinkamiausias. Monte Karlo metodas yra sudėtingas analitinis įrankis, reikalaujantis daug laiko apskaičiuoti bei galingo kompiuterio su daug atminties. Istorinės simuliacijos VaR skaičiavimui naudojamos tikslios istorinės grąžos, tačiau svarbu parinkti tinkamą laikotarpį, kadangi VaR reikšmė labai priklauso nuo kelių didelių nuostolių praeityje. Neparametrinio (istorinės simuliacijos) VaR privalumas – nėra daroma prielaida, jog grąžos pasiskirsčiusios pagal konkretų skirstinį. Finansų srityje dažnai sutinkamas parametrinis VaR, skaičiuojant šį rodiklį yra remiamasi prielaida, kad grąžos yra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį. Visgi, tai nėra tinkamas būdas visiems atvejams, todėl yra reikalingas supratimas apie matus.

VaR rodiklis apibūdinamas kaip didžiausias galimas nuostolis per pasirinktą laiko periodą ir su pasirinktu pasikliovimo lygmeniu [6]. Šio mato dėka galima įsivertinti didžiausią galimą nuostolį, bet kuriam pasirinktam laikotarpiui. Matematinis ekvivalentas būtų: jei nuostoliai žymimi L, o pasirinktas pasikliovimo lygmuo yra α, tai

$$VaR_\alpha(L) = \inf\{\mathrm{l} \in \mathbb{R}, \mathbb{P}(\mathrm{L} > \mathrm{l}) \leq 1 - \alpha\}. \quad (15)$$

Verta paminėti, kad nuostoliai yra funkcija priklausanti nuo dviejų parametrų – pasirinkto portfelio ir atsitiktinių dydžių, turinčių įtakos nuostoliams [29]. Laikysime, kad w yra pasiekiamas portfelis iš aibės W, kurios grąža ir nuostolis priklauso nuo atsitiktinio vektoriaus $Y \in R^m$. Tuomet, šio portfelio nuostolis L gali būti išreiškiamas kaip funkcija $f(w, Y)$. Siekiant aiškumo ir paprastumo dabar formulėse nuostoliai bus žymimi L raide.

Suskaičiuoti istorinės simuliacijos VaR nėra sudėtinga. Tariant, kad imtis yra lygi visų pasirinkto periodo grąžų skaičiui S, o pasikliovimo lygmuo yra α. Tuomet $VaR_\alpha(L)$ įvertinys yra lygus *i*–ajam mažiausiam imties elementui, čia $i = \alpha S$, kai i yra sveikasis skaičius. Kuomet i nėra sveikasis skaičius, tokiu atveju yra taikoma tiesinė interpoliacija tarp dviejų gretimų elementų [27].

Daugiau iššūkių keliantis yra parametrinio VaR radimas. Laikoma, kad skaičiuojant parametriniu VaR būdu, nuostoliai L yra pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį. Kaip minėta anksčiau, skirstinį aprašo teorinis vidurkis ir teorinis standartinis nuokrypis. Tuomet parametrinis VaR paskaičiuojamas pagal formulę [3]:

$$VaR_\alpha(L) = \mu + \sigma z_\alpha, \quad (16)$$

čia z_α – normaliojo skirstinio α lygmens kritinė reikšmė. Paprastai z_α reikšmės imamos iš jau suformuotų reikšmių lentelės: z_α yra toks skaičius, kuris tenkina sąlygą $\mathbb{P}(X \leq z_\alpha) = \Phi(z_\alpha) = 1 - \alpha$ [23], čia X – atsitiktinis dydis, turintis standartinį normalųjį skirstinį. Parametrinio VaR rodiklio skaičiavimas yra laikomas netinkamu, jeigu turimų duomenų pasiskirstymas stipriai skiriasi nuo normaliojo skirstinio pasiskirstymo. Be to, pagrindinis VaR minusas yra tas, kad jis nėra suderintas rizikos matas, bendruoju atveju – netenkina subadityvumo savybės.

Apibrėžimas 8 ([8]). *Suderintu matu vadinamas rizikos matas, kuris tenkina keturias aksiomas: teigiamo homogeniškumo, monotoniškumo, invariantiškumo poslinkiui, subadityvumo.*

Aksiomos portfelio rizikai yra aprašytos naudojantis šaltiniu [6], o bendrosios formulės pateiktos pagal šaltinį [5]. Laikysime, kad V yra realiųjų atsitiktinių dydžių aibė, funkcija $\rho: V \to \mathbb{R}$, o a. d. $X,\ Y,\ X + Y \in V$.

Aksioma 1. *Subadityvumas – dviejų portfelių sumos rizikos mato reikšmė turi būti nedidesnė, nei atitinkamų atskirų rizikos mato reikšmių suma:*

$$\rho(X + Y) \leq \rho(X) + \rho(Y). \quad (17)$$

Aksioma 2. *Invariantiškumas poslinkiui – jei pridėdamas prie esamo portfelio tam tikras pinigų kiekis $a \in \mathbb{R}$, jo rizikos dydis turėtų sumažėti per a vienetų:*

$$\rho(X + a) = \rho(X) - a. \quad (18)$$

Aksioma 3. *Monotoniškumas – jei vieno portfelio rezultatai prastesni nei kito portfelio, tai jo rizika turėtų būti didesnė:*

$$X \leq Y \implies \rho(Y) \leq \rho(X). \tag{19}$$

Aksioma 4. *Teigiamas homogeniškumas – padidinus ar sumažinus portfelio dydį $\lambda > 0$ kartų svorius išlaikant tokius pačius, portfelio rizika turėtų padidėti arba pamažėti tuos pačius λ kartų:*

$$\rho(\lambda X) = \lambda \rho(X). \tag{20}$$

Kita statistinė charakteristika yra sąlyginės vertės pokyčio rizika dar žinoma kaip deficito vidurkio matas (*angl. CVaR – Conditional Value at Risk arba Expected Shortfall*). Šis rodiklis yra viršutinis vertės pokyčio rizikos mato rėžis. Priešingai nei VaR, CVaR bendru atveju yra suderintas ir tolydus (pasikliovimo lygmens atžvilgiu) rizikos matas. Paprastai CVaR reikšmė būna apie 20% didesnė nei VaR. Čia ir atsiranda CVaR metodo trūkumas. CVaR istorinio modeliavimo būdu yra rekomenduojama skaičiuoti, jeigu žinoma, kad turimas modelis yra tikslus. Tai yra, turimi duomenys atitinka dabartinę situaciją bei duomenų yra pakankamai daug.

Taigi, bendru atveju sakoma, kad CVaR matas yra galimų nuostolių, viršijančių vertės pokyčio rizikos mato ribą, vidurkis:

$$CVaR_\alpha(L) = \mathbb{E}[L|L > VaR_\alpha(L)]. \tag{21}$$

Čia visi žymėjimai išlieka tokie pat kaip vertės pokyčio rizikos mato atveju. Kadangi, CVaR yra laikomas reikšmių vidurkiu viršijančių VaR_α reikšmę [28], todėl formulė atrodo taip:

$$CVaR_\alpha(L) = \frac{1}{1-\alpha}\int_\alpha^1 VaR_\alpha(L)d\alpha\,, \;\; \alpha \in (0,1). \tag{22}$$

Jei nuostoliai yra aproksimuojami normaliuoju skirstiniu, tuomet CVaR formulė pagal šaltinį [7] yra:

$$\widehat{CVaR}_\alpha(L) = \hat{\mu} + \hat{\sigma}\frac{e^{-\frac{z_\alpha^2}{2}}}{\sqrt{2\pi}(1-\alpha)}. \tag{23}$$

VaR ir CVaR rodiklių apskaičiuotos reikšmės naudojamos įvertinti potencialius nuostolius ir bendrą portfelio riziką. Dažniausiai rizikų valdymo srityje sutinkami pasikliovimo lygmenys yra 95%, 99%, 99.9%. Pasikliovimo lygmenys pasirenkami būtent tokie, nes tikslas išsiaiškinti ekstremalius arba labai retus įvykius. Kadangi skaičiuojama pagal pasirinktą pasikliovimo lygmenį yra nutylima apie ypač retus įvykius. Tarkime, pasirinktas pasikliovimo lygmuo yra 95%, tuomet nėra žinomi nuostoliai, kurie gali įvykti likusiuose 5%. Taip pat, ne visada gautos VaR ir CVaR reikšmės gali atitikti toleruojamą rizikos lygį. Šiam tikslui yra sprendžiamas optimizavimo uždavinys, kurio tikslas sumažinti riziką.

Pasirinkus tą patį pasikliovimo lygmenį α, VaR reikšmė niekada nebus didesnė nei CVaR. Taigi, iš to išplaukia, kad portfelis su žema CVaR reikšme atitinkamai turės žemą VaR reikšmę, todėl užtenka optimizuoti pagal vieną iš matų. Optimizuoti VaR matą, kai grąžos nėra pasiskirsčiusios pagal normalųjį skirstinį yra sudėtinga, o CVaR matas pasižymi geresnėmis savybėmis (priminimas: matas yra subadityvus ir tolydus pasikliovimo lygmens atžvilgiu), todėl bus aprašoma CVaR optimizavimo eiga remiantis [7] ir [29] šaltiniais.

Portfelio **optimizavimas CVaR metodu** yra vienas sudėtingesnių uždavinių, kadangi norint paskaičiuoti CVaR reikia žinoti ir VaR reikšmę. Pagrindinė optimizavimo idėja pagal [29] šaltinį yra rasti tokius portfelio svorius, kad su pasirinktu pasikliovimo lygmeniu būtų minimizuotas tikėtinas nuostolis. Taigi, anksčiau minėtas nuostolis L bus keičiamas w siekiant paryškinti priklausomybę nuo pasirinkto portfelio. Taip pat paprastumo dėlei laikysime, kad $p(y)$ yra a.d. y tankio funkcija bei ji yra tolydi. Tuomet, tikimybė, kad nuostolis $f(w, Y)$ dėl pasirinkto portfelio w neviršys ribos γ yra:

$$\Psi(w, \gamma) = \int_{f(w,y) \le \gamma} p(y)\, dy. \tag{24}$$

Čia funkcija $\Psi(w, \gamma)$ yra nuostolio dėl pasirinkto portfelio w pasiskirstymo funkcija taške γ. Tai nemažėjanti γ atžvilgiu ir tolydi iš dešinės funkcija, tačiau yra daroma lengvinamoji prielaida, kad funkcija yra tolydi visoje srityje pagal γ. Nagrinėjant bendrą atvejį persirašome (15) ir (22) formules:

$$VaR_\alpha(w) = \gamma_\alpha(w) = min\{\gamma \in \mathbb{R}: \Psi(w, \gamma) \ge \alpha\}, \tag{25}$$

$$CVaR_\alpha(w) = \phi_\alpha(w) = \frac{1}{1-\alpha} \int_{f(x,y) \ge VaR_\alpha(w)} f(w, y) p(y)\, dy. \tag{26}$$

Išsiaiškinus pagrindines išraiškas, galima prieiti prie esminės optimizavimo dalies. Paprastumo dėlei yra susikuriama pagalbinė funkcija, kuri gali būti naudojama vietoj CVaR funkcijos:

$$F_\alpha(w, \gamma) := \gamma + \frac{1}{1-\alpha} \int_{\mathbb{R}^m} [f(w, y) - \gamma]^+ p(y)\, dy, \tag{27}$$

čia $t^+ = \max\{0, t\}$.

Svarbu paminėti, kad [29] šaltinio autoriai įrodė, jog:

1. $F_\alpha(w, \gamma)$ yra iškila į apačią α funkcija. Būtent ši savybė užtikrina, kad lokalaus ir globalaus minimumo taškas nesiskirs.

2. $CVaR_\alpha(w)$ yra minimali funkcijos $F_\alpha(w,\gamma)$ reikšmė γ atžvilgiu taške $VaR_\alpha(w)$. Tam, kad įsitikintume, jog sprendinys egzistuoja reikalingas detalesnis paaiškinimas.

Teiginys 1 ([29]). Tarkime, aibė $O_\alpha(w)$ yra sudaryta iš tokių γ reikšmių, kurios minimizuoja $F_\alpha(w,\gamma)$ funkciją. Tuomet $\mathrm{O}_\alpha(\mathrm{w}) = \mathrm{argmin}\mathrm{F}_\alpha(\mathrm{w},\gamma)$ yra netuščias uždaras intervalas, kurio kairysis galinis taškas yra lygus $\mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{w})$. Tokiu atveju bus teisinga:

$$\mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{w}) = \mathrm{argmin}\mathrm{F}_\alpha(\mathrm{w},\gamma), \tag{28}$$

$$\mathrm{CVaR}_\alpha(\mathrm{w}) = \mathrm{F}_\alpha\big(\mathrm{w},\mathrm{VaR}_\alpha(\mathrm{w})\big). \tag{29}$$

Visgi, dažnai neįmanoma ir tuo pačiu nerekomenduojama nustatyti atsitiktinių nuotolių tankio funkciją $p(y)$, tokiu atveju yra skaičiuojama šiek tiek kitaip. Vienas iš būdų yra aproksimuoti (27) išraiškos integralą (vidurkį) naudojant scenarijų metodą. Scenarijai gali būti generuojami tiek pasitelkiant istorinius duomenis, tiek Monte Karlo simuliaciją. Imtį, sugeneruotą iš atsitiktinio dydžio Y realizacijų, žymėsime $y_s,\ s = 1,2,\cdots,S$. Kadangi atsitiktinio dydžio Y tikslios reikšmių įgijimo tikimybės nėra žinomos, todėl bus daroma prielaida, kad kiekvieno elemento, iš vektorių rinkinio $y_1, y_2, \cdots, y_S$, pasirodymo tikimybė yra tokia pati ir nepriklauso nuo kitų reikšmių pasirodymo [7]. Tuomet skaitinė funkcijos aproksimacija gali būti perrašoma naudojant atsitiktinių įvykių empirinį pasiskirstymą pagal turimus scenarijus:

$$\widehat{F_\alpha}(w,\gamma) := \gamma + \frac{1}{(1-\alpha)S}\sum_{s=1}^{S}(f(w,y_s)-\gamma)^+. \tag{30}$$

Gavę mažiausią funkcijos reikšmę, ją laikome optimizuotu CVaR, o svoriai $\sum_{j=1}^{n} w_j = 1$ yra portfelio, gauto CVaR optimizavimo metodu, akcijų svoriai.

3. PRAKTINĖ DALIS

Praktinėje dalyje yra analizuojamos Tesla Inc. (TSLA), Bookings Holdings Inc. (BKNG), Ford Motor Co. (F) bei Netflix Inc. (NFLX) akcijos trijų metų laikotarpyje (nuo 2020-04-13 iki 2023-04-13). Beta koeficientas suskaičiuotas laikant Wilshire 5000 Total Market indeksą visos rinkos atvaizdu. Istoriniai duomenys nuskaityti iš Yahoo Finance duomenų bazės [11], [12], [13], [14], [16].

Tyrimo objektas ir laikotarpis pasirinktas ne atsitiktinai. Pastarieji treji metai stipriai sukrėtė akcijų rinką. Vienas svarbesnių įvykių, Covid-19 pandemija, neigiamai paveikė turizmo ir paslaugų sektorių bei teigiamai medijos ir pramogų sektorių [10]. Juos reprezentuoja Bookings Holdings Inc. (BKNG) teikianti apgyvendinimo paslaugas skirtingose pasaulio šalyse bei Netflix Inc. (NFLX) teikianti filmų, televizijos laidų ir dokumentikos prenumeratos paslaugas internetu.

Kitos dvi pasirinktos įmonės, kurių akcijos bus analizuojamos, yra automobilių gamintojai. Per pastaruosius metus augant žmonių sąmoningumui klimato kaitos atžvilgiu bei augant kuro kainoms stipriai suklestėjo elektrinių automobilių rinka. Tesla Inc. (TSLA) sąlyginai nauja įmonė buvo įkurta 2003 metais ir specializuojasi tik elektrinių automobilių gamyboje. Per tiek metų tapo visišku lyderių elektrinių automobilių rinkoje. Tuo tarpu Ford Motor Co. (F) įkurta šimtu metų anksčiau nei Tesla yra vienas populiariausių gamintojų pasaulyje. Šių dviejų įmonių akcijos priklauso tai pačiai turto klasei. Nors portfelio diversifikavimo metodas dažniausiai taikomas investuojant į skirtingas turto klases, tačiau šis metodas laikomas efektyviu ir investuojant į skirtingas kompanijas esančias tame pačiame sektoriuje. Šiuo atveju tai būtų automobilių pramonė.

Akcijos yra vienas rizikingiausių investavimo objektų. Svarbu atlikti išsamią analizę. Šiame skyriuje akcijų analizė atlikta naudojant RStudio programą ir Microsoft Excel Solver funkciją. R kodas pateiktas priede.

3.1 Analizė

Analizė pradedama nuo įmonių akcijų individualios analizės. Paskaičiuoti pagrindiniai statistiniai rodikliai: grąžų vidurkiai, standartiniai nuokrypiai ir dispersijos, kurie yra apibendrinami lentelėje:

	TSLA	**BKNG**	**F**	**NFLX**
Vidurkis - $\widehat{\mu}$	0.00275	0.00107	0.00172	0.00029
Stand. nuokrypis - $\widehat{\sigma}$	0.04152	0.02454	0.02827	0.03166
Dispersija - $\widehat{\sigma}^2$	0.00172	0.0006	0.0008	0.001

1 lentelė: Kiekvienos akcijos grąžų duomenys

Matome, kad gaunama didžiausia vidutinė grąža yra iš TSLA akcijų, tačiau taip pat ir patiriama didžiausia rizika. Priešingai, BKNG akcijų vidutinė grąža mažiausia ir tuo pačiu mažiausia rizika. Tad jei bus investuojama viskas į vieną akciją, iškils problema dėl didelės rizikos arba mažos grąžos. Kaip buvo minėta anksčiau, pagal H. Markowitz modernaus portfelio teoriją laikoma, kad investuotojas yra racionalus. Individo, kuris valdo riziką, siekis – maksimaliai padidinti grąžą ir maksimaliai sumažinti riziką. Taigi tolesnė analizė bus daroma formuojant portfelį. Suformuotiems portfeliams yra taikomi šie apribojimai:

1. Portfelio svorių suma turi būti lygi 1.
2. Portfelis laikomas ilgą laiko tarpą ir tikimasi, kad vertė padidės. Pasiskolinto turto pardavimas ir ketinimas ateityje atpirkti jį už mažesnę kainą negalimas.
3. Išmokami dividendai nėra pridedami prie grąžos.

Formuojant portfelį pagal modernaus portfelio teoriją yra svarbu įsitikinti, jog pasirinkti aktyvai yra nepriklausomi arba silpnai priklausomi. Aktyvų tarpusavio ryšiui ištirti yra randama koreliacijos matrica, kurios pagalba galima identifikuoti diversifikacijos kokybę. Tai reiškia, kad esant ekonomikos nuosmukiui visas portfelis nepraras savo vertės – vienos akcijos krintančią vertę kompensuos stabili ar didėjanti kitų akcijų vertė. Pastebime, kad vidutiniškai koreliuojančios poros yra atitinkamai Ford Motor Co. su Bookings Holdings Inc. bei Netflix Inc. su Tesla Inc. Taigi akcijų krepšelis yra tinkamas teisingai paskirsčius svorius.

	TSLA	**BKNG**	**F**	**NFLX**
TSLA	1	0.29883	0.30332	0.3993
BKNG	0.29883	1	0.48189	0.22964
F	0.30332	0.48189	1	0.24063
NFLX	0.3993	0.22964	0.24063	1

2 lentelė: Koreliacijų matrica

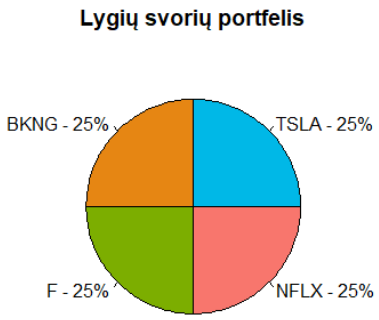
Toliau randame kovariacijų matricą. Kovariacija yra svarbi norint suprasti akcijų grąžų judėjimo kryptį. Pagal gautus rezultatus matome, jog aktyvai yra silpnai koreliuoti – koeficientai yra arti nulio. Galime daryti išvadą, kad priklausomybės tarp aktyvų yra ne tiesinės.

	TSLA	**BKNG**	**F**	**NFLX**
TSLA	0.00172	0.0003	0.00036	0.00052
BKNG	0.0003	0.0006	0.00033	0.00018
F	0.00036	0.00033	0.0008	0.00022
NFLX	0.00052	0.00018	0.00022	0.001

3 lentelė: Kovariacijų matrica

Įsivertinus, kad pasirinktos įmonių akcijos yra tinkamos formuoti portfelius bei turint pagalbinę informaciją skaičiavimams, galima pradėti formuoti portfelius. Bus formuojami keturi portfeliai: lygių svorių, minimalios rizikos, maksimalios grąžos su nustatytu rizikos ribojimu ir pagal CVaR matą optimizuotas portfelis.

Pirmasis formuojamas portfelis yra lygių svorių. Svorių paskirstymas lygiomis dalimis yra intuityvus ir paprastas būdas mažinti riziką. Taip yra užtikrinama, jog nei vienas aktyvas nedominuotų akcijų krepšelyje. Taip pat tai yra puikus įrankis norint palyginti kitų suformuotų portfelių efektyvumą. Po 25% kiekvienai akcijai paskirstyti svoriai atvaizduojami:



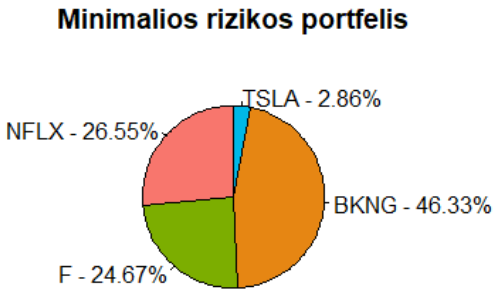
1 pav.: Pirmasis portfelis

Kadangi mus domina vidutinė grąža ir patiriama rizika, šiuos rodiklius taip pat suskaičiuojame pagal (2) ir (8) formules. Gauname vidutinę dienos grąžą 0.0015, o rizika yra 0.0223. Juos atvaizduojame lentelėje:

Vid. dienos grąža - $\widehat{\mu}_1$	0.00146
Rizika - $\widehat{\sigma}_1$	0.0223

4 lentelė: Lygių svorių portfelio grąža ir rizika

Lygių svorių portfelis yra paskaičiuojamas tik kaip kontrolinis dydis, todėl toliau skaičiavimus tęsiame ieškodami minimalios rizikos portfelio. Naudodami optimize.portfolio funkciją R pakete randame minimalios rizikos portfelio svorius ir gautus duomenis atvaizduojame skritulinėje diagramoje:



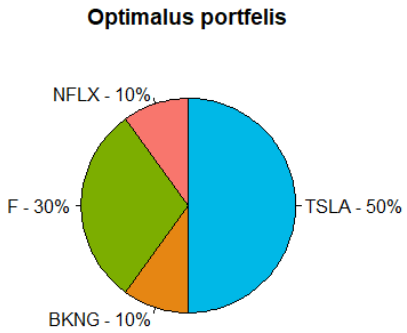
2 pav.: Antrasis portfelis

Analogiškai paskaičiuojame tokio portfelio vidutinę dienos grąžą ir riziką, kurios lygios $\hat{\mu}_2 = 0.00106841$ ir $\hat{\sigma}_2 = 0.02039763$.

Minimalios rizikos portfelis tinkamas rizikos vengiančiam individui, tačiau tikslas yra rasti tokį portfelį, kuris generuotų kuo didesnę grąžą su nustatytu rizikos lygiu. Rizika pagal jau gautus portfelius svyruoja tarp 0.0204 ir 0.0223, tad aukštesnis rizikos lygis yra tinkamas tik tuo atveju, jei ir grąža bus didesnė nei $\hat{\mu}_1 = 0.00146$. Taip pat minimalios rizikos portfelyje į TSLA akcijas yra investuojama mažiau nei 3%, nors pagal pirmą lentelę matome, jog didžiausią grąžą generuoja būtent šios įmonės akcijos. Šiam tikslui bus taikomi papildomi apribojimai portfeliui:

1. Akcijų svoriai portfelyje turi sudaryti ne mažiau nei 10% ir ne daugiau nei 50%.
2. Rizika negali viršyti 0.025 per dieną.

Svoriai tokiame portfelyje išsidėstytų:



3 pav.: Trečiojo portfelio svoriai

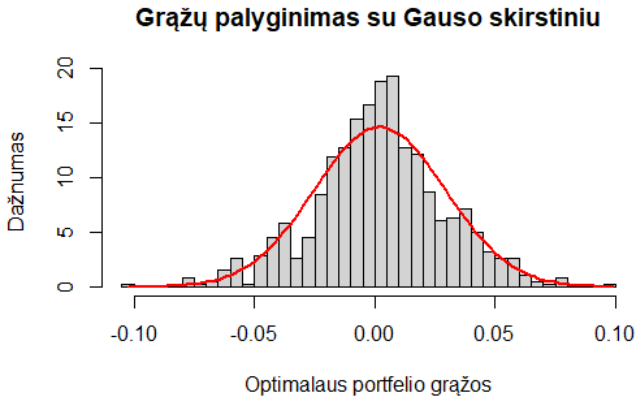
Apskaičiuojama vidutinė dienos grąža bei rizika:

Vid. dienos grąža - $\hat{\mu}_3$	0.00203
Rizika - $\hat{\sigma}_3$	0.03212

5 lentelė: Optimalaus portfelio grąža ir rizika

Iš lentelėje pateiktų duomenų matome, kad vidutinės grąža bei rizikos rodiklis yra didesni tiek už minimalios rizikos, tiek už lygių svorių portfelių tuos pačius rodiklius. Gautą portfelį laikysime optimaliu pagal H. Markowitz modernaus portfelio teoriją.

Optimalaus portfelio analizę tęsime skaičiuodami statistinius matus, kurie dažnai naudojami investicijų rizikos valdyme. Nubrėžę grąžų histogramą su normaliojo skirstinio kreive, pastebime, kad dėl „sunkių“ uodegų tinkamesnis būdas yra VaR mato skaičiavimas pagal istorinės simuliacijos metodą.



4 pav.: Optimalaus portfelio pagal MPT grąžų skirstinys su normaliojo skirstinio kreive

Apskaičiuojame VaR ir CVaR su 95% pasikliovimo lygmeniu. Tai leis sužinoti kokių nuostolių tikėtis ateityje. Didžiausias galimas nuostolis yra 0.00750 per dieną, o vidutinis didžiausias nuostolis – 0.0987. Remiantis teorine dalimi galime teigti, jog gauti atsakymai yra logiški, nes VaR reikšmė apytiksliai 20% mažesnė už CVaR ($0.07504 \times 1.2 = 0.09005$). Atvaizduojame lentelėje:

VaR_95	-0.07504
CVaR_95	0.098671

6 lentelė: Vertės pokyčio rizika (VaR) ir sąlyginė vertės pokyčio rizika (CVaR)

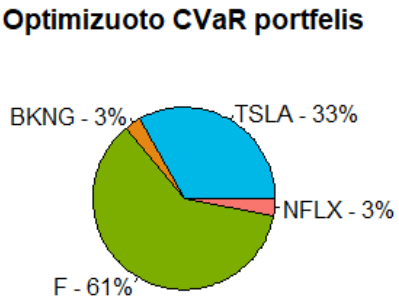
Paskutinis žingsnis portfelio (pagal MPT optimizavimą) analizėje yra rasti beta koeficientą, kuris nurodo nediversifikuojamą riziką. Prieš tai atlikti žingsniai leido suformuoti diversifikuotą portfelį su maksimalia grąža ir minimalia rizika. Kadangi viena iš svarbių rizikų yra rinkos rizika, todėl reikia išsiaiškinti portfelio ryšį su rinka. Pasirinktas Wilshire 5000 Total Market indeksas vietoj visiems žinomo S&P500, nes būtent jis reprezentuoja beveik visų viešai prekiaujamų įmonių akcijas Junginių Valstijų rinkoje [20]. Taigi šis indeksas įtraukia daugiau įmonių akcijų lyginant su S&P500, kuris įtraukia tik 500 didžiausias, NASDAQ akcijų rinkoje prekiaujamas, akcijas.

Taikydami teorinėje dalyje pateiktą (14) formulę R aplinkoje apskaičiuojame portfelio koeficientą beta: $\beta_P = 1.855174 \times 0.5 + 1.2228783 \times 0.1 + 1.3518748 \times 0.3 + 1.2471326 \times 0.1 = 1.58$. Rasta beta koeficiento reikšmė didesnė už 1, todėl galime teigti, jog suformuoto akcijų portfelio svyravimai yra didesni nei rinkos. Tai nereiškia, jog portfelis netinkamas. Didesnė už rinkos beta reikšmė identifikuoja, jog ir tikėtina grąža yra didesnė už rinkos – tai yra dažnas atvejis. Wilshire 5000 Total Market indekso analogai yra žinomi ir traukia investuotojus dėl savo stabilumo ir nuosekliai augančios grąžos per ilgą laikotarpį.

Toliau analizę pratęsime formuodami optimalų portfelį pagal sąlyginį vertės pokyčio rizikos matą. Optimalaus portfelio svorių radimui yra naudojama Microsoft Excel funkcija Solver. Šis būdas pasirinktas, nes greičiau ir paprasčiau galima suprasti, kur galėjo įsivelti klaida ir lengvai apdoroti didelius duomenų kiekius. Pirmiausia apskaičiuojame lygių svorių portfelio (žr. pav. 1) kiekvienos dienos grąžas. Toliau randame VaR matą pagal kairiąją grąžų pasiskirstymo funkcijos uodegą su 95% pasikliovimo lygmeniu, $\mathrm{VaR}_{95\%} = -0.03752$. Šiame darbe vienas periodas yra viena diena, o akcijų birža dirba tik darbo dienomis, todėl imties dydis $S = 255$. Pagal teorinę dalį laikysime, kad tikimybė kiekvienai grąžai iš sugeneruoto atsitiktinio vektoriaus pasikartoti yra $\frac{1}{255}$. Pagal (22) formulę randamas CVaR matas lygių svorių portfeliui, kuris toliau bus optimizuojamas remiantis (30) skaitinės aproksimacijos išraiška, t. y., bus ieškomi portfelio svoriai. Sėkmingam portfelio optimizavimui reikia apsibrėžti kelis apribojimus, jie yra tokie:

1. Kiekvienos akcijos svoris turi būti didesnis arba lygus 0.03, o svorių suma turi būti lygi 1.
2. Portfelio grąža ne mažesnė nei 0.002. Grąžos slenkstis pasirinktas atsižvelgus į portfelio, suformuoto pagal MPT, grąžą $\hat{\mu}_3 = 0.00203$.

Rizikos apribojimai nėra identifikuojami, nes CVaR reprezentuoja riziką. Taigi išsprendę CVaR optimizavimo uždavinį, portfeliui randame minimizuotą $CVaR_{95\%} = 0.065577$, kuris pasiekiamas su tokiais svoriais:



4 pav.: Ketvirtojo portfelio svoriai

Tuomet pagrindiniai statistiniai rodikliai yra lygūs:

Vid. dienos grąža - $\hat{\mu}_4$	0.001996
Rizika - $\hat{\sigma}_4$	0.025820
β_4	1.510951

7 lentelė: CVaR optimizuoto portfelio grąža, rizika, beta

Matome, kad, optimizavus portfelį pagal CVaR optimizavimo metodą, gauname rizikos rodiklius žemesnius nei pagal MPT optimizaciją. Rizikingiausioms TSLA akcijoms skiriamas trečdaliu mažesnis svoris. Neigiama pusė ta, jog yra gaunama mažesnė vidutinė dienos grąža, tačiau toks suformuotas portfelis yra puiki alternatyva asmeniui, kurio tikslas mažinti riziką , nes uždirbama grąža nedaug skirtųsi nuo MPT portfelio grąžos.

4. IŠVADOS IR REZULTATAI

Šiame darbe buvo aptarti dažnai taikomi statistiniai metodai investavimo rizikai valdyti. Teorinėje dalyje buvo paaiškinta kaip yra susiję statistiniai rodikliai, jų reikšmė. Praktinėje dalyje buvo pritaikyta teorija nagrinėjant keturias pasirinktas akcijas ir suformuotus portfelius remiantis keturių metų laikotarpio istorine informacija. Gauti rezultatai parodė, jog renkantis TSLA, NFLX, F ir BKNG akcijas portfelis yra pakankamai diversifikuojamas. Taip pat, buvo suformuotas optimalus portfelis remiantis modernaus portfelio teorija bei portfelis pagal optimizuotą CVaR matą. Buvo paskaičiuoti statistiniai dydžiai: vidutinė grąža, standartinis nuokrypis, koreliacijų ir kovariacijų matricos, beta koeficientas. Išsiaiškinta, kad suformuotų portfelių rizika yra aukštesnės nei rinkos, kas reiškia, jog ir tikėtinos grąžos didesnės.

Nagrinėti metodai turi savo privalumų ir trūkumų. Metodai yra labai jautrūs pasirinkto laikotarpio atžvilgiu, todėl svarbu išsiaiškinti kokios rizikos veikia akcijų uždarymo ir atidarymo kainas. CVaR optimizacija koncentruojasi į sąlyginio vertės pokyčio rizikos mato mažinimą. Tai gali būti geras būdas, siekiant apriboti ekstremalių nuostolių riziką portfelyje. Tačiau taip pat gali apriboti diversifikacijos siekiamybę ir paversti portfelį pernelyg koncentruotu. Kita vertus, optimizavimo pagal MPT pagrindinis siekis yra diversifikuoti portfelį, tai yra sukurti portfelį, kuris pasižymi rizikos ir grąžos balansu. Tačiau MPT remiasi prielaidomis, kurios gali neatitikti realybės – tobula rinka neegzistuoja, o uždirbus pelną ar naudojantis brokerių paslaugomis mokesčiai yra taikomi.

Analizuojant akcijas statistiniais metodais reiktų nepamiršti, jog tai tik teoriniai metodai investavimo rizikai valdyti. Taikomi apribojimai ir prielaidos, pasirinkti parametrai ir skaičiavimo būdai gali daryti įtaką rezultatams, todėl investuotojui reiktų išlaikyti kritišką mąstymą renkantis jam tinkamą metodą. Taip pat, nagrinėti portfeliai yra supaprastinti, dažniausiai formuojami portfeliai turi daug daugiau pozicijų. Be to, akcijų rinka yra veikiama įvairių rizikų, ne visos yra išvardintos bakalauriniame darbe, tad išsami analizė ir žinių gausa yra reikalingos norint suvaldyti investavimo riziką ir sėkmingai generuoti pelną.

5. ŠALTINIAI

[1] T. Aven. Risk assessment and risk management: Review of recent advances on their foundation, 2016, 13.
Prieiga internete https://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/S0377221715011479?token=FF748D77420E9E338DCC3E001AA6F9808276DD125610709D7A52C3C8E5FD197C9EC5263D8089F78B303728273B3AD3CD&originRegion=eu-west-1&originCreation=20230318094251. Tikrinta 2023-05-28.

[2] A. Virlics, Investment Decision Making and Risk, 2013, 9.
Prieiga internete https://reader.elsevier.com/reader/sd/pii/S2212567113001299?token=8F990B9115414ECCEDEE62B85BD0FE93311564B136B06CFEB3CA0F291C6C939521CE9588DE5A984F56516761CA5DDCF6&originRegion=eu-west-1&originCreation=20230318101458. Tikrinta 2023-05-28.

[3] S. Sarykalin, G. Serraino and S. Uryasev. Value-at-Risk vs. Conditional Value-at-Risk inRisk Management and Optimization, 25.
Prieiga internete https://pubsonline.informs.org/doi/epdf/10.1287/educ.1080.0052. Tikrinta 2023-05-28.

[4] Lietuvos bankas
Prieiga internete https://www.lb.lt/lt/akcijos-ir-obligacijos. Tikrinta 2023-05-28.

[5] C. S. Tapiero. Risk and Financial Management, Mathematical and Computational Methods, 2004.
Prieiga internete https://books.google.lt/books?hl=lt&lr=&id=Fiwo4iF5WWcC&oi=fnd&pg=PR7&dq=statistical+methods+in+investing+risk+management&ots=W8ZrKfRm8D&sig=-pujO466m6rvPCEw74JRV3p6TII&redir_esc=y#v=onepage&q=statistical%20methods%20in%20investing%20risk%20management&f=false. Tikrinta 2023-05-28.

[6] J. C. Hull. Risk Management and Financial Institutions Fifth Edition, 2018.
Prieiga internete http://dl.rasabourse.com/Books/Finance%20and%20Financial%20Markets/%5BHull%5DRisk%20Management%20and%20Financial%20Institutions%28rasabourse.com%29.pdf. Tikrinta 2023-05-28.

[7] G. Cornuejols, R. Tutuncu. Optimization Methods in Finance, 2006
Prieiga internete http://web.math.ku.dk/~rolf/CT_FinOpt.pdf. Tikrinta 2023-05-28.

[8] P. Artzner, F. Delbaen, J. Eber, D. Heath. Coherent Measures of Risk, 1999, 203-292.
Prieiga internete https://www.researchgate.net/publication/227614132_Coherent_Measures_of_Risk. Tikrinta 2023-05-28.

[9] Nasdaq. Financial terms, portfolio beta.
Prieiga internete https://www.nasdaq.com/glossary/p/portfolio-beta. Tikrinta 2023-05-28.

[10] European Commission. The sectoral impact of the Covid-19 crisis, 2021, 2.
Prieiga internete https://www.consilium.europa.eu/media/48767/eg-note-sectoral-impact_fin.pdf. Tikrinta 2023-05-28.

[11] Financial news and data finance.yahoo.com, TSLA.
Prieiga internete: https://finance.yahoo.com/quote/TSLA/. Tikrinta 2023-05-28.

[12] Financial news and data finance.yahoo.com, BKNG.
Prieiga internete: https://finance.yahoo.com/quote/BKNG/. Tikrinta 2023-05-28.

[13] Financial news and data finance.yahoo.com, F.
Prieiga internete: https://finance.yahoo.com/quote/F/. Tikrinta 2023-05-28.

[14] Financial news and data finance.yahoo.com, NFLX.
Prieiga internete: https://finance.yahoo.com/quote/NFLX/. Tikrinta 2023-05-28.

[15] A. Grigutis. Investicijų teorija, paskaitų konspektas, 2018.
Prieiga internete: https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg/. Tikrinta 2023-05-28.

[16] Financial news and data finance.yahoo.com, ^W5000.
Prieiga internete https://finance.yahoo.com/quote/%5Ew5000/. Tikrinta 2023-05-28.

[17] M. E. Mangram. A Simplified Perspective of the Markowitz Portfolio Theory, 2013.
Prieiga internete https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=2147880. Tikrinta 2023-05-28.

[18] M. Manstavičius. Rizikos valdymas. Paskaitų konspektas, 2021.

[19] Swedbank. Žodynėlis.
Prieiga internete: https://blog.swedbank.lt/zodynelis/isvestine-finansine-priemone. Tikrinta 2023-05-28.

[20] The Investopedia Team. FT Wilshire 5000 Index (FTW5000): Definition and What's Included.
Prieiga internete: https://www.investopedia.com/terms/w/wilshire5000equityindex.asp. Tikrinta 2023-05-28.

[21] A. Balčiūnas. Taikomoji statistika.
Prieiga internete: http://web.vu.lt/mif/a.balciunas/files/2019/12/Taikomoji-statistika-7.pdf. Tikrinta 2023-05-28.

[22] J.Tobin. Liquidity Preference as Behavior Towards Risk, 1958.
Prieiga internete https://www.jstor.org/stable/2296205. Tikrinta 2023-05-28.

[23] A. Balčiūnas. Taikomoji statistika.
Prieiga internete: http://web.vu.lt/mif/a.balciunas/files/2019/12/Taikomoji-statistika-11-12.pdf . Tikrinta 2023-05-28.

[24] Harry M. Markowitz. Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments, 1959.
Prieiga internete https://www.jstor.org/stable/j.ctt1bh4c8h. Tikrinta 2023-05-28.

[25] A. F. Perold. The Capital Asset Pricing Model, 2004.
Prieiga internete https://pubs.aeaweb.org/doi/pdfplus/10.1257/0895330042162340. Tikrinta 2023-05-28.

[26] Yun Hsing Cheung , Robert Powell. Anybody can do Value at Risk: A Teaching Study using Parametric Computation and Monte Carlo Simulation, 2012.
Prieiga internete https://ro.uow.edu.au/cgi/viewcontent.cgi?article=1400&context=aabfj. Tikrinta 2023-05-28.

[27] R. F. Engle and S. Manganelli. Value at risk models in finance, 2001.
Prieiga internete https://www.econstor.eu/bitstream/10419/152509/1/ecbwp0075.pdf. Tikrinta 2023-05-28.

[28] Carlo Acerbi. Spectral Measures of Risk: a Coherent Representation of Subjective Risk Aversion, 2002.
Prieiga internete http://www.pacca.info/public/files/docs/public/finance/Active%20Risk%20Management/SpectralMeasures.pdf. Tikrinta 2023-05-28.

[29] R. Tyrrell Rockafellar and S. Uryasev. Optimization of conditional value-at-risk, 2000.
Prieiga internete https://www.ise.ufl.edu/uryasev/files/2011/11/CVaR1_JOR.pdf. Tikrinta 2023-05-28.

6. Priedas, R kodas

```
#Nuskaitomi duomenys iš Yahoo Finance
getSymbols("TSLA", src='yahoo', from = '2020-04-13', to = "2023-04-13")
getSymbols("BKNG", src='yahoo', from = '2020-04-13', to = "2023-04-13")
getSymbols("F", src='yahoo', from = '2020-04-13', to = "2023-04-13")
getSymbols("NFLX", src='yahoo', from = '2020-04-13', to = "2023-04-13")
#Šalinami missing values
tesla<-na.omit(TSLA)
bookings<-na.omit(BKNG)
ford<-na.omit(F)
netflix<-na.omit(NFLX)
#Paliekamas tik reikalingas - kainų - stulpelis
tesla<-TSLA[,6]
bookings<-BKNG[,6]
ford<-F[,6]
netflix<-NFLX[,6]
#Skaičiuojamos grąžos
tesla.returns<-Return.calculate(TSLA$TSLA.Adjusted)
bookings.returns<-Return.calculate(BKNG$BKNG.Adjusted)
ford.returns<-Return.calculate(F$F.Adjusted)
netflix.returns<-Return.calculate(NFLX$NFLX.Adjusted)
#Šalinama pirmoji grąžų diena
tesla.returns<-na.omit(tesla.returns)
bookings.returns<-na.omit(bookings.returns)
ford.returns<-na.omit(ford.returns)
netflix.returns<-na.omit(netflix.returns)
#Randamos koreliacijos ir kovariacijos tarp akcijų
  portfelio_grazos<-cbind(tesla.returns,
bookings.returns,ford.returns,netflix.returns)
  koreliacija<-cor(portfelio_grazos)
  kovariacija<-cov(portfelio_grazos)
#Formuojama lentelė su statistiniais duomenimis
stat_lentele<-
matrix(c(mean(tesla.returns),mean(bookings.returns),mean(ford.returns),mean(n
etflix.returns),

sd(tesla.returns),sd(bookings.returns),sd(ford.returns),sd(netflix.returns),

var(tesla.returns),var(bookings.returns),var(ford.returns),var(netflix.return
s)),
                     ncol=4,byrow=TRUE)
colnames(stat_lentele)<-c("TSLA","BKNG","F","NFLX")
rownames(stat_lentele)<-c('vidurkis', 'stand. nuokrypis', 'dispersija')
#LYGIŲ SVORIŲ PORTFELIS
svoriai = rep(1,4)/4
equalWeight.portfolio =
getPortfolio(er=vid_grazu_vektorius,cov.mat=kovariacija,weights=svoriai)
lygus_grazos<-portfelio_grazos%*%svoriai #vidutine
vidurkis<-mean(lygus_grazos)
rizika<-sd(lygus_grazos)
```

```
vidurkis
rizika
#vidurkio ir rizikos lentelė
lent<-matrix(c(vidurkis,rizika),ncol=1, byrow=TRUE)
rownames(lent)<-c("Vid. grąža","Rizika")
View(lent)
#svorių lentelė
lygiu<-matrix(svor,ncol=4,byrow=TRUE)
colnames(lygiu)<-c("TSLA.svoris", "BKNG.svoris", "F.svoris", "NFLX.svoris")
rownames(lygiu)<-("Svoris portfelyje")
View(lygiu)
#brėžinys
data1<-svoriai
labels<-c("TSLA - 25%", "BKNG - 25%", "F - 25%", "NFLX - 25%")
colors <- c("#00B8E7","#E68613", "#7CAE00", "#F8766D")
pie(data1, labels = labels, main = "Lygių svorių portfelis", col = colors)
#SU MINIMALIA RIZIKA
min <- portfolio.spec(colnames(portfelio_grazos))
min <- add.constraint(portfolio =min, type = "full_investment") #svorių sum=1
min <- add.constraint(portfolio = min, type = "long_only") #tik ilgam laikui
investuojama
min <- add.objective(portfolio = min, type = "risk", name = "StdDev") #min
rizika
min_portfelis <- optimize.portfolio(portfelio_grazos, portfolio = min,
optimize_method = "ROI")
min_grazos<-portfelio_grazos %*%extractWeights(min_portfelis)
vidurkis<-mean(min_grazos)
rizika<-sd(min_grazos)
vidurkis
rizika
data3<-extractWeights(min_portfelis)
labels<-c("TSLA - 28.58%", "BKNG - 46.33%", "F - 24.67%", "NFLX - 26.55%")
colors <- c("#00B8E7","#E68613", "#7CAE00", "#F8766D")
pie(data3, labels = labels, main = "Minimalios rizikos portfelis", col =
colors,clockwise = TRUE )
#MAKSIMALIOS GRĄŽOS DUOTAI RIZIKAI PORTFELIS
expected_return<-colMeans(portfelio_grazos)
expected_return
max <- portfolio.spec(colnames(portfelio_grazos))
max <- add.constraint(max, type="full_investment")
max <- add.constraint(max, type="long_only")
max <- add.constraint(max, type = "box", min = 0.1, max = 0.5)
max <- add.objective(max, type = "risk", name = "sd", risk_aversion = 0.025)
#min rizika
max <- add.objective(max, type = "return", name = "mean") #max graza
max <- add.objective(max, type="risk", name="VaR", arguments=list(p=0.05))
max_grazos <- optimize.portfolio(R =
portfelio_grazos,portfolio=max,optimize_method="ROI")
extractWeights(max_grazos)
optimalaus_grazos<-portfelio_grazos %*%extractWeights(max_grazos)
vidurkis<-mean(optimalaus_grazos)
```

```
rizika<-sd(portfelio_grazos)
vidurkis
rizika
#Palyginimas Gauso su MPT
brez<-hist(optimalaus_grazos,freq=FALSE, breaks=30, main = "Grąžų palyginimas
su Gauso skirstiniu", xlab = "Optimalaus portfelio grąžos", ylab= "Dažnumas")
mean_returns <- mean(optimalaus_grazos)
sd_returns <- sd(optimalaus_grazos)
x <- seq(min(optimalaus_grazos), max(optimalaus_grazos), length.out = 100)
y <- dnorm(x, mean = mean_returns, sd = sd_returns)
lines(x, y, col = "red", lwd = 2)
#beta
model <- lm(optimalaus_grazos ~ rinkos_grazos)
beta <- coef(model)[2]
print(beta)
#CVaR optimizacijos portfelio statistiniai rodikliai
stock<-c("TSLA - 33%", "BKNG - 3%", "F - 61%", "NFLX - 3%")
weight<-c(0.33, 0.03, 0.61, 0.03) #iš excel susivedami svoriai
colors <- c("#00B8E7","#E68613", "#7CAE00", "#F8766D")
pie(weight, stock, main = "Optimizuoto CVaR portfelis", col = colors)
model <- lm(cvar_grazos ~ rinkos_grazos)
beta <- coef(model)[2]
print(beta)
```