



**Matematikos ir
informatikos
fakultetas**

VILNIAUS UNIVERSITETAS

**MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS
FINANSŲ IR DRAUDIMO MATEMATIKOS BAKALAURO STUDIJŲ
PROGRAMA**

Markowitz teorijos taikymas

(Markowitz Theory Application)

Atliko: Tomas Urbonas

VU el. pašto adresas: tomas.urbonas@mif.stud.vu.lt

Darbo vadovas: doc. dr. Andrius Grigutis

Vilnius,

2023

Markowitz teorijos taikymas

1) Santrauka

Šiame bakalauro darbe nagrinėjamas investicinis portfelis iš n rizikingų aktyvų ir vieno nerizikingo akyvo. Remiantis H. Markowitz teorija, aprašomi pagrindiniai modernaus portfelio teorijos įrodymai: minimalios dispersijos, maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfeliai, efektyvumo frontas. Parodysime, kodėl efektyvumo frontas, sudarytas iš rizikingų aktyvų, yra parabolės formos ir vadinamas Markowitz kulka ir kodėl pridėjus nerizikingą aktyvą jis tampa tiese. Gautą teoriją taikysime praktikoje formuodami portfelius, naudojant istorinius gražų duomenis.

Raktiniai žodžiai: Investicinis portfelis, Markowitz kulka, H. Markowitz, minimali dispersija, maksimalus pelno rizikos koeficientas, efektyvumo frontas.

Markowitz Theory Application

Abstract

This bachelor thesis examines an investment portfolio of n risky assets and one risk-free asset. Based on H. Markowitz, the main proofs of the modern portfolio theory are described: portfolio of minimum variance, maximum profit-risk ratio, efficient frontier. We will show why the efficient frontier composed of risky assets is a parabola and is called a Markowitz bullet, and why it becomes a straight line when a risk-free asset is added. We will use the obtained theory in practice to form portfolios using historical data.

Key words: Investment portfolio, Markowitz bullet, H. Markowitz, minimum variance, maximum profit - risk ratio, efficient frontier.

Turinys

1) Santrauka.....	2
2) Įvadas.....	4
3) Teorinė dalis.....	5
3.1 Investicinis portfelis, tikėtina grąža ir rizika	5
4) Markowitz teorijos taikymo teorinė dalis	9
4.1 Portfelio pranašumas, efektyvumo frontas.....	9
4.2 Minimalios rizikos portfelis	9
4.3 Kodėl Markowiz kulka yra parabolė, kai portfelis sudarytas tik iš rizikingų aktyvų.....	12
4.4 Efektyvumo frontas su nerizikingu aktyvu	13
4.5 Maksimalaus pelno – rizikos koeficiento portfelis.....	16
4.6 Optimalaus portfelio liestinė	18
5) Markowitz teorijos taikymo praktinė dalis	20
5.1 Įmonių statistiniai rodikliai	20
5.2 Lygių dalių portfelis	22
5.3 Minimalios rizikos portfelis	23
5.4 Maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis ir efektyvumo frontas.....	24
6 Išvados.....	26
7 Literatūra.....	27
8 Priedai	28

2) Įvadas

Temos aktualumas: investavimas į norimus aktyvus anksčiau buvo prieinamas ne visiems. Tačiau, informacinių technologijų plėtra dabar leidžia net ir smulkiems investuotojams, kurie paprastai neturi atitinkamų žinių ir patirties, pasinaudoti tiesioginio vertybinių popierių pirkimo ar pardavimo kapitalo rinkoje galimybėmis. Vedami skirtingų motyvų, investuotojai paskirsto turimus išteklius turtui ir pasirinktomis investavimo strategijomis ir siekia iš investuotų lėšų gauti maksimalią vertę ir tuo pačiu kaip galima sumažinti nuostolius.

Harry Markowitz (1952) straipsnyje „Portfelio pasirinkimas“ (ang. *Portfolio Selection*) [5] padėjo pamatus modernaus portfelio teorijai, pristatydamas portfelio optimizavimo modelį ir matematiškai įrodęs seną posakį, kad negalima sudėti visų kiaušinių į vieną pintinę. Pagrindinė H. Markowitz idėja yra sudaryti portfelį, kuris suteikia didžiausią grąžą esant tam tikram rizikos lygiui. Toks portfelis, kuris turi didžiausią grąžą pasirinktam rizikos lygiui ir (arba) portfelis, kuris turi mažiausią riziką pasirinktai norimai grąžai, H. Markowitz pavadino efektyviu portfelium.

Rizikos vengiantis investuotojas rinksis tą portfelį, kurio mažesnė rizika, o kartu ir mažesnė laukiama grąža, o rizikuoti linkęs investuotojas pasirinks, portfelį su didesne rizika, kuri turi taip pat ir didesnę tikėtiną grąžą. Prie modernaus portfelio teorijos, taip pat, prisidėjo ir William F. Sharpe, kuris sukūrė supaprastintą H. Markowitz modelio variantą, skaičiuojant pelno-rizikos koeficientą ir renkantis optimaliausią portfelį.

Tyrimo tikslas: Įrodyti pagrindines H. Markowitz teiginius, juos pritaikyti praktikoje ieškant mažiausios rizikos, didžiausio pelno-rizikos koeficiento portfelio ir efektyvumo fronto.

Tyrimo uždaviniai:

1. Atlikti Modernaus investicionio portfelio analizę, remiantis moksline literatūra.
2. Įrodyti minimalios rizikos ir maksimalaus pelno-rizikos koeficiento, efektyvumo fronto teiginius.
3. H. Markowitz teoriją pritaikyti praktikoje randant mažiausios rizikos, maksimalaus pelno-rizikos, lygių dalių portfelius, bei suformuoti efektyvumo frontą.
4. Apibendrinti gautus rezultatus.

3) Teorinė dalis

Norint pradėti formuoti portfelius, pirma turime suprasti kas yra investicinis portfelis ir kaip skaičiuojama jo tikėtina grąža bei rizika.

3.1 Investicinis portfelis, tikėtina grąža ir rizika

Visu pirma, investavimą galime apibrėžti kaip dabartinių lėšų išleidimą, siekiant ateityje uždirbti pelną. Šio skyriaus teorija yra paremta A.Grigučio paskaitų konspektu *Rizikingų aktyvu portfelis* [1].

Tarkime, kad turime kokių nors vertybinių popierių (aktyvų) rinkinį $A_1, A_2, \dots, A_n$. Kur kiekvienas rizikingas aktyvas nusakomas standartinio nuokrypio ir vidutinės grąžos rinkiniu $(\sigma_{A_i}, \mathbb{E}r_{A_i})$. Čia $A_i, i = 1, \dots, n$.

Apibrėžimas 1. *Investiciniu portfeliu* vadinsime vektorių $(w_1, w_2, \dots, w_n)$. Čia $w_i, i = 1, \dots, n$, suprantami kaip svoriai $\sum_{i=1}^n w_i = 1$, $A = w_1 A_1 + w_2 A_2 + \dots + w_n A_n$.

Kartais yra taikomas apribojimas, kad $0 \leq w_i \leq 1$. Tai reiškia, kad negalimas pasiskolintų vertybinių popierių pardavimas. Tačiau, jei paimtumėme svorių vektorių $(-0.1, 1.1)$, tai reikštų, kad pasiskoliname ir parduodame 10% pirmojo aktyvo nuo investuotos sumos ir už visą sumą perkame antrąjį aktyvą.

Pasiskolintų vertybinių popierių pardavimas leidžia investuotojui užsidirbti iš vertybinio popieriaus kainų kritimo, kadangi tokiu atveju aktyvas yra atperkamas už mažesnę kainą.

Apibrėžimas 2. *Investicinio portfelio tikėtina grąža* vadinsime pelną arba nuostolį, gautą sudauginus aktyvų $A_1, A_2, \dots, A_n$ grąžas su atitinkamais investuotais svoriais.

Norint apskaičiuoti investicinio portfelio tikėtiną grąžą, pirma reikia rasti kiekvieno iš aktyvų istorinių grąžų vidurkius ir jiems priskirti atitinkamus investicijos svorius.

Jei investuotą sumą pažymėsime B_0 , o atsiimtą B_1 , tai gautas pelnas bus $B_1 - B_0$.

Skirtumas tarp 1 ir 0 momentų yra vienas periodas. Investicijos grąža apskaičiuojama

$$r = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{B_1}{B_0} - 1.$$

Aktyvo A_1 grąžą galime apskaičiuoti kaip periodų istorinių grąžų aritmetinį vidurkį

$$\mu_{A_1} = \frac{r_1 + r_2 + \dots + r_k}{k} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k r_i.$$

(1)

Investicinio portfelio tikėtina grąžą bus gaunama sudauginus gautas aktyvų $A_1, A_2, \dots, A_n$ grąžas su atitinkamais investuotais svoriais. Šiai formulei pritaikome ir matricinį pavidalą. Pažymime grąžas $\boldsymbol{\mu} = (\mu_{A_1}, \mu_{A_2}, \dots, \mu_{A_n})^T$ ir $\mathbb{W} = (w_1, w_2, \dots, w_n)^T$, tada

$$\mu_A = w_1\mu_{A_1} + w_2\mu_{A_2} + \dots + w_n\mu_{A_n} = \sum_{i=1}^n w_i\mu_{A_i} = \mathbb{W}^T \boldsymbol{\mu}.$$

(2)

Apibrėžimas 3. Investicinio portfelio rizika vadinsime grąžų reikšmių išsibarstymą aplink vidurkį.

Rizika apskaičiuojama dispersijos ir standartinio nuokrypio formulėmis. Kuo standartinis nuokrypis ir dispersija didesnė, tuo didesnė grąžos svyravimai.

Norint suskaičiuoti portfelio standartinį nuokrypį, pirma reikia rasti atskirų aktyvų rizikas, kurias dėl paprastumo pirma išreikšime per dispersiją.

$$\sigma^2_{A_1} = \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (r_i - \mu_{A_1})^2.$$

(3)

Čia $\sigma^2_{A_1}$ - dispersija A_1 aktyvo - grąžos r_i , μ_{A_1} - aktyvo A_1 grąžų vidurkis.

Kita vertus, standartinio nuokrypio formulė yra

$$\sigma_{A_1} = \sqrt{\frac{1}{k} \sum_{i=1}^k (r_i - \mu_{A_1})^2}.$$

(4)

Ieškant viso portfelio dispersijos svarbus rodiklis yra koreliacija.

Pažymėkime ρ_{ij} kaip koreliacijos koeficientą tarp aktyvų A_i ir A_j , jei $i \neq j$, tai

$$\begin{aligned}\rho_{ij} &= \frac{\text{cov}(A_i, A_j)}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\mathbb{E}[(A_i - \mu_i)(A_j - \mu_j)]}{\sigma_i \sigma_j} \\ &= \frac{\mathbb{E}[A_i A_j - \mu_i A_j - \mu_j A_i + \mu_i \mu_j]}{\sigma_i \sigma_j} = \frac{\mathbb{E}[A_i A_j] - \mu_i \mu_j}{\sigma_i \sigma_j}.\end{aligned}$$

(5)

Norint tęsti skaičiavimus, suformuluosime keletą teiginių.

Apibrėžimas 4. Atsitiktiniai dydžiai $A_1, \dots, A_n$ yra tiesiškai nepriklausomi, jeigu sąlyga

$$\mathbb{P}(a_1 A_1 + \dots + a_n A_n = 0) = 1$$

yra tenkinama tik tada, kai $a_1 = \dots = a_n = 0$.

Lema 5. Su visais atsitiktiniais dydžiais X ir Y teisinga lygybė

$$|\text{cov}(X, Y)| \leq \sigma_X \sigma_Y.$$

Įrodymas. Tegu $a, b \in \mathbb{R}$ ir $b \neq 0$

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX + bY)^2 &\geq 0 \Rightarrow a^2 \mathbb{E}X^2 + 2ab \mathbb{E}XY + b^2 \mathbb{E}Y^2 \geq 0 \\ \Rightarrow 4b^2 (\mathbb{E}XY)^2 - 4b^2 \mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2 &\leq 0 \Rightarrow |\mathbb{E}XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2}\end{aligned}$$

(6)

Gavome $|\mathbb{E}XY| \leq \sqrt{\mathbb{E}X^2 \mathbb{E}Y^2}$ Cauchy–Schwarz nelygybę, kurios įrodymą galima rasti University of Southern California leidinyje *The Information Inequality* [6].

Pastebėkime, kad $|\text{cov}(X, Y)| = \sigma_X \sigma_Y$ galioja tik, kai atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra tiesiškai priklausomi arba bent vienas iš dydžių yra išsigimęs (įgyja pastovią reikšmę su tikimybe 1). Tikrai,

$$\mathbb{E}(aX + bY)^2 = 0 \Leftrightarrow aX + bY = 0.$$

Lema 6. *Neišsigimusių atsitiktinių dydžių X ir Y kovariacijų matrica*

$$\begin{pmatrix} \sigma_X^2 & cov(X, Y) \\ cov(X, Y) & \sigma_Y^2 \end{pmatrix}$$

yra neišsigimusi, kai $-1 < \rho(X, Y) < 1$.

Įrodymas. Matricos determinantas yra

$$\begin{vmatrix} \sigma_X^2 & cov(X, Y) \\ cov(X, Y) & \sigma_Y^2 \end{vmatrix} = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 - cov^2(X, Y) = \sigma_X^2 \sigma_Y^2 (1 - \rho^2(X, Y))$$

Atsitiktiniai dydžiai X ir Y yra susiję tiesine priklausomybe jei $\rho(X, Y) = \pm 1$.

□

Apibrėžimas 7. *Kvadratinė matrica A yra vadinama simetrine jei ji sutampa su savo transponuota matrica, t.y. $A = A^T$.*

Lema 8. *Tarkime, kad kovariacijų matrica Σ nėra išsigimusi. Jos atvirktinė matrica Σ^{-1} yra simetrinė ir teigiamai apibrėžta.*

Įrodymas. Pirma įrodysime simetriškumą. Imkime I – vienetinę matricą, kuri, taip pat yra simetrinė

$$I = \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}_{n \times n}$$

Gauname

$$I = \Sigma \Sigma^{-1} = I^T = (\Sigma \Sigma^{-1})^T = (\Sigma^{-1})^T \Sigma^T \Rightarrow \Sigma^{-1} = (\Sigma^{-1})^T.$$

Antra, įrodome, kad kovariacijų matrica yra teigiamai apibrėžta

$$\mathbb{W}^T \Sigma \mathbb{W} = \widetilde{\mathbb{W}}^T \Sigma^{-1} \widetilde{\mathbb{W}} > 0$$

kai $\mathbb{W} = \widetilde{\mathbb{W}}^T \Sigma^{-1} \neq (0, \dots, 0)$, kur $\mathbb{W} = (w_1, \dots, w_n)^T$.

□

4) Markowitz teorijos taikymo teorinė dalis

Analizuodami H. Markowitz teoriją darome prielaidą, kad investuotojas visada elgsis racionaliai ir stengsis minimizuoti riziką ir padidinti pelną. Šiame skyriuje yra remiamasi A. Grigučio paskaitų konspektu *Rizikingų aktyvu portfelis* [1], G. Gundersen, leidiniu *Geometry of the Efficient Frontier*, 2022 [4] ir E. Zivot. *Portfolio Theory with Matrix Algebra*, 2021 [3].

4.1 Portfelio pranašumas, efektyvumo frontas

Apibrėžimas 9. Sakysime, kad portfelis A_1 yra pranašesnis už portfelį A_2 , jei jo riziką yra nemažesnė ir grąžą nedidesnė

$$\sigma_{A_1} \leq \sigma_{A_2} \text{ ir } \mu_{A_1} \geq \mu_{A_2}$$

Pranašesnio portfelio pelno – rizikos koeficientas (angl. *Sharpe ratio*) yra nemažesnis.

$$\frac{\mu_{A_1} - r_f}{\sigma_{A_1}} \geq \frac{\mu_{A_2} - r_f}{\sigma_{A_2}}$$

Čia r_f nerizikingas aktyvas.

Apibrėžimas 10. Jei $\mathbb{A}$ yra kokia nors portfelių aibė, tai portfelis $A \in \mathbb{A}$ vadinamas efektyviu (aibės $\mathbb{A}$ atžvilgiu), jei neegzistuoja kitas, už A pranašesnis, portfelis. Efektyvių portfelių aibė vadinama efektyvumo frontu (angl. *Efficient frontier*), o portfeliai, priklausantys efektyvumo frontui, vadinami efektyviai diversifikuotais.

4.2 Minimalios rizikos portfelis

Prisiminkime:

$$\boldsymbol{\mu} = (\mu_1, \dots, \mu_n)^T,$$

$$\mathbb{W} = (w_1, \dots, w_n)^T, \sum_{i=1}^n w_i = 1,$$

$$\Sigma = \begin{pmatrix} \sigma^2_{A_1} & \cdots & cov(r_{A_1}, r_{A_n}) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ cov(r_{A_1}, r_{A_n}) & \cdots & \sigma^2_{A_n} \end{pmatrix}.$$

Pažymėkime:

$$\mathbb{1} = (1, \dots, 1)_{1 \times n}^T.$$

Kovariacijų matrica Σ yra teigiamai apibrėžta, nes portfelio $A = w_1 A_1 + \dots + w_n A_n$, $\mathbb{1}^T W = 1$ dispersija yra

$$\sigma_A^2 = W^T \Sigma W > 0,$$

su bet kokiais svoriais $W \neq (0, \dots, 0)$, jei atsitiktiniai dydžiai $r_{A_1}, \dots, r_{A_n}$ nėra išsigimę, t.y. aktyvai $A_1, A_2, \dots, A_n$ yra rizikingi.

Toliau įrodinėdami sakysime, kad kovariacijų matrica Σ turi atvirkštinę Σ^{-1} .

Teiginys 11. Portfelio $A = w_1 A_1 + \dots + w_n A_n$ dispersija (rizika) $\sigma_A^2 = W^T \Sigma W$, kai $\mathbb{1}^T W = 1$ ir $\mu^T W$, yra minimali, jei

$$w^* = \Sigma^{-1} U M^{-1} u.$$

Kur U yra $N \times 2$ matrica $(\mu \ \mathbb{1})$, $M = U^T \Sigma^{-1} U$, $u = (\mu_A \ 1)^T$.

Įrodymas. Sudarome Lagrandžo funkciją

$$L(W, \lambda_1, \lambda_2) = W^T \Sigma W + \lambda_1 (W^T \mu - \mu_A) + \lambda_2 (W^T \mathbb{1} - 1)$$

(7)

Apskaičiuoju ir prilyginu nuliui funkcijos $L(W, \lambda_1, \lambda_2)$ dalines išvestines pagal W, λ_1 , ir λ_2 gauname

$$\begin{cases} \frac{\partial L(W, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial W} = 2\Sigma W + \lambda_1 \mu + \lambda_2 \mathbb{1} = 0 \\ \frac{\partial L(W, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_1} = W^T \mu - \mu_A = 0 \\ \frac{\partial L(W, \lambda_1, \lambda_2)}{\partial \lambda_2} = W^T \mathbb{1} - 1 = 0 \end{cases} \quad (8)$$

Iš pirmosios sistemos (8) lygties turime

$$W = -\frac{\lambda_1}{2} \Sigma^{-1} \mu - \frac{\lambda_2}{2} \Sigma^{-1} \mathbb{1} = -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} [\mu \ \mathbb{1}] \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \Sigma^{-1} U \lambda$$

(9)

Kur $\lambda = [\lambda_1 \quad \lambda_2]^T$ ir $U = \begin{pmatrix} \mu_{A_1} & 1 \\ \vdots & \vdots \\ \mu_{A_n} & 1 \end{pmatrix}$.

Ištačius (9) lygtį į antrą ir trečią eilutes (8) lygties ir priliginus nuliui, gauname

$$\begin{aligned}\mu_A &= \mu^T \mathbb{W} = -\frac{\lambda_1}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mu - \frac{\lambda_2}{2} \mu^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}, \\ 1 &= \mathbb{1}^T \mathbb{W} = -\frac{\lambda_1}{2} \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mu - \frac{\lambda_2}{2} \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}.\end{aligned}$$

(10)

Perrašome (10) matricine forma

$$\begin{bmatrix} \mu_A \\ 1 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu^T \Sigma^{-1} \mu & \mu^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} \\ \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mu & \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = -\frac{1}{2} \begin{bmatrix} \mu^T \\ \mathbb{1}^T \end{bmatrix} \Sigma^{-1} \begin{bmatrix} \mu & \mathbb{1} \end{bmatrix} \lambda.$$

(11)

Pastebime, kad matrica

$$\begin{bmatrix} \mu^T \Sigma^{-1} \mu & \mu^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} \\ \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mu & \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} \end{bmatrix}$$

Nėra išsigimusi, kadangi jos determinantas

$$(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}) - (\mu^T \Sigma^{-1} \mathbb{1})^2 > 0.$$

Nes su visais $a, b \in \mathbb{R}$ ir $b \neq 0$ teisinga

$$(a\mu^T + b\mathbb{1}^T)\Sigma^{-1}(a\mu^T + b\mathbb{1}^T)^T = a^2\mu^T \Sigma^{-1} \mu + 2ab\mu^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} + b^2\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1} > 0.$$

Gauname, kad užrašytos kvadratinės lygties diskriminantas neigiamas.

$$4b^2(\mu^T \Sigma^{-1} \mathbb{1})^2 - 4b^2(\mu^T \Sigma^{-1} \mu)(\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}) < 0.$$

Suprastiname (11) lygtį, pažymėdami $U = (\mu \quad \mathbb{1})$, $M = U^T \Sigma^{-1} U$ ir $u = (\mu_A \quad 1)^T$

$$u = -\frac{1}{2} U^T \Sigma^{-1} U \lambda = -\frac{1}{2} M \lambda.$$

(12)

Galiausiai gaunamas minimalios dispersijos svorių portfelis

$$w^* = \Sigma^{-1} U M^{-1} u.$$

(13)

4.3 Kodėl Markowiz kulka yra parabolė, kai portfelis sudarytas tik iš rizikingų aktyvų

Pažymėkime $u = (\mu_A \ 1)^T$ ir išreiškime portfelio dispersiją per tikėtiną grąžą

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= W^T \Sigma W \\ &= (\Sigma^{-1} U M^{-1} u)^T \Sigma (\Sigma^{-1} U M^{-1} u) \\ &= u^T M^{-1} U^T \Sigma^{-1} U M^{-1} u \\ &= u^T M^{-1} u \\ &= [\mu_A \ 1] \left[\begin{bmatrix} \mu_A^T \\ 1 \end{bmatrix} \Sigma^{-1} [\mu_A \ 1] \right]^{-1} \begin{bmatrix} \mu_A \\ 1 \end{bmatrix}.\end{aligned}$$

(14)

Pagal (7) apibrėžimą pastebėkime, kad matrica M yra simetrinė.

Prisiminkime, kad atvirkštinė 2 x 2 matrica randama:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}, \quad A^{-1} = \frac{1}{\det(A)} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}, \quad \det(A) = ad - bc.$$

Toliau ieškosime matricos M atvirkštinės pasinaudoję matricos simetriškumu. Čia $U = (\mu \ 1)$,

$$M = U^T \Sigma^{-1} U = \begin{bmatrix} \mu^T \\ 1^T \end{bmatrix} \Sigma^{-1} [\mu \ 1] = \begin{bmatrix} \mu^T \Sigma^{-1} \mu & \mu^T \Sigma^{-1} 1 \\ 1^T \Sigma^{-1} \mu & 1^T \Sigma^{-1} 1 \end{bmatrix}$$

Gauname

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)} \begin{bmatrix} 1^T \Sigma^{-1} 1 & -\mu^T \Sigma^{-1} 1 \\ -1^T \Sigma^{-1} \mu & \mu^T \Sigma^{-1} \mu \end{bmatrix}$$

(15)

Rezultatą įstatome į (14) lygtį ir gauname portfelio σ_A^2 dispersijos kvadratinę funkciją tikėtinės grąžos atžvilgiu.

$$\begin{aligned}\sigma_A^2 &= u^T M^{-1} u = [\mu_A \ 1] M^{-1} \begin{bmatrix} \mu_A \\ 1 \end{bmatrix} \\ &= \frac{1}{\det(M)} \{ (1^T \Sigma^{-1} 1) \mu_A^2 + \mu^T \Sigma^{-1} \mu - 2(1^T \Sigma^{-1} \mu) \mu_A \}\end{aligned}$$

(16)

Pažymėkime:

$$\begin{aligned}
 s_{11} &= \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mathbb{1}, \\
 s_{1\mu} &= s_{\mu 1} = \mathbb{1}^T \Sigma^{-1} \mu, \\
 s_{\mu\mu} &= \mu^T \Sigma^{-1} \mu, \\
 d &= \det(M) = s_{\mu\mu} s_{11} - s_{1\mu}^2.
 \end{aligned}
 \tag{17}$$

Galiausiai turime

$$\sigma_A^2 = f(\mu_A) = \sqrt{\frac{1}{d} (s_{11} \mu_A^2 - 2 s_{1\mu} \mu_A + s_{\mu\mu})}
 \tag{18}$$

Naudojant (18) formulę ir randant tūkstančius portfelių galime rasti efektyvumo frontą, kuris yra parabolinė funkcija – Markowitz kulka. Gautą formą patikrinsime praktinėje dalyje.

4.4 Efektyvumo frontas su nerizikingu aktyvu

Imkime nerizikingą aktyvą su grąža r_f . Nerizikingais aktyvais yra laikomi išdo vekseliai. Įrodysime, kad kai portfelis sudarytas iš n rizikingų aktyvų ir vieno nerizikingo, efektyvumo frontas yra tiesinė funkcija iki parabolinės funkcijos liestinės taško. Tiesinės funkcijos nuolydis yra lygus pelno – rizikos koeficientui.

Norėdami rasti naują efektyvumo frontą atliksime tą patį procesą kaip ir 4.2 skyriuje, tik dabar pridėsime nerizikingą aktyvą r_f . Skaičiuojant, taikysime prielaidą, kad rizikingo aktyvo portfelis turi didesnę tikėtiną grąžą nei nerizikingo aktyvo. Pažymėkime w_f kaip svorį nerizikingo aktyvo r_f portfelyje su $n + 1$ aktyvų. Kadangi portfelio svorių suma turi būti vienas, gauname

$$\mathbb{W}^T \mathbb{1} + w_f = 1.
 \tag{19}$$

Tikėtiną grąžą portfelio, sudaryto iš n rizikingų aktyvų ir vieno nerizikingo, galime užrašyti

$$\mu_A = \mathbb{W}^T \mu + w_f r_f$$

$$\begin{aligned}
&= \mathbb{W}^T \boldsymbol{\mu} + r_f(1 - \mathbb{W}^T \mathbb{1}) \\
&= r_f + \mathbb{W}^T (\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbb{1}).
\end{aligned}$$

(20)

Kadangi, r_f yra nerizikinga ir fiksuota, norime kuo labiau sumažinti viso portfelio riziką, gaunant tikėtiną grąžą

$$\mu_A - r_f = \mathbb{W}^T (\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbb{1}).$$

(21)

Dėl paprastumo pažymėkime

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}} = \boldsymbol{\mu} - r_f \mathbb{1},$$

$$\widetilde{\mu_A} = \mu_A - r_f.$$

Pastebėkime, kad dabar $\mathbb{W}^T \mathbb{1} = 1$ nėra apribotas, kadangi, galime portfelio dalį investuoti į nerizikingą aktyvą. Portfelio rizika lieka nepakitusi, nes r_f yra nerizikingas.

Sudarome Lagrandžo funkciją.

$$L(\mathbb{W}, \lambda) = \mathbb{W}^T \Sigma \mathbb{W} + \lambda (\mathbb{W}^T \tilde{\boldsymbol{\mu}} - \widetilde{\mu_A})$$

(22)

Apskaičiuosime ir prilyginsime nuliui funkcijos $L(\mathbb{W}, \lambda)$ dalines išvestines

pagal $\mathbb{W}$ ir λ gauname

$$\begin{cases} \frac{\partial L(\mathbb{W}, \lambda)}{\partial \mathbb{W}} = 2\Sigma \mathbb{W} + \lambda_1 \tilde{\boldsymbol{\mu}} = 0 \\ \frac{\partial L(\mathbb{W}, \lambda)}{\partial \lambda} = \mathbb{W}^T \tilde{\boldsymbol{\mu}} - \widetilde{\mu_A} = 0. \end{cases}$$

(23)

Iš pirmosios sistemos (23) lygties turime

$$\mathbb{W} = -\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}.$$

(24)

Iš antrosios sistemos (24) lygties galime pastebėti, kad $\mathbb{W}^T \tilde{\boldsymbol{\mu}} = \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbb{W} = \widetilde{\mu}_A$ ir pirmąją sistemos lygtį padauginę iš $\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T$ gauname

$$\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \mathbb{W} = -\frac{\lambda}{2} \tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}} = \widetilde{\mu}_A.$$

Išsireiškiame per λ :

$$\lambda = -\frac{2\widetilde{\mu}_A}{\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}}.$$

(25)

Išstatome (25) lygtį į (24) ir gauname sprendimą $\mathbb{W}$

$$\mathbb{W} = -\frac{\lambda}{2} \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}} = -\frac{1}{2} \left(-\frac{2\widetilde{\mu}_A}{\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}} \right) \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}} = \widetilde{\mu}_A \frac{\Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}}{\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}}.$$

(26)

Per (26) lygtįje gautus svorius galime išreikšti dispersiją

$$\begin{aligned} \sigma_A^2 &= \mathbb{W}^T \Sigma \mathbb{W} \\ &= \widetilde{\mu}_A^2 \left(\frac{\Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}}{\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}} \right)^T \Sigma \left(\frac{\Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}}{\tilde{\boldsymbol{\mu}}^T \Sigma^{-1} \tilde{\boldsymbol{\mu}}} \right) \\ &= \frac{(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbb{1})^2}{(\mu_A - r_f \mathbb{1})^T \Sigma^{-1} (\mu_A - r_f \mathbb{1})}. \end{aligned}$$

(27)

Galime (27) lygtį perrašyti pagal gražą ir taip įsitikinti, kad funkcija yra tiesinė

$$\begin{aligned} |\mu_A - r_f| &= \sigma_A \sqrt{(\mu_A - r_f \mathbb{1})^T \Sigma^{-1} (\mu_A - r_f \mathbb{1})}, \\ &\Downarrow \\ \mu_A &= r_f \pm \sigma_A \sqrt{(\mu_A - r_f \mathbb{1})^T \Sigma^{-1} (\mu_A - r_f \mathbb{1})}. \end{aligned}$$

(28)

Tiesa, pagal (9) apibrėžimą, efektyvumo frontu laikysime tik teigiamą tiesės dalį.

Pastebėkime, kad tiesės nuolydis yra rizikos – pelno koeficientas (*angl. Sharpe ratio*)

$$\frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A} = \sqrt{(\mu_A - r_f \mathbb{1})^T \Sigma^{-1} (\mu_A - r_f \mathbb{1})}.$$

(29)

Gavome geometrinę pelno – rizikos koeficiento interpretaciją. Kuo statesnis nuolydis, tuo didesnė grąža už santykinai mažesnę riziką.

4.5 Maksimalaus pelno – rizikos koeficiento portfelis

Apibrėžimas 12. *Portfelį, kurio pelno – rizikos koeficientas yra didžiausias, vadinsime optimaliu.*

Pagal (29) lygtį gavome, kad visi ant portfeliai ant efektyvumo fronto tiesės yra su tokiu pačiu pelno – rizikos koeficientu, o paraboliniame efektyvumo fronte pelno – rizikos koeficientai skiriasi. Todėl svarbu surasti didžiausio pelno – rizikos koeficiento portfelį tarp rizikingų aktyvų

$$\mu_A^{max} = \operatorname{argmax}_{\mu_A} \left\{ \frac{\mu_A - r_f}{\sigma_A^{min}} \right\}.$$

Kur σ_A^{min} yra minimali dispersija iš (18) lygties. Galime numesti determinantą, kadangi jis nepriklauso nuo μ_A .

$$\mu_A^{max} = \operatorname{argmax}_{\mu_A} \left\{ \frac{\mu_A - r_f}{\sqrt{(s_{11}\mu_A^2 - 2s_{1\mu}\mu_A + s_{\mu\mu})}} \right\}.$$

(30)

Prilyginame (30) lygtį nuliui ir suskaičiuokime dalinę išvestinę pagal μ_A

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial \mu_A} \left[(\mu_A - r_f) \sqrt{(s_{11}\mu_A^2 - 2s_{1\mu}\mu_A + s_{\mu\mu})} \right] &= 0, \\ (s_{11}\mu_A^2 - 2s_{1\mu}\mu_A + s_{\mu\mu})^{-\frac{1}{2}} - \frac{(2s_{11}\mu_A - 2s_{1\mu})(\mu_A - r_f)}{2(s_{11}\mu_A^2 - 2s_{1\mu}\mu_A + s_{\mu\mu})^{-\frac{3}{2}}} &= 0. \end{aligned}$$

(31)

Gautą lygtį galime padauginti iš $(s_{11}\mu_A^2 - 2s_{1\mu}\mu_A + s_{\mu\mu})^{-\frac{3}{2}}$ ir suprastinti

$$\begin{aligned} 0 &= (s_{11}\mu_A^2 - 2s_{1\mu}\mu_A + s_{\mu\mu}) - (s_{11}\mu_A - s_{1\mu})(\mu_A - r_f), \\ 0 &= s_{11}\mu_A^2 - 2s_{1\mu}\mu_A + s_{\mu\mu} - (s_{11}\mu_A^2 - s_{1\mu}\mu_A - s_{11}r_f\mu_A + s_{1\mu}\mu_A r_f), \end{aligned}$$

$$0 = s_{11}\mu_A^2 - 2s_{1\mu}\mu_A + s_{\mu\mu} - s_{11}\mu_A^2 + s_{1\mu}\mu_A + s_{11}r_f\mu_A - s_{1\mu}\mu_A r_f,$$

$$-s_{1\mu}\mu_A + s_{11}r_f\mu_A = -s_{\mu\mu} + s_{1\mu}\mu_A r_f,$$

$$\mu_A^{max} = \frac{-s_{\mu\mu} + s_{1\mu}\mu_A r_f}{-s_{1\mu} + s_{11}r_f}.$$

(32)

Norint gauti rezultatus reiktų (32) formulę įstatyti (13).

Tačiau, pirma raskime $M^{-1}u$, kur $M = U^T \Sigma^{-1} U$ ir $u = (\mu_A \ 1)^T$ ir naudosime (17) formulės žymėjimus.

$$M^{-1}u = \frac{1}{d} \begin{bmatrix} s_{11} & -s_{1\mu} \\ -s_{1\mu} & s_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s_{\mu\mu} - r_f s_{1\mu}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \\ 1 \end{bmatrix}.$$

(33)

Dėl patogumo vektorius $\begin{bmatrix} s_{11} & -s_{1\mu} \\ -s_{1\mu} & s_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s_{\mu\mu} - r_f s_{1\mu}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \\ 1 \end{bmatrix}$ ir $\begin{bmatrix} -s_{1\mu} & s_{\mu\mu} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{s_{\mu\mu} - r_f s_{1\mu}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \\ 1 \end{bmatrix}$ suskaičiuokime atskirai. Pirmas būtų

$$\begin{aligned} & \frac{1}{d} \left[s_{11} \left(\frac{s_{\mu\mu} - r_f s_{1\mu}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \right) - s_{1\mu} \right] \\ &= \frac{1}{d} \left[\frac{s_{11}s_{\mu\mu} - s_{11}r_f s_{1\mu} - s_{1\mu}^2 + r_f s_{11}s_{1\mu}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \right] \\ &= \frac{1}{d} \left[\frac{s_{11}s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \right] \\ &= \frac{1}{s_{1\mu} - r_f s_{11}}. \end{aligned}$$

Čia $d = s_{11}s_{\mu\mu} - s_{1\mu}s_{1\mu}$.

(34)

Toliau skaičiuosime antrąjį vektorių

$$\frac{1}{d} \left[-s_{1\mu} \left(\frac{s_{\mu\mu} - r_f s_{1\mu}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \right) + s_{\mu\mu} \right]$$

$$\begin{aligned}
&= \frac{1}{d} \left[\frac{-s_{1\mu}s_{\mu\mu} + r_f s_{1\mu}^2 + s_{\mu\mu}s_{1\mu} - r_f s_{11}s_{\mu\mu}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \right] \\
&= \frac{1}{d} \left[\frac{r_f s_{1\mu}^2 - r_f s_{11}s_{\mu\mu}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \right] \\
&= \frac{1}{d} \left[\frac{-r_f (s_{11}s_{\mu\mu} - s_{1\mu}^2)}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \right] \\
&= \frac{-r_f}{s_{1\mu} - r_f s_{11}}.
\end{aligned}$$

(35)

Gautas reikšmės įstatome į (13) formulę

$$\begin{aligned}
w &= \Sigma^{-1} U M^{-1} u \\
&= [\Sigma^{-1} \mu \quad \Sigma^{-1} \mathbb{1}] \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{s_{1\mu} - r_f s_{11}}{-r_f} \\ \frac{-r_f}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \end{bmatrix} \\
&= \frac{\Sigma^{-1} \mu}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} - \frac{r_f \Sigma^{-1} \mathbb{1}}{s_{1\mu} - r_f s_{11}} \\
&= \frac{\Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbb{1})}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbb{1})}.
\end{aligned}$$

Maksimalaus pelno – rizikos koeficiento portfelis parabolinėje kreivėje yra

$$w^{max} = \frac{\Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbb{1})}{\mathbb{1}^T \Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbb{1})}.$$

(36)

□

4.6 Optimalaus portfelio liestinė

Surasime svorius portfelio, kuris yra parabolinio ir tiesinio efektyvumo fronto liestinė.

Liestinės portfelis turi maksimizuoti pelno – rizikos koeficientą, t.y. turi tokius pačius svorius kaip ir (36) lygybėje.

Irodymas

Pažymėkime ω kaip svorius $n + 1$ aktyvų

$$\omega = \begin{bmatrix} \mathbb{W} \\ w_f \end{bmatrix}.$$

Kai $\omega^T \mathbb{1} = 1$, tai $w_f = 0$, tai galime pasinaudoti (26) formule ir užsirašyti

$$1 = \mathbb{1}^T \omega = \mathbb{1}^T \mathbb{W} = \widetilde{\mu}_A \frac{\mathbb{1} \Sigma^{-1} \widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}^T \Sigma^{-1} \widetilde{\mu}}.$$

(37)

Iš (37) lygties išsireiškiame $\widetilde{\mu}_A$

$$\widetilde{\mu}_A = \frac{\widetilde{\mu}^T \Sigma^{-1} \widetilde{\mu}}{\mathbb{1} \Sigma^{-1} \widetilde{\mu}}.$$

(37) išraišką įstatome į (26) formulę ir optimalaus portfelio svorius

$$\begin{aligned} w^M &= \left(\frac{\widetilde{\mu}^T \Sigma^{-1} \widetilde{\mu}}{\mathbb{1} \Sigma^{-1} \widetilde{\mu}} \right) \left(\frac{\Sigma^{-1} \widetilde{\mu}}{\widetilde{\mu}^T \Sigma^{-1} \widetilde{\mu}} \right) \\ &= \frac{\Sigma^{-1} \widetilde{\mu}}{\mathbb{1} \Sigma^{-1} \widetilde{\mu}} \\ &= \frac{\Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbb{1})}{\mathbb{1} \Sigma^{-1} (\mu - r_f \mathbb{1})} = w^{max}. \end{aligned}$$

Čia w^M yra liestinės portfelio svoriai.

□

5) Markowitz teorijos taikymo praktinė dalis

Šiame skyriuje, remdamiesi jau išdėstyta teorija, suformuosime lygių dalių, minimalios rizikos ir optimalius portfelius, rasime efektyvumo frontą. Uždaviniams spręsti naudosime “Microsoft Excel” ir “R” programas. Įmonių gražų statistiniai duomenys yra paimti iš “Yahoo finance” duomenų bazės [7],[8],[9],[10].

5.1 Įmonių statistiniai rodikliai

Statistiniai duomenys analizuojami šiame darbe yra kompanijų *Linde plc.* [7], *Walmart Inc.* [9], *Visa Inc.* [8]. Atitinkamai juos pažymėkime A_1, A_2, A_3 . Duomenis imsime penkių metų laikotarpio, nuo 2018-05-01 iki 2023-4-30 ir naudosime jų uždarymo kainas biržoje.

Data	LIN	WMT	V
2018-05-01	153.3	87.41	127.51
2018-05-02	151.24	86.34	126.38
...	...	...	...
2023-04-27	365.64	151.38	229.01
2023-04-28	369.45	150.97	232.73

1 lentelė: Aktyvų uždarymo kainos

Pasinaudoje gražos skaičiavimo formule, randame aktyvų gražas kiekvienam periodui,

$r = \frac{B_1 - B_0}{B_0} = \frac{B_1}{B_0} - 1$, čia aktyvo uždarymo kainą periodo pradžioje pažymėsime B_0 , o pabaigoje - B_1 .

Data	LIN	WMT	V
2018-05-02	-0.01344	-0.01224	-0.00886
2018-05-03	0.01058	-0.00127	0.00633
...	...	...	...

2023-04-27	0.00175	0.00311	0.00377
2023-04-28	0.01042	-0.00271	0.01624

2 lentelė: Aktyvų gražos

Norint gauti aktyvo tikėtinas gražas (μ_{A_1} , μ_{A_2} , μ_{A_3}) ir standartinius nuokrypius (σ_{A_1} , σ_{A_2} , σ_{A_3}), naudosime „Microsoft Excel“ funkcijas AVERAGE ir STDEV.S.

Įmonė	Tikėtina graža	Standartinis nuokrypis
LIN	0.0008457	0.0170850
WMT	0.0005376	0.0143565
V	0.0006455	0.0182837

3 lentelė: Aktyvų tikėtinos gražos ir standartiniai nuokrypiai

Pasinaudoje „Microsoft Excel“ funkcija COVARIANCE.S randame aktyvų kovariacijos matricą.

	LIN	WMT	V
LIN	0.0002919	0.0000834	0.0001961
WMT	0.0000834	0.0002061	0.0000810
V	0.0001961	0.0000810	0.0003343

3 lentelė: Aktyvų kovariacijos matrica

Pažymėkime

$$\mathbb{W} = (w_1 \ w_2 \ w_3).$$

Kur $\mathbb{W}$ yra portfelių svorių matrica, o w_i (čia $i = 1, 2, 3.$) – svoris, parodantis kokia dalis investuotą į tą kompaniją.

Tolesniems skaičiavimams naudosime “R” programą. Naudosime IntroCompFinR [2] bibliotieką, kuri palengvins norimų portfelių radimą.

5.2 Lygių dalių portfelis

Lygių dalių portfelyje investuojama suma lygiomis dalimis išskirstoma per aktyvus. Mūsų atveju aktyvų svorių matrica bus:

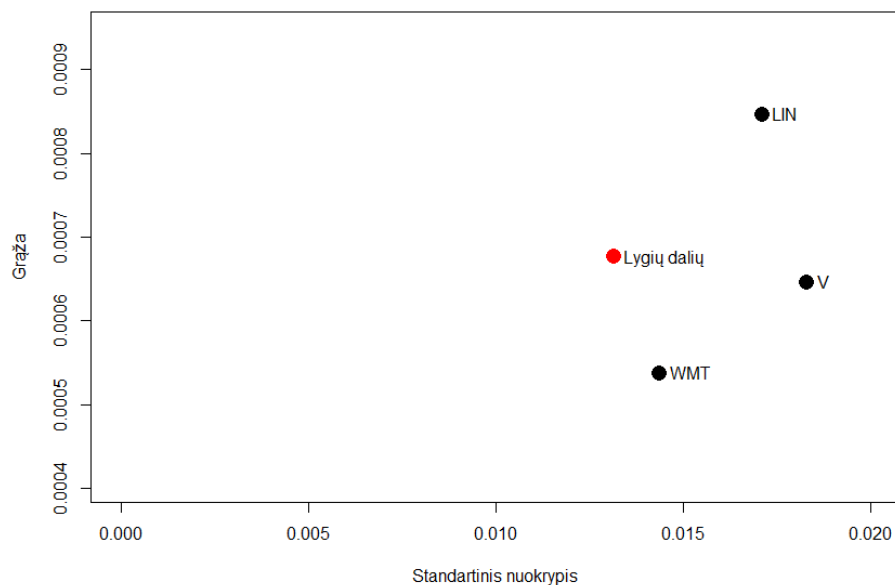
$$\mathbb{W} = \begin{pmatrix} \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}.$$

Naudodamiesi funkcija getPortfolio ir suvedus grąžos, kovariacijos ir svorių matricas gauname rezultatus.

Tikėtina grąža	0.0006762
Standartinis nuokrypis	0.0131372

4 lentelė: Lygių dalių portfelis

Apačioje pavaizduotame grafike yra atvaizduoti taškai portfelių jei visa suma būtų investuojama į vieną aktyvą ir jei lygių dalių portfelio. Galima teigti, kad investuojant lygiomis dalimis į skirtingus aktyvus ženkliai sumažino riziką ir net aplenkė *Walmart Inc.* ir *Visa Inc.* Grąžos atžvilgiu.



1 pav.: Portfelį išsidėstymas

5.3 Minimalios rizikos portfelis

Norint rasti minimalios rizikos portfelį su “R” programa, naudosime `globalMin.portfolio` funkciją ir suvedus grąžos ir kovariacijos matricas gauname rezultatus.

Tikėtina grąža	0.0006315
Standartinis nuokrypis	0.0124116

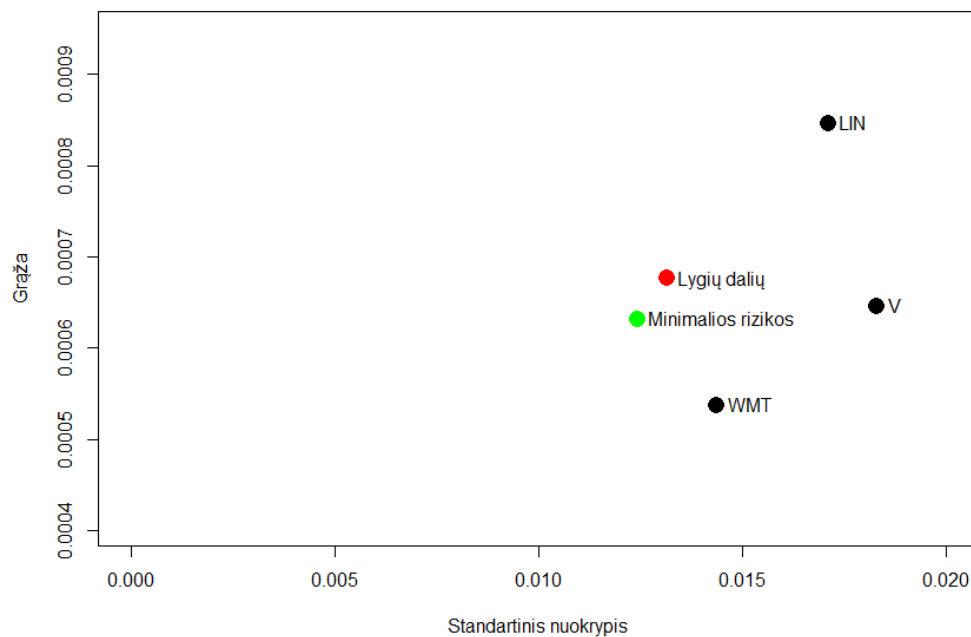
5 lentelė: Minimalios rizikos portfelis

Gauti svoriai minimalios rizikos portfelio:

$$W = (0.2425 \quad 0.5793 \quad 0.1782).$$

Tai reiškia, kad į *Linde plc.* akcijas investuota bus 24.25 % investuojamos sumos, *Walmart Inc.* – 57.93 % ir į *Visa Inc.* 17.82 %.

Minimalios rizikos portfelis grafike yra kairiausias taškas.



2 pav.: Portfelį išsidėstymas pridėjus minimalios rizikos portfelį

5.4 Maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis ir efektyvumo frontas

Norint rasti optimalų portfelį naudosime tangency.portfolio funkciją ir suvedus grąžos, kovariacijos matricas ir nerizikingos investicijos grąžą (r_f) gauname rezultatus.

Tikėtina grąža	0.0007287
Standartinis nuokrypis	0.0134602

6 lentelė: Maksimalaus pelno-rizikos koeficiento portfelis

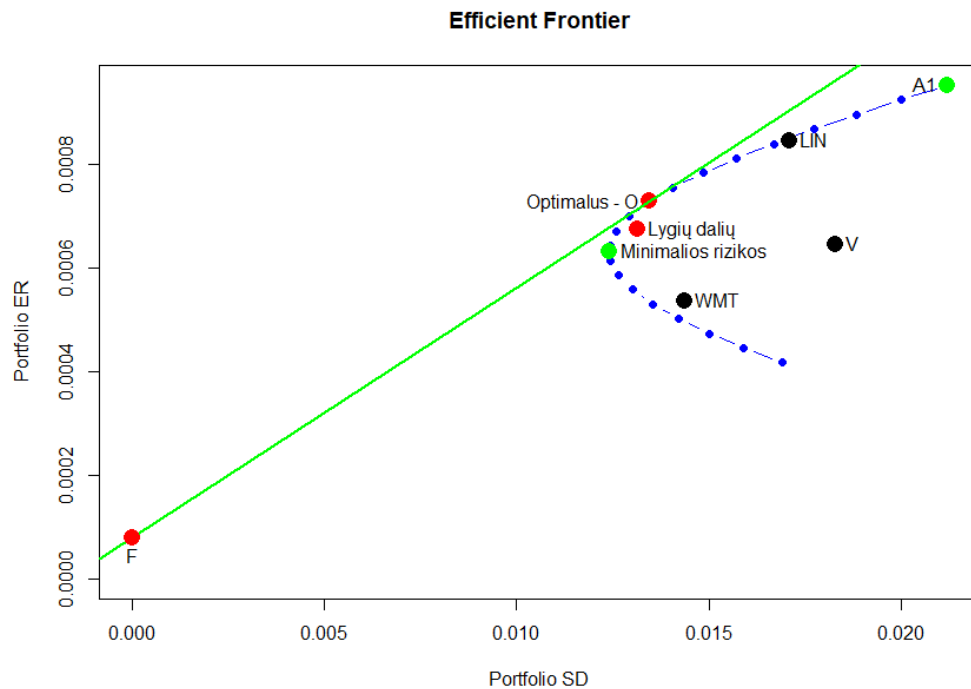
Gauti svoriai optimalaus portfelio:

$$\mathbb{W} = (0.6114 \ 0.3627 \ 0.0259).$$

Skaiciuojant nerizikingu aktyvu laikytas Jungtinių Amerikos valstyjų išduodamas vienu metų izdo vekselis, kurio pelningumas, imant praeitus metus ,buvo apie 2 % [10]. Kadangi, mūsų

skaičiavimuose naudojamas periodas yra viena diena, kada vyksta prekyba, tai 2 % padaliname iš 252 (vidutinio skaičiaus dienų metuose, kai vyksta prekyba) ir gauname $r_f = 0000794$.

Ieškant efektyvumo fronto naudosime `efficient.frontier`, kuri padės surasti įvairias portfelių kombinacijas, funkciją ir suvedus grąžos, kovariacijos matricas gauname rezultatus.



3 pav.: Efektyvumo fronto liestinė optimaliame taške

Iš rizikingų aktyvų (LIN, WMT, V) ir nerizikingo aktyvo r_f sudaryto portfelio efektyvumo frontas (nesiskolinant už r_f) yra $[F, O) \cup [O, A_1)$. Čia $[F, O)$ – atkarpa nuo taško F iki O, $[O, A_1)$ – kreivė nuo taško O iki A_1 .

6 Išvados

Investavimas ir rizika yra du labai susiję dalykai. Kuo didesnė rizika – tuo didesnė tikėtina grąža ir atvirkščiai, kuo mažesnė rizika – tuo mažesnė ir grąža. Todėl, gebėjimas formuoti portfelius, remiantis H. Markowitz, kurie suteikia didžiausią grąžą esant tam tikram rizikos lygiui yra naudingas iki šiol.

Šiame baigiamajame darbe nagrinėjome H. Markowitz iškeltas teorijas, remdamiesi matematikų, vis dar, nagrinėjais straipsniais šia tema. Išsiaiškinome pagrindinius investicinio portfelio apibrėžimus, tokius kaip, grąža ir rizika. Įrodėme minimalios rizikos, maksimalaus pelno – rizikos koeficiento portfelio ir efektyvumo fronto teiginius. Remdamiesi teorija ir pasinaudodami programavimo galimybėmis teorines žinias pritaikėme praktikoje formuodami portfelius iš nerizikingo aktyvo ir trijų rizikingų aktyvų.

7 Literatūra

- 1) A. Grigutis. *Rizikingų aktyvų portfelis paskaitų konspektas*
<https://klevas.mif.vu.lt/~andriusg/>
- 2) E. Zivot. *IntroCompFinR: Introduction to Computational Finance in R*
<https://rdr.io/rforge/IntroCompFinR/>
- 3) E. Zivot. *Portfolio Theory with Matrix Algebra*, 2021
<https://bookdown.org/compfinezbook/introFinRbook/Portfolio-Theory-with-Matrix-Algebra.html>
- 4) G. Gundersen. *Geometry of the Efficient Frontier*, 2022
https://gregorygundersen.com/blog/2022/01/09/geometry-efficient-frontier/?fbclid=IwAR2gW41mLHhFd5iNDTbfRjZMXyhDRIhobWeqy060cSFROf1GF_LVRIttPsqU
- 5) Harry Markowitz. *Portfolio Selection*, 1952.
<https://www.jstor.org/stable/2975974>
- 6) University of Southern California. *The Information Inequality*
<https://dornsife.usc.edu/assets/sites/1193/docs/InformationInequality.pdf>
- 7) YAHOO Finance. Linde plc (LIN) Historical Price
<https://finance.yahoo.com/quote/LIN?p=LIN>
- 8) YAHOO Finance. Visa Inc. (V) Historical Price
<https://finance.yahoo.com/quote/V?p=V&.tsrc=fin-srch>
- 9) YAHOO Finance. Walmart Inc. (WMT) Historical Price
<https://finance.yahoo.com/quote/WMT?p=WMT&.tsrc=fin-srch>
- 10) Ycharts. *1 Year Treasury Rates*
https://ycharts.com/indicators/1_year_treasury_rate

8 Priedai

R kodas:

```
library(IntroCompFinR)

asset.names <- c("LIN", "WMT", "V")

mu.vec = c(0.000845691682, 0.000537573764, 0.000645464345)

sigma.mat = matrix(c(0.000291896527, 0.000083397246, 0.000196115305,
                     0.000083397246, 0.000206108396, 0.000080975759,
                     0.000196115305, 0.000080975759, 0.000334294554
                     ),
                    nrow=3, ncol=3)

#mu.vec

#sigma.mat

sigma.vec = sqrt(diag(sigma.mat))

r.f=0.000079365079

eqw = rep(1,3)/3

equalWeight.portfolio = getPortfolio(er=mu.vec,cov.mat=sigma.mat,weights=eqw)

#class(equalWeight.portfolio)

#names(equalWeight.portfolio)

equalWeight.portfolio #Lygių dalių portfelis

min.sd.port = globalMin.portfolio(mu.vec, sigma.mat)

#class(min.sd.port)
```

```
min.sd.port # Minimalios rizikos portfelis
```

```
opt.port = tangency.portfolio(mu.vec, sigma.mat, r.f)
```

```
#class(opt.port)
```

```
opt.port # Optimalus portfelis
```

```
ef = efficient.frontier(mu.vec, sigma.mat, alpha.min=-0.5,
```

```
alpha.max=2, nport=20)
```

```
#attributes(ef)
```

```
#ef
```

```
plot(ef, col="blue", pch=16)
```

```
#plot(equalWeight.portfolio$sd, equalWeight.portfolio$er,xlim=c(0,0.02),xlab="Standartinis  
nuokrypis", ylab="Grąža")
```

```
points(equalWeight.portfolio$sd, equalWeight.portfolio$er, col="red", pch=16, cex=2)
```

```
text(equalWeight.portfolio$sd, equalWeight.portfolio$er, labels = "Lygių dalių", pos = 4)
```

```
points(sigma.vec[1], mu.vec[1], col="black", pch=16, cex=2)
```

```
text(sigma.vec[1], mu.vec[1], labels = "LIN", pos = 4)
```

```
points(sigma.vec[2], mu.vec[2], col="black", pch=16, cex=2)
```

```
text(sigma.vec[2], mu.vec[2], labels = "WMT", pos = 4)
```

```
points(sigma.vec[3], mu.vec[3], col="black", pch=16, cex=2)
```

```
text(sigma.vec[3], mu.vec[3], labels = "V", pos = 4)
```

```
points(min.sd.port$sd, min.sd.port$er, col="green", pch=16, cex=2)
```

```
text(min.sd.port$sd, min.sd.port$er, labels = "Minimalios rizikos", pos = 4)
```

```
points(opt.port$sd, opt.port$er, col="red", pch=16, cex=2)
```

```
text(opt.port$sd, opt.port$er, labels = "Optimalus - O", pos = 2)

sr.tan = (opt.port$er - r.f)/opt.port$sd

abline(a=r.f, b=sr.tan, col="green", lwd=2)

points(0, 0.000079365079, col="red", pch=16, cex=2)

text(0, 0.000079365079, labels = "F", pos = 1)

text(ef$sd[1], ef$er[1], labels = "A1", pos = 2)

points(ef$sd[1], ef$er[1], col="green", pch=16, cex=2)
```