ŠIAULIŲ UNIVERSITETAS

MATEMATIKOS IR INFORMATIKOS FAKULTETAS

MATEMATIKOS KATEDRA

JOVITA RAŠYTĖ

OILERIO SANDAUGŲ REIKŠMIŲ PASISKIRSTYMAS KOMPLEKSINĖJE PLOKŠTUMOJE

Magistro darbas

Darbo vadovė

doc. dr. Roma Kačinskaitė

ŠIAULIAI, 2010

Turinys

Žymėjimai

d, j, k, l, m, n, T	- natūralieji skaičiai
p	- pirminis skaičius
$\mathbb{N}$	- natūraliųjų skaičių aibė
$\mathbb{Z}$	- sveikųjų skaičių aibė
$\mathbb{R}$	- realiųjų skaičių aibė
$\mathbb{C}$	- kompleksinių skaičių aibė
i	- menamasis vienetas: $i = \sqrt{-1}$
$s = \sigma + it$	- kompleksiniai kintamieji
$\mathrm{Re} s = \sigma$	- kompleksinio kintamojo s realioji dalis
$\mathrm{Im} s = t$	- kompleksinio kintamojo s menamoji dalis
$\mathrm{meas}\{A\}$	- aibės A Lebego matas
$\xrightarrow{\mathcal{D}}$	- konvergavimas pagal skirstinį
$\mathfrak{B}(S)$	- erdvės S Borelio aibių klasė
$\mathbb{E}X$	- atsitiktinio elemento X vidurkis
γ	- vienetinis apskritimas, t. y. $\{s \in \mathbb{C} : \lvert s\rvert = 1\}$
B	- dydis aprėžtas konstanta (O didysis atitikmuo)
$A \vartriangle A_\tau$	- aibių A ir A_τ simetrinis skirtumas
m_H	- Haro matas
$P_n \Rightarrow P$	- tikimybinis matas P_n silpnai konverguoja į tikimybinį matą P.

Įvadas

Tegul $s = \sigma + it$ yra kompleksinis kintamasis. Rymano dzeta funkcija $\zeta(s)$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_p \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}, \quad p \text{ – pirminis},$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą. $\zeta(s)$ yra meromorfinė funkcija, taške $s = 1$ turi paprastąjį polių su reziduumu 1. Funkcijos $\zeta(s)$ reikšmių pasiskirstymas yra gana sudėtingas. Egzistuoja statistiniai tyrimo metodai, kada yra tiriamas $\zeta(s)$ reikšmių, priklausančių duotai aibei, dažnis. Pasirodo, kad šis dažnis paklūsta matematinėms taisyklėms. Pirmieji rezultatai šioje srityje priklauso H. Borui ir B. Jesenui, gauti 1930–1932 metais. Pavyzdžiui, 1930 m. jie įrodė tokį tvirtinimą [2].

Tarkime, kad R yra uždaras stačiakampis kompleksinėje plokštumoje su kraštinėmis lygiagrečiomis koordinačių ašims, ir tegul $L(T, R)$ yra aibės $\{t \in [0, T] : \log \zeta(\sigma + it) \in R\}$ Žordano matas.

A teorema. Kai $\sigma > 1$, egzistuoja riba

$$\lim_{T\to\infty} \frac{L(T, R)}{T} = W(R, \sigma),$$

kuri priklauso tik nuo σ ir R.

Vėliau daugelis matematikų (A. Vintneris, V. Boršeniusas, A. Selbergas, P. D. T. A. Eliotas, A. Gošas, B. Bagči, K. Matsumoto, J. Štoidingas, A. Laurinčikas, E. Stankus, J. Genys, V. Garbaliauskienė, R. Kačinskaitė, R. Macaitienė, D. Šiaučiūnas ir kiti) pagerino bei apibendrino Boro-Jeseno rezultatus.

Naudojant modernią terminoligiją Boro-Jeseno tipo rezultatus galima užrašyti silpno tikimybinių matų konvergavimo terminais. Priminsime tikimybinių matų silpno konvergavimo apibrėžimą. Pažymėkime $\mathfrak{B}(S)$ erdvės S Borelio aibių klasę . Tegul P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(S, \mathfrak{B}(S))$. Tada sakome, kad P_n silpnai konverguoja į P, kai $n \to \infty$, jei

$$\lim_{n\to\infty} \int_S f dP_n = \int_S f dP$$

kiekvienai realiai tolydžiai aprėžtai funkcijai f erdvėje S.

Tegul $\text{meas}\{A\}$ yra mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matas ir, kai $T > 0$,

$$\nu_T(\ldots) = \frac{1}{T}\text{meas}\{t \in [0, T] : \ \ldots\},$$

kur vietoj daugtaškio įrašomos sąlygos, kurias tenkina t. Tada Boro-Jeseno rezultatas kompleksinėje plokštumoje $\mathbb{C}$ gali būti suformuluotas taip.

B teorema. Tegul $\sigma > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas. Tada erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P_σ toks, kad matas

$$\nu_T(A) = \{t \in [0, T] : \zeta(\sigma + it) \in A\}, \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}),$$

silpnai konverguoja į P_σ, kai $T \to \infty$.

Mūsų magistro darbo tikslas – įrodyti ribinę teoremą Oilerio sandaugoms kompleksinėje plokštumoje.

Oilerio sandaugos $L(s)$ yra apibrėžiamos

$$L(s) = e^{i\omega} \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_{1p}p^{-s})...(1 - \alpha_{dp}p^{-s})},$$

kur α_{jp} – kompleksiniai skaičiai, $1 \leq j \leq d$, $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 1$, $\omega \in \mathbb{R}$. Yra reikalaujama [3], kad funkcija $L(s)$ tenkintų šias hipotezes.

1. Kiekvienam fiksuotam $\theta \in [0; \frac{1}{2})$ ir $j = 1, ..., d$,

$$|\alpha_{jp}| \leq p^\theta;$$

2. Įvertis

$$\sum_{p \leq x} \sum_{j=1}^{d} |\alpha_{jp}|^2 = O(x^{1+\epsilon})$$

teisingas kiekvienam fiksuotam $\varepsilon > 0$.

3. $L(s)$ yra analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą $\mathbb{C}$ kaip baigtinės eilės meromorfinė funkcija su baigtiniu skaičiumi polių tiesėje
$\mathrm{Re}s = 1$ ir tenkina funkcinę lygtį

$$G(s)L(s) = \overline{G(\overline{1 - s})} \cdot \overline{L(\overline{1 - s})},$$

kur $G(s) = Q^s \prod\limits_{h=1}^{m} \Gamma(\lambda_h s + \mu_h)$ su $Q > 0$, $\lambda_h > 0$, $\mathrm{Re}\mu_h \geq 0$, o $\Gamma(m)$ yra gama funkcija (pastebėkime, kad funkcinėje lygtyje daugiklis $e^{i\omega}$ vaidina svarbų vaidmenį).

Iš 1–3 hipotezių seka, kad pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ galioja įverčiai:

$$L(\sigma + it) = B|t|^\delta \tag{1}$$

ir tam tikriems $\delta > 0$

$$\int_0^T |L(\sigma + it)|^2 dt = BT, \quad T \to \infty \tag{2}$$

4. Oilerio sandaugos $L(s)$ gali būti išreikštos Dirichlė eilutėmis

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}, \tag{3}$$

kai koeficientai $b(n)$ tenkina lygybę

$$\sum_{p \le x} \frac{b_n(p)\overline{b_k(p)}}{p} = \delta_{jk} n_j \log\log x + c_{jk} + O\Big(\frac{1}{\log x}\Big)$$

tam tikroms teigiamoms konstantoms $n_1, ..., n_N$ ir $x \ge 2$.

Pažymėkime γ vienetinį apskritimą kompleksinėje plokštumoje, t. y. $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, ir tegul

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

kur $\gamma_p = \gamma$ visiems pirminiams p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba begaliniamatis toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega))$ egzistuoja tikimybinis Haro matas m_H ir gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega(p)$ yra projekcija $\omega \in \Omega$ į koordinatinę erdvę γ_p. Tuomet formule

$$\omega(m) = \prod_{p^\alpha \| m} \omega^\alpha(p),$$

kur $p^\alpha \| m$ žymi, kad $p^\alpha | m$, bet $p^{\alpha+1} \not| m$, funkciją $\omega(p)$ pratęsiame į natūraliųjų skaičių aibę $\mathbb{N}$. Vadinasi, $\omega(p)$ yra pilnai multiplikatyvi funcija ir $|\omega(m)| = 1$.

Pagal 4 hipotezę pusplokštumėje $\sigma > \theta+1$ funkcija $L(s)$ gali būti išreikšta (**??**) absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute.

Kai $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime kompleksines reikšmes įgyjantį atsitiktinį elementą $L(\sigma, \omega)$ formule

$$L(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega(k)}{m^\sigma} = \prod_{m=1}^{\infty} \prod_{j=1}^{d} \Big(1 - \frac{\alpha_{jp}\omega(p_m)}{p_m^\sigma}\Big)^{-1}, \quad \omega \in \Omega, \tag{4}$$

o jo skirstinį pažymėkime P_L, t. y.

$$P_L(A) = m_H(\omega \in \Omega : \ L(\sigma, \omega) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}). \tag{5}$$

Tada teisingas toks tvirtinimas, kuris yra pagrindinė darbo teorema.

1 teorema. Tarkime, kad $L(s)$ tenkina aukščiau minėtas hipotezės. Tada, kai $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, tikimybinis matas

$$P_T(A) = \frac{1}{T}\mathrm{meas}\{\mathrm{t} \in [0, \mathrm{T}] : L(\sigma + \mathrm{it}) \in \mathrm{A}\}, \quad \mathrm{A} \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}),$$

silpnai konverguoja į matą P_L, kai $T \to \infty$.

1. Žinomos lemos ir teoremos

Šiame skyriuje pateiksime gerai žinomas lemas ir teoremas, kurių įrodymus galima bus rasti atitinkamuose literatūros šaltiniuose.

1.1 lema. Tegul $\{P_n\}$ yra tikimybinių matų erdvėje $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$ seka ir tegul $\{f_n(\tau_1, \tau_2)\}$ yra atitinkamų charakteristinių funkcijų seka. Tarkime, kad visiems (τ_1, τ_2) $f_n(\tau_1, \tau_2) \to f(\tau_1, \tau_2)$, $n \to \infty$ ir $f(\tau_1, \tau_2)$ yra tolydi taške $(0, 0)$. Tada erdvėje $(\mathbb{R}^2, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^2))$ egzistuoja tikimybinis matas P toks, kad $P_n \Rightarrow P$. Šiuo atveju $f(\tau_1, \tau_2)$ yra P charakteristinė funkcija.

Įrodymas. Tai bendrosios tikimybinių matų erdvėje $(\mathbb{R}^k, \mathfrak{B}(\mathbb{R}^k))$ tolydumo teoremos atskiras atvejis, kai $k = 2$. Įrodymą galima rasti [1]. ▲

Tarkime, kad $u : S \to S_1$ yra mati funkcija. Tada kiekvienas tikimybinis matas P iš erdvės $(S, \mathfrak{B}(S))$ erdvėje $(S_1, \mathfrak{B}(S_1))$ indukuoja vienintelį tikimybinį matą Pu^{-1} apibrėžiamą lygybe

$$Pu^{-1}(A) = P(u^{-1}A), \quad A \in \mathfrak{B}(S_1).$$

1.2 lema. Tarkime, kad $u : S \to S_1$ yra tolydi funkcija. Tada iš matų P_n silpno konvergavimo į P seka, kad $P_n u^{-1}$ silpnai konverguoja į Pu^{-1}, kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Tai 5.1 teorema iš [1]. ▲

Kompaktiškos topologinės grupės G tikimybinis matas P vadinamas invariantišku, jei $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ visiems $A \in \mathfrak{B}(G)$ ir $x \in G$, kur xA ir Ax yra atitinkamos aibės $\{xy : y \in A\}$ ir $\{yx : y \in A\}$. Invariantiškas Borelio matas kompaktiškose topologinėse grupėse yra vadinamas Haro matu.

1.3 lema. Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis tikimybinis Haro matas.

Įrodymas. Jį galima rasti [9]. ▲

Tegul γ yra vienetinis kompleksinės plokštumos apskritimas, t. y.
$\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, o Q yra tikimybinis matas erdvėje $(\gamma^m, \mathfrak{B}(\gamma^m))$. Mato Q Furjė transformacija $g(k_1, ..., k_m)$ yra apibrėžiama lygybe

$$g(k_1, ..., k_m) = \int\limits_{\gamma^m} x_1^{k_1} ... x_m^{k_m} dQ, \quad k_j \in \mathbb{Z}, \quad x_j \in \gamma, \quad j = 1, ..., m.$$

1.4 lema. Tarkime $\{Q_n\}$ yra tikimybinių matų erdvėje $(\gamma^m, \mathfrak{B}(\gamma^m))$ seka, o $\{g_n(k_1, ..., k_m)\}$ – atitinkama jų Furje transformacijų seka. Tegul kiekvienai sveikųjų skaičių aibei $(k_1, ..., k_m)$

egzistuoja riba

$$g(k_1, ..., k_m) = \lim_{n\to\infty} g_n(k_1, ..., k_m).$$

Tada erdvėje $(\gamma^m, \mathfrak{B}(\gamma^m))$ egzistuoja tikimybinis matas Q toks, kad Q_n silpnai konverguoja į Q, kai $n \to \infty$. Dar daugiau, $g(k_1, ..., k_m)$ yra mato Q Furje transformacija.

Įrodymas. Tai tikimybinių matų kompaktiškose Abelio grupėse tolydumo teorema. Įrodymą galima rasti [4]. ▲

1.5 lema. Tegul $X_1, X_2, ...$ yra ortogonalūs atsitiktiniai elementai ir

$$\sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}|X_m|^2 \log^2 m < \infty.$$

Tada eilutė $\sum\limits_{m=1}^{\infty} X_m$ konverguoja beveik tikrai.

Įrodymas. Jį galima rasti [6]. ▲

Sakome, kad tikimybinių matų $\{P\}$ šeima erdvėje $(S, \mathfrak{B}(S))$ yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienoje elementų iš $\{P\}$ sekoje yra silpnai konverguojantis posekis. Šeima $\{P\}$ yra suspausta, jei kiekvienam pakankamai mažam $\varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė K tokia, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$ su visais matais P iš $\{P\}$.

1.6 lema. Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra suspausta, tai ji yra reliatyviai kompaktiška.

1.7 lema. Tarkime, S yra separabili pilna metrinė erdvė. Jeigu erdvės $(S, \mathfrak{B}(S))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra suspausta.

1.6 ir 1.7 lemos yra gerai žinomos Prochorovo teoremos; jų įrodymus galima rasti [1].

Tegul $(S; \rho)$ yra separabili metrinė erdvė, o Y_n, X_{1n}, X_{2n} – s-reikšmiai atsitiktiniai elementai apibrėžti erdvėje $(\hat{\Omega}, F, \mathbb{P})$.

1.8 lema. Tegul $X_{kn} \xrightarrow{D} X_k$, kai $n \to \infty$, su kiekvienu k ir $X_k \xrightarrow{D} X$, kai $k \to \infty$. Jei kiekvienam pakankamai mažam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\{\rho(X_{kn}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0,$$

tai $Y_n \xrightarrow{D} X$, kai $n \to \infty$.

Šios teoremos įrodymą galima rasti [1].

1.9 lema. Visiems teigiamiems a ir b teisinga lygybė

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{b-i\infty}^{b+i\infty} \Gamma(s) a^{-s} ds = e^{-a}.$$

Lemos įrodymą galima rasti [5].

1.10 lema. Tarkime, T_0 ir $T \geq \delta > 0$ yra realieji skauičiai, $\Im$ – intervalo $[T_0 + \frac{\delta}{2}, T_0 + T - \frac{\delta}{2}]$ baigtinė aibė. Tegul

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t \in \Im \\ |t-x|<\delta}} 1$$

ir $S(x)$ – kompleksines reikšmes įgyjanti tolydi funkcija intervale $[T_0, T+T_0]$, turinti tolydžią išvestinę intervale $(T_0, T_0 + T)$. Tada

$$\sum_{t \in \Im} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leq \frac{1}{\delta} \int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx + \Big(\int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}} \cdot \Big(\int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S'(x)|^2 dx \Big)^{\frac{1}{2}}.$$

Įrodymas pateiktas [7].

1.11 lema (Koši formulė). Tarkime, kad $f(s)$ yra analizinė funkcija srityje G. Tada

$$f'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-s|=\delta} \frac{f(z)}{(z-s)^2} dz,$$

apskritimas $|z - s| = \delta$ priklauso sričiai G.

Įrodymas. Jį galima rasti [8]. ▲

1.12 Lema. Jei funkcija $f(z)$ yra analizinė uždaroje srityje $\overline{D}$, išskyrus baigtinį skaičių izoliuotųjų ypatingųjų taškų $z_1, z_2, ..., z_n$ srities D viduje, tai

$$\oint\limits_{\eth D} f(z) dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \mathrm{Res}_{\mathrm{z=z_k}} \mathrm{f(z)}.$$

1.13 lema. Jei funkcija $f(z)$ yra vienareikšmė ir analizinė srityje G, o L – uždaroji ištiesinamoji Žordano kreivė, priklausanti sričiai G kartu su savo vidine sritimi D, tai

$$\frac{1}{2\pi i} \oint\limits_{L} \frac{f(z) dz}{z - a} = \begin{cases} f(a), \text{ kai } a \in D, \\ 0, \text{ kai } a \in G \backslash \overline{D}. \end{cases}$$

1.12 ir 1.13 lemų įrodymus galima rasti [8].

Tarkime $a_h = \{p^{-it}, p - \text{pirminis}\}$. Tore Ω apibrėžkime transformaciją $f_h(\omega) = a_h \omega$, $\omega \in \Omega$. Tada f_h yra mati matą išsauganti transformacija erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$.

Aibė $A \in \mathfrak{B}(\Omega)$ yra vadinama invariantiška transformacijos f_h atžvilgiu, jei aibės A ir $A_h = f_h(A)$ skiriasi viena nuo kitos nulinio m_H-mato aibe, t. y., $m_H(A \vartriangle A_h) = 0$, o $\vartriangle$ žymi aibių simetrinį skirtumą.

1.14 lema. Tegul T yra mati matą išsauganti ergodinė transformacija erdvėje $(\widetilde{\Omega}, F, m)$. Tada kiekvienai funkcijai $f \in L^1(\Omega, F, m)$ beveik kiekvienam
$\omega \in \widetilde{\Omega}$ teisinga lygybė

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \sum_{k=0}^{n-1} f(T^k \omega) = \mathbb{E}(f).$$

Tai Birkhofo teorema; jos įrodymą galima rasti [10].

2. Pagalbiniai rezultatai

Šiame skyriuje įrodysime teiginius, kurie bus naudojami gaunant pagrindinį magistro darbo tvirtinimą.

2.1 Ribinė teorema Dirichlė polinomams

Šiame skyrelyje įrodysime ribinę teoremą Dirichlė polinomams.

Tarkime, kad

$$\widetilde{p}_n(t) = \sum_{k=1}^{n} a_k e^{i\lambda_j t}, \quad a_k \in \mathbb{C},$$

yra Dirichlė polinomas. Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ apibrėžkime tikimybinį matą

$$P_{T,\widetilde{p}_n}(A) = \nu_T(\widetilde{p}_n(it) \in A).$$

Nagrinėsime šio mato silpną konvergavimą, kai $T \to \infty$.

2.1.1 teorema. Tikimybinėje erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P_{p_n} toks, kad matas P_{T,p_n} silpnai konverguoja į P_{p_n}, kai $T \to \infty$.

Įrodymas. Tegul $p_1, p_2, ..., p_r$ yra skirtingi pirminiai skaičiai, kurie dalija

$$\prod_{\substack{k=1 \\ a_k \neq 0}}^{n} k$$

ir

$$\Omega_r = \prod_{j=1}^{r} \gamma_{pj},$$

kur $\gamma_{pj} = \gamma$ visiems $j = 1, ..., r$. Apibrėžkime funkciją $u : \Omega_r \to \mathbb{C}$ formule

$$u(x_1, ..., x_r) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k}{k^\sigma} \left(\prod_{\substack{p_j^{\alpha j} \| r \\ j \leq r}} x_j^{\alpha j} \right)^{-1},$$

kur $(x_1, ..., x_r \in \Omega_r)$. Funkcija u yra tolydi tore Ω_r ir

$$\widetilde{p}_n(it) = u(p_1^{it}, ..., p_n^{it}). \tag{6}$$

Sudarykime tikimybinį matą

$$Q_T(A) = \nu_T((p_1^{it}, ..., p_n^{it}) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\Omega_r).$$

Mato Q_T Furje transformacija $g_T(k_1, ..., k_r)$, $\quad k_j \in \mathbb{Z}, \quad j = 1, ..., n,$

$$g_N(k_1, ..., k_r) = \frac{1}{T} \int_0^T \prod_{j=1}^{r} p_j^{itk_j} = \frac{1}{T} \int_0^T \exp\left\{ i \sum_{j=1}^{r} k_j \log p_j \right\} dt.$$

Yra žinoma, kad pirminių skaičių logaritmai yra tiesiškai nepriklausomi virš racionaliųjų skaičių kūno. Dar daugiau,

$$\prod_{j=1}^{r} p_j^{k_j} = \exp\left\{\sum_{j=1}^{r} k_j \log p_j\right\}$$

yra racionalus skaičius. Vadinasi,

$$g_T(k_1, ..., k_r) = \begin{cases} 1, \text{ kai } \quad (k_1, ..., k_r) = (0, ..., 0), \\ \frac{1}{T}\frac{1-\exp\{iT\sum_{j=1}^{r} k_j \log p_j\}}{1-\exp\{i\sum_{j=1}^{r} k_j \log p_j\}}, \text{ kai } \quad (k_1, ..., k_r) \neq (0, ..., 0). \end{cases}$$

Todėl, remdamiesi 1.4 lema gauname, kad matas Q_T silpnai konverguoja į Haro matą m_{rH} erdvėje $(\Omega_r, \mathfrak{B}(\Omega_r))$, kai $T \to \infty$. Atsižvelgiant į funkcijos u apibrėžimą ir (**??**) sąryšį bei pritaikę 1.2 lemą gauname, kad tikimybinis matas $P_{T,\widetilde{p}_n}$ silpnai konverguoja į matą $P_{\widetilde{p}_n} = m_{rH}u^{-1}$, kai $T \to \infty$. $\blacktriangle$

Tegul $g(k)$, $k \in \mathbb{N}$, |g(k)|=1, yra pilnai multiplikatyvi funkcija ir

$$\widetilde{p}_n(t, g) = \sum_{k=1}^{n} a_k g(k) k^{-it}$$

bei atitinkamai matas

$$\widetilde{P}_{T,\widetilde{p}_n} = \nu_T(\widetilde{p}_n(it, g) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

2.1.2 teorema. Tikimybiniai matai $P_{T,\widetilde{p}_n}$ ir $\widetilde{P}_{T,\widetilde{p}_n}$ abu silpnai konverguoja į tą patį matą, kai $T \to \infty$.

Įrodymas. Funkciją $u_1 : \Omega_r \to \Omega_r$ apibrėžkime formule

$$u_1(x_1, ..., x_r) = (x_1 e^{-i\eta_1}, ..., x_r e^{-i\eta_r}),$$

kur $\eta_j = \arg g(p_j)$, $j = 1, ..., n$. Remiantis 2.1.1 teoremos įrodymu, tikimybiniai matai $P_{T,\widetilde{p}_n}$ ir $\widetilde{P}_{T,\widetilde{p}_n}$ silpnai konverguoja atitinkamai į matus $m_{rH}u^{-1}$ ir $m_{rH}\widetilde{u}^{-1}$, kur

$$\widetilde{u}(x_1, ..., x_r) = \sum_{k=1}^{n} a_k g(k) \Bigg(\prod_{\substack{p_j^{\alpha j} \| k \\ j \le r}} x_j^{\alpha j}\Bigg)^{-1}, \quad (x_1, ..., x_r) \in \Omega_r.$$

Vadinasi,

$$\widetilde{u}(x_1, ..., x_r) = \sum_{k=1}^{n} a_k \Bigg(\prod_{\substack{p_j^{\alpha j} \| k \\ j \le r}} x_j^{\alpha j} e^{-i\alpha_j \eta_j}\Bigg)^{-1} = u(u_1(x_1, ..., x_r)).$$

Iš čia seka, kad

$$m_{rH}\widetilde{u}^{-1} = m_{rH}(u(u_1))^{-1} = (m_{rH}u_1^{-1})u^{-1} = m_{rH}u^{-1},$$

nes Haro matas yra invariantiškas taškų iš Ω_r poslinkių atžvilgiu. Teorema įrodyta. ▲

2.2 Atsitiktinio elemento $L(\sigma, \omega)$ apibrėžimas

Tegul γ, Ω, $\omega(k)$ yra tokie patys, kaip ir Įvade. Šiame skyriuje apibrėšime atsitiktinį elementą $L(\sigma, \omega)$.

Prisiminsime, kad du atsitiktiniai elementai X ir Y yra vadinami ortogonaliais, jei $\mathbb{E}XY = 0$, kur $\mathbb{E}X$ yra atsitiktinio elemento X vidurkis apibrėžiamas tokiu būdu:

$$\mathbb{E}X = \int\limits_{\Omega} X(\omega)d\mathbb{P},$$

jei egzistuoja integralas Bochnerio prasme.

Iš 4 hipotezės seka, kad pusplokštumėje $\sigma > \theta+1$ Oilerio sandaugas $L(s)$ galima užrašyti eilute

$$F(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)}{n^s}.$$

Juolabiau ši eilutė konverguoja absoliučiai [3].

Tegul, kai $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$,

$$L(\sigma, \omega) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)\omega(n)}{n^\sigma}.$$

2.2.1 teorema. $L(\sigma, \omega)$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis elementas apibrėžtas tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$.

Įrodymas. Tarkime, kad $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius ir

$$L_n(\omega) = \frac{b(n)\omega(n)}{n^\sigma}, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Tada $\{L_n(\omega)\}$ yra kompleksines reikšmes įgyjančių elementų erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ seka. Nesunku pastebėti, kad

$$\mathbb{E}|L_n(\omega)|^2 = \frac{|b(n)|^2}{n^{2\sigma}} \tag{7}$$

ir elementų $L_n\overline{L}_m$ vidurkis yra

$$\mathbb{E}(L_n\overline{L}_m) = \frac{b(n)\overline{b}(m)}{n^\sigma m^\sigma} \int_\Omega \omega(n)\overline{\omega}(m)dm_H = \begin{cases} 0, & \text{kai} \quad n \neq m, \\ \frac{|b(n)|^2}{n^{2\sigma}}, & \text{kai} \quad n = m. \end{cases}$$

Vadinasi, seka $\{L_n(\omega)\}$ yra paporiui ortogonalių atsitiktinių elementų seka. Kadangi $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, iš (**??**) lygybės turime, kad

$$\sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}|L_n(\omega)|^2 \log^2 n$$

yra konverguojanti eilutė. Tada pagal 1.5 lemą eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} L_n$$

konverguoja beveik tikrai, t. y., eilutė

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{b(n)\omega(n)}{n^{\sigma}}$$

konverguoja beveik su visais $\omega \in \Omega$ Haro mato m_H atžvilgiu. ▲

2.3 Ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms

Šio skyriaus teoremų įrodymui reikės gerai žinomų Prochorovo teoremų, kurios susieja reliatyvų kompaktiškumą su tikimybinių matų šeimos suspaustumu. Jos mūsų darbe yra 1.6 ir 1.7 lemos.

Tarkime, kad $\sigma_1 > \frac{1}{2}$ ir

$$L_n = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}.$$

Pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Iš tiesų, tegul

$$l_n(s) = \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) n^s$$

ir

$$a_n(m) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{l_n(s)}{s m^s} ds.$$

Tada

$$a_n(m) = \frac{B}{m^{\sigma_1}} \int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_1 + it)| dt = \frac{B}{m^{\sigma_1}}.$$

Vadinasi eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m) a_n(m)}{m^s}$$

konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Iš kitos pusės, kadangi teisinga 1.9 lema,

$$a_n(m) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \frac{s}{\sigma_1} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) \left(\frac{m}{n}\right)^{-s} \frac{ds}{s} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \Gamma\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) \left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right)^{-\frac{s}{\sigma_1}} d\left(\frac{s}{\sigma_1}\right) =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{1 - i\infty}^{1 + i\infty} \Gamma(z) \left(\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1}\right)^{-z} dz = \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}.$$

Tarkime,

$$\widetilde{L}_n(s, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)\omega(m)}{m^s} \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Apibrėžkime du tikimybinius matus:

$$P_{T,n}(A) = \nu_T(L_n(\sigma + it) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}),$$

ir

$$\widetilde{P}_{T,n}(A) = \nu_T(L_n(\sigma + it, \omega) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

2.3.1 teorema. Tegul $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P_n toks, kad abu matai $P_{T,n}$ ir $\widetilde{P}_{T,n}$ silpnai konverguoja į P_n, kai $n \to \infty$.

Įrodymas. Tarkime

$$L_{n,M}(s) = \sum_{m=1}^{M} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}$$

ir

$$L_{n,M}(s, \omega) = \sum_{m=1}^{M} \frac{b(m)\omega(m)}{m^s} \exp\left\{ - \left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\}, \quad \omega \in \Omega.$$

Apibrėžkime erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ atitinkamus tikimybinius matus

$$P_{T,n,M}(A) = \nu_T(L_{n,M}(\sigma + it) \in A)$$

ir

$$\widetilde{P}_{T,n,M}(A) = \nu_T(L_{n,M}(\sigma + it, \omega) \in A).$$

Remiantis 2.1.2 teorema matai $P_{T,n,M}$ ir $\widetilde{P}_{T,n,M}$ abu silpnai konverguoja į tą patį tikimybinį matą $P_{n,M}$, kai $T \to \infty$.

Įrodysime, kad tikimybinių matų šeima $\{P_{n,M}\}$ yra suspausta tam tikram fiksuotam n.

Tarkime η_T yra atsitiktinis elementas erdvėje $(\Omega_0, \mathfrak{B}(\Omega_0), \mathbb{P})$ įgyjantis reikšmes t, $t = 0, ..., T$, ir

$$\mathbb{P}(\eta_T = t) = \frac{1}{T}.$$

Imkime

$$X_{T,n,M}(\sigma) = L_{n,M}(\sigma + i\eta_T).$$

Iš 2.1.1 teoremos gauname, kad

$$X_{T,n,M} \xrightarrow[T\to\infty]{D} X_{n,M}, \tag{8}$$

kur $X_{n,M}$ yra kompleksines reikšmes įgyjantis atsitiktinis elementas su skirstiniu $P_{n,M}$.

Iš Čebyševo nelygybės kiekvienam $K > 0$ turime

$$\mathbb{P}(|X_{T,N,M}(\sigma)| > K) \leq \frac{1}{TK}\int\limits_0^T L_{n,M}(\sigma + it)dt. \tag{9}$$

Kadangi eilutės $L_n(s)$ konverguoja absoliučiai pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, tai egzistuoja skaičius R toks, kad

$$\sup_{M\geq 1}\limsup_{T\to\infty}\frac{1}{KT}\int\limits_0^T |L_{n,M}(\sigma + it)|dt \leq \frac{R}{K} < \infty. \tag{10}$$

Imkime $K = \frac{R}{\varepsilon}$ su bet kokiu pakankamai mažu $\varepsilon > 0$. Iš (**??**) ir (**??**) lygybių seka, kad

$$\limsup_{T\to\infty}\mathbb{P}(|X_{T,n,M}(\sigma)| > K) \leq \varepsilon. \tag{11}$$

Tarkime, kad funkcija $u : \mathbb{C} \to \mathbb{R}$ yra apibrėžta formule

$$u(z) = |z|, \quad z \in \mathbb{C}.$$

Tada u yra tolydi ir, remiantis (**??**) lygybe bei 1.2 lema,

$$|X_{T,n,M}(\sigma)| \xrightarrow[T\to\infty]{D} |X_{n,M}(\sigma)|.$$

Pastarasis sąryšis ir (**??**) parodo, kad

$$\mathbb{P}(|X_{n,M}(\sigma)| > K) \leq \varepsilon. \tag{12}$$

Apibrėžkime aibę K_ε tokiu būdu

$$K_\varepsilon = \{s \in \mathbb{C} : |z| \leq K\}.$$

Tada K_ε yra kompaktiška aibė ir iš (**??**) turime

$$\mathbb{P}(X_{n,M}(\sigma) \in K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

visiems $M \geq 1$. Kadangi $P_{n,M}$ yra $X_{n,M}$ skirstinys, tai gauname, kad

$$P_{n,M}(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

visiems $M \geq 1$. Tai reiškia, kad tikimybinių matų $\{P_{n,M}\}$ šeima yra suspausta. Tada pagal 1.6 lemą ji yra reliatyviai kompaktiška.

Iš $L_{n,M}(s)$ ir $L_n(s)$ apibrėžimų turime, kad

$$\lim_{M\to\infty} L_{n,M}(s) = L_n(s), \quad \sigma > \theta + \frac{1}{2}.$$

Vadinasi, kiekvienam $\varepsilon > 0$ gauname

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \nu_T(|L_{n,M}(\sigma+it) - L_n(\sigma+it)| \geq \varepsilon) \leq$$

$$\leq \lim_{M\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int\limits_0^T |L_{n,M}(\sigma+it) - L_n(\sigma+it)| dt = 0. \tag{13}$$

Dabar tarkime, kad

$$X_{T,n}(\sigma) = L_n(\sigma + i\eta_T).$$

Atsižvelgiant į (**??**) sąryšį, kiekvienam $\varepsilon > 0$

$$\lim_{M\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \mathbb{P}(|X_{T,n,M}(\sigma) - X_{T,n}(\sigma)| \geq \varepsilon) = 0. \tag{14}$$

Tarkime, $\{P_{n,M_1}\}$ yra sekos $\{P_{n,M}\}$ posekis toks, kad $\{P_{n,M_1}\}$ silpnai konverguoja į P_n, kai $M_1 \to \infty$. Tada

$$X_{n,M_1} \xrightarrow[M_1 \to \infty]{D} P_n. \tag{15}$$

Erdvė $\mathbb{C}$ yra separabili. Todėl iš (**??**), (**??**) ir (**??**) sąryšių kartu su 1.8 lema seka, kad

$$X_{T,n} \xrightarrow[T \to \infty]{D} P_n. \tag{16}$$

Tai reiškia, kad egzistuoja tikimybinis matas P_n toks, kad matas $P_{T,n}$ silpnai konverguoja į P_n, kai $T \to \infty$. (**??**) sąryšis parodo, kad matas P_n nepriklauso nuo posekio $\{P_{n,M_1}\}$ pasirinkimo.

Dar daugiau,

$$X_{n,M} \xrightarrow[M \to \infty]{D} P_n. \tag{17}$$

Pakartojus tuos pačius argumentus elementams

$$\widetilde{X}_{T,n,M}(\sigma, \omega) = L_{n,N}(\sigma + i\eta_T, \omega)$$

ir

$$\widetilde{X}_{T,n}(\sigma, \omega) = L_n(\sigma + i\eta_T, \omega)$$

bei turėdami omenyje (**??**), gauname, kad matas $\widetilde{P}_{T,n}$ taip pat konverguoja į P_n, kai $T \to \infty$. Teorema įrodyta. ▲

2.4 Funkcijos $L(s)$ aproksimavimas pagal vidurkį

Šiame skyriuje Oilerio sandaugas $L(s)$ aproksimuosime pagal vidurkį.

Pirmiausiai gausime įvertį $L(s)$ išvestinei.

2.4.1 lema. Tegul $T \to \infty$. Tada pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ teisingas įvertis

$$\int_0^T |L'(\sigma + it)|^2 dt = BT.$$

Įrodymas. Remdamiesi 1.11 lema, turime

$$L'(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-s|=\delta} \frac{L(z)}{(z-s)^2} dz,$$

o apskritimas $|z-s|=\delta$ priklauso pusplokštumei $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Tada tam tikram fiksuotam $\sigma_1 > 0$

$$\int\limits_{T_0}^{T} |L'(\sigma+it)|^2 dt = \int\limits_{T_0}^{T} \Bigg| \int\limits_{|z-\sigma|=\delta} \frac{L(z+it)}{(z-\sigma)^2} dz \Bigg|^2 dt =$$

$$= B_\delta \int\limits_{T_0}^{T} \Big| L(\sigma_1 + iv + it)^2 \Big| dt =$$

$$= B_\delta \int\limits_{T_0}^{2T} \Big| L(\sigma_1 + it) \Big|^2 dt = BT,$$

nes galioja (**??**) įvertis. Lema įrodyta. ▲

2.4.2 lema. Tarkime, $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Tada

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int\limits_{0}^{T} |L(\sigma+it) - L_n(\sigma+it)| dt = 0.$$

Įrodymas. Eilutė

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m) a_n(m)}{m^s}$$

pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ konverguoja absoliučiai. Iš $a_n(m)$ apibrėžimo, pasinaudojus 4 hipoteze, turime

$$L_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^s} \exp\left\{ -\left(\frac{m}{n}\right)^{\sigma_1} \right\} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{b(m)}{m^{s+z}} l_n(z) \frac{dz}{z} =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_1 - i\infty}^{\sigma_1 + i\infty} L(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z}.$$

Pakeiskime paskutiniame integrale integravimo kelią. Tada pagal reziduumų teoremą (1.12 lema) randame, kad

$$L_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\sigma_2 - \sigma - i\infty}^{\sigma_2 - \sigma + i\infty} L(s+z) l_n(z) \frac{dz}{z} + L(s). \qquad (18)$$

Čia $\sigma_2 > \theta + \frac{1}{2}$ ir $\sigma_2 < \sigma$. Iš Koši formulės gauname

$$|L(\sigma+it) - L_n(\sigma+it)| \le \frac{1}{2\pi\delta} \int\limits_{|z-\sigma|=\delta} |L(z+it) - L_n(z+it)| |dz|.$$

Pakankamai dideliam T

$$\frac{1}{T}\int_0^T |L(\sigma+it)-L_n(\sigma+it)|dt=$$

$$=\frac{B}{T}\int_0^T \frac{1}{2\pi\delta}\int_{|z-\sigma|=\delta} |L(z+it)-L_n(z+it)||dz|dt=$$

$$=\frac{B}{T}\int_{|z-\sigma|=\delta} |dz|\int_0^{2T} |L(\mathrm{Re}z+it)-L_n(\mathrm{Re}z+it)|dt=$$

$$=o(1)+\frac{B}{T}\sup_{\substack{\sigma\\ s\in|z-\sigma|=\delta}}\int_0^{2T} |L(\sigma+it)-L_n(\sigma+it)|dt. \tag{19}$$

Iš (**??**) lygybės

$$L(\sigma+it)-L_n(\sigma+it)=B\int_{-\infty}^{\infty} |L(\sigma_2+it+it_1)|l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)d\tau+B.$$

Parinkime $\tau_0=[\frac{|\tau|}{T}]$ taip, kad

$$\frac{1}{T}\int_0^{2T} |L(\sigma+it)-L_n(\sigma+it)|dt=B\int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|\frac{1}{T}\int_{-\tau_0}^{2T+\tau_0} |L(\sigma_2+it)|d\tau dt+B.$$

Iš 1.10 ir 2.4.1 lemų gauname

$$\int_{\tau_0}^{T} |L(\sigma+it)|^2dt=\frac{1}{T}\int_{\tau_0}^{T} |L(\sigma+it)|^2dt+\left(\int_{\tau_0}^{T} |L(\sigma+it)|^2dt\int_{\tau_0}^{N} |L'(\sigma+it)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=BT.$$

Todėl

$$\frac{1}{T}\sup_{\substack{\sigma\\ s\in L}}\int_0^{2T} |L(\sigma+it)-L_n(\sigma+it)|dt=B\sup_{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|d\tau\left(\frac{1}{T}\int_{-\tau_0}^{2T+\tau_0} |L(\sigma_2+it)|^2dt\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=B\sup_{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|d\tau\frac{T+2\tau_0}{T}=B\sup_{\sigma}\int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma_2-\sigma+i\tau)|d\tau(1+|\tau|).$$

Pastebėkime, kad spindulį δ galime parinkti taip, kad $\sigma_2-\sigma\le -c<0$. Tada

$$\lim_{n\to\infty}\sup_{\sigma\le -c}\int_{-\infty}^{\infty} |l_n(\sigma+it)|(1+|\tau|)dt=0.$$

Todėl pastarasis sąryšis kartu su (??) duoda lemos tvirtinimą. ▲

2.5 Ergodiniai elementai

Tegul $a_h = \{p^{-it}, \quad p - \text{pirminis}\}$. Tore Ω apibrėžkime transformaciją $f_h(\omega) = a_h\omega$, $\omega \in \Omega$. Ji yra mati matą išsauganti transformacija erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$.

2.5.1 lema. Transformacija f_h yra ergodinė.

Įrodymas sutampa su 3.6 teoremos iš [5] įrodymu.

2.5.2 lema. Tarkime, $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ ir $T \to \infty$. Tada beveik visiems $\omega \in \Omega$ teisingas įvertis

$$\int_0^T |L(\sigma + it, \omega)|^2 dt = BT.$$

Įrodymas. Tegul

$$L_m(\sigma, \omega) = \frac{b(m)\omega(m)}{m^\sigma}, \quad m \in \mathbb{N},$$

ir

$$L_0(\sigma, \omega) = |L(\sigma, \omega)|^2.$$

Tada

$$L(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} L_m(\sigma, \omega).$$

Kadangi atsitiktiniai elementai $L_k(\sigma, \omega)$ paporiui yra ortogonalūs, tai

$$\mathbb{E}L_0(\sigma, \omega) = \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}|L_k(\sigma, \omega)|^2 = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{|b_k(m)|^2}{k^{2\sigma}} < \infty.$$

Nesunku pastebėti, kad

$$L_0(\sigma, f_h^m(\omega)) = |L(\sigma, a_{mh}\omega)|^2 = |L(\sigma + it, \omega)|^2.$$

Atsižvelgiant į 1.14 ir 2.5.2 lemas, randame, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T L_0(\sigma, f_h^m(\omega)) dt = \lim_{T\to\infty} \int_0^T |L(\sigma + it, \omega)|^2 dt = \mathbb{E}L_0(\sigma, \omega) < \infty.$$

Tai įrodo lemą. ▲

3. Teoremos įrodymas

Ω_1 pažymėkime Ω poaibį tokį, kad eilutė

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b(k)\omega(k)}{k^{\sigma+it}}$$

konverguotų visiems $\omega \in \Omega_1$ ir, kai $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$, būtų teisingas įvertis

$$\int_0^T |L(\sigma+it,\omega)|^2 dt = BT.$$

Iš 2.2.1 teoremos ir 2.5.2 lemos įrodymo mes turime, kad $m_H(\Omega_1) = 1$.

3.1 lema. Tarkime $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$. Tada, kai $\omega \in \Omega_1$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L(\sigma+it,\omega) - L_n(\sigma+it,\omega)| = 0.$$

Įrodymas. Ši lema, atsižvelgiant į 2.5.2 lemą, įrodoma panašiai kaip ir 2.4.2 lema. ▲

Tarkime, kad $\omega \in \Omega_1$, ir

$$\widetilde{P}_T(A) = \nu_T(L(\sigma+it,\omega) \in A), \quad A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C}).$$

3.2 lema. Erdvėje $(\mathbb{C}, \mathfrak{B}(\mathbb{C}))$ egzistuoja tikimybinis matas P toks, kad abu matai P_T ir $\widetilde{P}_T$ silpnai konverguoja į P, kai $T \to \infty$.

Įrodymas. Remsimės 2.3.1 teoremos įrodymu. Pagal šią teoremą abu matai $P_{T,n}$ ir $\widetilde{P}_{T,n}$ silpnai konverguoja į tą patį matą P_n, kai $T \to \infty$. Įrodysime, kad matų $\{P_n\}$ šeima yra suspausta.

Tarkime, kad

$$X_{T,n}(\sigma) = L_n(\sigma + i\eta_T).$$

Tada, kai $T \to \infty$, turime

$$X_{T,n} \xrightarrow{D} X_n, \tag{20}$$

kur X_n yra atsitiktinis elementas su skirstiniu P_n. Kadangi pusplokštumėje $\sigma > \theta + \frac{1}{2}$ eilutė $L_n(s)$ konverguoja absoliučiai, tai

$$\sup_{n\geq 1} \limsup_{T\to\infty} \frac{1}{T} \int_0^T |L_n(\sigma+it)| dt \leq R < \infty.$$

Tegul $K = \frac{R}{\varepsilon}$ pakankamai mažam $\varepsilon > 0$. Iš čia seka, kad

$$\mathbb{P}(|X_{T,n}(\sigma)| > K) \leq \frac{1}{KT} \int\limits_0^T |L_n(\sigma + it)| dt \leq \varepsilon$$

ir

$$\limsup_{T \to \infty} \mathbb{P}(|X_{T,n}(\sigma)| > K) \leq \varepsilon.$$

Pastaroji nelygybė ir (**??**) duoda sąryšį

$$\mathbb{P}(|X_n(\sigma)| > K) \leq \varepsilon.$$

Pasinaudojus tais pačiais žymėjimais kaip ir 2.3.1 teoremoje, visiems $n \in \mathbb{N}$ gauname

$$\mathbb{P}(X_n(\sigma) \in K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon$$

arba

$$P_n(K_\varepsilon) \geq 1 - \varepsilon.$$

Vadinasi tikimybinių matų $\{P_n\}$ šeima yra suspausta, o pagal 1.6 lemą ir reliatyviai kompaktiška.

Atsižvelgiant į 2.4.2 lemos tvirtinimą, kiekvienam pakankamai mažam $\varepsilon > 0$ gauname

$$\lim_{n \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \nu_T(|L(\sigma + it) - L_n(\sigma + it)| \geq \varepsilon) \leq$$

$$\leq \lim_{n \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \frac{1}{\varepsilon T} \int\limits_0^T |L(\sigma + it) - L_n(\sigma + it)| dt = 0. \tag{21}$$

Dabar tarkime, kad

$$Y_T(\sigma) = L(\sigma + i\eta_T).$$

Iš (**??**) randame, kad

$$\lim_{n \to \infty} \limsup_{T \to \infty} \mathbb{P}(|X_{T,n}(\sigma) - Y_T(\sigma)| \geq \varepsilon) = 0. \tag{22}$$

Tarkime, kad $\{P_{n_1}\}$ yra sekos $\{P_n\}$ silpnai į matą P konverguojantis posekis, kai $n_1 \to \infty$. Tada

$$X_{n_1} \xrightarrow{D} P, \quad \text{kai} \quad n_1 \to \infty.$$

Iš gautojo sąryšio bei (**??**)–(**??**) ir 1.8 lemos seka, kad

$$Y_T \xrightarrow{D} P, \quad \text{kai} \quad T \to \infty. \tag{23}$$

Tai reiškia, kad tikimybinis matas P_T silpnai konverguoja į P, kai $T \to \infty$. (**??**) sąryšis parodo, kad matas P nepriklauso nuo sekos n_1 parinkimo. Todėl gauname, kad

$$X_n \xrightarrow{D} P, \quad \text{kai} \quad n \to \infty. \tag{24}$$

Tuos pačius argumentus galima pakartoti atsitiktiniams elementams

$$X_{T,n}(\sigma, \omega) = L_n(\sigma + i\eta_T, \omega)$$

ir

$$Y_T(\sigma, \omega) = L(\sigma + i\eta_T, \omega),$$

kai $\omega \in \Omega_1$. Pritaikius (**??**) sąryšį ir 3.1 lemą, gauname, kad matas $\widetilde{P}_T$ taip pat silpnai konverguoja į P, kai $T \to \infty$. ▲

Teoremos įrodymas. Iš 3.2 lemos seka, kad lieka įrodyti, jog matai P ir P_L sutampa, t. y. $P = P_L$.

Tarkime, kad mato P tolydumo aibė yra $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Iš 3.2 lemos turime, kad

$$\lim_{T \to \infty} \nu_T(L(\sigma + it, \omega) \in A) = P(A), \quad \omega \in \Omega_1. \tag{25}$$

Fiksuokime aibę A, o erdvėje $(\Omega, \mathfrak{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime atsitiktinį elementą η tokiu būdu

$$\eta(\omega) = \begin{cases} 1, & \text{jei} \quad L(\sigma, \omega) \in A, \\ 0, & \text{jei} \quad L(\sigma, \omega) \neq A. \end{cases}$$

Tada, akivaizdu, jog

$$\mathbb{E}(\eta) = \int\limits_{\Omega} \eta dm_H = m_H(\omega : L(\sigma, \omega) \in A) = P_L(A). \tag{26}$$

Iš kitos pusės, iš 2.5.1 ir 2.5.2 lemų randame, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T \to \infty} \frac{1}{T} \int\limits_0^T \eta(f_h^m(\omega)) dm_H = \mathbb{E}\eta. \tag{27}$$

Be to, iš η ir f_h apibrėžimų seka

$$\frac{1}{T}\int_0^T \eta(f_h^m(\omega))dm_H = \nu_T(L(\sigma+it,\omega)\in A).$$

Iš čia ir (**??**)–(**??**) randame, kad beveik visiems $\omega \in \Omega$

$$\lim_{T\to\infty} \nu_T(L(\sigma+it,\omega)\in A) = P_L(A).$$

Vadinasi, atsižvelgiant į (**??**), turime

$$P(A) = P_L(A)$$

kiekvienai mato P tolydumo aibei A. Kadangi tolydumo aibės sudaro apibrėžiančią klasę, tai

$$P(A) = P_L(A)$$

visoms $A \in \mathfrak{B}(\mathbb{C})$. Teorema įrodyta. ▲

Išvados

Magistro darbe nagrinėjamos Oilerio sandaugų $L(s)$ reikšmių pasiskirstymas. Jeigu funkcija $L(s)$ tenkina tam tikras sąlygas, tai jai teisinga ribinė teorema tikimybinių matų silpno konvergavimo prasme kompleksinėje plokštumoje. Gauta tokio mato išreikštinė forma, t. y. įrodyta, kad jis yra atsitiktinio elemento, susijusio su Oilerio sandaugomis, skirstinys.

Literatūra

1. P. Billingsley, 1968, *Convergence of Probability Measures*, John Willey Sons, New York.

2. H. Bohr and B. Jessen, 1930, *Über die Wertverteilung der Riemannshen Zeta-funktion*, Erste Mitteilung, Acta Math. **58**, 1–35.

3. E. Bombieri and D.A. Hejhal, 1995,*On the distribution of zeros of linear combinations of Euler products*, Duke Math J., Vol. **80**, No. 3, 821–862.

4. H. Heyer, 1977, *Probability Measures on Locally Compact Groups*, Springer-Verlag, Berlin.

5. A. Laurinčikas, 1996, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer, Dordrecht.

6. M. Loève, 1962, *Probability Theory*, IL, Moscow (rusų kalba).

7. H. L. Montgomery, 1971, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Springer, Berlin.

8. A. Nagelė, L. Papreckienė, 1996, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*, Vilnius, Žara.

9. W. Rudin, 1973, *Functional Analysis*, Mcgraw-Hill Book Company, New York.

10. A. A. Tempelman, 1986, *Ergodic Theorems on Groups*, Vilnius, Mokslas.

Summary

The Euler Products $L(s)$, $s = \sigma + it$, is defined, for $\sigma > 1$, by

$$L(s) = e^{i\omega} \prod_p \frac{1}{(1 - \alpha_{1p}p^{-s})...(1 - \alpha_{dp}p^{-s})},$$

where $\alpha_{jp} \in \mathbb{C}$, $\omega \in \mathbb{R}$, $d \geq 1$, and p is the prime number. The function $L(s)$ satisfies some certain working hypotheses.

In this master work, limit theorem in the sense of weak convergence of probability measures for the Euler products in the complex plane is proved.

The work consists of the introduction, 3 chapters, conclusions and bibliography.

The introduction contains a short survey of results related to the master work and the main result of the work.

Chapter 1 is devoted to the well-known lemmas and theorems, which we use for the proof of main theorem.

In chapter 2 the auxiliary results are proved, i. e. , the limit theorem for the Dirichlet polynomials is obtained, the random element related with the Euler products is defined, the limit theorem for an absolutely convergent Dirichlet series is proved, the function $L(s)$ is approximated in the mean, the estimate for $L(s)$ is obtained.

Chapter 3 is devoted to the proof of main theorem of Master's work.