Vilniaus universitetas
Matematikos ir informatikos fakultetas
Matematikos metodikos katedra

Inga Šolytė

Funkcijų mokymas matematikoje taikant informacines technologijas

Magistro baigiamasis darbas

Darbo vadovė prof. Valentina Dagienė

Vilnius
2006

Turinys

1 Įvadas

Matematika – viena iš esminių bendrojo lavinimo mokyklos ugdymo turinio dalių ir vienas iš pagrindinių dalykų, dėstomų aukštesniosiose mokyklose, kolegijose, aukštosiose mokyklose. Mokykloje kaupiamos, sisteminamos elementariosios matematikos žinios, kurios vėliau gilinamos studijuojant aukštosios matematikos kursą.

Vienas iš problematiškų matematikos skyrių yra funkcijos ir sąryšiai. Iškyla daugybė problemų, besimokantiesiems sunkiai suprantamų, matematinių formalumų. Reikia nepamiršti, kad pagrindinių įgūdžių formavimas yra labai svarbi mokymosi komponentė, jų įgijimas įgalina suvokti sudėtingesnes sąvokas, ugdyti kritišką mąstymą, kūrybiškumą, spręsti uždavinius.

Remiantis Vilniaus kolegijos matematikos dėstytojų ir asmenine patirtimi, problemų studijuojantiems matematiką kyla dėl įvairių priežasčių: 1) mokykloje įgytos žinios yra trumpalaikės, studentams trūksta fundamentinių matematikos žinių; 2) matematikos mokymas mokykloje dažnai pernelyg formalus, studentai negeba pritaikyti paprasčiausių mokykloje įgytų žinių; 3) pasigendama studentų sąmoningo mokymosi, motyvacijos. Žinios tampa tikrai vertingos ir veiksmingos tuomet, kai moksleivis jas supranta, kai suvokia, kodėl mokosi matematikos [2]. Todėl siekiant išvengti mechaninio žinių įsiminimo bei suteikti galimybę lengviau iš esmės suvokti žinias siekiama vizualizuoti matematikos mokymą taikant įvairias, tarp jų ir kompiuterines, priemones.

Remiantis informacinių technologijų diegimo švietime strategija 2000–2004 metams [4] didelis dėmesys skiriamas mokomosioms kompiuterinėms programoms įvairiems dalykams mokyti: jomis aprūpinamos mokyklos, organizuojami kursai mokytojams mokyti, rengiama metodinė medžiaga. Tai vienas svarbiausių būdų siekiant nukreipti mokyklų kompiuterizavimą teigiama ugdymą gerinančia linkme [6].

Kompiuterinės mokomosios programos gali pagyvinti matematikos mokymą, suteikti dinamiškumo, įgalina vaizdžiai ir vizualiai pateikti mokomąją medžiagą. Psichologai teigia, kad vaizdingas medžiagos pateikimas pagreitina žinių įsisavinimą bei pagerina mokymosi medžiagos įsisavinimą. Kompiuterinėmis programomis sukurti dinamiški brėžiniai palengvina mokytojo darbą, naudojant juos taupomas pamokos ar paskaitos laikas, suteikiama galimybių vaizdžiau ir paprasčiau pateikti mokiniams sunkiai suprantamas sąvokas, matematines abstrakcijas.

Matematikai mokyti(is) taikomos įvairios kompiuterinės programos. Aukštosios matematikos studijoms naudojamos profesionalios taikomosios programos, programavimo kalbų sistemos, pvz., *„Maple“*, *„Derive“*, *„Mathematica*“ ir kt. Bendrojo lavinimo mokyklai tinkamos kompiuterinės priemonės yra *„Veiksmai su teigiamais ir neigiamais skaičiais 7 kl.“*, *„Dinaminė geometrija*“, ir kt. Mokant funkcijų būtini grafikus ar geometrines interpretacijas vaizduojantys brėžiniai, dar geriau – dinamiški, todėl kompiuterinės programos čia itin pageidautinos. Diplominiame darbe nagrinėjamos programos funkcijoms mokyti – *„Dinaminė geometrija*“, *„MathematiX“* ir *„Autograph“*. Remiantis bendrąja bendrojo lavinimo mokyklos ir Vilniaus kolegijos matematikos programomis nagrinėjamas minėtųjų programų tinkamumas funkcijoms mokyti bendrojo lavinimo mokykloje ir jų pritaikymas matematikos studijoms Vilniaus kolegijoje.

1.1 Darbo tikslas ir uždaviniai

Diplominio darbo tikslas:

Ištirti kompiuterinių matematikos mokomųjų programų galimybes funkcijoms mokyti bendrojo lavinimo mokyklose.

Uždaviniai:

1. Išanalizuoti ir apibendrinti bendrojo lavinimo mokykloje su funkcijomis susijusių temų ypatumus ir pateikti šių temų sąsajas su kolegijoje dėstomu matematikos turiniu, susisteminti funkcijų mokymo medžiagą;
2. Ištirti programų „*MathematiX*“, „*Dinaminė geometrija*“, „*Autograph*“ galimybes funkcijoms mokyti;
3. Atlikti funkcijoms tinkamų mokyti kompiuterinių programų „*Dinaminė geometrija*“, „*MathematiX*“, „*Autograph*“ analizę;
4. Pagrįsti arba paneigti programų „*Dinaminės geometrijos*“, „*MathematiX*“, „*Autograph*“ naudojimo bendrojo lavinimo mokykloje ir kolegijoje tinkamumą atsižvelgiant į funkcijų mokymo bendrojo lavinimo mokykloje ir kolegijoje aspektus.

1.2 Darbo struktūra

Diplominiame darbe iškeltam tikslui įgyvendinti pirmiausia nagrinėjamos bendrojo lavinimo mokyklos matematikos mokymo bendrosios programos ir išsilavinimo standartai. Pagrindinis dėmesys skiriamas: 1) matematikos mokymo tikslams ir uždaviniams; 2) matematikos mokymo didaktinėms nuostatoms, 3) mokykliniame matematikos kurse su funkcijomis susijusių temų turiniui. Siekiant pateikti sąsajas tarp mokykloje ir Vilniaus kolegijoje pirmo kurso studentams aukštosios matematikos kurse dėstomų su funkcijomis susijusių temų, palyginamos bendrosios bendrojo lavinimo mokyklos ir Vilniaus kolegijos matematikos programos.

Norint ištirti mokomųjų programų „*MathematiX*“, „*Dinaminė geometrija*“, „*Autograph*“ galimybes funkcijoms mokyti, aptariami galimi mokomųjų kompiuterinių programų tipai, aprašoma kas kiekvienam iš jų yra būdinga, kokiems tikslams jos naudojamos, nagrinėjama, kaip kompiuterines priemones galima pritaikyti matematikos pamokoje: dirbant su visa klase, dirbant su mokinių grupėmis ir mokantis individualiai. Taip pat trumpai supažindinama su pasirinktosiomis programomis, jų galimybėmis, aprašomi pagrindiniai bruožai.

Išnagrinėjus bendrąsias matematikos programas tiriamojoje darbo dalyje susisteminama funkcijų mokymo medžiaga. Tyrimo eigoje siekiama išsiaiškinti, kokias temas ir kodėl yra tikslinga (netikslinga) dėstyti naudojantis naujomis technologijomis. Jei kompiuterinės programos nėra tinkamos vienai ar kitai su funkcijomis susijusiai temai mokyti, šiame darbe tos temos medžiaga nėra pateikiama. Tai atlikus, nagrinėjama kaip konkrečiai kiekviena kompiuterine programa galima būtų pasiekti užsibrėžtų tikslų. Pateikus funkcijų mokymo(si) naudojantis kiekviena iš minėtųjų kompiuterinių priemonių galimus būdus siekiama įvertinti kiekvienos programos sudėtingumą, jų galimybes reikalingiems brėžiniams sukurti, tinkamumą įvairioms pamokos veikloms organizuoti. Sudėtingumas šiuo atveju tiriamas dviem aspektais: laiko sąnaudos skiriamos norimam brėžiniui sukurti, programos ir vartotojo sąsajos paprastumas ir patogumas.

2 Matematikos mokymo programos ir kompiuterinės priemonės

2.1 *Funkcijos bendrojo lavinimo mokyklos ir kolegijos matematikos programose*

Šiuolaikinėje matematikos didaktikoje išskiriami trys bendrieji matematiniai gebėjimai – problemų sprendimas, matematinis mąstymas ir matematinis komunikavimas. Šių gebėjimų ugdymas akcentuojamas ir bendrojoje kolegijos matematikos programoje [3]. Remiantis bendrąja bendrojo lavinimo mokyklos ir Vilniaus kolegijos matematikos programomis viena iš matematikos turinį sudarančių dalių yra temos susijusios su funkcijomis: „Funkcijos ir sąryšiai“ [1], „Funkcijos. Lygtys ir nelygybės“, „Diferencialinis skaičiavimas“ [2] ir „Funkcijos. Ribos. Išvestinės“ [3].

Funkcinės kintamų dydžių priklausomybės samprata palaipsniui pradedama formuoti nuo I klasės, tačiau pati funkcijos sąvoka ir atitinkama simbolika įvedama tik VIII klasėje. Funkcijų propedeutikos svarbiausias tikslas – suteikti moksleiviams žinių, kad jie galėtų suprasti tokias sąvokas kaip kintamasis, priklausomybė, atitiktis, kintamojo reikšmė, funkcija, grafikas ir pan. VIII klasė – pirmas žingsnis į funkcijų pasaulį. IX, X klasėse toliau palaipsniui plėtojama funkcijos sąvoka, ją detalizuojant: moksleiviai supažindami su naujomis sąvokomis: funkcijos didėjimo, mažėjimo ir pastovumo intervalai, funkcijos lyginumas ir nelyginumas, apibrėžiama, ką vadiname funkcijos grafiku. Moksleiviams pateikiami ne tik nauji apibrėžimai, reikalingi funkcijoms tirti, bet įvedami ir apibrėžimo srities bei reikšmių srities žymenys, išmokstama tirti funkcijų savybes ne tik grafiškai, bet ir algebriškai. Moksleiviai susipažįsta su pagrindinėmis elementariosiomis funkcijomis, jų savybėmis. XI-XII klasėje nagrinėjamos ankstesnėse klasėse nenagrinėtos elementariosios funkcijos, jų savybės, įvedamos funkcijos ribos, tolydumo, funkcijos grafiko liestinės ir išvestinės sąvokos.

Prie daugelio iš minėtų dalykų grįžtama ir kolegijoje studijuojant temą „Funkcijos. Ribos. Išvestinės“. Išnagrinėjus bendrojo lavinimo mokyklos bendrosiose programose ir bendrojo išsilavinimo standartuose temas „Funkcijos ir sąryšiai“ [1], „Funkcijos. Lygtys ir nelygybės“, „Diferencialinis skaičiavimas“ [2] bei Vilniaus kolegijos bendrosios matematikos programos temas „Funkcijos. Ribos. Išvestinės“, „Neapibrėžtinis integralas“ ir „Apibrėžtinis integralas“ [3], išryškėja glaudi mokyklinio matematikos kurso ir kolegijoje dėstomų, su funkcija susijusių, temų sąsaja: dalis mokykliniame matematikos kurse įgytų žinių apie funkcijas yra kartojama bei gilinama kolegijoje (1 lentelė).

1 lentelė. Bendrųjų bendrojo lavinimo mokyklos ir Vilniaus kolegijos matematikos funkcijų mokymo programų palyginimas

Tema	Vidurinėje mokykloje	Vilniaus kolegijoje
Funkcijos sąvoka	+	+
Funkcijos reiškimo būdai	+	+
Funkcijos grafikas	+	+
Elementariųjų funkcijų grafikai	+	+
Funkcijų grafikų transformacijos	+	+
Funkcijų savybės	+	+
Sudėtinė funkcija	+	+
Atvirkštinė funkcija	+	+
Funkcijos ribos sąvoka	+	+
Funkcijos tolydumas taške ir intervale	+	+
Funkcijos išvestinės sąvoka	+	+
Sudėtinės funkcijos išvestinė	+	+

Išvestinių taikymai	+	+
Bendroji funkcijos tyrimo schema	+	+
Pirmykštė funkcija	+	+
Neapibrėžtinio integralo sąvoka	+	+
Apibrėžtinio integralo sąvoka	+	+
Apibrėžtinio integralo taikymai	+	+
Dviejų kintamųjų funkcija	–	+
Nykstamos ir neaprėžtai didėjančios funkcijos	–	+
Funkcijos trūkio taškai	–	+
Pagrindinės tolydžių funkcijų savybės	–	+
Aukštesniosios eilės išvestinės	–	+
Funkcijos diferencialo sąvoka	–	+
Dviejų kintamųjų funkcijos dalinės išvestinės	–	+
Neišreikštinės funkcijos išvestinė	–	+
Neapibrėžtumų tyrimas	–	+
Funkcijos grafiko asimptotės	–	+
Neapibrėžtinio integralo integravimo metodai	–	+
Apibrėžtinio integralo skaičiavimo metodai	–	+
Apibrėžtinio integralo apytikslis skaičiavimas	–	+

2.2 Mokomosios kompiuterinės priemonės

Kadangi kompiuterinių priemonių yra įvairių tipų, ir jas galima naudoti skirtingiems tikslams ir skirtingais būdais, tai pirmiausia reikėtų išnagrinėti, kuriam tipui galima būtų priskirti pasirinktąsias programas: *„Dinaminę geometriją“*, „*MathematiX*“ ir „*Autograph*“. Kompiuterinių priemonių klasifikacija pateikiama remiantis L. Markauskaitės straipsniu „Mokomųjų kompiuterinių programų tipai“ [7].

Kompiuterinio mokymo būdai klasifikuojami pagal moksleivio aktyvumo lygmenį. Kiekvienas iš jų pasižymi tik jam būdingomis savybėmis. Be to, kiekvieną mokymo būdą atitinka vis kitoks mokomosios kompiuterinės programos tipas. Ne visuomet įmanoma įžvelgti tarp įvairių tipų programų akivaizdžius skirtumus, nes daugelyje taikomi keli mokymo būdai. Pagal tai, kas kontroliuoja mokymosi eigą (programa ar moksleivis), programos skirstomos į:

- <u>kontrolės</u> (demonstravimo, pratybų)
- <u>tyrinėjimo</u> (eksperimentavimo ir modeliavimo, programavimo kalbų sistemos, taikomosios programos).

Kontrolės programos konkrečiai apibrėžia tikslą, parenka mokymo būdą, pateikia reikiamas žinias ir įtvirtina įgūdžius. Pratybų programų „šerdis“ – kartojimas. Jos paremtos dviem didaktikos principais: moksleivis išmoksta reikiamas taisykles bei sugeba jas taikyti; daug kartų atlikdamas panašaus tipo nesudėtingas užduotis, susiformuoja reikiamus įgūdžius, įvaldo bendruosius principus.

Demonstravimo programos atlieka įprastų demonstravimo priemonių (vaizdinių mokymo priemonių) funkciją. Kompiuterio ekrane demonstruojami įvairūs sudėtingi reiškiniai, objektai, jų savybės ir pan. Kompiuterinės demonstravimo priemonės paprastai būna pranašesnės už įprastines, nes:

- kompiuterinėse mokymo priemonėse yra galimybė kartu derinti kelis informacijos perteikimo būdus: tekstą, vaizdą ir garsą. Tai padidina mokomosios medžiagos vaizdumą;
- kompiuterinės demonstravimo priemonės paprastai būna interaktyvios, t.y., priešingai nei tradicinėse vaizdo- ir garso demonstravimo priemonėse, ekrane stebimą vyksmą galima valdyti: sustabdyti, pakartoti tam tikrą fragmentą, pakeisti parametrus, nukreipti demonstravimo eigą norima linkme ir pan.

Pratybų programos skiriamos įvairioms teorinėms žinioms tvirtinti, praktiniams įgūdžiams ugdyti. Tačiau nevienodai efektyviai jos padeda ugdyti reikiamus įgūdžius: vienos jų tik nurodo, teisingai ar klaidingai atlikta užduotis, kitos – mokiniui pateikia užduotį, ir programa padeda ją atlikti, joje pateikiant tam reikalingą teoriją, paaiškinant, kaip ją taikyti, atlikti vieną ar kitą veiksmą, patikrina gautą rezultatą.

Kontroliuojančios programos skirtos tikrinti mokinių žinias. Nuo pratybų jos skiriasi tuo, kad pastarosios nėra skirtos mokyti, o tik patikrinti jau išmoktus dalykus. Naudojant šias programas pateikiamos užduotys, kurias mokinys turi atlikti. Pratybų ir kontroliuojančios programos dažnai kuriamos kartu: viena programos dalis būna skirta įgūdžiams lavinti, kita – žinioms tikrinti. Tokios programos paprastai taikomos mokytojo darbui palengvinti ir yra novatoriškesnės už anksčiau vartotus mokymo metodus.

Eksperimentavimo ir modeliavimo programos imituoja įvairių reiškinių vyksmą, savybes ir pan. Jos dažnai naudojamos ir kaip demonstravimo priemonės. Jose galima pateikti reiškinių ar mechanizmų modelius, kurių veikimas ir savybės priklauso nuo įvairių parametrų. Mokytojas ar mokinys gali parinkti arba keisti modelį veikiančius parametrus, stebėti tolesnio vyksmo priklausomybę nuo jų, tirti savybes, dėsningumus.

Programavimo kalbų sistemos – dažniausiai mokyklose naudojama programinė įranga. Suprantama, jos populiarumą lėmė informatikos dalyko turinys, kuriame daug laiko skiriama programavimui. Tačiau programavimo kalbas ir moksleivių gebėjimą pateikti algoritmus kūrybingai galima pritaikyti ir mokantis kitų dalykų. Mokiniai patys gali parašyti programą, imituojančią reiškinį, sprendžiančią uždavinį ar realizuojančią kitokius jo sumanymus. Taip moksleivis išmoksta konkretaus dalyko bei įgytas žinias išradingai pritaiko rašydamas programą.

Taikomosios programos padeda atlikti įvairius nuobodžius ir varginančius veiksmus. Jos leidžia daugiau laiko ir dėmesio skirti esminiams dalykams. Tokios pagalbinės mokymosi priemonės yra tekstų rengimo sistemos, skaičiuoklės, duomenų bazių sistemos, matematikos ir statistikos paketai, grafikos ir muzikos redaktoriai, integruoti mokomieji paketai, programavimo kalbų sistemos. Iš visų taikomųjų priemonių labiausiai išsiskiria kompiuterinės enciklopedijos, žodynai, žinynai ir katalogai.

Priklausomai nuo to, kokie yra pamokos tikslai ir kokios turimos kompiuterinės programos, mokymas(is) naudojant naujas technologijas, gali vykti keliais būdais [15]:

- dirbant su visa klase
- dirbant su mokinių grupe
- mokantis individualiai

Nuo pamokoje organizuojamos veiklos priklauso, kokia bus reikalinga kompiuterinė įranga.

Darbas su visa klase – tai dažniausiai pamokoje, kurioje taikomos naujos technologijos, naudojamas mokymo(-si) būdas. Vieno kompiuterio taikymas pamokoje – vienas iš būdų sudominti mokinius, individualizuoti mokymą, ugdyti bendradarbiavimo įgūdžius [15]. Kompiuteris gali pakeisti daugelį plakatų, lentelių, laboratorinių priemonių ir pan. Kompiuterių naudojimas pamokoje priklauso nuo mokytojo kūrybiškumo, darbo stiliaus, patirties ir techninių sąlygų.

Dirbant su visa klase, dažniausiai kompiuteris naudojamas rodymui. Tai atlieka mokytojas. Klasė stebi, diskutuoja, reikiamą informaciją užsirašo. Kompiuterio panaudojimas rodymui priklauso nuo pamokos tikslų. Vien tik pasyvus stebėjimas teikia nedaug naudos. Galimybė panaudoti animaciją ir daryti poveikį sudaro sąlygas kūrybiškam darbui.

Darbas su mokinių grupe – kai 3-8 mokinių grupė turi vieną kompiuterį. Galima išskirti kelis mokymosi grupėse naudojant kompiuterį privalumus: ugdomi įprasti mokymosi bendradarbiaujant įgūdžiai (mokiniai aktyvūs, mokosi bendrauti, diskutuoti, dirbti drauge); intensyvėja mokymas; nebūtina tinkama demonstracijai papildoma įranga (televizorius, projektorius ar didelės įstrižainės monitoriaus); ugdomi gebėjimai naudotis kompiuteriu.

Individualus mokymasis – kai kiekvienas mokinys turi po vieną kompiuterį. Savarankiškai mokytis – tai aktyviai mąstyti. Vadovauti savarankiškam mokinio darbui – tai vadovauti jo pažinimui arba įgūdžių formavimui, pirmiausia mąstymui, žinant visas stipriąsias ir silpnąsias jo savybes [6].

Kompiuteris mokymo procese yra priemonė, padedanti atskleisti ir lavinti mokinių gebėjimus. Savarankiškai sėkmingai ir efektyviai dirbti kompiuteriu gali tik aktyvus ir sąmoningas mokinys.

2.3 Pasirinktų kompiuterinių priemonių aprašymai

Dinaminė geometrija

Programą „*Dinaminė geometrija*“, angl. k. *Geometer's Sketchpad (Dynamic Geometry for the 21st Century)* 1995 metais sukūrė JAV firma *Key Curriculum Press*, kuri rengia kompiuterines programas tiksliesiems mokslams.

„*Dinaminė geometrija*“ gerai žinoma visame pasaulyje. Ji naudojama bendrojo lavinimo mokyklose, koledžuose bei aukštosiose mokyklose. 2001 metais L. Stepanauskienė magistro darbe „Programos „*Dinaminė geometrija*“ tyrimas ir taikymas bendrojo lavinimo mokykloje“ atliko šios programos analizę, ištyrė jos galimybes [16]. Be to, tais pačiais metais Matematikos ir informatikos institutas Lietuvai adaptavo šios programos 3.01 atmainą. Programa yra nupirkta visoms Lietuvos mokykloms (šalies licencija). 2003 m. žiemą pasirodė 4-oji „*Dinaminės geometrijos*“ versija, 2004 m. kovo mėnesį – 4.0.6 versija (1 pav.). Ši versija jau nupirkta visoms Lietuvos mokykloms. Darbe ši programa išsamiai tyrinėjama tik vienu aspektu – tiriamos galimybės funkcijoms mokyti.

Naudojantis mokomąja kompiuterine priemone „*Dinaminė geometrija*“ galima:

- braižyti ir konstruoti Euklido geometrijos brėžinius;
- transformuoti ir animuoti geometrinius objektus ar sukurtus brėžinius;
- braižyti funkcijų grafikus Dekarto ir polinėse koordinatėse;
- išmatuoti geometrinius objektus pasirinktais matavimo vienetais, norimu tikslumu, taip pat užrašyti tiesų ir apskritimų lygtis;
- brėžinius papildyti pasirinkto dydžio, formos ir šrifto užrašais;
- kurti scenarijus, kuriais automatiškai aprašoma brėžinio kūrimo seka. Scenarijų pagalba galima konstruoti sudėtingas figūras ir fraktalus.

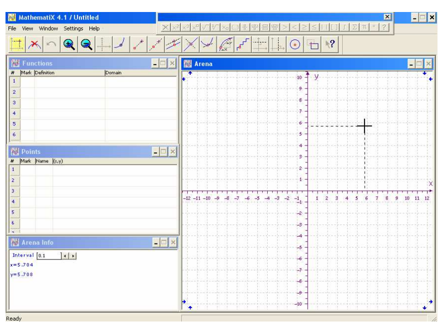
Reikšmingiausia „*Dinaminės geometrijos*“ savybė yra ta, kad tikslingai sukonstruotas geometrines figūras galima slinkti ar tampyti, išsaugant sukonstruotus geometrinius ryšius. Matavimų vertės taip pat dinamiškos: keičiant geometrinių objektų didumą, jos taip pat keičiasi. Svarbu pabrėžti, kad programa pati nieko nedaro – visus brėžinius kuria ir individualiai juos tyrinėja kiekvienas vartotojas. Programa tik suteikia vartotojui reikalingas priemones.

pav. 1

MathematiX

„*MathematiX*“ – viena iš Izraelio firmos „*Dalin's*“ programinės įrangos programų. Programa sukurta 1992 m. 2004 m. išleista 4.1 versija, kuri dabar taikoma daugiau nei 70% Izraelio vidurinių mokyklų (2 pav.). Kūrėjai programą įvardija kaip matematikos tyrinėjimo priemonių rinkinį (angl. *mathematics exploration toolkit*).

Naudojantis mokomąja kompiuterine priemone „*MathematiX*“ galima:



pav. 2

- braižyti funkcijų grafikus Dekarto koordinačių sistemoje;
- tyrinėti funkcijų savybes – apibrėžimo sritį, kritinius taškus, monotoniškumo intervalus, funkcijos pastovaus

ženklo intervalus, asimptotes;

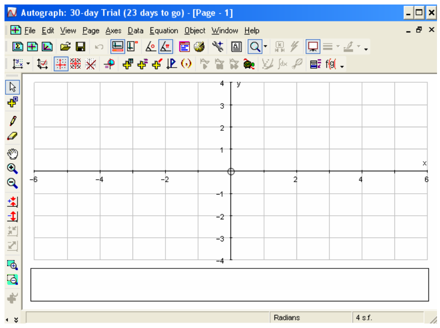
- brėžinius papildyti tik dviejų dydžių užrašais (antraštėmis, svarbiomis pastabomis, formuluotėmis ir kt.);
- nubraižyti papildomus objektus – liestinę taške, statmenis į *Ox* ir *Oy* ašis ir pan.
- nubraižyti ir apskaičiuoti kreivėmis apribotų figūrų plotus.

Ši programa išsiskiria paprasta vartotojo sąsaja. Programa yra dinamiška: žymekliui judant koordinačių plokštumoje, koordinatės yra dinamiškai perskaičiuojamos ir parodomos informacijos lange *Arena Info*. Taip pat nubraižius funkcijos grafiką, galima slinkti juo ir tyrinėti jo savybes. Programa nėra skirta sudėtingiems brėžiniams konstruoti, ji tik suteikia galimybę naudotis joje realizuotomis komandomis.

Autograph

Kompiuterinės programos „*Autograph*“ 2005 m. balandį pasirodė programos 3.10 versija (3 pav.). Tai, kaip teigia patys kūrėjai, kompiuterinė programa padedanti mokytojams ir mokiniams vizualizuoti matematikos mokymą tiek mokykloje, tiek kolegijoje. Ši programa turi tris veiksenas: 1) statistikos ir tikimybių; 2) dvimatės plokštumos; 3) trimatės plokštumos.

Remiantis darbe iškeltais tikslais ši programa tyrinėjama tik vienu aspektu – tiriamos galimybės funkcijoms mokyti(is).



pav. 3

Naudojantis kompiuterine programa „*Autograph*“ galima:

- Statistikos ir tikimybių veiksena:
  - įvesti tiesioginius ar grupuotus duomenis;
  - skaičiuoti standartinius statistinius rodiklius;
  - generuoti duomenis naudojant atitinkamus skirstinius;
  - reprezentuoti duomenis naudojant diagramas, grafikus ir t.t.;
- Dvimatės plokštumos veiksena:
  - braižyti funkcijų grafikus Dekarto ir polinėje koordinačių sistemose;
  - diferencijuoti ir integruoti bei atvaizduoti rezultatus;
  - sukurti ir valdyti pagrindinius geometrinius objektus – taškus, atkarpas, vektorius, kreives, kitas standartines figūras ir t. t.;
  - modifikuoti bei transformuoti geometrines figūras;
- Trimatės plokštumos veiksena:
  - braižyti įvairias trimates figūras;
  - braižyti tieses ir plokštumas;
  - atvaizduoti vektorius, atlikti su jais veiksmus ir pan.

Iš kitų programų „*Autograph*“ išsiskiria tuo, kad turi statistikai mokyti(is) reikalingų priemonių, pasižymi vektorių bei trimačių objektų vaizdavimo galimybėmis. Programa turi nemažai panašumų su „*Dinamine geometrija*“ – galima konstruoti tam tikrus geometrinius objektus bei funkcijų grafikus. Pagrindinis skirtumas – programoje „*Autograph*“ yra mažiau konstravimo galimybių – didžioji dalis funkcijų, geometrinių figūrų yra kūrėjų apibrėžtos. Dėl to vartotojui yra lengviau išmokti dirbti šia programa, tačiau dėl tos pačios priežasties, apribojamos brėžinių konstravimo galimybės. Programoje galima intervaluose apibrėžti funkcijas, spręsti nelygybes, vaizduoti dvimačių ir trimačių objektų sankirtos taškus ir kitas savybes. Dinamiškumo atžvilgiu programa panaši į „*Dinaminę geometriją*“. Sukonstruotų objektų išsidėstymą dvimatėje ir trimatėje plokštumose galima keisti naudojant parametrus, naudoti paprastos animacijos galimybes. Programoje realizuota atvaizdavimo projektoriuje veiksena.

3 Funkcijų mokymas taikant kompiuterines priemones

Funkcijos terminas naudojamas įvairiuose moksluose ir aiškinamas įvairiai. Funkcijos pagrindu sudaromi teoriniai aiškinimai vadinami funkcionalizmu. Svarbią vietą funkcionalizmas užima psichologijoje ir socialiniuose moksluose. Ypač svarbią vietą funkcijos sąvoka užima matematikoje.

Matematinį terminą "funkcija" (lot. functio) pirmasis 1694 m. pradėjo vartoti G. Leibnicas. XIX amžiuje funkcijos sąvoka formalizuota bei praplėsta. XIX amžiaus pabaigoje nepriklausomai vienas nuo kito beveik tuo pat metu šiuolaikinį funkcijos formalų apibrėžimą pateikė P. G. L. Dirichlė ir N. Lobačevskis.

3.1 Funkcijos sąvoka

Jei kiekvienam skaičių aibės D elementui x pagal tam tikrą taisyklę priskirtas tik vienas skaičių aibės E elementas y, tai sakoma, kad aibėje D yra apibrėžta funkcija. Funkcija žymima $y = f(x)$.

Elementas x vadinamas *nepriklausomuoju kintamuoju (argumentu).*

Elementas y vadinamas *priklausomuoju kintamuoju (funkcijos reikšmė taške x).*

Sakoma, kad aibėje D apibrėžta skaitinė funkcija, jei kiekvienam aibės D elementui priskirtas atitinkamas realusis skaičius.

Funkcijos $y = f(x)$, $x \in D(f)$ grafiku stačiakampėje Dekarto koordinačių sistemoje Oxy vadinama plokštumos taškų, kurių koordinatės $(x; f(x))$, $x \in D(f)$, aibė.

Funkcijos galimi reiškimo būdai pateikiami lentele (2 lentelė).

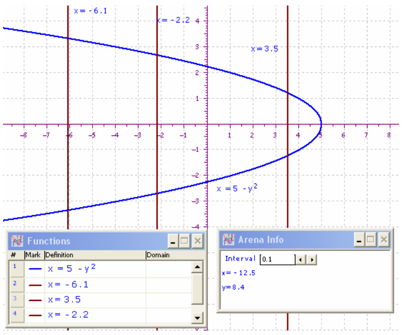
2 lentelė. Funkcijos apibrėžimo būdai.

Būdas	Aprašas
1. Lentelinis	Aprašant funkciją šiuo būdu, nepriklausomo kintamojo reikšmės $x_1, x_2, \dots x_k$ ir tas reikšmes atitinkančios funkcijos reikšmės $y_1, y_2, \dots y_k$ pateikiamos lentele. Tačiau nors šis būdas ir paprastas, tačiau pagrindinis trūkumas yra tame, kad jis neatskleidžia visų funkcijos savybių ir nėra vaizdus.
2. Žodinis	Funkcija aprašoma tekstu – žodžiais.
3. Grafinis	Nubraižomas funkcijos $y = f(x)$ grafikas. Šio būdo pranašumas slypi vaizdingume, kuriuo remiantis galima nustatyti svarbias funkcijos elgesio charakteristikas. Grafinio būdo trūkumas – norint detaliau ištirti funkciją, neįmanoma taikyti matematinio aparato.
4. Analizinis (formule)	Naudojant analizinį būdą, funkcija užrašoma formule, kuria remiantis duotai x reikšmei galima surasti atitinkamą funkcijos $f(x)$ reikšmę. Matematikoje dažniausiai naudojamas analizinis funkcijos užrašymo būdas. Privalumai – kompaktiškumas, galimybė bet kuriam x iš apibrėžimo srities surasti y, detalesniam funkcijos elgesio tyrinėjimui galima taikyti matematinį aparatą. Trūkumai – nepakankamas vaizdingumas ir galimi sunkumai apskaičiuojant funkcijos reikšmes.

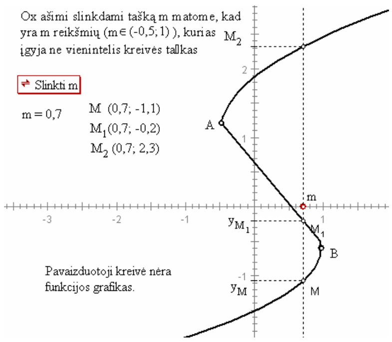
Vienas iš pagrindinių matematinio raštingumo aspektų yra sąvokų supratimas ir teisingas jų vartojimas. Žmonės mokosi sąvokų visą gyvenimą nuo ankstyvo amžiaus, susiformuodami vis sudėtingesnes sąvokas. Matematinių sąvokų mokymasis – ne išimtis.

Mokantis funkcijos sąvokos pradedamas žinių apie šį matematinį objektą konstravimo procesas ir gaunamos informacijos organizavimas į suprantamas ir sudėtingas kognityviąsias struktūras. Todėl labai svarbu, kad besimokantieji teisingai ir vienareikšmiškai suprastų sąvokas bei gebėtų jas paaiškinti.

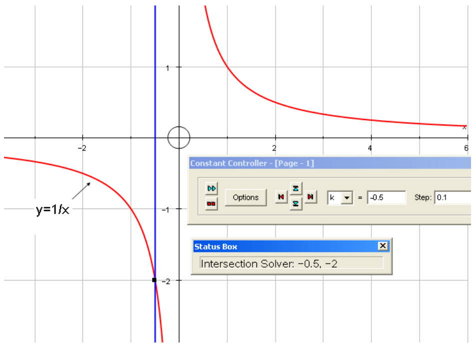
Mokyklinėje matematikoje didelis dėmesys skiriamas funkcijoms, išreikštoms grafikais. Moksleiviai privalo mokėti braižyti ir skaityti grafikus, naudotis jais spręsdami įvairius uždavinius, mokėtų nustatyti, ar duotasis grafikas yra funkcijos grafikas. Remiantis tiek matematikos mokytojų, tiek kolegijos dėstytojų patirtimi daugumai besimokančiųjų funkcijos sąvoka nėra lengvai suprantama. Todėl ir kolegijoje tema „Funkcijos. Ribos. Išvestinės“ pradedama nuo funkcijos sąvokos, funkcijos reiškimo būdų, elementariųjų funkcijų, jų savybių ir grafikų kartojimo. Funkcijos sąvokai suprasti reikalingi šie matematiniai terminai: priklausomas kintamasis ir nepriklausomas kintamasis. Kaip jie tarpusavyje susiję galima būtų iliustruoti paprastais, bet aiškiais, mokinių žinias ir patirtį atitinkančiais kompiuterinėmis programomis sukurtais brėžiniais. Naudojantis jomis galima vizualizuoti nepriklausomo kintamojo (argumento), priklausomo kintamojo (funkcijos reikšmės) sąvokų mokymą. Taip pat jų pagalba galima vaizdžiai pateikti, kokia kreivė yra funkcijos grafikas, o kuri ne. Žemiau pateiktuose pavyzdžiuose iliustruojama, ir aprašoma, kaip kiekviena iš pasirinktų kompiuterinių priemonių, galima mokyti suprasti, apibrėžti funkcijos sąvoką, iš grafiko atpažinti, ar tai yra funkcijos grafikas, ar ne.



pav. 4



pav. 5



pav. 6

Programa „*MathematiX*“ 4 pav. pateikiamas brėžinys, kuriuo remiantis galima mokytis nustatyti, ar nubraižytoji kreivė yra funkcijos grafikas, ar ne. Brėžinio nereikia iš anksto pasiruošti, jis gali būti konstruojamas mokantis. Norint patikrinti, ar duotoji koordinačių plokštumos taškų visuma galėtų būti funkcijos grafikas, reikia įsitikinti, ar kiekvieną nepriklausomojo kintamojo reikšmę atitinka tik viena priklausomo kintamojo reikšmė. Tam brėžinyje braižomos *Ox* ašiai statmenos tiesės (programa turi specialią komandą tai atlikti). Pasirinkus komandą *Lock Snap* (žymeklis susiejamas su grafiku, t.y. jis juda grafiku), galima judėti *Ox* ašimi ir įsitikinti, kad ši kreivė nėra funkcijos grafikas, nes vieną *x* reikšmę atitinka dvi *y* reikšmės. Norint pateikti tokią vizualizaciją šia programa, vartotojui reikia pasirinkti atitinkamas komandas ir tikslingai valdyti pasirinktuosius objektus.

5 pav. pavaizduotas „*Dinamine geometrija*“ nubraižytas brėžinys – nubraižoma kreivė, tiesė statmena *Ox* ašiai, apskaičiuojami ir brėžinyje sužymimi tos kreivės ir tiesės sankirtos taškai. Parametrui *m* keičiantis, tiesė juda, kirsdama nubraižytąją kreivę keliuose taškuose (koordinačių reikšmės perskaičiuojamos). Kadangi netenkinami funkcijos ir funkcijos grafiko apibrėžimas, daroma išvada, kad nubraižytoji kreivė nėra funkcijos grafikas. Taip tyrinėjant dinaminį brėžinį, kai pavaizduotoji kreivė yra, ir kai kreivė nėra funkcijos grafikas moksleiviams turėtų būti paprasčiau suprasti ir įsiminti mokomąją medžiagą – suprasti funkcijos, priklausomojo, nepriklausomojo kintamojo sąvokas, pagal aptartąjį būdą, atpažinti funkcijos grafiką. Tačiau tokiam brėžiniui sukonstruoti reikia nemažai laiko ir žinoti programos galimybes.

Trečiąja programa „*Autograph*“, pasinaudojus programos komanda *Plot mode* galima vaizdžiai iliustruoti nepriklausomo ir priklausomo kintamojo sąvokas (6 pav.). Pirmiausia nubraižomas funkcijos grafikas. Tada dar kartą jis perbraižomas akcentuojant, kad kiekvienai *x* reikšmei (nepriklausomajam kintamajam) pagal tam tikrą taisyklę priskiriama *y* (priklausomojo kintamojo) reikšmė nubraižius funkcijos grafiką: *x* perbėgdamas apibrėžimo sritį, dinamiškai brėžia kreivę – funkcijos grafiką. Iš karto galima pastebėti, kad šia programa galima gana paprastai sukurti dinaminius brėžinius.

3.2 *Atvirkštinės ir sudėtinės funkcijos*

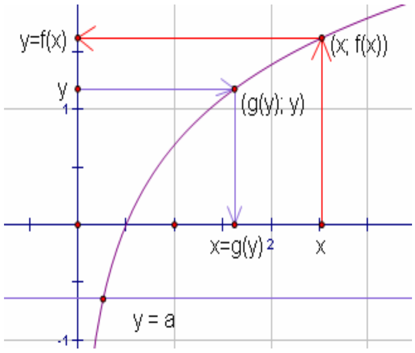
Funkcija $y = f(x)$ įgyjanti kiekvieną reikšmę tik viename apibrėžimo srities taške, vadinama apgręžiamąja, t.y. egzistuoja abipus vienareikšmė atitiktis.

Funkcijos $y = f(x)$, $x \in X$, apibrėžiančios aibių X ir E elementų abipusiškai vienareikšmę atitiktį, atvirkštine vadinama funkcija $x = g(y)$, kiekvienam $y \in E$ priskirianti aibės X elementą x, su kuriuo $f(x) = y$.

Sudėtinė funkcija gaunama atlikus funkcijų $y = f(u)$, $u \in U$ ir $u = g(x)$, $x \in X$ superpoziciją, t. y. kai vietoj vienos funkcijos argumento įrašoma kita kito argumento funkcija, čia u yra tarpinis argumentas. Funkcijos $u = g(x)$ reikšmių aibės ir funkcijos $y = f(u)$ apibrėžimo srities U sankirta nėra tuščia aibė: $\{g(x):\ x \in X\ \} \cap U \neq \varnothing$. *Tada $y = f(g(x))$, $x \in X'$, vadinama sudėtine funkcija; čia $X' \subset X$ – šios funkcijos apibrėžimo sritis.*

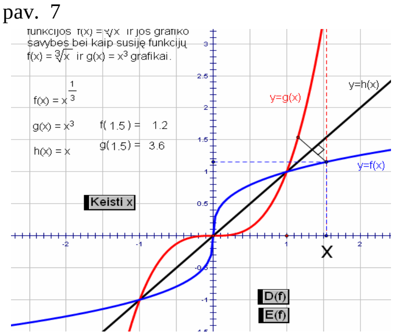
Remiantis Vilniaus kolegijos matematikos programa ir bendrojo lavinimo mokyklos matematikos programa ir išsilavinimo standartais vidurinėje mokykloje apibrėžiama funkcijai atvirkštinės funkcijos sąvoka kartojama ir kolegijoje. Moksleiviai bei kolegijos studentai išmokę šią temą turi gebėti patikrinti, ar dvi funkcijos yra viena kitai atvirkštinės, žinoti ir iliustruoti ryšį tarp funkcijos ir jai atvirkštinės funkcijos grafikų. Remiantis funkcijos $y = f(x)$ grafiku nesudėtinga nustatyti, ar jai atvirkštinė funkcija $x = g(y)$ bus vienareikšmė, ar ne. Funkcija $x = g(y)$ yra vienareikšmė, jei bet kuri tiesė, lygiagreti Ox ašiai funkcijos grafiką kerta tik viename taške. Ir atvirkščiai, jei tiesė funkcijos $y = f(x)$ grafiką kerta keliuose taškuose, tai atvirkštinė funkcija bus daugiareikšmė. Tada funkcijos grafiko pagalba funkcijos apibrėžimo sritį galima suskaidyti į intervalus taip, kad kiekviena grafiko dalis tame intervale būtų vienareikšmė funkcija.

Jei funkcija $x = g(y)$ yra funkcijos $y = f(x)$ atvirkštinė, tai grafikai šių funkcijų sutampa [14]. Ieškant duotajai funkcijai atvirkštinės funkcijos, pirmiausia patikrinama, ar ji yra apgręžiama. Tam nubraižoma tiesė $y = a$ ir keičiant a reikšmę įsitikinama, kad ji duotosios funkcijos grafiką kerta tik viename taške. Tada į kintamąjį y žiūrima kaip į nepriklausomąjį kintamąjį, o x tampa priklausomas, t. y. $x = g(y)$. Žinant funkcijos $y = f(x)$ apibrėžimo sritį X ir reikšmių sritį E, galima vaizdžiai parodyti, kad aibė X yra funkcijos $x = g(y)$ reikšmių sritis, o E – jos apibrėžimo sritis (7 pav.).



pav. 7

Tačiau, dažnai matematikos vadovėliuose, atvirkštinės funkcijos argumentas y pažymimas x, t. y. vietoj funkcijos $x = g(y)$ nagrinėjama funkcija $y = g(x)$. Atlikus šiuos pakeitimus gaunama, kad funkcijos $y = g(x) = f^{-1}(x)$ grafikas yra funkcijos $y = f(x)$ grafiko veidrodinis atspindys pirmojo ketvirčio pusiaukampinės atžvilgiu. (8 pav.)



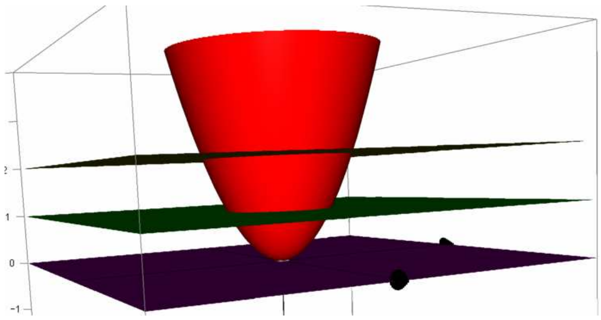
pav. 8

Mokantis atvirkštinės ir sudėtinės funkcijos sąvokas, naudoti šias kompiuterines programas galima keliais būdais. Iš nagrinėjamų programų tik viena *„Autograph“* turi galimybę nurodžius dviejų funkcijų išraiškas, nubraižyti sudėtinės funkcijos grafiką. Vadinasi, ši programa gali būti taikoma gautam rezultatui patikrinti, t.y., įsitikinti, ar gerai nubraižytas sudėtinės funkcijos grafikas. Ieškant funkcijai atvirkštinės funkcijos, vartotojas ją turi rasti pats ir gauto algebrinio rezultato naudojantis šiomis priemonėmis patikrinti negalės, todėl programos gali būti taikomos nagrinėjamų sąvokų geometrinei interpretacijai pateikti. Be to, jei besimokantysis supranta priklausomo ir nepriklausomo kintamojo sąvokas, moka rasti funkcijos apibrėžimo ir reikšmių sritis, tai reikalinga grafinė interpretacija šiai temai dėstyti gali būti pateikta ir lentoje.

3.3 Dviejų kintamųjų funkcija

Atitiktis f, kuria kiekvienam aibės G elementui – skaičių porai (x, y) priskiriamas vienas ir tik vienas aibės Z skaičius z, vadinamas dviejų kintamųjų x ir y funkcija ir žymima simboliu z = f(x, y).

Ši tema nagrinėjama Vilniaus kolegijoje – nagrinėjamas dviejų kintamųjų funkcijos tolydumas, dalinės išvestinės. Akcentuojama, tai kad studentai suprastų, jog vieno kintamojo funkcijos geometrinė interpretacija yra grafikas plokštumoje, o, pvz., dviejų kintamųjų funkcijos – grafikas erdvėje, kitaip tariant yra paviršius. Dėstant šią temą kompiuterines programas galima naudoti fragmentiškai, iliustruojant formule pateiktas dviejų kintamųjų funkcijas geometriškai. Tam iš pasirinktų programų tinka tik programa „*Autograph*“ (programos trimatės plokštumos veiksena). Nubraižytąjį paviršių galima tyrinėti jų sukant, didinant, mažinant, dedant taškus trimatėje erdvėje ir konstruojant pjūvius (9 pav.).



pav. 9

3.4 Funkcijų grafikų transformacijos

Pagrindinės mokyklos matematikos kurse itin didelis dėmesys skiriamas funkcijų grafikų braižymui ir jų skaitymui. IX klasėje susipažįstama su kvadratinės funkcijos transformacijomis, kurios yra labai svarbios ne tik kvadratinių funkcijų grafikų braižymui, bendrajai jų sampratai, bet ir aukštesnėse klasėse, nagrinėjant kitas funkcijas. Pagrindinės funkcijų grafikų transformacijos kartojamos ir kolegijoje, nes jų prireikia studijuojant kitus, ypatingai su inžinerija, elektrotechnika susijusius dalykus.

Atliekant funkcijos grafiko transformacijas yra taikomi tam tikri metodai, kuriuos panaudojus supaprastinama analizinė funkcijos išraiška ir tada braižomas duotosios funkcijos grafikas. Šių metodų žinojimas gali būti praktiškai naudingas konstruojant funkcijų grafikus ne tik matematikoje, bet ir kituose dalykuose, pvz., fizikoje, biologijoje.

Šiame skyriuje bus nagrinėjama, kaip iš funkcijos $y = f(x)$ galima gauti funkcijos $y = Af(ax+b) + B$, čia A, B, a ir b yra realieji skaičiai, grafiką.

Mokant(is) funkcijų grafikų transformacijų keliami tikslai:

1) suprasti, kaip atlikti vieną ar kirą transformaciją ir mokėti nubraižyti transformuotos funkcijos grafiką;
2) iš nubraižyto funkcijos grafiko atpažinti, kokia yra atlikta transformacija.

Kompiuterinių programų taikymas gali padėti įgyvendinti bendrosiose matematikos programose keliamus tikslus. Manau, kad ten, kur atliekami tam tikri postūmiai, judėjimai, tikslinga naudoti kompiuterines priemones, ypatingai tuomet, kai pasirinktosios priemonės yra dinaminės. Naudojantis jomis galima ištirti žymiai daugiau atvejų, jos suteikia galimybę tą pačią problemą tirti nagrinėjant daugybę skirtingų variantų, įvedant kitus duomenis. Besimokantieji kompiuterinių priemonių pagalba gali patys atrasti, greičiau internalizuoti mokomąją medžiagą.

3.4.1 Lygiagretusis postūmis

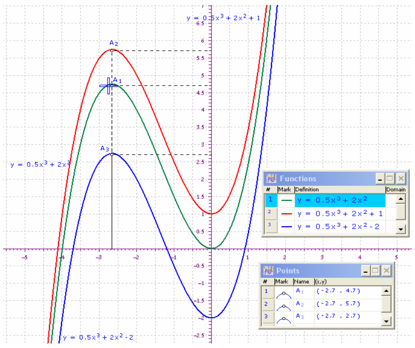
Lygiagretusis postūmis gali būti dviejų tipų: funkcijos grafiko postūmis ordinačių arba abscisių ašies atžvilgiu.

1. Postūmis ordinačių ašies atžvilgiu. Funkcijos $y = f(x) + b$, $b \neq 0$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko pastūmus jį Oy ašies kryptimi per b vienetų į viršų, jei $b > 0$, ir žemyn, jei $b < 0$.

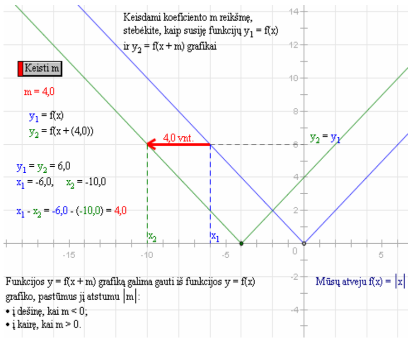
2. Postūmis abscisių ašies atžvilgiu. Funkcijos $y = f(a + x)$, $a \neq 0$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko pastūmus jį Ox ašies kryptimi per $|a|$ vienetų į dešinę, jei $a < 0$, ir į kairę, jei $a < 0$.

Perstumti grafiką – tai reiškia jį perbraižyti. Tačiau tai dažnai kelia sunkumų, o ypač tada, kai grafikas yra sudėtingas. Funkcijos $y = f(x) + b$ grafiko postūmis per |b| vienetų žemyn ar aukštyn Oy ašies atžvilgiu yra ekvivalentus abscisių ašies postūmiui per tiek pat vienetų žemyn arba aukštyn.

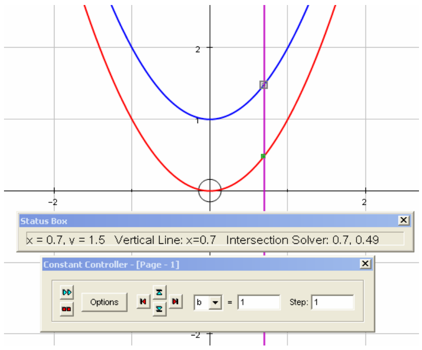
Prieš braižydami funkcijos $y = f(a + x)$ grafiką patyrinėkime funkcijos $y = f(x)$ grafiką. Tarkime, kad ši funkcija taške $x = x_1$ įgyja reikšmę $y_1 = f(x_1)$. Tada funkcija $y = f(x + a)$ įgis tokią pat reikšmę taške x_2, kurio koordinatė apibrėžiama (gaunama) iš lygybės $x_2 + a = x_1$, t. y. $x_2 = x_1 - a$. Pastaroji lygybė yra teisinga visiems funkcijos apibrėžimo srities taškams. Lygiagretusis funkcijos grafiko postūmis abscisių ašies atžvilgiu per $|a|$ vienetų yra ekvivalentus ordinačių ašies postūmiui per tiek pat vienetų tik į priešingą pusę.



pav. 10



pav. 11



pav. 12

Naudojantis programa „*MathematiX*“ šiai temai mokyti(is) pirmiausia sukuriamas pirmosios funkcijos grafikas, be jokių transformacijų. Tada, kadangi programa neturi galimybių dinamiškai atvaizduoti postūmių, nubraižomi antrosios ir trečiosios funkcijų grafikai su atitinkamomis b reikšmėmis – atlikus konkrečius postūmius Ox ašies atžvilgiu. Pasirinkus komandą *Lock snap* ir nubrėžus statmenį Ox ašiai galima lyginti, kaip keičiasi funkcijos reikšmės, kai prie duotosios funkcijos reikšmių arba prie argumento reikšmių pridedamos arba atimamos reikšmės, ir kaip išsidėsto kiekvienos iš nagrinėjamų funkcijų grafikai koordinačių plokštumoje (10 pav.).

Naudojantis „*Dinamine geometrija*“ šioms transformacijoms suprasti galimas toks būdas: nubraižoma elementarioji funkcija be jokių transformacijų. Tada konstruojama kita funkcija, kurios išraiškoje yra parametras (11 pav.). Tokiu būdu sukonstruotos funkcijos grafikas bus dinamiškas, nes programa turi valdikius parametrui valdyti: tiek rankiniu būdu, tiek automatiškai. Dėl to, galima vizualiai parodyti sukurtojo parametro įtaką grafiko išsidėstymui koordinačių plokštumoje.

Programa „*Autograph*“ suteikia panašias galimybes mokyti(is) šių transformacijų: nubraižomos dvi funkcijos, kurių viena yra su dviem parametrais. Tada juos keičiant, perskaičiuojamos funkcijos ar argumento reikšmės ir brėžinyje dinamiškai iliustruojami funkcijos grafiko postūmiai tiek *Ox*, tiek *Oy* ašies atžvilgiu (12 pav.).

3.4.2 Deformacija

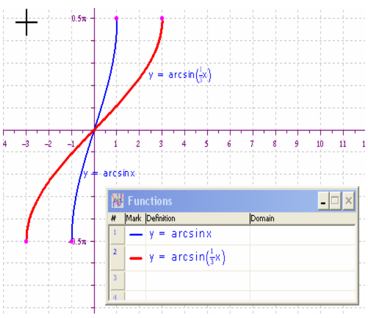
Funkcijos grafiką deformuoti galima dviem būdais: suspausti arba ištempti jį, priklausomai nuo daugiklio reikšmės, ordinačių arba abscisių ašies atžvilgiu.

1. Funkcijos grafiko suspaudimas ordinačių ašies atžvilgiu. Tarkime, kad nagrinėsime funkciją $y = af(x)$, kai $a > 0$. Nagrinėjant šią transformaciją, aiškinama tai, kad imant tas pačias argumento reikšmes ordinatės funkcijos $y = af(x)$ bus a kartų didesnės už funkcijos $y = f(x)$ ordinates, kai $a > 1$, ir $\frac{1}{a}$ kartų mažesnės, kai $a < 1$.

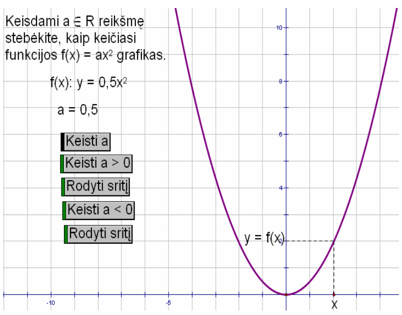
   Funkcijos $y = af(x)$, $a \neq 1$, $a > 0$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko suspaudus jį *Oy* ašies kryptimi $\frac{1}{a}$ kartų, jei $0 < a < 1$, ir ištempus a kartų, jei $a > 1$.

2. Funkcijos grafiko suspaudimas abscisių ašies atžvilgiu. Tarkime, turime nubraižyti funkcijos $y = f(ax)$ grafiką, kai $a > 0$. Išnagrinėkime funkciją $y = f(x)$, kuri bet kuriame taške $x = x_1$ įgyja reikšmę $y_1 = f(x_1)$. Akivaizdu, kad funkcija $y = f(ax)$ įgyja tokią pat reikšmę taške $x = x_2$, kurios koordinatė apibrėžiama lygybe $x_1 = ax_2$ arba $x_2 = \frac{x_1}{a}$. Ši lygybė teisinga kiekvienam x priklausančiam apibrėžimo sričiai. Todėl funkcijos $y = f(ax)$ grafikas yra suspaustas (kai $a > 1$) arba ištemptas (kai $a < 1$) palyginus su funkcija $y = f(x)$ abscisių ašies atžvilgiu.

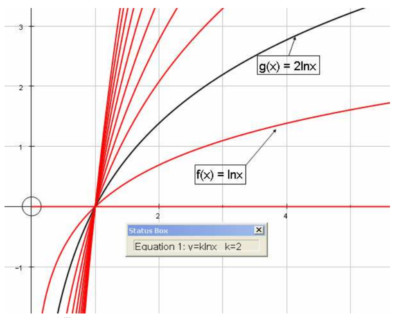
Funkcijos $y = f(ax)$, $a \neq 1$, $a > 0$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko suspaudus jį *Oy* ašies atžvilgiu ir *Ox* ašies kryptimi a kartų, jei $a > 1$, ir ištempiamas $\frac{1}{a}$ kartų, jei $0 < a < 1$.



pav. 13



pav. 14



pav. 15

Programa „*MathematiX*“ nubraižomas pasirinktosios funkcijos grafikas su kuriuo bus atliekama viena iš minėtųjų transformacijų. Tam tame pačiame brėžinyje nubraižoma kita funkcija su atitinkamu daugikliu. Tada moksleiviai gali patys lyginti ir atrasti, kaip daugiklis prieš argumentą įtakoja funkcijos grafiko padėti koordinačių plokštumoje, t. y., kad antrosios funkcijos grafikas yra gautas iš pirmojo grafiko ištempus jį *Ox* ašies atžvilgiu 3 kartus (13 pav.).

Naudojantis programomis „*Dinaminė geometrija*“ (14 pav.) ir „*Autograph*“ deformaciją galima mokyti(is) panaudojant dinamines šių programų galimybes. Tam apibrėžiant funkciją kartu sukuriamas parametras, kurį animuojant keičiasi parametro reikšmė ir funkcijos grafiko padėtis koordinačių plokštumoje. „*Dinaminėje geometrijoje*“ parametrą galima keisti dviem būdais: rankiniu (naudojant judesio valdiklį) ir animuojant. Programoje „*Autograph*“ parametro keitimą galima atlikti trim būdais: rankiniu (*Manual*), nubraižant kreivių šeimą (*Family Plot*) (15 pav.) ir animuojant (*Animation*).

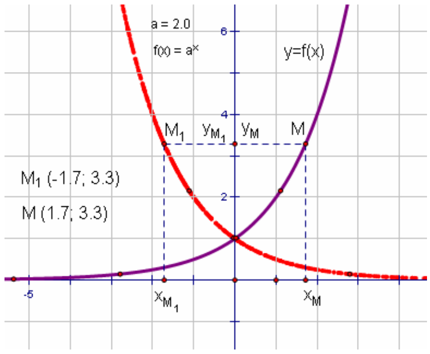
3.4.3 Atspindys

Ši transformacija yra svarbi braižant lyginių ir nelyginių funkcijų grafikus.

1. Funkcijos $y = f(-x)$ grafiko braižymas. Pastebėkime, kad funkcijos $y = f(-x)$ ir $y = f(x)$ įgyja tas pačias reikšmes tuose taškuose, kurių absoliutinės abscisių reikšmės yra lygios, bet priešingų ženklų. Funkcijos $y = f(-x)$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko atvaizdavus jį simetriškai *Oy* ašies atžvilgiu.

2. Funkcijos $y = -f(x)$ grafiko braižymas. Kiekvienai funkcijos $y = -f(x)$ grafiko argumento reikšmei absoliutinės ordinatės reikšmės yra lygios, tačiau yra priešingo ženklo nei funkcijos y = f(x) grafiko ordinatės. Funkcijos $y = -f(x)$ grafikas gaunamas iš funkcijos y $= f(x)$ grafiko atvaizdavus jį simetriškai *Ox* ašies atžvilgiu.

Pasirinktosios programos, išskyrus „*Dinaminę geometriją*“, neturi specialių galimybių atspindėti funkcijų grafikų abscisių ir ordinačių ašių atžvilgiu. „*Dinaminė geometrija*“ neatspindi funkcijos grafiko, tačiau gali atspindėti taškus. Keletą funkcijos grafikui priklausančių taškų atspindėjus *Ox* ar *Oy* ašies atžvilgiu ir vienam taškui nurodžius, kad jis paliktų pėdsaką, galima nubraižyti atitinkamai funkcijų $y =- f(x)$ ir $y = f(-x)$ grafikus (16 pav.). Remiantis nubraižytuoju brėžiniu mokiniai patys galėtų daryti atitinkamas išvadas. Be to, mokiniai galėtų patys konstruoti brėžinius taip pritaikydami savo matematikos žinias.

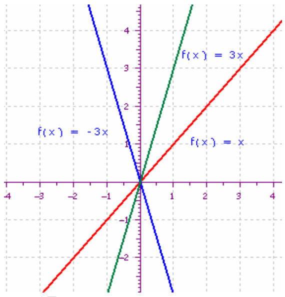


pav. 16

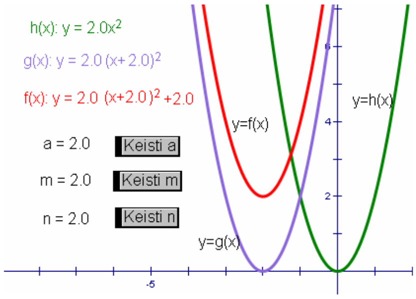
3.4.4 Postūmis, atspindys ir deformacija

Dažnai braižant funkcijų grafikus naudojamos prieš tai aprašytų būdų kombinacijos. Nuoseklus šių būdų taikymas palengvina duotosios funkcijos grafiko braižymą, t. y. paprastai prieinama prie paprasčiausių elementariausių funkcijų grafikų braižymo.

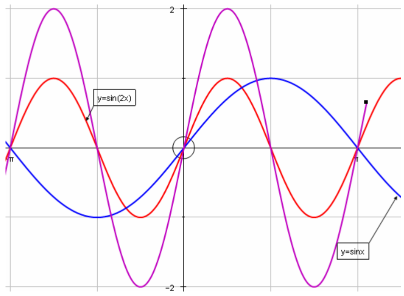
Funkcijos $y = Af(ax+b) + B$ grafiko braižymas. Tarkime, kad šios funkcijos kiekvienas parametras gali būti tiek teigiamas, tiek neigiamas. Remiantis prieš tai išdėstytais būdais galima pateikti pažingsninę duotosios funkcijos grafiko braižymo schemą. Greta teorinės dalies pateikiamas konkretus pavyzdys (3 lentelė).



pav. 17



pav. 18



pav. 19

Naudojantis kompiuterinėmis programomis galima vaizdžiai iliustruoti, kaip braižyti funkcijų grafikus, atliekant transformacijas iš eilės. Programomis „*Dinaminė geometrija*“ ir „*Autograph*“ medžiagą pateikti iš esmės tokios pat galimybės: vietoj konstantų sukuriami parametrai ir juos keičiant stebimas, analizuojamas, kartojamas grafiko padėties kitimas koordinačių plokštumoje. (18 ir 19 pav.)

Programa „*MathematiX*“ nepasižymi tokiu interaktyvumu kaip prieš tai aptartosios dvi programos – kiekvienai funkcijos grafiko transformacijai iliustruoti reikia suvesti reikiamos funkcijos išraišką. (17 pav.) Programai perbraižius grafiką galima atliktos transformacijos analizė. Šiai temai mokyti aptartosios programos tinka tiek mokantis klasėje, tiek kiekvienam mokiniui individualiai.

3 lentelė. Pažingsninio funkcijos grafiko braižymo pavyzdys

Veiksmų atlikimo tvarka	Nr.	Teorinis aprašymas	Pavyzdys	Veiksmų atlikimo tvarka
Funkcijos supaprastinimo eiliškumas ↓		$y = Af\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]+B$	$y=\sqrt{5}\sin[2(x-\frac{1}{2})]-2$	Grafiko braižymo eiliškumas ↑
		$\uparrow$	Funkcijos grafiko postūmis Oy ašies atžvilgiu per $\lvert -2 \rvert$ vienetus žemyn	
	1.	$y = Af\left[a\left(x+\frac{b}{a}\right)\right]$	$y=\sqrt{5}\sin[2(x-\frac{1}{2})]$	
		$\uparrow$	Funkcijos grafiko postūmis Ox ašies atžvilgiu per $\lvert\frac{1}{2}\rvert$ vienetų į dešinę	
	2.	$y = Af[ax]$	$y=\sqrt{5}\sin(2x)$	
		$\uparrow$	Grafiko atspindys abscisių ašies atžvilgiu (šis žingsnis atliekamas tik tuomet, jei A < 0)	
	3.	$y = \lvert A\rvert\, f[ax]$	$y=\lvert\sqrt{5}\rvert\sin(2x)$	
		$\uparrow$	Funkcijos grafiko suspaudimas arba išplėtimas ordinačių ašies atžvilgiu	
	4.	$y = f[ax]$	$y=\sin(2x)$	
		$\uparrow$	Grafiko atspindys ordinačių ašies atžvilgiu (šis žingsnis atliekamas tik tuomet, jei a < 0)	
	5.	$y = f[\lvert a\rvert x]$	$y=\sin(\lvert 2\rvert x)$	
		$\uparrow$	Funkcijos grafiko suspaudimas arba išplėtimas abscisių ašies atžvilgiu.	
	6.	$y = f(x)$	$y=\sin(x)$	

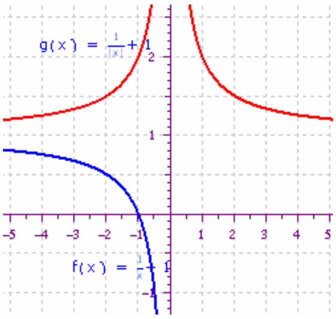
3.4.5 Funkcija su modulio ženklu

1. Funkcijos $y = |f(x)|$ grafiko braižymas. Funkcijos $y = |f(x)|$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko taip: funkcijos $y = f(x)$ grafiko dalis, esanti žemiau *Ox* ašies, atvaizduojama simetriškai šios ašies atžvilgiu, o likusi grafiko dalis, esanti aukščiau *Ox* ašies, paliekama nepakeista. Tatai išplaukia iš modulio apibrėžimo. Juo remiantis duota funkcija užrašoma štai tokiu pavidalu:

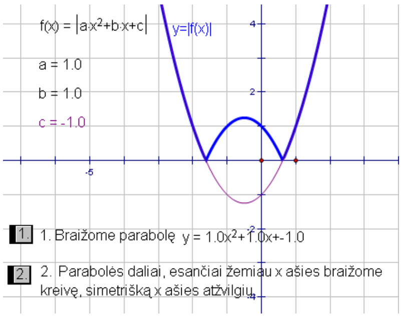
$$y = \begin{cases} f(x), & kai \quad f(x) \geq 0 \\ -f(x), & kai \quad f(x) < 0. \end{cases}$$

2. Funkcijos $y = f(|x|)$ grafiko braižymas. Funkcijos $y = f(|x|)$ grafikas gaunamas iš funkcijos $y = f(x)$ grafiko taip: funkcijos $y = f(x)$ grafiko dalis, esanti *Oy* ašies dešinėje ($x \geq 0$), paliekama , o grafiko dalis, esanti *Oy* ašies kairėje ($x < 0$) nuvaloma ir pakeičiama likusio grafiko simetrišku vaizdu *Oy* ašies atžvilgiu. Tai gaunama iš to, kad funkcija $y = f(|x|)$ yra lyginė, t. y. $f(-x) = f(x)$.

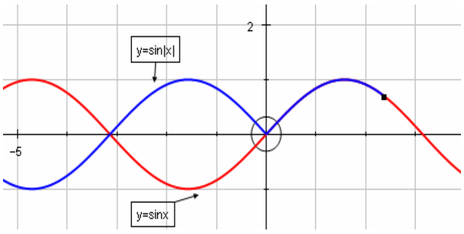
3. Funkcijų, kurių išraiškose yra modulio ženklas, grafikų braižymas. Funkcijos išraiškoje argumentai gali būti ir su modulio ženklu ir be jo. Prieš braižant tokių funkcijų grafikus, būtina išsiaiškinti modulio ženklą ir atitinkamuose intervaluose nubraižyti funkcijos grafikus.



pav. 20



pav. 21



pav. 22

Kiekvieną iš pasirinktų programų šiai temai mokyti(is) galima taikyti mokomajai medžiagai demonstruoti, arba mokiniui dirbant individualiai. Programas galima taikyti tiesiog suvedant funkcijų be modulio ir su modulio ženklu išraiškas. Galbūt pamokos metu tai nėra labai efektyvus šių programų panaudojimo būdas, tačiau mokantis savarankiškai kiekvienas mokinys gali pasitikrinti, ar teisingai suprato išdėstytą medžiagą, ar teisingai braižo funkcijas su modulio ženklu. Šiuo atveju, kompiuterinės programos gali padėti suprasti tai, kas buvo nesuprasta pamokoje. Programa „*Autograph*“ išsiskiria tuo, kad ja galima vaizdžiau pateikti funkcijų su modulio ženklu grafikų braižymą – nubraižomas funkcijos be modulio grafikas. Tada pasirinkus komandą, skirtą funkcijos grafikui taškui slenkant braižyti, brėžiamas funkcijos su modulio ženklu grafikas (22 pav.). Tokiu būdu besimokančiajam bus lengviau suprasti, kuri grafiko dalis paliekama, o kuri perbraižoma.

3.5 Funkcijos kitimo charakteristikos

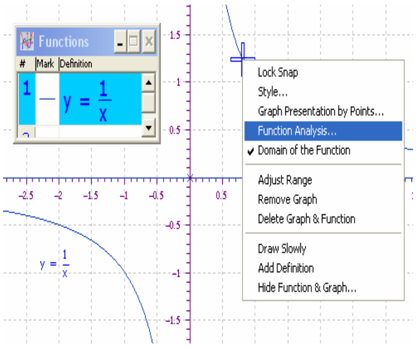
Nagrinėjant funkcijas, tiriamos jų kitimo charakteristikos. Pagrindinėje mokykloje didesnis dėmesys skiriamas funkcijų savybių tyrimui naudojantis jų grafikais, tačiau vidurinėje mokykloje ir kolegijoje pereinama prie analizinių metodų.

3.5.1 Apibrėžimo sritis

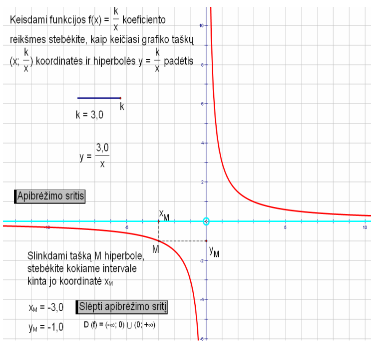
Aibėje D turime apibrėžtą funkciją y = f(x), x $\in$ *D. Tada aibė D vadinama funkcijos y = f(x) apibrėžimo sritimi.*

Jei funkcija *y = f(x)* išreikšta formule ir prašoma surasti jos apibrėžimo sritį, tai ji ieškoma algebriniu būdu, t.y. randamos visos argumento reikšmės, su kuriomis reiškinys *f(x)* įgyja skaitines reikšmes. Paprastai mokiniams, ypatingai žemesnėse klasėse, suvokimas ką reikia rasti, sukelia problemų. Tai, žinoma, susiję su sąvokos „apibrėžimo sritis“ supratimu. Mokykliniame matematikos kurse nagrinėjamos ne tik funkcijos, kurių grafikai yra kreivės, t. y. funkcijos, kurių apibrėžimo sritis yra tolydi, bet ir tokios, kurių apibrėžimo sritis nėra tolydi, pvz., aritmetines progresijos. Remiantis matematikos mokytojų patirtimi, moksleiviams sunku perprasti tai, kad funkcijos apibrėžimo sritis gali būti ne tik vienas, bet ir keli intervalai, bei ji gali būti vienas ar keli skirtingi taškai, arba atskirų taškų ir intervalų sąjunga.

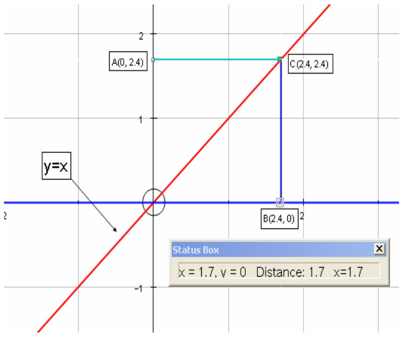
Kai funkcijos apibrėžimo sritį mokoma nustatyti remiantis grafiku, mokiniams būtų lengviau suprasti šią sąvoką taikant kompiuterines priemones.



pav. 23



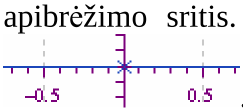
pav. 24



pav. 25

Naudojantis „*Dinamine geometrija*“ paprasta nubraižyti funkcijos grafiką, tačiau norint pavaizduoti jos apibrėžimo sritį, reikia ją sukonstruoti. Tam reikia žinoti pagrindinius konstravimo šia programa įrankius ir algoritmus. Todėl mokymo procese šią programą galima būtų taikyti demonstruojant ir pratybų metu naudojant mokytojo iš anksto sukurtus brėžinius. Brėžinyje pavaizduota hiperbolė, ant jos grafiko sukurtas taškas *M*. Slenkant jį, stebima, kokiame intervale kinta jo koordinatė x_M. Taško *M* abscisei didėjant, atitinkamai funkcijos reikšmės mažėja ir funkcija taške *x = 0* yra neapibrėžta (24 pav.).

Naudojantis programa „*MathematiX*“ nubraižius funkcijos grafiką, kuris, jei vartotojas nenurodo argumento įgyjamų reikšmių, braižomas visoje apibrėžimo srityje. Ši programa turi papildomų priemonių funkcijoms tyrinėti: padėjus pelės žymeklį ant nubraižytosios funkcijos ir spragtelėjus dešiniuoju pelės klavišu atveriamas kontekstinis meniu, kuriame pasirinkus funkcijos apibrėžimo srities komandą (*Domain of the Function)* brėžinyje pažymima funkcijos apibrėžimo sritis. Taškas nepriklausantis funkcijos apibrėžimo sričiai pažymimas kryželiu:



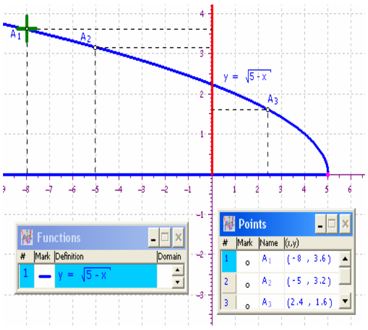
. (23 pav.) Programa taip pat gali būti taikoma demonstravimui, pratybų metu ir ypatingai dirbant individualiai.

Programoje „*Autograph*“, kaip ir „*Dinaminėje geometrijoje*“, nėra specialių galimybių atvaizduoti funkcijos apibrėžimo sričiai, tačiau ją galima sukonstruoti. Nubraižius tiesinę funkciją slenkant tašką *B* galima tirti, kokias reikšmes įgyja (neįgyja) šios funkcijos nepriklausomasis kintamasis. Tempiant tašką *B* kitų brėžinyje pavaizduotų taškų koordinatės dinamiškai perskaičiuojamos ir tokiu būdu galima įsitikinti, kad kiekviename realiųjų skaičių tiesės taške ši funkcija yra apibrėžta.

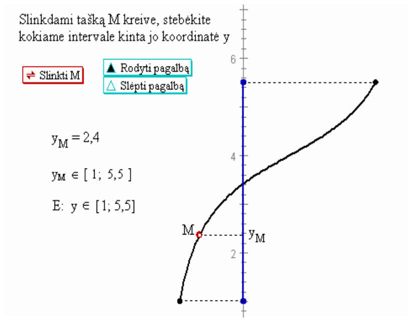
3.5.2 Reikšmių sritis

Aibėje D turime apibrėžtą funkciją $y = f(x)$, $x \in D$. Pagal funkcijos apibrėžimą, kiekvienam x pagal tam tikrą taisyklę priskiriamas tik vienas aibės E elementas y. Tada aibė E vadinama funkcijos $y = f(x)$ reikšmių sritimi.

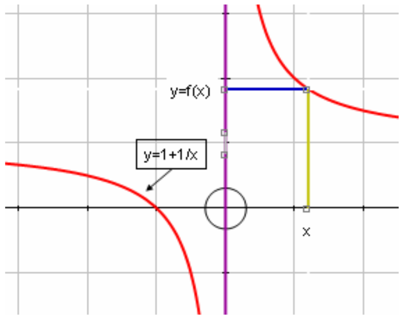
Remiantis funkcijos grafiku, nustatyti funkcijos reikšmių sritį, kaip ir apibrėžimo sritį, nėra sudėtinga. Tam reikia mokėti „skaityti“ funkcijos grafiką. Mokymo tikslams pasiekti, t. y. remiantis bendrojo lavinimo programomis „suprasti ir teisingai vartoti sąvokas: <...>, reikšmių sritis, <...>.“, galima pasitelkti mokomąsias programas, kurių pagalba mokiniams būtų lengviau suprasti mokomąją medžiagą.



pav. 26

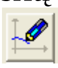


pav. 27



pav. 28

Norint parodyti funkcijos reikšmių sritį „*Dinamine geometrija*“ pirmiausia reikia žinoti analiziniu reiškiniu išreikštos funkcijos reikšmių sritį ir ją sukonstruoti.

Naudojantis „*MathematiX*“ galima nurodyti, kokiame funkcijos reikšmių intervale atvaizduoti funkciją, tačiau nubraižytai funkcijai papildomų galimybių brėžinyje parodyti reikšmių sritį nėra. Tai yra šios programos trūkumas. Tačiau programa turi priemonę *Free Drawing*, , kurio pagalba, paprastai galima pavaizduoti funkcijos reikšmių sritį (26 pav.). Tačiau toks šios programos naudojimas niekuo iš esmės nesiskiria nuo braižymo lentoje ir gal net yra sudėtingesnis.

Kadangi programoje „*Autograph*“ nėra realizuotos galimybės parodyti, surasti funkcijos reikšmių srities, todėl tomis pačiomis priemonėmis, kuriomis galima sukonstruoti ir funkcijos apibrėžimo sritį galima sukonstruoti ir funkcijos reikšmių sritį. Brėžinyje vaizduojamas galimas būdas funkcijos reikšmių sričiai rasti, naudojantis „*Autograph*“ galimybėmis. Sukonstruojamos taško *A* projekcijos į *Ox* ir *Oy* ašis. Tada taškui *C* pasirenkama komanda palikti pėdsaką (*Trace point*). Tempiant tašką *B* taškas *C* paliks žymę, kuri reikš funkcijos reikšmę atitinkame funkcijos apibrėžimo srities taške. Taigi viena iš ypatybių mokyt(is) funkcijos reikšmių srities sąvokos naudojantis šiomis kompiuterinėmis priemonėmis yra ta, kad mokinys vaizdžiai gali stebėti, pats dinamiškai tirti, kokias reikšmes funkcija įgyja (neįgyja) jos apibrėžimo srities taškuose. Brėžiniai gali būti paties kuriami ar mokytojo sukurti.

3.5.3 Monotoniškumas

Sakykime, intervalas (a; b) priklauso funkcijos f(x) apibrėžimo sričiai. Tada funkcija f(x) vadinama:

1. *Didėjančia intervale (a; b), jeigu iš nelygybės $x_1 < x_2$ išplaukia nelygybė $f(x_1) < f(x_2)$. $(x_1, x_2 \in (a; b))$.*
2. *Jeigu iš nelygybės $x_1 < x_2$ išplaukia nelygybė $f(x_1) > f(x_2)$, tai funkcija f(x) vadinama mažėjančia intervale (a; b).*

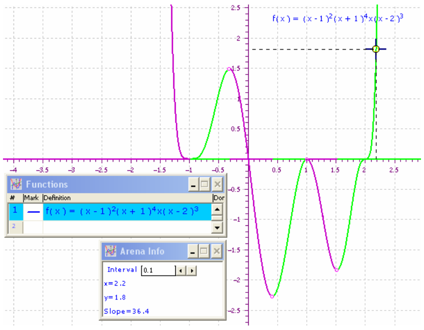
3. *Jeigu iš nelygybės $x_1 < x_2$ išplaukia nelygybė $f(x_1) \leq f(x_2)$, tai funkcija vadinama nemažėjančia.*
4. *Jeigu iš nelygybės $x_1 < x_2$ išplaukia nelygybė $f(x_1) \geq f(x_2)$, tai funkcija $f(x)$ vadinama didėjančia.*

Monotoninė funkcija – kuriame nors intervale tik didėjanti (nemažėjanti) arba tik mažėjanti (nedidėjanti) funkcija.

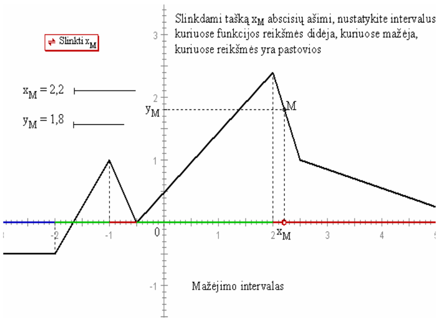
Būtinasis požymis. *Jei turinti išvestinę funkcija $f(x)$ intervale (a, b) yra didėjanti, tai jos išvestinė tame intervale teigiama, t.y. $f'(x)>0$; jei ši funkcija intervale (a, b) yra mažėjanti, tai jos išvestinė tame intervale yra neigiama: $f'(x)<0$.*

Pakankamasis požymis. *Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė intervale (a, b) teigiama ($f'(x) > 0$), tai šiame intervale funkcija yra didėjanti; jei funkcijos išvestinė intervale (a, b) neigiama ($f'(x) < 0$), tai šiame intervale funkcija yra mažėjanti.*

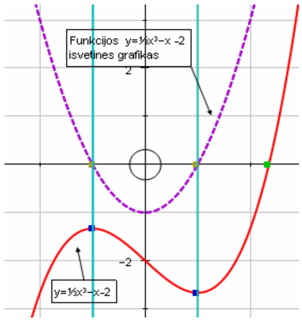
Kiekvienos funkcijos apibrėžimo sritį galima padalinti į keletą intervalų, kurių kiekviename funkcija yra arba didėjanti (nemažėjanti), arba mažėjanti (nedidėjanti), t. y. tokie intervalai vadinami atitinkamai *funkcijos didėjimo* arba *mažėjimo intervalais*, kitaip tariant, *funkcijos monotoniškumo intervalais*. Turint funkcijos grafiką, šiuos intervalus nustatyti labai paprasta.



pav. 29



pav. 30



pav. 31

„Dinaminė geometrija" neturi specialių galimybių funkcijos didėjimui ar mažėjimui vaizduoti. Tačiau vartotojas naudodamasis pagrindinėmis priemonėmis bet kuriam grafikui gali nubraižyti monotoniškumo intervalus. Ant brėžinyje (30 pav.) sukonstruotos funkcijos grafiko sukuriamas taškas *M*. Jį tempiant, keičiasi ir funkcijos argumento ir funkcijos reikšmės – greta brėžinio sukonstruotos slinkties juostos rodo šių reikšmių didėjimą (mažėjimą, pastovumą). Remiantis aukščiau pateiktais apibrėžimais brėžinyje vizualiai parodomi (skirtingomis spalvomis pažymimi) funkcijos monotoniškumo intervalai.

Programa „*MathematiX*" turi specialią komandą *Function Analysis...*, kurią pasirinkus atveriamas dialogo langas, kuriame galima pažymėti, ar rodyti monotoniškumo intervalus, ar ne. Šios programos taikymo šiai temai mokyti(is) pavyzdys galėtų būti: nubraižomas funkcijos grafikas. Tada žymeklį susiejus su grafiku, tiriamas šios funkcijos reikšmių didėjimas bei mažėjimas – informacijos lange (*Arena Info*) rodomos žymeklio padėtį nusakančios koordinatės. Žymekliui slenkant funkcijos grafiku iš kairės į dešinę, įsitikinama, kad argumentui didėjant funkcijos reikšmės didėja arba mažėja. Tada pasirinkus minėtąją programą pasirenkama rodyti funkcijos grafiko dalis, kuriose funkcija mažėja ir atitinkamus monotoniškumo intervalus (29 pav.).

Funkcijos monotoniškumui tirti programa „*Autograph*" specialių priemonių neturi. Tačiau nubraižius funkcijos grafiką ir ant jo sukonstravus tašką, galima dinamiškai pavaizduoti funkcijos reikšmių kitimą – tempiant sukonstruotąjį tašką grafiku, lange *Status Box* atvaizduojamas argumento ir funkcijos reikšmių kitimas. Kadangi ši programa turi žymiai mažiau ir ne tokių lanksčių priemonių papildomiems objektams konstruoti, todėl ši programa nėra tinkama šiai temai mokyti. Kai funkcijos *f(x)* išraiška yra sudėtingesnė, grafiką patogu braižyti naudojantis kompiuterine programa. Tereikia įvesti funkcijų f(x) ir f'(x) išraiškas ir vienoje koordinačių plokštumoje bus nubraižomi šių funkcijų grafikai (31 pav.). Iš f‘(x) grafiko galima nesunkiai nustatyti funkcijos didėjimo ir mažėjimo intervalus, taip pat nurodyti argumento reikšmes su kuriomis *f‘(x) = 0* arba *f’(x)* neegzistuoja, o f(x) yra tolydi.

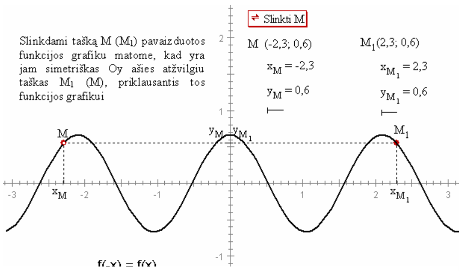
3.5.4 Lyginumas

Tiriant ir braižant funkcijų grafikus, nagrinėjama, ar funkcija lyginė, nelyginė, ar nei lyginė, nei nelyginė. Funkcijos grafikas gal būti:

1. simetriškas *Oy* ašies atžvilgiu. *Funkcija f(x) apibrėžta aibėje X, vadinama lygine, jei kiekvienam $x \in X$ tenkinamos sąlygos: $-x \in X$ ir $f(-x) = f(x)$.* Teisingas ir atvirkščias teiginys, *jei funkcijos f(x) grafikas yra simetriškas ordinačių ašies atžvilgiu, tai funkcija f(x) yra lyginė.*
   Jeigu dvi lyginės funkcijos turi vieną ir tą pačią apibrėžimo sritį, tai jų suma, skirtumas ir sandauga taip pat bus lyginė funkcija.
2. simetriškas koordinačių pradžios taško *O* atžvilgiu. *Funkcija f(x) apibrėžta aibėje X, vadinama nelygine, jei kiekvienam $x \in X$ tenkinamos sąlygos: $-x \in X$ ir $f(-x) = -f(x)$.* Teisingas ir atvirkščias teiginys, *jei funkcijos f(x) grafikas yra simetriškas koordinačių pradžios taško atžvilgiu, tai funkcija f(x) yra nelyginė.*
   Jeigu dvi nelyginės funkcijos *f(x)* ir *g(x)* turi vieną ir tą pačią apibrėžimo sritį *X*, tai funkcijos $f(x) + g(x)$ ir $f(x) - g(x)$ taip pat yra nelyginės, o funkcija $f(x) \cdot g(x)$ – lyginė.
3. Nesimetriškas nei Oy ašies, nei taško O atžvilgiu.

Lyginių ir nelyginių funkcijų apibrėžimo sritis yra simetriška koordinačių pradžios atžvilgiu.

Mano nuomone, šiai temai dėstyti geriausiai tiktų „*Dinaminė geometrija*“. Tarkime, 32 pav. pavaizduotu grafiku reikia nustatyti nubraižytosios funkcijos lyginumą. Slinkdami tašką *M* (M_1) pavaizduotos funkcijos grafiku matome, kad yra jam simetriškas *Oy* ašies atžvilgiu taškas M_1*(M)*, priklausantis tos funkcijos grafikui, t. y. kiekvienam $x \in X$ tenkinamos sąlygos: $-x \in X$ ir $f(-x) = f(x)$. Nubraižyti tokį ar panašų brėžinį „*MathematiX*“ neturi galimybių. „*Autograph*“ sukurtas brėžinys nebūtų toks interaktyvus, kaip kad sukurtas „*Dinamine geometrija*“.

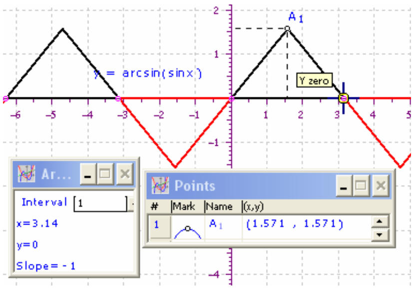


pav. 32

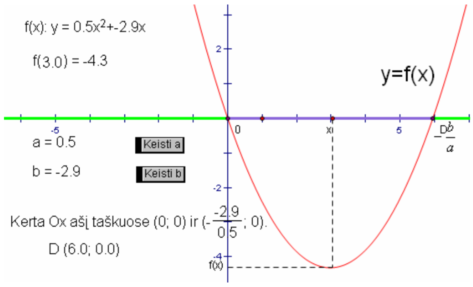
3.5.5 Funkcijos nuliai ir pastovaus ženklo intervalai

Funkcijos $y = f(x)$ argumento reikšmėms „perbėgant“ funkcijos apibrėžimo sritį, funkcijos reikšmės gali būti tiek teigiamos, tiek neigiamos, tiek lygios nuliui.

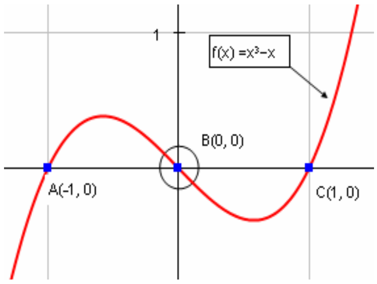
Funkcijos f(x) nuliai – argumento reikšmės su kuriomis funkcijos reikšmė lygi nuliu, t. y. $f(x) = 0$. Tos reikšmės funkcijos apibrėžimo sritį padalija į keletą intervalų. Jei funkcijos reikšmių ženklas tuose intervaluose nesikeičia, tai jie vadinami *funkcijos pastovaus ženklo intervalais*. Kai funkcijos reikšmės yra teigiamos ($f(x)>0$), funkcijos grafikas yra virš abscisių ašies, kai neigiamos ($f(x)<0$) – žemiau abscisių ašies. Funkcijos nuliai ($f(x) = 0$) yra ant abscisių ašies, t.y. sankirtos arba funkcijos grafiko lietimosi su abscisių ašimi taškai. Ieškant funkcijų pastovaus ženklo intervalų, randami funkcijos nuliai ir trūkio taškai, todėl, kad funkcija ženklą keičia funkcijos nulių arba trūkio taškuose.



pav. 33



pav. 34



pav. 35

Šiai temai mokyti(is), mano nuomone, geriausiai tinka „*MathematiX*“. Programa turi galimybę atvaizduoti funkcijos nulius ir funkcijos pastovaus ženklo intervalus (33 pav.). Ypatingai programa gali būti naudinga moksleiviams mokantis individualiai. Įrašius funkcijos formulę, nubraižomas funkcijos grafikas. Pasirinkus jį ir kontekstiniame meniu pasirinkus komandas *Function Analysis->Display domains->Function sign*, programa rezultatus parodo ekrane. Taigi uždavinį išsprendus sąsiuvinyje, atsakymą galima pasitikrinti naudojantis šia programa. Tokį pat metodą galima taikyti ir pratybų metu, kai klasėje yra vienas kompiuteris.

Funkcijos nuliams rasti, galima naudoti ir programą „*Autograph*“. Ši programa nebraižo funkcijos pastovaus ženklo intervalų, tačiau geba išspręsti lygtį $f(x) = 0$, t. y. surasti taškus, kuriuose funkcijos reikšmės lygios nuliui (35 pav.).

„*Dinaminė geometrija*“ taip pat gali būti naudojama rasti funkcijos nuliams rasti, tačiau juos reikės konstruoti, ir konstruoti kiekvienai funkcijai iš naujo. Todėl ši programa geriausiai tiktų tam tikrai teorinei medžiagai demonstruoti, nagrinėjant iš anksto sukurtus kelis brėžinius. Taip mokytojui paruošus mokomuosius brėžinius, galima juos pateikti mokiniams kaip papildomą medžiagą šiai temai suprasti.

3.5.6 Funkcijos ekstremumai. Didžiausia ir mažiausia funkcijos reikšmė

Funkcijos $f(x)$ reikšmė $f(x_0)$ vadinama tos funkcijos minimumu, jei yra tokia taško x_0, δ aplinka (t.y. intervalas $(x_0-\delta\ ;\ x_0+\delta)$, $\delta>0$)), kad visi $x \neq x_0$ iš tos aplinkos tenkina nelygybę $f(x_0) < f(x)$. Taškas x_0 vadinamas funkcijos minimumo tašku.

Funkcijos $f(x)$ reikšmė $f(x_0)$ vadinama tos funkcijos maksimumu, jei yra tokia taško x_0, δ aplinka (t.y. intervalas $(x_0-\delta\ ;\ x_0+\delta)$, $\delta>0$)), kad visi $x \neq x_0$ iš tos aplinkos tenkina nelygybę $f(x_0) > f(x)$.). Taškas x_0 vadinamas funkcijos maksimumo tašku.

Funkcijos maksimumai ir minimumai vadinami *funkcijos ekstremumais*, o tos argumento reikšmės, kurias atitinka funkcijos maksimumas ar minimumas – *ekstremumo taškais*.

Būtinoji ekstremumo sąlyga. *Jei diferencijuojama funkcija $f(x)$ taške x_0 turi ekstremumą, tai $f'(x_0) = 0$.*

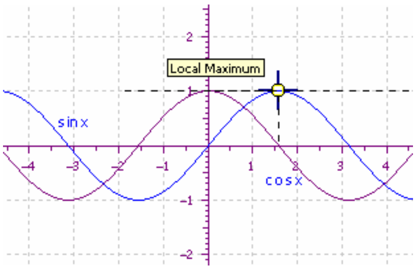
Taškai, kuriuose funkcijos išvestinė lygi nuliui arba neegzistuoja, vadinami tos funkcijos kritiniais taškais.

Pakankamoji ekstremumo sąlyga. *Jei funkcijos $f(x)$ išvestinė $f'(x)$ keičia ženklą, kai x didėdamas pereina į kritinį tašką x_0, tai šiame taške funkcija turi ekstremumą: maksimumą, jeigu $f'(x)$ keičia ženklą iš pliuso į minusą; minimumą, jeigu $f'(x)$ keičia ženklą iš minuso į pliusą.*

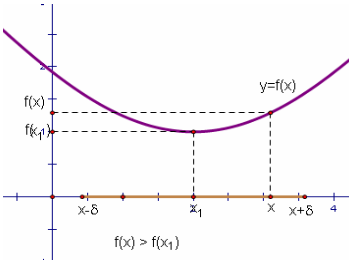
Mokantis šią temą dažnai sprendžiamas didžiausios ir mažiausios funkcijos reikšmės uždarame intervale radimo uždavinys. Toms reikšmėms rasti pirmiausia ieškoma kritinių taškų x_i, priklausančių intervalui $[a,\ b]$. *Uždarame intervale tolydi funkcija visada turi mažiausią ir didžiausią reikšmę* ir šiame intervale *visos* funkcijos reikšmės tenkina nelygybę $m \leq f(x) \leq M$, čia m – funkcijos minimumas intervale $[a, b]$, M – funkcijos maksimumas intervale $[a, b]$.

Tiriant funkcijas ir braižant jų grafikus reikia rasti funkcijos minimumus ir maksimumus. Analiziniams skaičiavimams atlikti nėra skirta nė viena iš nagrinėjamų kompiuterinių programų.

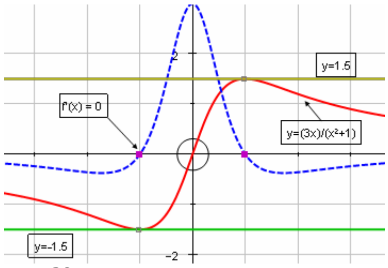
Tačiau pateikiant reikiamų sąvokų galimą geometrinę interpretaciją, gautiems rezultatams patikrinti gali pagelbėti kompiuterinės priemonės.



pav. 36



pav. 37



pav. 38

Programos „*MathematiX*“ (36 pav.) ir „*Autograph*“ (38 pav.) turi labai panašias funkcijų ekstremumams tyrinėti galimybes. Pavyzdžiui, nubraižius funkcijos ir jos išvestinės grafikus, galima pateikti šios temos pagrindinius dalykus naudojant brėžinius. Pateiktos funkcijos apibrėžtos visoje realiųjų skaičių aibėje. Randame jų išvestines ir jų grafikus nubraižome. Pastebime, kad išvestinės egzistuoja visuose taškuose. Tada randame takus, kuriuose $f'(x) = 0$. Kadangi pereidamos šiuos taškus funkcijos išvestinės reikšmės keičia ženklą iš minuso į pliusą (iš pliuso į minimumą), tai gauname minimumo tašką (maksimumo tašką).

„*Dinamine geometrija*“ sukurtame brėžinyje (37 pav.) iliustruojamas sąvokos „funkcijos minimumas“ mokymas pasinaudojant šia programa. Funkcijos apibrėžimo srityje sukuriamas taškas x_1. Imama jo aplinka $\delta > 0$ (sukonstruojamas intervalas). Imamas taškas x iš aplinkos $(x_0-\delta\,;\ x_0+\delta)$. Tada keičiant taško x_1 padėtį ir δ daroma išvada, kad $f(x_0) < f(x)$. Vadinasi, pagal funkcijos minimumo apibrėžimą, taškas x_1 yra funkcijos minimumo taškas.

3.5.7 Periodiškumas

Daugelis svarbių gamtos ir technikos procesų yra periodiniai.

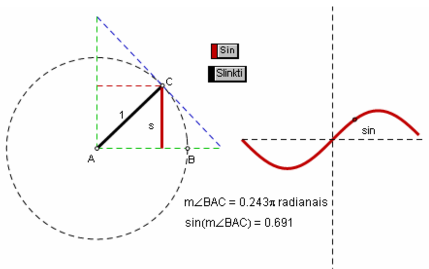
Funkcija f(x), apibrėžta aibėje X, vadinama periodine, jeigu egzistuoja toks skaičius $T > 0$, kad kiekvienam $x \in X$ tenkinamos sąlygos:

$$x + T \in X,\ x - T \in X \text{ ir } f(x+T) = f(x-T) = f(x).$$

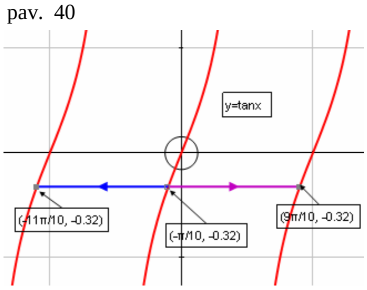
Skaičius T vadinamas funkcijos f(x), $x \in X$ periodu.

Jei dvi periodinės funkcijos $f(x)$ ir $g(x)$, $x \in X$, turi vieną ir tą patį periodą T, tai tų funkcijų suma, skirtumas ir sandauga taip pat bus periodinės funkcijos ir T bus jų periodas. Jei T yra funkcijos periodas, tai ir nT, $n \in N$, taip pat bus tos funkcijos periodas.

Ne kiekviena periodinė funkcija turi mažiausią periodą



pav. 40



pav. 39

„*Dinamine geometrija*“ sukurtu brėžiniu galima aiškinti trigonometrinių funkcijų periodiškumą tokiu būdu. Brėžinyje (39 pav.) pateikiamas pavyzdys funkcijos $y = \sin x$ periodui nustatyti. Koordinačių plokštumoje nubraižomas vienetinis apskritimas, kurio centras yra bet kuriame abscisių ašies taške, pvz., taške A. Visus vienetinio apskritimo taškus pavaizduojame tam tikra kreive, t.y. sinusoide – funkcijos $y = \sin x$ grafiku. Tašką C tempiant, slenka ir taškas *sin* esantis ant sinusoidės. Tada remiantis sukonstruotu brėžiniu, spindulį AC gauname pasukę pradinį spindulį AB kampu $\angle BAC$ prieš laikrodžio rodyklę. Taškui C judant (tašką C tempiame arba animuojame paspausdami mygtuką *sin*) apskritimo lanku stebime, kad spindulį *AC* gausime taip pat, jei pradinį spindulį *AB* pasuksime kampu $2\pi + \angle BAC$, $4\pi + \angle BAC$ ir t. t., t.y. kampu *x*, kuris nuo $\angle BAC$ skirsis sveikuoju apsisukimų skaičiumi, t. y., x = $2\pi n + \angle BAC$; čia $n \in N$. Todėl daroma išvada, kad sin ($2\pi n + \angle BAC$) = sin($\angle BAC$).

Naudojantis *„Autograph“* galima iliustruoti, kad funkcijai *f(x)=tgx* egzistuoja skaičius $T = \pi$, kad kiekvienam $x \in X$ tenkinamos sąlygos: $x + \pi \in X$, $x - \pi \in X$ ir $f(x+\pi) = f(x-\pi) = f(x)$. Brėžinyje tempiant ant viduriniosios funkcijos grafiko sukonstruotą tašką, galima įsitikinti, kad tangento funkcija yra periodinė ir jos mažiausias periodas lygus π (40 pav.).

3.5.8 Funkcijos grafiko asimptotės

Nagrinėjant funkcijas ir jų grafikų braižymą svarbu išsiaiškinti jos elgesį trūkio taškų aplinkoje, taškuose, kur ji yra neapibrėžta, ir kaip ji elgiasi, kai $x \to +\infty$ ir $x \to -\infty$.

Tegu funkcija f(x) apibrėžta begaliniame intervale (a; $+\infty$). Tiesė y = kx + b vadinama funkcijos y = f(x) grafiko asimptote, kai $x \to +\infty$, jei

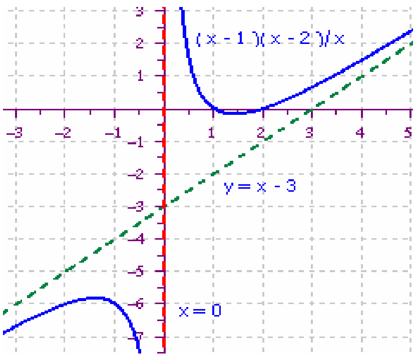
$$\lim_{x \to +\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Tiesė y = kx + b vadinama funkcijos y = f(x), $x \in (-\infty; b)$ grafiko asimptote, kai $x \to -\infty$, jei

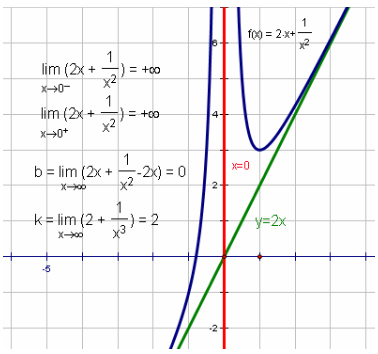
$$\lim_{x \to -\infty} (f(x) - (kx + b)) = 0.$$

Tegu funkcija f(x) apibrėžta intervale (a; b). Jei $f(x) \to \infty$, kai $x \to a + 0$, tai tiesė x = a vadinama funkcijos grafiko vertikalia asimptote, kai $x \to a$ iš dešinės.
Jei $f(x) \to \infty$, kai $x \to b - 0$, tai tiesė x = b vadinama funkcijos y = f(x) grafiko vertikalia asimptote, kai $x \to b$ iš kairės.
Tegu tiesė y = kx+b yra funkcijos y = f(x) grafiko asimptotė, kai $x \to \infty$, tada $\lim_{x \to \infty} (f(x) - kx) = b$, o

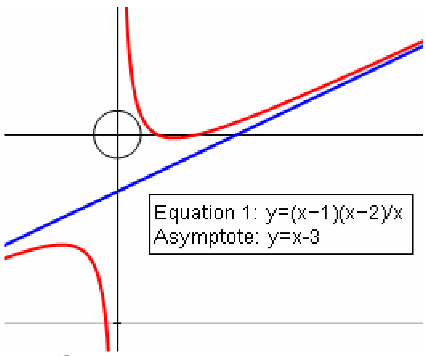
$\lim_{x \to \infty} \frac{f(x)}{x} = k$. Jeigu k = 0, tai tiesė y = b vadinama horizontaliąja asimptote.



pav. 41



pav. 42



pav. 43

Norint programa *„Dinaminė geometrija“* pavaizduoti funkcijos grafiko asimptotes pirmiausia jas reikia apskaičiuoti ir po to pačiam jas nubraižyti. Tarkim, atlikus reikiamą analizę, t. y. apskaičiavus taško $x = 0$ aplinkoje (nes taške $x = 0$ funkcija neegzistuoja) vienpuses ribas, gaunama, kad tiesė $x = 0$ yra vertikalioji grafiko asimptotė. Tada nagrinėjama, ar funkcija turi pasvirųjų asimptočių išreiškiamų lygtimi $y = kx + b$. Paaiškėja, kad tiesė $y = 2x$ yra pasviroji grafiko asimptotė. Gautus rezultatus galima atspindėti bet kuria iš nagrinėjamų programų. Tačiau priešingai nei *„Dinaminėje geometrijoje“* programose *„MathematiX“* ir *„Autograph“* galima nurodyti, kad būtų tiesiog parodomos nubraižytojo funkcijos grafiko asimptotės. *„MathematiX“* dialogo lange *Function analysis...* galima nurodyti, kokias asimptotes rodyti: vertikalias, horizontalias ar pasvirąsias. Jei funkcija neturi, pvz., horizontalių asimptočių, tai programa neleidžia jų pasirinkti. (41 pav.) Programoje „*Autograph*“ pasirinkus komandą „*Asymptote*“ programa nurodo tik pasvirąsias funkcijos grafiko asimptotes (43 pav.).

3.6 Diferencialinis skaičiavimas

Vidurinėje mokykloje pradedama mokyti matematinės analizės pagrindų. Susiduriama su funkcijos ribos, tolydumo, išvestinės sąvokomis. Bendrojoje Vilniaus kolegijos matematikos programos turinyje su funkcijų išvestinėmis susijusių temų yra daugiau – nagrinėjamos kelių kintamųjų funkcijos dalinės išvestinės, neišreikštinės funkcijos išvestinė, funkcijos diferencialas, jo geometrinė prasmė, kelių kintamųjų pilnas diferencialas. Temų, kurioms dėstyti ir mokytis būtų naudinga taikyti pasirinktąsias kompiuterines, medžiaga pateikiama žemiau pateiktuose skyreliuose.

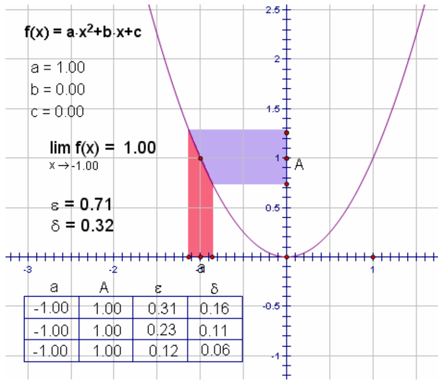
3.6.1 Riba

Funkcijos riba, kai x –> ∞
Skaičius A vadinamas funkcijos y = f(x) riba, kai x –> ∞*, jei bet kurį kiek norima mažą teigiamą skaičių* ε *atitinka toks skaičius* δ*, kad visoms x reikšmėms, didesnėms už* δ*, teisinga nelygybė |f(x) – A| <* ε*. Tuomet* $\lim\limits_{x->\infty} f(x) = A$.

Funkcijos riba, kai x –> a
Skaičius A vadinamas funkcijos y = f(x) riba, kai x –>a, jei bet kuriam kiek norima mažam teigiamam skaičiui ε *galima rasti tokį* δ*, kad visiems x, kurie tenkina nelygybę 0 < |x – a| <* δ *yra teisinga nelygybė |f(x) – A| <* ε*. Tuomet* $\lim\limits_{x->a} f(x) = A$.

Šiame brėžinyje (44 pav.) vaizduojama kaip funkcijos ribos apibrėžimas gali būti tiriamas naudojantis dinaminėmis programos „*Dinaminės geometrijos*“ galimybėmis. Tyrimo tikslas – duotai antrojo laipsnio funkcijai $f(x) = ax^2 + bx + c$ ir duotoms reikšmėms *a, A* ir ε, surasti skaičių δ, tenkinantį apibrėžimo sąlygas.

Antrojo laipsnio funkcijos koeficientai *a, b,* ir *c* nenurodomi, nes brėžinių lape juos galima keisti. Paprastumo dėlei pasirinkta: *a = 1, b = 0, c = 0.* Ordinačių ašyje atidėtas intervalas (*A* - ε; *A* + ε). Kaip matyti paveikslėlyje, parinkta taško a δ-aplinka atitinka taško *A* ε-aplinką, t.y. mėlynojo keturkampio kraštinė yra lygi raudonai ordinačių ašyje pažymėtajam intervalui. Pirmiausia, stebima, kaip kintantis skaičius ε, valdomas raudona ε juosta, apibrėžia taško *A* ε-aplinką (raudoną intervalą) *y*-ašyje. Paskui stebima, kaip kintantis skaičius δ, apibrėžia taško *a* δ-aplinką *x*-ašyje. Ši aplinka vaizduojama vertikalaus raudonojo keturkampio kraštine, esančia *x*-ašyje (vėliau vadinama pločiu). Vertikalaus raudonojo daugiakampio plotis vaizduoja visas galimas taško *a* δ-aplinkos reikšmes *x*. Horizontalaus mėlynojo daugiakampio plotis vaizduoja visas galimas reikšmes *f(x)*, apibrėžtas tomis *x* reikšmėmis. Raudona atkarpa, esanti *y*-ašyje, vaizduoja visų taško *A* ε-aplinkos reikšmių *f(x)* intervalą. Skaičių ε sumažinus galima pažiūrėti, ar galima jam parinkti skaičių δ, atitinkantį šį naują skaičių ε. Pasirinkus, gauti rezultatai rodomi lentelėje.



pav. 44

Atsižvelgiant į tai, kad „*Dinaminė geometrija*“ pasižymi modeliavimo ir eksperimentavimo programoms būdingomis savybėmis, ja galima pasinaudoti funkcijos ribos sąvokai mokyti(is). „*MathematiX*“ neturi ne tik galimybių dinaminiams brėžiniams konstruoti, bet ir neturi komandų funkcijos ribai skaičiuoti, rasti ir pan. „*Autograph*“ brėžinių konstravimo atžvilgiu turi ribotas galimybes:

programoje yra numatytos konkrečios komandos vienam ar kitam objektui sukurti, tačiau nėra priemonių, kuriomis naudodamasis vartotojas sukonstruotų jo įsivaizduojamą brėžinį. Sukonstravus panašius brėžinius galima būtų vaizdžiai pateikti ribos, kai *x* artėja į begalybę ir kolegijoje dėstomas nykstamų ir neaprėžtai didėjančių funkcijų sąvokas.

3.6.2 Tolydumas

Jei funkcijos f(x) riba, kai $x \to x_0$, sutampa su funkcijos reikšme taške x_0, t. y. $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$, *tai funkcija f(x) vadinama tolydžia taške x_0.*

Funkcija y = f(x) vadinama tolydžia taške x_0 iš kairės, jei $f(x_0) = f(x_0 - 0) = \lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x)$, *ir tolydžia iš dešinės, jei* $f(x_0) = f(x_0 + 0) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Funkcija yra tolydi intervale [a; b], jeigu ji tolydi kiekviename to intervalo taške. Taške a tolydi iš dešinės, o taške b – iš kairės.

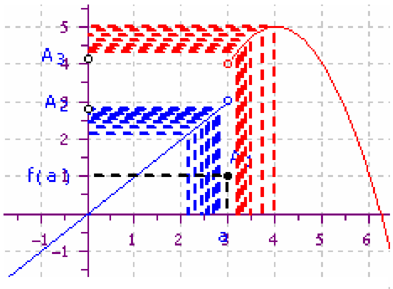
Jeigu funkcijai y = f(x) lygybė $\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = f(x_0)$ *yra neteisinga, tai funkcija taške $x = x_0$ turi trūkį.*

Taškas x_0 vadinamas funkcijos y = f(x) pirmojo tipo trūkio tašku, jeigu jame egzistuoja baigtinės ribos iš kairės $f(x_0 - 0)$ ir iš dešinės $f(x_0 + 0)$, bet jos nėra tarpusavyje lygios: $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) \neq \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x)$.

Taškas x_0 vadinamas funkcijos y = f(x) antrojo tipo trūkio tašku, jeigu bent viena vienpusė funkcijos riba tame taške neegzistuoja arba yra begalinė.

Taškas x_0 vadinamas funkcijos y = f(x) pašalinamuoju trūkiu, jei $\lim\limits_{x \to x_0 - 0} f(x) = \lim\limits_{x \to x_0 + 0} f(x) \neq f(x_0)$.

Brėžinyje, kuris sukonstruotas naudojantis programa „*MathematiX*“ pateikiamas funkcijos turinčios pirmojo tipo trūkį pavyzdys (45 pav.). Naudojantis šios programos galimybėmis galima pateikti ribos iš dešinės ir iš kairės geometrinę interpretaciją. Artėjant prie taško *a* iš kairės (pasirinkus komandą *Lock Snap* ir slenkant grafiku), riba lygi 3, o artėjant iš dešinės – lygi 4. „*Dinamine geometrija*“ tokiam ar panašiam brėžiniui sukurti reikės žymiai daugiau laiko ir vartotojo naudojimosi šia programa žinių. Nors mokykliniuose vadovėliuose ir pateikiamas tolydžiosios funkcijos apibrėžimas, tačiau svarbiausia, kad mokiniai turėtų tolydžios bei netolydžios funkcijos vaizdinį, galėtų pateikti pavyzdžių. Kolegijoje pasitelkus ribas tolydumo sąvoka formalizuojama, tačiau tikslingai sukūrus dinaminius brėžinius, studentams būtų paprasčiau suprasti šias sąvokas.



pav. 45

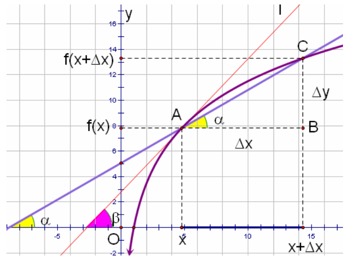
3.6.3 Išvestinė ir diferencialas

Funkcijos y = f(x) išvestine (x atžvilgiu) taške x_0 vadinama tos funkcijos pokyčio $\Delta y = f(x_0+\Delta x) - f(x_0)$ ir jį atitinkančio argumento pokyčio Δx santykio riba, kai $\Delta x \to 0$, jei ši riba egzistuoja ir yra baigtinė:

$$y' = f'(x_0) = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim_{\Delta x \to 0} \frac{f(x_0 + \Delta x) - f(x_0)}{\Delta x}.$$

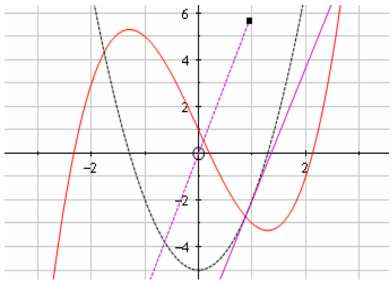
Funkcijos y = f(x) diferencialu vadinama šios funkcijos išvestinės ir argumento pokyčio sandauga $dy = f'(x)dx$.

Naudojantis „*Dinamine geometrija*“ galima būtų mokyti(is) suprasti funkcijos išvestinės geometrinę prasmę. Šia programa galima vaizdžiai ir dinamiškai pavaizduoti ir paaiškinti šias sąvokas: argumento ir funkcijos pokytis, diferencialas, taip pat parodyti, kaip susijusios tiesės krypties koeficiento, išvestinės ir liestinės sąvokos. Kitos darbe minimos programos taip pat yra dinamiškos, tačiau jos turi („*Autograph*“) arba visai neturi („*MathematiX*“) panašiam brėžiniui sukonstruoti reikalingų priemonių.



pav. 46

Taigi santykis $\frac{\Delta y}{\Delta x}$ yra stačiojo trikampio *ABC* kampo α tangentas: tg $\alpha = \frac{\Delta y}{\Delta x}$. Nykstant pokyčiui Δx ($\Delta x \to 0$), taškas *C* slenka funkcijos grafiko kreive artėdamas prie taško *A*. Kirstinė *AC* artėja prie liestinės *l*, išvestos taške *A*, taigi $\alpha \to \beta$. Vadinasi funkcijos išvestinė *f’(x)* yra lygi kampo, kurį sudaro grafiko liestinė taške *(x; f(x))* su *Ox* ašimi, tangentui: $f'(x) = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \frac{\Delta y}{\Delta x} = \lim\limits_{\Delta x \to 0} \operatorname{tg}\alpha = \operatorname{tg}\beta = k$ (*k* funkcijos *y = f(x)* grafiko liestinės taške *A(x; f(x))* krypties koeficientas) (46 pav.).



pav. 47

Programa „*Autograph*“ sukurtame brėžinyje (47 pav.) demonstruojami trečiojo laipsnio polinomo išvestinių grafikų geometrinė interpretacija. Brėžinyje vaizduojama, kaip susiję s pradinės funkcijos grafikas su tos funkcijos išvestinės grafiku. Pasirinkus komandą, kuri braižo funkcijos išvestinės grafiką vizualiai demonstruojamas polinomo diferencijavimas: išdiferencijavus trečiojo laipsnio polinomą gaunama antrojo laipsnio polinomas – parabolė, dar kartą išdiferencijavus, t.y. suradus antrąją išvestinę gaunama tiesė, suradus trečiojo laipsnio išvestinę gaunam konstanta, kuri geometriškai reiškia tiesę lygiagrečią *Ox* ašiai. Šio brėžinio naudojimas atskleidžia vidinius matematikos ryšius: algebra susiejama su geometrija.

3.7 Integralinis skaičiavimas

Vidurinėje mokykloje integralinio skaičiavimo mokomi tik moksleiviai pasirinkę išplėstinį matematikos kursą. Nagrinėjant šią temą mokykliniame matematikos kurse siekiama, kad besimokantieji mokėtų apibrėžti ir paaiškinti pirmykštės funkcijos, neapibrėžtinio, apibrėžtinio integralo sąvokas. Pagrindinis dėmesys skiriamas taikyti šią teoriją praktiniams bei matematiniams uždaviniams spręsti. Kolegijoje ši tema dėstoma žymiai plačiau: nagrinėjami netiesioginiai integralai, įvairūs integralų skaičiavimo metodai, jų taikymai įvairiems uždaviniams spręsti.

Nagrinėjant neapibrėžtinius integralus, neapibrėžtinio integralo geometrinę interpretaciją moksleiviams turėtų būti nesudėtinga suprasti, jei jie gerai moka funkcijų grafikų transformacijas. Nagrinėjant šią temą tiek mokykloje, tiek kolegijoje kompiuterinės priemonės manau, kad yra netaikytinos, nes pagrindinis dėmesys skiriamas mokytis suintegruoti, pvz., kolegijoje taikant įvairius neapibrėžtinio integralo skaičiavimo metodus.

Iš mokykloje dėstomų apie apibrėžtinius integralus temų, mano nuomone, kompiuterinės priemonės taikytinos dėstant apibrėžtinio integralo sąvoką, iliustruojant jo geometrinę prasmę, kai kuriems taikymo uždaviniams spręsti, kolegijoje mokant skaičiuoti apibrėžtinį integralą trapecijų, stačiakampių ir parabolių metodu, taip pat kai kuriems taikymo uždaviniams spręsti. Kitos temos, pvz., netiesioginis integralas, apibrėžtinio integralo skaičiavimas kintamojo keitimo, integravimo dalimis metodai reikalauja suprasti ir įsisavinti tam tikrus sprendimo algoritmus, taisykles, ir šiais atvejais pasirinktosios kompiuterinės priemonės šių tikslų įgyvendinti nepadės. Todėl šiame skyrelyje pateiksiu bendrų tiek mokykloje, tiek kolegijoje temų susistemintą medžiagą ir iliustruosiu jų mokymą taikant kompiuterines priemones.

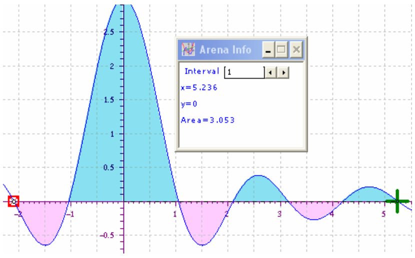
3.7.1 Apibrėžtinis integralas

Tarkime uždarame intervale *[a, b]* apibrėžta tolydi funkcija *y = f(x)*. Taškais $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ šis intervalas padalijamas į *n* intervalų. Pažymima $a = x_0$ ir $b = x_n$. Tada dalinių intervalų ilgiai yra atitinkamai $\Delta x_1 = x_1 - x_0$, $\Delta x_2 = x_2 - x_1, \ldots,$ $\Delta x_n = x_n - x_{n-1}$. Kiekviename daliniame intervale $[x_{i-1}; x_i]$ laisvai pasirinkę po vieną tašką c_i, $x_{i-1} \le c_i \le x_i$, $i = 1, 2, \ldots, n$, sudarykime sumą

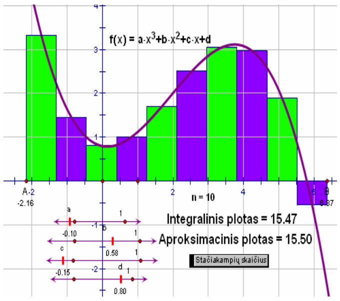
S = $f(c_1)\Delta x_1 + f(c_2)\Delta x_2 + f(c_3)\Delta x_3 + \ldots + f(c_n)\Delta x_n = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i$, kuri vadinama integraline suma.

Jei egzistuoja $\lim_{\lambda \to 0} S$, *čia* $\lambda = \max_{1 \le i \le n} \Delta x_i$, *nepriklausanti nei nuo intervalo [a; b] skaidinio, nei nuo taškų* c_i *pasirinkimo, tai ši riba vadinama funkcijos apibrėžtiniu integralu intervale [a; b]. Apibrėžtinis integralas žymimas simboliu* $\int_a^b f(x)dx$. *Jei intervale [a; b] egzistuoja funkcijos y = f(x) apibrėžtinis integralas, tai sakoma, kad funkcija y = f(x) yra integruojama intervale [a; b].*

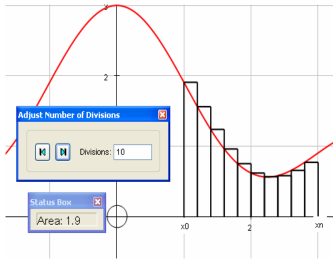
Apibrėžtiniui integralui rasti taikoma *Niutono ir Leibnico* formulė: $\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a)$. Kitaip tariant, ieškant funkcijos *y = f(x)* apibrėžtinį integralą intervale *[a; b]* randamas šios funkcijos neapibrėžtinis integralas. Todėl sakoma, kad Niutono ir Leibnico formulė sieja funkcijos apibrėžtinį ir neapibrėžtinį integralus.



pav. 48



pav. 49



pav. 50

Dėstant apibrėžtinio integralo sąvoką galima pasinaudoti dinaminėmis programų „*Autograph*“ ir „*Dinaminė geometrija*“ savybėmis. 50 pav. pateikiamas „*Autograph*“ sukurtas brėžinys, kuriame dinamiškai iliustruojamas figūros, apibrėžtos paveikslėlyje matoma funkcijos kreive ir *x*-ašies atkarpa x_0x_n, kai $x_0=1$, $x_n=3$, ploto skaičiavimas. Pasirinkus kreivę ir komandą *Find Area* dialogo lange galima pasirinkti, kokiu metodu bus skaičiuojamas plotas (pavyzdyje pasirinktas stačiakampių, kurie, apskaičiavus duotos funkcijos reikšmes taškuose x_{i+1} ir x_i, sudaromi taip, kad trečioji jo viršūnė pasirinkta didesnioji funkcijos reikšmė, metodas). Nubraižomi stačiakampiai, kaip matyti paveikslėlyje. Šių stačiakampių apskaičiuotas plotas rodomas langelyje *Status Box*. Jei norima patikslinti skaičiuojamą plotą, reikia atkarpą x_0x_n padalinti į daugiau dalių ir nubrėžti stačiakampius. Pastebima, kad stačiakampių plotų suma jau mažiau skiriasi nuo tikslaus ploto, kuris gali būti apskaičiuojamas savarankiškai sąsiuviniuose. Tokiu būdu, t. y. didinant daugiakampių skaičių, galima tikslinti ieškomą plotą – naudojantis programoje sukurtu valdikliu.

Taip naudojantis šia priemone gali būti iliustruojama apibrėžtinio integralo sąvoka.

Analogiškas galimybes šiai sąvokai dėstyti suteikia ir „*Dinaminė geometrija*“, tačiau tokiam brėžiniui (49 pav.) (šiuo atveju stačiakampiai buvo sudaromi taip, kad jo kraštinė, lygiagreti x-ašiai, brėžiama per funkcijos reikšmę, atitinkančią tašką $(x_{i+1}+ x_i)/ 2d$) sukurti reikia nemažai laiko ir kūrėjo, kaip programuotojo šia programa, žinių.

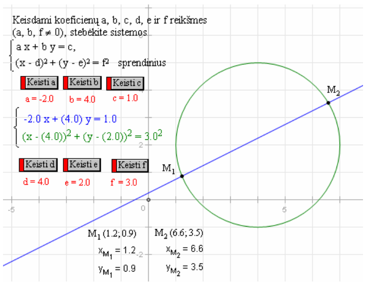
Programa „*MathematiX*“ galima vaizdžiai iliustruoti geometrinę apibrėžtinio integralo prasmę: apibrėžtinis integralas yra kreivinės trapecijos, apribotos *Ox* ašimi ir funkcijos $y = f(x)$ grafiku, kai $x \in [a, b]$, plotas (jei šiame intervale funkcijos reikšmės nėra teigiamos, tai šitokia funkcija apribotos kreivės trapecijos plotas išreiškiamas formule S = $-\int_a^b f(x)dx$). Ši programa gali apskaičiuoti integralinį plotą, kai nubraižius funkciją pasirenkama komanda *Coloring Area*. Brėžinyje pažymėjus apibrėžtinio integralo apatinį rėžį ir žymeklį tempiant iki viršutiniojo rėžio, nuspalvinamas kreivinės trapecijos plotas (48 pav.). Kai funkcijos reikšmės yra teigiamos viena spalva, kai neigiamos – kita. Tada svarbiausia, kad mokiniai suvoktų, jog šis integralas lygus visų šių skirtingai nuspalvotų plotų sumai.

3.8 Funkcijų taikymų pavyzdžiai

Vienas iš funkcijų taikymo pavyzdžių yra grafinis lygčių ir nelygybių sistemų sprendimas. Sprendžiat jas kompiuterines priemones galima taikyti keliais būdais: naudotis jau sukurtais brėžiniais vienai ar kitai temai mokyti; gautiems atsakymams patikrinti; kurti brėžinius, modeliuoti kiekvienam savarankiškai. Šiame skyrelyje pateikiami lygčių sistemos sprendimo, nelygybių sistemos sprendimo ir vieno uždavinio sprendimo naudojantis pasirinktosiomis programomis pavyzdžiai.

3.8.1 Lygčių sistemų sprendimas

„*Dinamine geometrija*“ sukonstruotame brėžinyje vaizduojama lygčių sistemos $\begin{cases} ax+by=c \\ (x-d)^2+(y-e)^2=f^2 \end{cases}$ sprendinių grafinė interpretacija. Keičiant koeficientų *a*, *b*, *c*, *d*, *e* ir *f* reikšmes galima tirti kaip nuo jų priklauso atitinkamų lygčių grafikai. Brėžinys (51 pav.) gali būti taikomas tiek klasėje, tiek mokantis savarankiškai namuose.

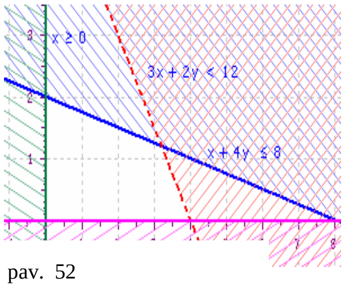


pav. 51

Programos „*MathematiX*“ ir „*Autograph*“ turi specialių priemonių sistemos sprendiniams rasti. Tam nubraižomi grafikai ir padėjus žymeklį ant šių grafiko sankirtos taškų, programa atskirame lange parodo sankirtos koordinates („*MathematiX* “) arba pažymėjus nubraižytuosius grafikus, atveriamas kontekstinis meniu ir jame pasirenkama funkcija *Solve Intersections* („*Autograph*“). Pastaroji programa atideda tuos taškus plokštumoje ir atskirame lange parodo sistemos sprendinius. Kadangi šiame darbe reikalingiems brėžiniams nubraižyti buvo taikomos šios komandos, tai jų nekartosiu.

3.8.2 Nelygybių su dviem kintamaisiais sistemos sprendimas

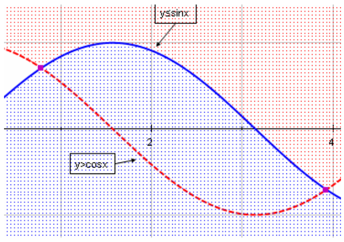
Nelygybių sistemoms spręsti programa „*MathematiX*“ turi specialią komandą nelygybėms išspręsti – *Solve Inequalities*. Pirmiausia įrašomos nelygybės į funkcijų langą, tada paspaudus vertikaliojoje meniu juostoje minėtą komandą, nelygybių sistemos sprendinių aibė paliekama neužbrūkšniuota ir lango apačioje yra užrašoma *Solved Inequalities* (52 pav.). Programa labai paprastai ir vaizdžiai pateikia gautus rezultatus, dėl to gali būti naudojama tiek pamokos metu, tiek mokiniui dirbant individualiai. Ši programa, mano nuomone, geriausiai tinka gautiems patikrinti, vaizdžiai juo iliustruojant, nes spaudant mygtukus neišmokstama nei nelygybių spręsti, nei ugdomas matematinis mąstymas.



pav. 52

„*Dinamine geometrija*“ taip pat galima sukonstruoti brėžinius, kuriais galima būtų demonstruoti grafinį nelygybių sistemos sprendimą, tačiau, kadangi brėžiniuose atvaizduojami ir apskaičiuojamos reikšmės tik keliems nagrinėjamiems atvejams, todėl programą, mano nuomone, geriausia taikyti kaip demonstracinę priemonę, arba moksleiviams savarankiškai juos nagrinėjant.

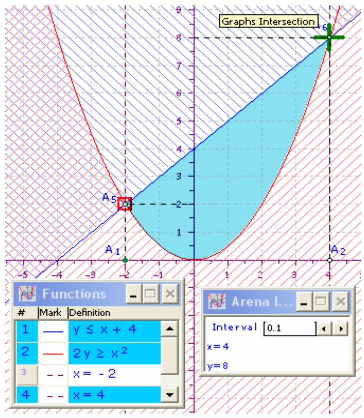
Programa „*Autograph*“ pasižymi panašiomis galimybėmis kaip ir „*MathematiX*“ nelygybių sistemoms spręsti. Skirtumas yra tas, kad „Autograph“ plokštumoje tik pažymi nelygybių sprendinių aibes, bet nepateikia atsakymo (53 pav.).



pav. 53

3.8.3 Uždavinio sprendimo grafiniu būdu pavyzdys

54 pav. pateikiamas uždavinio sprendimo programa „*MathematiX*“ pavyzdys. Prašoma apskaičiuoti figūros plotą, kurios taškai yra nelygybių sistemos $\begin{cases} y \le x+4 \\ 2y \ge x^2 \end{cases}$ sprendiniai. Pirmiausia surandami šios sistemos sprendiniai t. y. nubraižomi funkcijų grafikai, pavaizduojami kiekvienos sistemos nelygybės sprendiniai ir tada randamas sistemos sprendinys (*Solve Inequalities*). Sprendinys parodomas informacijos lange. Tada randamas figūros plotas: pasirenkama komanda *Coloring Area*, ir pažymimas reikalingos apskaičiuoti srities plotas. Informacijos lange *Arena Info* pateikiamas uždavinio atsakymas.



pav. 54

4 Darbo rezultatai

Remiantis bendrąja bendrojo lavinimo mokyklos matematikos programa bei išsilavinimo standartais ir Vilniaus kolegijos matematikos programa išnagrinėtos su funkcijomis susijusios temos. Jas išanalizavus, darbe pateikiami funkcijų mokymo bendrojo lavinimo mokykloje ypatumai – pagrindinėje mokykloje pagrindinis dėmesys skiriamas funkcijos ir jos grafiko sąvokoms, gebėjimui skaityti, braižyti funkcijos grafikus, remiantis jais nustatyti pagrindines funkcijos savybes: apibrėžimo ir reikšmių sritis, monotoniškumo intervalus, funkcijos lyginumą. Vidurinėje mokykloje nuo funkcijų tyrimo remiantis grafikais pereinama prie analizinio, pradedami mokyti analizės pradmenys: apibrėžiamos funkcijos ribos, tolydumo, išvestinės sąvokos, mokoma skaičiuoti funkcijų išvestines ir taikyti jas įvairiems uždaviniams spręsti. Palyginus bendrojo lavinimo mokykloje mokomų ir Vilniaus kolegijoje dėstomų su funkcijomis susijusių temų turinius, išryškėja glaudi šių temų sąsaja.

Pasirinktosios kompiuterinės programos funkcijoms mokyti išnagrinėtos pagal įvairius klasifikuojančius požymius. Iš to padarytos išvados trumpai pateiktos lentelėje (4 lentelė).

4 lentelė. Mokomųjų matematikos programų funkcijoms mokyti palyginimas

Programa	Kontrolės			Tyrinėjimo		
	Demonstravimo	Pratybų	Žinių kontrolės	Eksperimentavimo ir modeliavimo	Programavimo kalbų sistemos	Taikomosios programos
„Dinaminė geometrija“	+++	+	–	++	+ (vizualusis programavimas)	–
„MathematiX“	+	++	–	–	–	–
„Autograph“	+++	++	–	+	–	–

Atlikus šiame skyrelyje aptariamų temų mokymą(si) taikant pasirinktąsias programas, galima išskirti kiekvienos programos galimybes atitinkamiems tikslams pasiekti. Pagal tai, kaip organizuojama pamoka, galima išskirti iš esmės du pagrindinius kiekvienos programos pritaikymo aspektus: teorinei medžiagai aiškinti, sukūrus konkrečius brėžinius geriausiai tinka *„Dinaminė geometrija“*, o dirbant individualiai – pratybų metu ar atliekant užduotis namuose – *„MathematiX“* ir *„Autograph“*. Šios programos turi numatytų galimybių kai kurioms funkcijos savybės tyrinėti, todėl gali būti puikus pagalbininkas mokantis atitinkamų su funkcijomis susijusių temų.

Programų *„Dinaminė geometrija“* ir *„Autograph“* dinamiškumas ir interaktyvumas besimokančiajam suteikia ne tik stebėti, bet aktyviai įsitraukti į mokymo(si) procesą. Keisdamas parametrus ir analizuodamas gautus rezultatus, jis gali mokytis naują medžiagą, kartoti ir sisteminti ją siedamas įvairius algebrinius reiškinius su jas atitinkančiomis geometrinėmis interpretacijomis.

Mokomoji programa *„MathematiX“* grafikų konstravimo atžvilgiu yra paprastesnė nei *„Dinaminė geometrija“*. Funkcijos, kurios grafiką norima braižyti, išraiška įrašoma į greta braižomojo lapo esantį lapą, skirtą funkcijų išraiškoms rašyti. Parašius ją programa nubraižo grafiką. Šia programa nubraižyti brėžiniai yra statiniai.

Remdamasi mokytojų, kolegijų dėstytojų nuomone ir savo patirtimi, nagrinėjau, ką moksleiviams bei studentams mokantis funkcijų yra sudėtingiausia suprasti. Atsižvelgianti į tai bei pagal tyrimo kriterijus, išnagrinėtos *„Dinaminės geometrijos“*, *„MathematiX“* ir *„Autograph“*

galimybės. Ištirta, kokias temas ir kodėl yra tikslinga (netikslinga) dėstyti naudojantis naujomis technologijomis.

Rengiat diplominį darbą buvo sukurta 50 funkcijų mokymą vizualizuojančių brėžinių. Pateikiami išsamūs aprašymai, atskleidžiantys, kas kiekviename iš jų vaizduojama, ką reikėtų atlikti, norint išsiaiškinti vieną ar kitą sąryšį, savybę ar požymį. Dėl to, jie gali būti naudojami kaip pavyzdžiai temoms susijusioms su funkcijomis dėstyti ar mokytis naudojantis nagrinėjamomis kompiuterinėmis programomis.

Bendrųjų bendrojo lavinimo mokyklos ir Vilniaus kolegijos matematikos funkcijų mokymo programų ir pasirinktų trijų programų tinkamumo kolegijoje nagrinėjamoms temoms dėstyti lyginamosios analizės išvados pateikiamos lentele (5 lentelė). Programos, geriausiai tinkančios vienai ar kitai temai mokyti pažymėtos ženklu „+“.

5 lentelė. Lyginamosios analizės išvados

Programa	Bendrojo lavinimo mokykloje ir kolegijoje bendros dėstomos temos																	Kolegijoje dėstomos temos												
	Funkcijos sąvoka	F-jos reiškimo būdai	Funkcijos grafikas	Elementariųjų f-jų grafikai	F-jų grafikų transformacijos	Funkcijų savybės	Sudėtinė funkcija	F-jai atvirkštinė funkcija	Funkcijos ribos sąvoka	F-jos tolydumas taške ir intervale	F-jos išvestinės sąvoka	Sudėtinės f-jos išvestinė	Išvestinių taikymai	Bendroji f-jos tyrimo schema	Pirmykštė funkcija	Neapibrėžtinis integralas	Apibrėžtinio integralo sąvoka	Apibrėžtinio integralo taikymai	Kelių kintamųjų f-ja	Nykstamos ir neaprėžtai didėjančios f-jos	Funkcijos trūkio taškai	Aukštesniosios eilės išvestinės	Funkcijos diferencialo sąvoka	Kelių kintamųjų f-jos dalinės išvestinės	Neišreikštinės funkcijos išvestinė	Pagrindinės tolydžios f-jos savybės	Neapibrėžtumų tyrimas	Neapibrėžtinio int. integravimo metodai	Apibrėžtinio int. skaičiavimo metodai	Apibrėžtinio int. apytikslis skaičiavimas	Funkcijos grafiko asimptotės
„*Dinaminė geometrija*“	+		+	+	+				+	+	+		+				+	+			+		+							+	
„*MathematiX*“				+		+												+			+										+
„*Autograph*“	+	+	+	+	+		+	+									+	+	+											+	+

5 Išvados

Pagrindinis šio darbo tikslas buvo atlikti funkcijoms tinkamų mokyti kompiuterinių programų „*Dinaminė geometrija*“, „*MathematiX*“, „*Autograph*“ analizę ir tuo remiantis pagrįsti (arba paneigti) programų „Dinaminės geometrijos“, „*MathematiX*“, „*Autograph*“ naudojimo bendrojo lavinimo mokykloje ir kolegijoje tinkamumą atsižvelgiant į funkcijų mokymo bendrojo lavinimo mokykloje ir kolegijoje aspektus.

Atsižvelgiant į funkcijų mokymo bendrojo lavinimo mokykloje aspektus ir šio darbo tyrimo rezultatus galima teigti, kad pasirinktosios programos iš esmės tinka mokyti funkcijų bendrojo lavinimo mokykloje. Be to, nustatyta, kad mokyklinių programų galimybių nepakanka kolegijoje su funkcijomis susijusioms temoms dėstyti, tačiau puikiai tinka mokyklinei medžiagai kartoti.

6 Literatūros sąrašas

1. Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos ir išsilavinimo standartai. Priešmokyklinis, pradinis ir pagrindinis ugdymas. Patvirtinta Lietuvos Respublikos Švietimo ir mokslo ministro 2003 m. liepos 9 d. įsakymu Nr. ISAK-1015. Prieiga internetu: http://www.pedagogika.lt/standart/programos.pdf [2006-05-10]
2. Lietuvos bendrojo lavinimo mokyklos bendrosios programos ir bendrojo išsilavinimo standartai. XI-XII klasės. Patvirtinta Lietuvos Respublikos Švietimo ir mokslo ministro 2002 m. rugpjūčio 21 d. įsakymu Nr. 1465. Prieiga internetu: http://www.pedagogika.lt/bps/matemat.doc [2006-05-10]
3. Bendroji Vilniaus kolegijos matematikos programa
4. А. М. Дороднов, И. Н. Острецов, В. А. Петросов, В. Ю. Приходов, И. Б. Сафонов, Графики функций, „Высшая школа“, 1972 г.
5. Dagienė V. Informatikos mokymo vidurinėje mokykloje nuostatų formavimasis. *Informacijos mokslai*,. Vilnius: VU leidykla, 1997, 4, 40–55.
6. Teresevičienė M., Gedvilienė G. Mokymasis bendradarbiaujant. Vilnius: Garnelis, 1999.
7. Kriščiūnienė N. Vieno kompiuterio panaudojimas mokykloje. Vilnius: Eugrimas, 1998.
8. Jasutienė E., Stepanauskienė L., Vanagas V. Matematika 9 su „Dinamine geometrija“. Vilnius: TEV, 2003.
9. Jasutienė E., Stepanauskienė L., Vanagas V. Matematika 10 su „Dinamine geometrija“. Vilnius: TEV, 2003.
10. Saldauskienė J., Taikomoji matematika. Matematinė analizė. Uždaviniai ir sprendimai. Vilniaus kolegija, Vilnius, 2002.
11. Grigalavičienė E., Zenkevičienė M., Matematikos praktikumas, Marijampolės kolegijos leidybos centras, Marijampolė, 2003.
12. Rumšas P., Trumpas aukštosios matematikos kursas, Mokslas, Vilnius, 1976.
13. Autograph 3, http://www.*Autograph*-math.com/ [2006-05-20]
14. Kudžma R., Inverse function and semiotics. Proceedings of the 5th international conference "Teaching Mathematics: Retrospective and Perspectives", Liepaja, 175-180, 2005.
15. Šolytė I. Funkcijų uždavinių sprendimas naudojantis „Dinamine geometrija“ VIII–X klasėse. // Bakalauro darbas. Vilniaus universitetas, Matematikos ir informatikos fakultetas, Matematikos metodikos katedra, 2004.
16. L. Stepanauskienė „Programos „Dinaminė geometrija“ tyrimas ir taikymas bendrojo lavinimo mokykloje“, 2002.

7 Summary

Teaching Functions in Mathematics using Information Technologies

This diploma work is titled by “Teaching Functions in Mathematics using Information Technologies ”. New technologies of education are discussed in context of teaching function in upper secondary schools and colleges. Three educational applications e. g. “Geometer’s Sketchpad”, “Autograph”, and “MathematiX” are analysed and described with emphasis on strong and week their properties. While investigating the teaching of various functions it is searching how to present the best way of using “Geometer’s sketchpad”, “Autograph”, and “Mathematix” applications. The main results of research is the following: these tools are appropriate for teaching functions in upper secondary schools however these programs doesn’t fit all requirements of colleges and mostly can be used for course repetition.