Vilniaus universitetas

Filosofijos fakultetas

Filosofijos institutas

Emil Borovskij

Filosofijos studijų programa

Magistro baigiamasis darbas

Pamatinių platonizmo ir konvencionalizmo prielaidų statusas šiuolaikinėje matematikos filosofijoje

Darbo vadovas: doc. dr. J. Dagys

Vilnius

2022

SANTRAUKA

Darbo pavadinimas: Pamatinių platonizmo ir konvencionalizmo prielaidų statusas šiuolaikinėje matematikos filosofijoje.

Darbe analizuojamos tradicinės matematinio platonizmo bei matematinio konvencionalizmo problemos. Šių problemų kontekste nagrinėjamas E. N. Zaltos platonizmo bei J. Warreno konvencionalizmo teorijų pranašumas prieš tradicines teorijų versijas. Analizuojant Zaltos bei Warreno teorijoms iškylančias papildomas problemas, bandoma specifikuoti pamatines prielaidas, būtinas sunkumų išvengiančioms matematinio platonizmo bei konvencionalizmo teorijoms. Šių prielaidų pagrindu lyginamos Zaltos bei Warreno teorijos. Teigiama, kad Warreno konvencionalizmo teorija yra pranašesnė už Zaltos platonistinę teoriją, kadangi ji sustiprina matematinio konvencionalizmo poziciją, išspręsdama tradicines jos problemas. Kartu pastebima, kad Warreno teorija taip pat gerai suderinama su tradicinio platonizmo nuostatomis abstrakčių esinių egzistavimo bei matematikos tiesų būtinumo klausimu. Atkreipiamas dėmesys, kad Zaltos teorija, priešingai, kompromituoja matematinio platonizmo poziciją, parodydama, kad platonizmui kylanti epistemologinė Benacerrafo-Fieldo problema išsprendžiama, tik atsisakant tradicinės abstrakčių matematinių esinių nepriklausomybės nuo proto sampratos.

Pagrindiniai žodžiai: matematikos filosofija, platonizmas, konvencionalizmas, monizmas, pliuralizmas, abstraktūs objektai, Benacerrafo-Fieldo problema, inferencializmas.

SUMMARY

Title: The Status of the Fundamental Assumptions of Platonism and Conventionalism in Contemporary Philosophy of Mathematics.

This paper provides an analysis of the traditional problems of Mathematical Platonism and Mathematical Conventionalism. In light of these problems, the superiority of E. N. Zalta's and J. Warren's theories against their traditional counterparts is considered. While examining the additional problems Zalta's and Warren's theories face, this paper analyzes the required fundamental assumptions for the successful theories of Mathematical Platonism and Mathematical Conventionalism. It is also stated that Warren's theory is superior to Zalta's, because of how it answers the traditional problems of Mathematical Conventionalism. In addition, Warren's theory proves that Conventionalism can also satisfy platonistic views on the existence of abstract mathematical entities and the necessity of mathematical truths. Furthermore, it is demonstrated that Zalta's theory compromises Mathematical Platonism by showing that the answer to the epistemological Benacerraf-Field problem requires to reject the traditional concept of mind-independence of abstract entities.

Keywords: philosophy of mathematics, Platonism, Conventionalism, monism, pluralism, abstract objects, Benacerraf-Field problem, inferentialism.

TURINYS

ĮVADAS

Matematikos filosofija bendrai yra mokslo filosofijos atšaka. Tačiau, kaip pastebi Horstenas Leonas, matematika nuo kitų mokslų išsiskiria savo tyrimo objektu bei metodu (Leon 2022). Gamtos mokslai užsiima erdvėje ir laike esančių objektų bei reiškinių tyrimu, ko negalima pasakyti apie matematiką. Tradiciškai matematika siejama su nuo empirinės tikrovės nepriklausančių tiesų tyrimu. Nors matematiniai principai yra sėkmingai taikomi empiriniuose moksluose, tačiau jų teisingumas steigiamas ne empirinių tyrimų, bet tik samprotavimų pagalba. Tai nurodo ne tik į matematikos tyrimo objekto, bet kartu ir metodo išskirtinumą kitų tiksliųjų mokslų atžvilgiu. Nepaisant šio skirtumo, matematika laikoma patikimiausia disciplina, kadangi jos teiginiai laikomi atspariausiais permąstymui ir taisymui. Nors matematika remiasi tik samprotavimu, jos pasiekiamos tiesos tradiciškai laikomos ir nuo proto nepriklausomomis, universaliomis, objektyviomis bei nekintamomis.

Dėl ypatingo matematikos mokslo metodo bei tyrimų objekto ši disciplina yra intriguojantis objektas filosofiniams tyrimams. Matematikos filosofija glaudžiai susijusi su tradicinėmis metafizikos problemomis. Tradiciškai laikoma, kad matematika referuoja į abstrakčius esinius, todėl matematikos filosofijos kontekste išnaujo pasirodo tradicinis realizmo ir antirealizmo universalijų atžvilgiu ginčas. Taip pat ypatingas matematikos tyrimų metodas kelia klausimų epistemologijos kontekste, kadangi iššūkiu tampa paaiškinti mūsų universalių, būtinų ir su nematerialiais esiniais susijusių tiesų žinojimo kilmę. Iššukiu tampa pagrįsti matematikai būdingą normatyvumą bei mūsų matematinių įsitikinimų patikimumą. Filosofinis matematikos tyrimas taip pat pasižymi savo naudingumu bei idėjų pritaikomumu platesnės *a priori* teisingų teiginių problematikos atžvilgiu, pavyzdžiui, svarstymai matematikos filosofijos kontekste gali būti taikomi, nagrinėjant logikos bei etikos principų pobūdį.

Vienos populiariausių prieigų paaiškinti matematikos disciplinos specifiką yra matematinio platonizmo bei matematinio konvencionalizmo pozicijos. Istoriškai, matematinio platonizmo pozicija kilo iš sveiko proto intuicijų apie matematikos tiesų būtinumą, universalumą bei nepriklausomybę nuo proto ar empirinės tikrovės. Priešingai, matematinis konvencionalizmas įkūnija bandymą platonizmui kylančių problemų kontekste radikaliai pakeisti požiūrį į matematiką, atsisakant matematinių tiesų nepriklausomybės nuo proto statuso. Dėl šių prieigų populiarumo bei jų varžymosi, didelis dėmesys buvo ir yra skiriamas šių pozicijų problemiškumui bei įvairiems pasiūlymams šias prieigas patobulinti, siekiant išvengti joms kylančių sunkumų. Vieną mažiau aptartų ir stipriai nuo kitų platonizmo versijų besiskiriančių yra E. N. Zaltos principinio platonizmo, arba platonizuoto natūralizmo teorija, kuri, anot jos autoriaus, pateikia geriausią filosofinę matematikos teoriją (Linsky ir Zalta 1995, p. 554, Zalta forthcoming, p. 41). Tuo tarpu, konvencionalizmo kontekste, vieną naujausių ir stipriausių matematikos disciplinos ypatumus aiškinančių teorijų pateikia J. Warrenas, anot kurio, būtent jo matematinio konvencionalizmo teorijos versija turėtų būti priimta, kadangi ji pateikia pilną ir mažiausiai problemišką matematikos specifiškumo aiškinimą (2020, p. 339).

Ginčų dėl geriausios matematinio platonizmo teorijos, geriausios matematinio konvencionalizmo teorijos bei apskritai geriausiai matematikos disciplinos specifiką aiškinančios filosofinės teorijos kontekste, šio darbo tikslai yra: (1) įvertinti E. N. Zaltos bei J. Warreno teorijų pranašumus prieš tradicines matematinio platonizmo ir matematinio konvencionalizmo versijas, (2) Zaltos ir Warreno teorijoms kylančių papildomų problemų kontekste apibrėžti pamatines matematinio platonizmo bei matematinio konvencionalizmo prielaidas bei (3) įvertinti, kuri iš teorijų pateikia mažiausiai problemišką matematikos disciplinos specifikos paaiškinimą.

Darbe ginama tezė, jog *J. Warreno konvencionalizmas yra pranašesnė teorija nei E. N. Zaltos platonizmas, nes (1) E. N. Zalta tik kompromituoja platonizmo pozicija, parodydamas, kad platonizmas negali vienu metu pagrįsti mūsų matematinių įsitikinimų patikimumo ir išlaikyti matematinių tiesų nepriklausomybės nuo proto statusą, o (2) J. Warreno teorija ne tik išvengia tradicinių konvencionalizmo sunkumų, bet ir (3) parodo, kad konvencionalizmas gali taip pat sėkmingai kaip Zaltos teorija patenkinti platonistines intuicijas apie matematinių tiesų būtinumą bei abstrakčių matematinių esinių egzistavimą.*

Darbe remiamasi E. N. Zaltos pateikta principinio platonizmo bei jį grindžiančio *apimties principo* (*comprehension principle*) analize (Zalta 1983, Linsky ir Zalta 1995, Zalta forthcoming), tačiau apimties principas nagrinėjamas būtent matematinio platonizmo kontekste, kaip tai daro B. Linskis ir E. N. Zalta (Linsky ir Zalta 1995). Taip pat darbe remiamasi J. Warreno pristatoma loginio bei matematinio konvencionalizmo versija (Warren 2015, 2020). Kalbant apie pliuralistinį matematinį platonizmą, remiamasi M. Balaguerio bei J. Beallo pliuralistinio platonizmo teorijomis (Balaguer 1995, 1998, Beall 1999). Kalbant apie Benacerrafo–Fieldo problemą, remiamasi H. Fieldo patobulinta jos formuluote (Field 1989, p. 233). Darbe taip pat remiamasi skirtimi tarp „abstrakčių objektų“ ir „abstrakčių esinių“, kur „esiniais“ gali būti tiek pavieniai abstraktūs objektai, tiek savarankiškos abstrakčios struktūros.

I. Tradicinių matematinio platonizmo ir konvencionalizmo teorijų problemos

1.1. Tradicinių matematinio platonizmo teorijų problemos

Bendrąja prasme platonizmas siejamas su pozicija, jog egzistuoja abstraktūs objektai, arba objektai, kurie egzistuoja už fizinės erdvės ar laiko ribų bei yra kauzaliai inertiški fizinio pasaulio atžvilgiu (Balaguer 2016). Abstraktus objektų pobūdis taip pat lemia, kad tokių objektų negalima tyrinėti empiriniais metodais bei kad nebūdami erdvėje ar laike šie objektai yra amžini ir nekintantys. Tokia pozicija taip pat galima ir konkrečios teorijos T atžvilgiu. Platonizmo rėmuose galima teigti, kad teorija T pateikia teiginius apie abstrakčius objektus, iš ko seka, jog platonizmas kurios nors teorijos atžvilgiu įprastai teigia bent dalies teorijos teiginių būtiną ir nekintantį teisingumą.

Kalbant apie platonizmą matematikos filosofijoje, anot Øysteino Linnebo, šiuolaikiniai filosofai sąvoką „matematinis platonizmas“ įprastai sieja su trimis teiginiais apie matematikos prigimtį: (1) ši disciplina remiasi tik samprotavimu bei įrodymais, o ne jusline patirtimi ar eksperimentavimu, (2) ji teigia būtinas tiesas, (3) jos teigiamos tiesos susijusios su abstrakčiais matematiniais objektais (Linnebo 2017, p. 5). Iš pirmojo teiginio plaukia, kad matematinės tiesos yra žinomos *a priori* ir kad jos nereikalauja juslinio pagrindimo. Tokia pozicija atspindi populiarų įsitikinimą, kad priešingai nei gamtos mokslai, matematikos disciplina remiasi samprotavimu, kurio užtenka įrodyti matematinėms tiesoms. Antrasis teiginys pabrėžia, jog matematinių teiginių teisingumas yra būtinas ir amžinas, todėl jis nepriklauso nuo matematikos tyrėjų. Matematikai ne kuria, bet atranda nuo žmogaus proto nepriklausomas tiesas, kurios platonizmo šalininkų yra laikomos objektyviomis. Galiausiai, matematinės tiesos yra tiesos apie abstrakčius matematinius objektus, kurie, kitaip nei fiziniai objektai, randasi už erdvės ar laiko ribų. Iš to seka, kad matematiką yra nepriklausoma nuo fizinio pasaulio pokyčių.

Šiuolaikinę tradicinio „matematinio platonizmo“ termino reikšmę įvedė Paulas Bernaysas (1964), nors, kaip pastebi Willardas Van Ormanas Quine’as, platonizmą matematikoje dar iki tol atstovavo logicizmas (toks, kokį atstovavo Gottlobas Frege ir Bertrandas Russellas) (1964a, p. 192). Tradicinio logicizmo ir platonizmo panašumas gali būti pagrįstas tuo, jog platonistinis logicizmas kaip ir kitos tradicinio matematinio platonizmo formos laikosi įsitikinimo, jog matematiniuose teiginiuose *kvantoriais surišti kintamieji* (*bound variables*) nurodo į abstrakčius objektus. Remiantis Quine’u, matematinis platonizmas kyla iš viduramžiško realizmo pozicijos. Viduramžių ginčo dėl universalijų kontekste realizmas teigia, jog universalijos egzistuoja nepriklausomai nuo mūsų proto, todėl jos nėra proto sukuriamos ar apibrėžiamos, bet veikiau atrandamos (Gyula 2017). Šie esiniai laikomi abstrakčiais, bet, remiantis analogija su fiziniais objektais, jie taip pat traktuojami kaip pavieniai individualūs objektai. Abstrakčių objektų pripažinimas leidžia atskirti bendrines sąvokas nuo konkrečių jų instanciacijų. Matematikos kontekste tai leidžia paaiškinti, kodėl, pavyzdžiui, mes žinome, kad Pitagoro teorema galioja visiems galimiems statiesiems trikampiams. Stačiojo trikampio universalija apibrėžia stačiojo trikampio esmines savybes, kas leidžia mums kalbėti apie tai, kas galioja visoms stačiojo trikampio instanciacijoms.

Perimdamas viduramžiško realizmo abstrakčių esinių sampratą, tradicinis matematinis platonizmas laikosi pozicijos, jog visi matematiniai objektai (tokie kaip skaičiai, aibės ar taškai) yra nepriklausomai nuo proto egzistuojantys, pavieniai abstraktūs objektai. Mūsų matematiniai teiginiai, tokiu atveju, referuoja į tuos pavienius individualius objektus. Tačiau tokia „objektinio platonizmo" pozicija buvo suprobleminta šiuolaikinių filosofinių diskusijų dėl matematikos kontekste. Dvi daugiausiai dėmesio sulaukusias matematinio platonizmo bendrai problemas iškėlė Paulas Benacerrafas. Pirmoji problema užklausia būtent aptartojo objektinio platonizmo pagrįstumą. Benacerrafas atkreipė dėmesį, jog bandant aiškinti matematikos pamatus per aksiomatizuotą aibių teoriją bei bandant skaičius tapatinanti su konkrečiomis aibėmis, kyla vieno teisingo modelio pasirinkimo problema (Benacerraf 1965). Naudojant įprastą terminiją, formalia teorija laikomas sakinių, arba teoremų, rinkinys, kurį galima deduktyviai (t. y. vadovaujantis sintaksinėmis taisyklėmis) išvesti iš aksiomų. Formali teorija taip pat reikalauja modelio, arba *apibrėžtos aibės* (*well–defined set*), kuri apibrėžtų semantiką, arba teorijos *diskurso sritį* (*domain of discourse*). Benacerrafas atkreipė dėmesį, kad tą pačią struktūrą gali tenkinti daug modelių, todėl konkretus teorijoje vartojamas terminas gali būti tapatinamas su skirtingų modelių naudojamomis sąvokomis (pavyzdžiui, natūralieji skaičiai gali būti tapatinami tiek su von Neumanno, tiek su Zermelo *baigtiniais kelintiniais* (*finite ordinals*)). Problemiška, kad tokiu atveju objektinio platonizmo rėmuose kyla uždavinys pasirinkti vieną konkrečią diskurso sritį, t. y. parodyti, kurie būtent iš galimų teoriją tenkinančių objektų yra realiai egzistuojantys abstraktūs objektai. Visi galimi modeliai vienodai gerai atlieka savo funkciją teorijos aksiomų ir iš jų išvedamų teoremų atžvilgiu, todėl, kaip pastebi Chanwoo Lee, mes neturime pagrindo nearbitraliai pasirinkti kurį nors vieną iš jų (2022, p. 108). Benacerrafas taip pat atkreipia dėmesį, kad skirtingi natūraliųjų skaičių struktūrą (formaliai apibrėžiamą per Peano aksiomas) tenkinantys modeliai pateikia skirtingus atsakymus į klausimą, ar skaičius 3 priklauso skaičiui 17 (1965, p. 54). Tai parodo, kad nors modeliai yra tapatūs ta prasme, jog jie vienodai gerai tenkina apibrėžtą formalią natūraliųjų skaičių struktūrą (t. y. šie modeliai yra *izomorfiški*), tačiau jie nėra tapatūs aibių (ir atitinkamai per jas natūraliųjų skaičių) pobūdžio apibrėžimo atžvilgiu. Tad atsakymai į specifinius natūraliųjų skaičių pobūdžio klausimus (pavyzdžiui, ar skaičius 3 priklauso skaičiui 17) priklausys nuo pasirinkto modelio, tačiau šis pasirinkimas tegali būti arbitralus.

Kaip pastebi Markas Balagueris, įsitikinimo, jog tas „kažkas abstraktaus", kas suteikia matematikai ontologinį pagrindą, turi būti individualus matematinis objektas, gali būti atsisakyta, išlaikant pamatinius platonizmo principus. Šioje vietoje Balagueris pasiūlo įvesti skirtį tarp objektinio platonizmo ir abstrakčiojo (kitaip dar žinomo, kaip *ante rem*) struktūralizmo[1] (Balaguer 1998, p. 9). Kitaip nei objektinis platonizmas, abstrakčiojo struktūralizmo pozicija teigia, jog matematikai ontologinį pagrindą suteikia struktūros. Struktūra čia suprantama kaip abstrakti sistemos forma, išreiškianti objektų tarpusavio santykius ir ignoruojanti bet kokias objektų savybes, kurios nedaro įtakos šių objektų santykiui su kitais objektais sistemoje (Shapiro 1997, p. 74). Tokiu atveju partikuliarūs matematiniai objektai, pavyzdžiui, skaičiai ir aibės, tėra tai (ir tik tai), kas užima vietas matematinėse struktūrose. Anot Stewarto Shapiro, skirtumas tarp objekto ir jo vietos struktūroje analogiškas skirtumui tarp tarnybos posto ir to, kas tą postą užima (ibid, p. 10). Pavyzdžiui, bet koks skaičiaus 5 vaidmenį aritmetikoje atlikti galintis (fizinis arba abstraktus) objektas gali būti laikomas skaičiumi 5. Teiginys apie šį skaičių bus laikomas teisingu tik dėl struktūrinio jo vaidmens atitinkamoje matematinėje struktūroje. Tokiu atveju, abstraktaus struktūralizmo rėmuose, matematika apibrėžia ne pavienius matematinius *objektus*, bet matematines struktūras, kurias galima traktuoti kaip aukštesnio abstrakcijos lygio *esinius*, kuriuose vietas gali užimti skirtingi fiziniai ar abstraktūs objektai. Pats Benacerrafas taip pat palaiko matematikos kaip matematinių struktūrų tyrimą, teigdamas, kad matematikų susidomėjimas sustoja ties struktūrų lygmeniu (1965, p. 69). Tokiu atveju aritmetika, kaip teigia Benacerrafas, yra mokslas tiriantis abstrakčią struktūrą, kuri būdinga visoms progresijoms (ibid, p. 70). Tokia struktūralistinė platonizmo versija išvengia minėtosios pirmosios Benacerrafo problemos, kadangi platonizmo pagrindas čia perkeliamas nuo konkrečių matematinių objektų ontologinio realizmo prie realizmo metamatematinio esinio – struktūros – atžvilgiu. Tada mums nebereikia identifikuoti vieno teisingo matematinius objektus apibrėžiančio modelio, bet pakanka apibrėžti struktūrą, kurią šie modeliai tenkina.

Didesnių sunkumų platonistinėms teorijos sukėlė antroji – epistemologinė – Benacerrafo (Benacerraf 1973) suformuluota problema, kuri, kaip pastebi Jodis Azzounis, neprarado savo aktualumo iki mūsų dienų (2016, p. 3). Populiariausia ir daugiausiai aptarinėjama yra Hartrio Fieldo patobulinta šios Benacerrafo problemos versija, kuri formuluojama kaip klausimas: *kokiu būdu įmanomi patikimi įsitikinimai apie abstrakčius matematinius esinius?* (1989, p. 233).

Bandant atsakyti į Benacerrafo–Fieldo problemą, platonizmo kontekste buvo susidurta su teorinio pliuralizmo klausimu. Viena pagrindinių pliuralistinio platonizmo teorijų pasirodymo

[1] Ne visi struktūralistai sutinka, kad struktūras reikėtų laikyti abstrakčiais ir realiai nuo proto nepriklausomai egzistuojančiais esiniais. Charlesas Parsonsas pasiūlė skirtį tarp *neeliminatyvaus* (*noneliminative*) ir *eliminatyvaus* (*eliminative*) struktūralizmo: pirmasis įsipareigoja nagrinėjamų struktūrų egzistavimui, o antrasis neteigia struktūrų ontologinio savarankiškumo (2008, p. 51–52). Bobas Hale'as neeliminatyvų struktūralizmą vadina *abstrakčiuoju struktūralizmu* (kuris dar žinomas kaip *ante rem* struktūralizmas) ir kartu su Fraseriu MacBride'u pastebi, jog ši pozicija perima esmines platonizmo prielaidas ir todėl nuo jo iš esmiškai nesiskiria (Hale 1996, p. 128; MacBride 2005, p. 582).

priežasčių buvo monistinėms platonizmo pozicijoms iškilę sunkumai, bandant atsakyti į duotąją problemą. Monistinis platonizmas laikosi pozicijos, jog kiekvienas konkretus matematinis klausimas turi vieną objektyviai teisingą atsakymą, arba kad kiekvienas matematinis teiginys turi vieną teisingumo reikšmę. Monistinis platonizmas atmeta poziciją, kad matematikoje yra galimos prieštaraujančios viena kitai ir vienu metu visiškai teisingos matematinės teorijos. Ši pozicija remiasi požiūriu, jog matematika pasižymi savo *apibrėžtumu* (*determinacy*) – teigiama, kad yra vienas objektyviai teisingas atsakymas, ar, pavyzdžiui, garsioji kontinuumo hipotezė[2] yra teisinga, ir mums tik lieka tą atsakymą atrasti. Tačiau ilgainiui susiformavo ir pliuralistinio platonizmo pozicija, teigianti, kad ir prieštaraujančios viena kitai matematinės teorijos gali būti vienu metu objektyviai teisingos. Pliuralistinis platonizmas dažnai grindžiamas tuo, jog jis geriau atspindi matematikos mokslo praktiką, kur plačiai nagrinėjamos ir prieštaraujančios viena kitai teorijos (pavyzdžiui, *Zermelo–Fraenkelio* aksiomatinė aibių teorija su „pasirinkimo aksioma“ (*axiom of choice*) arba su „pasirinkimo aksiomos“ neigimu).

Populiariausia monistinio platonizmo sekėjų naudojama atsakymo į Benacerrafo–Fieldo problemą strategija yra patikimus įsitikinimus apie matematines tiesas formuojančios matematinės intuicijos galios įvedimas. Balagueris atkreipia dėmesį, kad literatūroje kalbama apie dvi matematinės intuicijos versijas: *kontaktinę* (*contact*) ir *bekontaktę* (*non–contact*) (1998, p. 24). Kontaktinės intuicijos gynėjai (anot Balaguerio, vienu iš jų, veikiausiai, galėtų būti laikomas Kurtas Gödelis (Gödel 1964, p. 271)) siūlo atmesti prielaidą, kad žmogaus sąmonė egzistuoja vien erdvėje ir laike. Kontaktinės intuicijos teorijos gynėjai teigia, jog sąmonė pati nėra materiali ir todėl geba pažinti abstrakčius esinius, net jei jie kauzaliai nesąveikauja su materialia plotme.

Savo ruožtu bekontaktės intuicijos teorijos gynėjai laikosi pozicijos, jog žmogus turi kognityvinę gebą, kuri, gaudama informaciją tik iš natūralistinių jutimo ir introspekcijos šaltinių, formuoja intuityvius įsitikinimus apie abstrakčius matematinius esinius be tiesioginio žmogaus proto sąlyčio su šiais esiniais. Tačiau dėl bekontaktės intuicijos teorijos detalių nesutariama. Pavyzdžiui, Parsonso teigimu, juslių pagalba suvokdami konkrečius fizinių patirčių *atvejus* (*tokens*), mes formuojame intuicijas apie abstrakčius *tipus* (*types*) (1980, p. 162). Steineris gi mano, jog matematinė intuicija paremta *abstrahavimu* – mes jusliškai suvokiame fizinių objektų rinkinius ir abstrahuojamės nuo jų fizinių savybių tol, kol nesuformuojame matematinių įsitikinimų (pavyzdžiui, įsitikinimo, jog konkretūs juntami objektai *egzemplifikuoja* (*exemplify*) tam tikrą aibę ar struktūrą) (Steiner 1975, 4 skyrius).

[2] Kontinuumo hipotezė yra viena žymiausių aibių teorijos problemų, kuri pirmą kartą suformuluota Georgo Cantoro (Bagaria 2020). Duotoji hipotezė teigia, jog arba kiekviena begalinė skaičių aibė yra *skaiti* (*countable*), arba jos dydis yra toks pat kaip realiųjų skaičių aibės. Kitaip tariant, kontinuumo hipotezė teigia, kad yra tik du begalybių dydžiai.

Kontaktinės intuicijos koncepcija praranda savo patrauklumą, analizuojant jos pamatinę prielaidą, kad žmogaus sąmonė gali tiesiogiai sąveikauti su abstrakčia matematine realybe. Tokios intuicijos atstovams iškyla uždavinys pagrįsti *sąmonės ir kūno dualizmą (mind–body dualism*), kuris prieštarauja natūralistinei šiuolaikinių empirinių mokslų nuostatai, kad *visi mūsų kognityviniai mechanizmai yra kauzaliniai, t. y. mūsų nuostatos keičiasi, tik atsakant į tam tikrus kauzalinius pokyčius, nepriklausomai nuo nuostatų pobūdžio ar jų nagrinėjamos temos* (Warren 2017, p. 1654). Tačiau net pripažinus, jog žmogaus sąmonė nemateriali, neerdviška ir nelaikiška, neatsakoma, kokiu būdu ji gali sąveikauti ir gauti informaciją apie abstrakčius matematinius esinius. Kadangi tarp abstrakčių esinių negali būti priežasties ir pasekmės ryšio, informacijos perdavimas tarp nematerialių matematinių esinių ir nematerialaus proto nėra mažiau problemiškas, nei informacijos perdavimas tarp abstraktaus matematinio esinio ir fizinio proto.

Tuo tarpu, pagrindinis priekaištas bekontaktės intuicijos teorijos gynėjams yra tas, kad bekontaktė intuicija apskritai negali išspręsti Benacerrafo–Fieldo problemos. Kaip atkreipia dėmesį Balagueris, bekontaktė intuicija gali paaiškinti, tik kaip gali būti formuojami įsitikinimai apie abstrakčius matematinius esinius be sąlyčio su jais, tačiau ji negali pagrįsti bei paaiškinti tokiu būdu suformuotų įsitikinimų patikimumo (Balaguer 1998, p. 38). Nepateikus paaiškinimo, kodėl šios galios formuojami įsitikinimai apie abstrakčius matematinius esinius yra patikimi, bekontaktė intuicija iš esmės nesiskiria nuo kitų nepatikimų įsitikinimų formavimo mechanizmų. Pavyzdžiui, mes galėtume susapnuoti arba spėti apie matematinius esinius ir vadinti mūsų spėjimus bei sapnus „intuicija“, tačiau net jei tokiu būdų suformuoti mūsų įsitikinimai būtų atsitiktinai teisingi, bendrai toks įsitikinimų generavimo būdas nebūtų laikomas patikimu.

Pereinant prie papildomų priežasčių, kodėl monistinis platonizmas nėra patraukli teorija, pirmoji iš jų yra visų prasmingų matematinių teiginių objektyvių teisingumo reikšmių problema. Anot monistinio platonizmo atstovų, visi prasmingi matematiniai sakiniai turi išreikšti teiginius, kurie turi apibrėžtas objektyvias teisingumo reikšmes. Problemiška, kad (kaip rodo matematikų praktika) kai kurių teiginių atveju taip nėra. Populiarus tokio teiginio pavyzdys yra minėtoji kontinuumo hipotezė, kuri yra nepriklausoma nuo standartinės Zermelo–Fraenkelio aksiomatinės aibių teorijos. Monistinio platonizmo šalininkai (dėl įsipareigojimo ontologinio realizmo pozicijai matematinių esinių atžvilgiu) turi priimti, jog hipotezė kelia prasmingą klausimą apie matematinių esinių sritį. Tačiau tokia pozicija problemiška dėl to, kad savaime Zermelo–Fraenkelio aksiomatinė aibių teorija negali nei pagrįsti, nei paneigti minėtosios hipotezės, iš ko plaukia, kad prie Zermelo–Fraenkelio aksiomatinės aibių teorijos turėtų būti pridėta papildomų aksiomų. Tačiau naujų aksiomų įvedimo pasiūlymas priveda prie papildomų problemų. Visuomet įmanoma pridėti naujų aksiomų, iš kurių bus galima išvesti bet kokius pageidaujamus rezultatus, tačiau platonizmo kontekste papildomos aksiomos ontologiškai įpareigoja, t. y. įpareigoja mus pripažinti egzistavimą tų esinių, kurių egzistavimas būtinas tų aksiomų objektyvaus teisingumo pripažinimui. Dėl šios priežasties, platonizmas įpareigoja formuluoti tokias aksiomas, kurios atitinka abstrakčią matematinę realybę. Tačiau šioje vietoje vėl kyla epistemologinė problema – kaip mes galime žinoti, kad mūsų įvedamos aksiomos patikimai atspindi matematinę realybę? Platonizmo kontekste aksiomų būtinumo konkretiems matematiniams rezultatams gauti nepakanka jų teisingumui pagrįsti. Jei negalima pagrįsti aksiomų patikimumo, jų įvedimas yra arbitralus siekiamo rezultato atžvilgiu, t. y. aksiomų įvedimo pagalba mes galime tiek pagrįsti, tiek paneigti tą pačią matematinę hipotezę (pavyzdžiui, kontinuumo hipotezę). Todėl nepagrindus aksiomų patikimumo matematinės tikrovės atžvilgiu, jų įvedimo galimybė savaime neleidžia rasti objektyvių atsakymų matematikoje.

Dėl tradicinio monizmo negebėjimo atsakyti į Benacerrafo–Fieldo problemą, atsirado jau minėtoji pliuralistinio platonizmo pozicija. Kalbant apie pliuralistinį platonizmą, vertėtų panagrinėti tris įtakingiausias jo versijas: Marko Balaguerio „grynakraujį platonizmą“ (*Full–blooded Platonism*), Jc Beallo „bekompromisį platonizmą“ (*Really Full–blooded Platonism*) bei Bernardo Linskio ir Edwardo N. Zaltos „principinį platonizmą“ (*Principled Platonism*), iš kurių paskutiniam bus vėliau skiriama daugiausia dėmesio.

Bendrai pliuralistinė prieiga pasižymi žymiai turtingesne ontologija bei tuo, kad ji bando spręsti Benacerrafo–Fieldo problemą siūlydama konkrečius principus, kuriais remiantis steigiamas atitikimas tarp mūsų matematinių įsitikinimų ir abstrakčių matematinių faktų. Imant Balaguerio teorijos pavyzdį, anot grynakraujo platonizmo teorijos, kiekvienas logiškai neprieštaringas matematinis esinys egzistuoja (1998, p. 52). Kiekviena logiškai galima matematinė teorija teisingai aprašo matematinės tikrovės dalį. Siekdamas pagrįsti šią poziciją, Balagueris pasiūlo išorinio ir vidinio paaiškinimo skirtį (ibid, p. 54). Matematinių įsitikinimų patikimumo išorinis paaiškinimas turėtų atsakyti „kodėl mūsų įsitikinimų formavimo metodai yra patikimi?“ Tuo tarpu, vidinis paaiškinimas turėtų atsakyti „iš kur mes žinome (arba pagrįstai manome), kad mūsų įsitikinimų formavimo metodai yra patikimi?“ Remiantis Balagueriu, įsitikinimų apie abstrakčius matematinius esinius problema reikalauja tik išorinio paaiškinimo. Tokią savo poziciją Balagueris grindžia analogija su išorinio pasaulio pažinimu. Tai, kad juslės generuoja patikimus įsitikinimus apie išorinį pasaulį, yra pradinė juslinio pažinimo prielaida. Mes galime pagrįsti šių įsitikinimų patikimumą, remdamiesi juslių veikimo aiškinimu, tačiau mes niekada negalime būti įsitikinę, kad juslių sugeneruoti įsitikinimai tikrai patikimi. Tačiau jeigu mes negalime vidinio paaiškinimo reikalauti iš juslinėmis paremto fizinio pasaulio pažinimo, remiantis Balagueriu, mes neturėtume jo reikalauti ir abstrakčios matematinės srities pažinimo (ibid, p. 55). Tad kaip ir juslinio pažinimo atveju matematinių esinių pažinimas turėtų prasidėti nuo prielaidos, jog pasirinktas abstrakčios tikrovės dalies pažinimo būdas yra patikimas.

Kalbant apie alternatyvią Beallo poziciją, bekompromisis platonizmas yra patobulinta Balaguerio teorijos versija, kuri radikalizuoja Balaguerio ontologijos išpūtimo strategiją. Beallas prieštarauja Balagueriui teigdamas, jog patikimo abstrakčių matematikos esinių pažinimo klausimą gali išspręsti ne vien grynakraujis platonizmas (1999, p. 323). Beallas siūlo savo platonizmo versiją, kuri nuo Balaguerio teorijos skiriasi tuo, kad ji teisingoms ir patikimai abstrakčią tikrovę atspindinčiomis pripažįsta ne tik neprieštaringas matematikos teorijas, bet ir vidujai prieštaringas. Beallas pasitelkia dvireikšmę parakonsistentinę logiką, kuri leidžia toje pačioje teorijoje vienu metu teisingu laikyti teiginį A ir jo neigimą. Svarbu, jog teisingomis pripažindamas prieštaringas teorijas Beallo bekompromisis platonizmas neprivalo priimti trivializmo pozicijos, jog bet kokioje formalioje teorijoje iš prieštaravimo galima išvesti visus teiginius. Trivializmo problemos išvengiama, pasirenkant tokią parakonsistentinę logiką, kuri leidžia kiekvienos teorijos atveju tos teorijos kalboje suformuluoti tokį teiginį, kuris nebus įrodomas toje teorijoje. Beallas taip pat pabrėžia, jog jo bekompromisio platonizmo teorija pasižymi tuo, kad jos pripažįstamos prieštaringos matematinės sistemos yra *pilnos* (*complete*). Beallas atkreipia dėmesį, kad atsisakius teorijų neprieštaringumo reikalavimo, galima išvengti Gödelio nepilnumo problemos. Tada prieštaringos matematinės teorijos gali būti laikomos pilnomis.

Analizuojant pristatytas Balaguerio ir Beallo pliuralistinio platonizmo teorijas pastebimi šie jų panašumai: (1) pripažįstamas nesuderinamų matematinių teorijų teisingumas (t. y. pripažįstamas matematinių teorijų pliuralizmas), (2) manoma, jog Benacerrafo–Fieldo problemos sprendimui pakanka tik išorinio paaiškinimo, (3) manoma, kad protas gali nepriklausomai nuo abstrakčios matematikos sferos generuoti formaliai griežtus matematinius teiginius, (4) daroma prielaida, jog abstraktiems matematiniams esiniams galioja mūsų suformuluotos logikos taisyklės, (5) daroma prielaida, kad galimas abstrakčių matematinių esinių apibrėžimas, kurio pagrindu galima atskirti matematinius esinius nuo nematematinių abstrakčių esinių. Dauguma šių panašumų skiria pliuralizmo teorijas nuo monizmo. Taip pat jie išreiškia šių pliuralistinių teorijų pamatinius aspektus ir pliuralizmo atstovų atsakymo į Benacerrafo–Fieldo problemą strategijos ypatumus. Be to, kadangi išvardintos pamatinės pliuralizmo prielaidos bendros abiem aptartoms teorijoms, šių prielaidų tolimesnė kritika taip pat galioja abiem pristatytiems ir visiems tomis pačiomis prielaidomis paremtiems pliuralistų siūlomiems Benacerrafo–Fieldo problemos sprendimams.

Nors pliuralistinio platonizmo teorijos pristatė alternatyvų būdą atsakyti į Benacerrafo-Fieldo problemą, tačiau šioms teorijos kylančios problemos verčia suabejoti jų pranašumu prieš monistinio platonizmo teorijas. Pirmas rimtas priekaištas pliuralistinio platonizmo pozicijai tas, kad prieštaraujančių viena kitai matematinių teorijų pripažinimas nėra intuityvus – jis reikalauja atsisakyti sveiko proto pozicijos, kad matematinės tiesos yra objektyvios (Schechter 2010, p. 440). Iliustruodamas šią problemą, Schechteris siūlo palyginimą iš etikos srities: įsivaizduokime, kad platoniškai galima pagrįsti daug skirtingų teisingumo sampratų. Tokiu atveju atrodo klaidinga kalbėti apie vieną objektyviai teisingą poziciją. Matematikos atveju, galima paimti Zermelo–Fraenkelio aibių teorijos su pasirinkimo aksioma ir Zermelo–Fraenkelio aibių teoriją su pasirinkimo aksiomos neigimu pavydį. Remiantis matematinių tiesų objektyvumo intuicija, dėl teorijų prieštaravimo viena kitai atrodo klaidinga teigti, jog abi teorijos teisingai aprašo tą pačią abstrakčią matematinę realybę. Balagueris atsako į šį priekaištą teigdamas, jog viena kitai prieštaraujančios bet vidujai neprieštaringos teorijos gali abi būti teisingos, nes jos aprašo skirtingas abstrakčios matematinės sferos dalis arba skirtingas matematines *visatas* (*universes*), į kurias matematinė sfera gali būti suskirstyta (Balaguer 1998, p. 59). Tokiu atveju, kai skirtingos teorijos aprašo skirtingas abstrakčios matematinės sferos dalis, jos referuoja ir į skirtingus abstrakčius esinius. Linskis ir Zalta, iš savo pliuralistinės teorijos perspektyvos, palaiko šią poziciją, teigdami, kad tiesiog bendras prieštaraujančių viena kitai teorijų žodynas daro klaidingą įspūdį, jog skirtingai kalbama apie tuos pačius dalykus (1995, p. 543). Iš tikrųjų iš pirmo žvilgsnio nesuderinamos teorijos kalba apie skirtingas realybės dalis, kurios gali būti klaidingai tapatinamos su visa realybe. Ši strategija prieštaraujančias viena kitai teorijas aiškinti kaip aprašančias skirtingas matematines visatas kai kuriais atvejais atspindi matematikos praktiką, kur nesuderinamos teorijos gali būti laikomos ne oponuojančios viena kitai, o skirtos aprašyti skirtingus dalykus. Pavyzdžiui, euklidinė ir su ja nesuderinamos sferinė arba hiperbolinė geometrijos nesiekia aprašyti vienos konkrečios (pavyzdžiui, fizinės) erdvės, bet, veikiau, skirtingas abstrakčias erdves.

Pereinant prie dėl nesuderinamų teorijų pripažinimo išaugusios pliuralistų ontologijos, įsipareigojant didelio kiekio abstrakčių esinių egzistavimui, kyla įtarimas, ar šios teorijos tiksliai aprašo matematinę tikrovę ir ar jos neverčia mūsų įsipareigoti matematinių teorijų aprašomų, bet iš tikro neegzistuojančių esinių egzistavimui. Įtarimų kelia vienintelis pliuralistų pateikiamas atsakymas į šį rūpestį, jog būtent jų siūlomas (nors skirtingų autorių skirtingas) *loginis kriterijus* užtikrina, kad mūsų įsitikinimai teisingai atspindi abstrakčią matematinę sferą. Anot Balaguerio, ontologinio įsipareigojimo dydis savaime nėra problema, jei ginama teorija pasižymi didžiausia aiškinamąja galia (1998, p. 144). Balagueris net pripažįsta galimybę, jog matematiniai įsitikinimai gali būti net tiesiog išgalvoti arba susapnuoti, tačiau, kol jie nėra vidujai neprieštaringi, tol pagrįstas yra jų patikimumas (1995, p. 304–305). Kaip jau buvo minėta, Beallas Balaguerio teoriją modifikuoja tik kartu pripažindamas ir prieštaringų įsitikinimų patikimumą. Beallas neišreiškia papildomos kritikos Balaguerio teorijai, kuo remiantis galima manyti, kad jis neprieštarauja kitiems Balaguerio teorijos aspektams, jų tarpe ir laisvam matematinių įsitikinimų generavimui.

Balaguerio ir Beallo teorijos siūlo klasikinės dvireikšmės arba parakonsistentinės logikos taisykles kaip principus, užtikrinančius atitikimą tarp proto įsitikinimų ir abstrakčios matematinės sferos. Tačiau problemiška, kad minėti autoriai nepasiūlo svarių argumentų, kodėl būtent jų siūlomos logikos principai turi galioti abstrakčiai matematinei realybei. Kaip jau buvo minėta, Beallo manymu, parakonsistentine logika paremta pliuralizmo teorija pranašesnė už Balaguerio grynakraujį platonizmą tuo, jog jos pripažįstamos prieštaringos sistemos išvengia nepilnumo problemos. Balagueris, priešingai, teigia, kad jo ginamas neprieštaringumo kriterijus pasižymi intuityvumu ir universalumu (Balaguer 1998, p. 71). Tačiau, kaip pastebi Schechteris, logikai čia vis vien iškyla Benacerrafo–Fieldo problemai analogiškas loginių įsitikinimų patikimumo klausimas (Schechter 2010). Mes negalime grįsti vienu mūsų įsitikinimų patikimumo, tiesiog pasiremdami kitais įsitikinimais, kol pastarųjų patikimumas taip pat nebuvo pagrįstas. Iš to seka, jog Balaguerio ir Beallo pasiūlyti atsakymai į Benacerrafo–Fieldo problemą iš tikrųjų į ją neatsako, kadangi problema išlieka logikos lygyje. Taip pat reikšminga, kad logikos lygyje problemos nebegalima išspręsti, taikant tą pačią autorių siūlomą strategiją. Negalima įsitikinimų apie logiką patikimumo aiškinti per logiką, kadangi būtų susiduriama su ydingu ratu.

Pliuralistinio platonizmo teorijoms taip pat kyla abstrakčių matematinių esinių apibrėžimo problema. Šią problemą galima išreikšti klausimu: „ar yra (vienas) objektyvus būdas apibrėžti matematinius esinius?“ Toks apibrėžimas reikalingas tam, kad galima būtų atskirti tiesiog abstrakčius esinius nuo matematinių ir taip išvengti problemos, kad matematinės teorijos mus įpareigoja milžiniško kiekio įprastai matematiniais nelaikomų abstrakčių esinių egzistavimui. Literatūroje galima rasti bandymų apibrėžti, kuo, lyginant su kitais abstrakčiais esiniais, pasižymi būtent matematiniai esiniai. Pavyzdžiui, anot Linskio ir Zalto, „matematiniai objektai išsiskiria tuo, kad jie koduoja tik struktūrines, matematines savybes“ (1995, p. 545). Tačiau negalima apibrėžti matematinius esinius kaip koduojančius tik matematines savybes, nes būtų susiduriama su ydingu ratu, todėl iš Linskio ir Zaltos apibrėžimo lieka tik matematinių esinių apibrėžimas per struktūrines savybes. Panašus apibrėžimas randamas ir pas Shapiro, kur teigiama, kad kalbant iš *ante rem* struktūralizmo pozicijos, grynoji matematika turi reikalą su *nepriklausomomis* (*freestanding*) struktūromis, kurios pasižymi formaliais santykiais (*formal relations*) (1997, p. 105). Matematinių struktūrų nepriklausomumas šioje vietoje reiškia, jog tam, kad objektai galėtų užimti pozicijas tose struktūrose, jie neprivalo turėti kokias nors papildomas nestruktūrines savybes. Paėmus pavyzdį iš aritmetikos, bet koks objektas gali užimti skaičiaus 6 poziciją natūraliųjų skaičių sistemoje, su sąlyga, kad tas objektas struktūriškai *eina po* (*is the successor*) skaičiaus 5 poziciją užimančio objekto. Santykių formalumas struktūrose, tuo tarpu, nurodo į tai, kad tuos santykius galima pilnai apibrėžti aukštesnės eilės kalboje, naudojant tik tokią terminiją, kuri *išreiškia Tarskio–logines sąvokas* (*Tarski–logical notions*) bei kitus objektus ir santykius sistemoje, kai kiti objektai bei santykiai taip pat yra visiškai apibrėžti.

Tačiau bandant suformuluoti tinkamą matematinio esinio apibrėžimą, susiduriama su dviem sunkumais: (1) toks apibrėžimas neturėtų būti primetamas proto, bet būti objektyvus ir (2) toks apibrėžimas turi pasižymėti pakankamu griežtumu, kad juo remiantis matematika mūsų neįpareigotų intuityviai nematematinių abstrakčių esinių egzistavimui. Kalbant apie pirmąjį sunkumą, kaip buvo minėta, platonizmo rėmuose matematinės tiesos yra atrandamos, o ne sukuriamos proto. Mes negalima laisvai nutarti, kas yra abstraktūs matematiniai esiniai, kadangi jų apibrėžimas turi būti patikimas ir objektyvus. Dėl šios priežasties čia vėl iškyla Benacerrafo–Fieldo problema, nes abstrakčių matematinių esinių apibrėžimas irgi gali būti traktuojamas kaip įsitikinimas apie abstrakčią matematinę tikrovę. Dėl to, kad vėl susiduriama su epistemologine įsitikinimų patikimumo problema, galima vėl taikyti pliuralizmo ir monizmo skirtį, arba užklausti, ar matematinius esinius galima apibrėžti tik vienu objektyviai teisingu būdu, ar galimi skirtingi, skirtingoms matematinės tikrovės dalims galiojantys apibrėžimai. Priėmus monizmą, susiduriama su monistiniam platonizmui kylančiais sunkumais. Tačiau priėmus pliuralistinę poziciją, prarandamas matematikos įpareigojimo matematinių esybių egzistavimui intuityvumas. Šis intuityvumas prarandamas dvejomis prasmėmis.

Pirma prasme, pliuralistinė pozicija stipriai išpučia matematikos ontologinio įsipareigojimo mąstą. Kiekvienas papildomas matematinio esinio apibrėžimas, jei jis yra priimamas kaip teisingas, reiškia didesnio kiekio abstrakčių esinių egzistavimo pripažinimą. Nors Balagueris mano, jog dėl pliuralizmo aiškinamosios galios jam negalima taikyti Okamo skustuvo, tačiau dėl skirtingų (galimai tarpusavyje nesuderinamų) matematinio esinio apibrėžimų pripažinimo išaugęs matematikos ontologinis įsipareigojimas neišvengiamai sukelia Davido Lewiso *modalinio realizmo* atvejui analogišką *nepatiklų žvilgsnį* (*incredulous stare*). Analogiškai modaliniam realizmui, matematinis pliuralizmas ir ypač matematinių esinių apibrėžimo pliuralizmas prieštarauja sveiko proto pozicijai egzistuojančių esinių atžvilgiu.

Tačiau įtaigesnė antra prasmė, kuria matematikos įpareigojimas abstrakčių esinių egzistavimui praranda savo intuityvumą. Čia atkreipiamas dėmesys į tai, kad priėmus pliuralizmą matematinio esinio apibrėžimo atžvilgiu, dėl to, kad šie apibrėžimai gali prieštarauti vienas kitam (sekant Balaguerio ir Beallo teiginiais apie galimas teisingas matematines teorijas), matematika mūsų reikalaus įsipareigoti egzistavimui tokių abstrakčių esinių, kurių mes įprastai nelaikome matematiniais. Galima pasitelkti šachmatų pavyzdį. Tuo atveju, jei mes šachmatų taisykles interpretuosime platonistiškai ir teigsime, kad žaidimo taisyklės yra atrandamos, būtinai ir nuo proto nepriklausomai egzistuojančios, per jusles nepažįstamos abstrakčios struktūros, jos atitiks aptartus Shapiro bei Linskio ir Zaltos pateikiamus matematinio esinio apibrėžimus. Šachmatų taisyklės gali būti traktuojamos kaip nepriklausomos struktūros su formaliais santykiais jose. Tačiau šachmatai yra tik vienas galimas pavyzdys, kurių galima suformuluoti be galo daug. Turint omenyje, kad pliuralizmas matematinių esinių apibrėžimo atžvilgiu neprivalo būti niekaip ribojamas (remiantis Balaguerio ir Beallo idėjomis apie pliuralimą, apibrėžimai gali prieštarauti vienas kitam, galimai net būti vidujai prieštaringi), mes galime daug tradiciškai matematika nelaikomų dalykų laikyti matematika. Tačiau idėja, kad matematika mus įpareigoja priimti egzistavimą įprastai matematiniais nelaikomus esinius, vėlgi, prieštarauja sveiko proto intuicijoms.

Bandant išvengti šios pliuralizmui iškylančios problemos, galima būtų priimti prielaidą, jog mes operuojame intuityviu eksplicitiškai neišreiškiamu matematinių esinių apibrėžimu. Tačiau, kaip jau buvo minėta, bet kokios intuicijos matematikos atžvilgiu susiduria su Benacerrafo–Fieldo problema, todėl tokia strategija nėra mažiau problemiška.

Bendrai parodžius sunkumus, su kuriais susiduria platonizmas, kai pliuralistinė pozicija priimama ne tik prieštaraujančių viena kitai matematinių teorijų atžvilgiu, bet ir matematinių teorijų patikimumą grindžiančių loginių principų bei matematinių esinių apibrėžimų atžvilgiu, pasimato pliuralizmo prielaidos problemiškumas matematiniam platonizmui. Plačiau taikoma pliuralistinė pozicija ne tik neišsprendžia Benacerrafo–Fieldo problemos, bet dar ir sukelia papildomų sunkumų matematiniam platonizmui.

1.2. Tradicinių matematinio konvencionalizmo teorijų problemos

Šiuolaikinė konvencionalizmo pozicija matematikoje ir logikoje susiformavo pirmoje XX a. pusėje. Šis požiūris buvo itin populiarus tarp loginio pozityvizmo bei kitų empiristinių filosofijos krypčių atstovų, tokių kaip Rudolfas Carnapas, Hansas Reichenbachas, Ernestas Nagelis, Alfredas J. Ayeris bei Carlas Hempelis. Kaip pastebi Jaredas Warrenas, bandant apibrėžti pamatinius konvencionalizmo logikoje ir matematikoje aspektus, susiduriama su problema, jog istoriškai konvencionalizmo atstovai neturėjo vieningos teorijos (2020, p. 3). Remiantis Warrenu, galima išskirti tris skirtingas konvencionalizmo versijas. Pirmąją versiją Warrenas pavadina „deskriptyviuoju konvencionalizmu“ ir teigia, jog remiantis šia teorija logikos teiginiai konstatuoja faktus *apie* mūsų loginių žodžių (pavyzdžiui, „ir“, „netiesa“ ir „jeigu“) vartoseną, o matematikos teiginiai konstatuoja faktus *apie* mūsų matematinių žodžių (pavyzdžiui, „plius“, „nulis“, „aibė“) vartoseną (ibid, p. 7). Iš tokios pozicijos perspektyvos galima interpretuoti Ayerio darbe *Language, Truth, and Logic* randamą teiginį, kad logikos bei matematikos tiesos paprasčiausiai fiksuoja mūsų sprendimą vartoti žodžius tam tikru būdu (1952, p. 84). Warrenas atkreipia dėmesį, jog pats Ayeris atmetė tokią jo pozicijos interpretaciją, kadangi ji apriorinius logikos ir matematikos teiginius traktuoja kaip empirinius teiginius. Tokio pobūdžio deskriptyvusis konvencionalizmas problemiškas, kadangi remiantis juo loginė tiesa „dabar lyja arba dabar nelyja“ turėtų būti laikoma ekvivalentiška sakiniui „‚dabar lyja arba dabar nelyja‘ yra tiesą išreiškiantis sakinys“. Problema kyla dėl to, kad tada *a priori* būtina loginė tiesa turėtų būti ekvivalentiška *a posteriori* atsitiktinei tiesai. Warrenas atkreipia dėmesį, kad ekvivalenčios šios tiesos gali būti tik silpna prasme, jei sutampa jų teisingumo reikšmės (2020, p. 7). Tačiau šių teiginių prasmės skiriasi, todėl ekvivalencija stipresne prasme nėra galima. Minėtasis prasmių skirtumas gali būti grindžiamas tuo, jog mes nelaikome logikos ir matematikos teiginių teiginiais apie empirinę tikrovę ir todėl deskriptyviojo konvencionalizmo pozicija atrodo nepriimtina.

Antroji Warreno išskiriama galima pozicija yra „nekognityvistinis konvencionalizmas“ (*non–cognitivist conventionalism*). Remiantis šia pozicija, matematikos bei logikos teiginiai tėra lingvistinės taisyklės (ibid, p. 8). Nekognityvistinis konvencionalizmas, vėlgi, prieštarauja sveiko proto intuicijai, kadangi taisyklės negali būti teisingos arba klaidingos, priešingai nei matematikos ar logikos teiginiai. Kaip pastebi Warrenas, tokiu atveju šiai pozicijai kyla vadinamoji *Fregės–Geacho problema*: paaiškinti, kaip galima suderinti neasertorinį tam tikros diskurso atšakos aiškinimą su tuo, kad tam tikrame kontekste duotojo diskurso sakiniai gali išreikšti teisingus arba klaidingus teiginius. Ši problema kyla, pastebint, kad į sudėtingesnes konstrukcijas patalpintos normatyvinės išraiškos gali nebeišreikšti pozicijos arba reikalavimo. Pasitelkiant pavyzdį iš etikos, sudėtingesnės konstrukcijos atveju galėtų būti dedukcija:

(P1) Žudyti yra blogai.
(P2) Jei žudyti yra blogai, žudikus reikia bausti.
(I) Žudikus reikia bausti.

Kaip atkreipia dėmesį Jackas Woodsas, jei (P1) traktuojamas ne kaip dalykų padėtį aprašantis sakinys, bet kaip vertinimas, tada „žudyti yra blogai“ turi skirtingas prasmes (P1) ir (P2) ir iš jų negalima išvesti (I) (2018, p. 227). Matematikos bei logikos teiginius traktuojant kaip lingvistines taisykles, taipogi problemiška atrodo paaiškinti, kaip šie teiginiai gali dalyvauti išvedimuose. Warrenas atkreipia dėmesį, jog net nelaikant pačių matematikos bei logikos teiginių lingvistinėmis taisyklėmis, bet tik traktuojant tuos teiginius kaip *nurodymus* (*prescriptions*), kokias lingvistines taisykles reikėtų priimti, vis vien Fregės–Geacho problema lieka (2020, p. 8).

Vienas galimų būdu vis dėlto pateisinti nekognityvinį konvencionalizmą yra apskritai atsisakyti įsitikinimo, jog matematikos ar logikos sakiniai gali turėti teisingumo reikšmę. Tokią poziciją siūlo Yemima Ben–Menahem, kuri teigia, jog didžiausia sutinkama konvencionalizmo tyrėjų klaida yra konvencionalizmo susiejimas su *tiesos pagal konvenciją* (*truth by convention*) samprata (2006, p. 1). Kildindama matematinį konvencionalizmą iš Henrio Poincaré ir Davido Hilberto geometrinio konvencionalizmo Ben–Menahem teigia, jog konvencionalizmas nekildina matematinių teiginių teisingumo iš konvencijų. Anot Ben–Menahem, konvencionalizmas iš tikrųjų atmeta būtinas tiesas (pavyzdžiui, matematikos ar logikos), pakeisdamas jas konvencijomis (ibid, p. 2). Tokios pozicijos besilaikančiam konvencionalistui tiesa tada yra susieta tik su empiriniais faktais. Anot Warreno, nors ši pozicija išvengia didelės dalies kitoms konvencionalizmo versijoms kylančių problemų, tačiau ji nepatenkina intuityvaus lūkesčio, jog matematikos bei logikos teiginiai vis dėlto išreiškia tiesas (2020, p. 9). Mes laikome aritmetikos bei geometrijos teiginius tiesomis, todėl, net jei istoriškai konvencionalizmas atmetė *a priori* būtinas tiesas, anot Warreno, tokia teorija nėra priimtina. Dėl šios priežasties, Warrenas atmeta nekognityvistinį konvencionalizmą ir jo tezę, jog tarp matematikos bei logikos teiginių ir lingvistinių konvencijų yra tapatybės santykis.

Trečiąją konvencionalizmo matematikoje ir logikoje sampratą Warrenas vadina „aiškinamąja" (*explanatory*) (ibid, p. 9). Warrenas teigia, jog būtent aiškinamoji konvencionalizmo samprata yra pranašiausia, kadangi ji geriausiai suderinama su mūsų intuicijomis apie matematiką bei logiką ir sėkmingiausiai išvengia kitoms konvencionalizmo sampratoms kylančių problemų. Aiškinamasis konvencionalizmas atmeta, kad santykis tarp lingvistinių konvencijų bei matematinių ar logikos teiginių yra deskriptyvus arba kad tas santykis yra tapatybė. Verčiau, anot Warreno, kalbinės konvencijos *paaiškina* matematikos bei logikos teiginių teisingumą bei būtinumą. Tokia prieiga taip pat geriausiai suderinama su filosofijos istorijoje sutinkama tiesos grindimo per konvenciją koncepcija. Dėl šių priežasčių vėlesniuose skyriuose dėmesys bus skirtas būtent aiškinamojo konvencionalizmo sampratai ir bus plačiai nagrinėjami jo pranašumai bei jam kylančios problemos.

Istoriškai viena svarbiausių problemų konvencionalizmui yra priekaištas, kad nors konvencijos gali lemti, kokį teiginį išreiškia tam tikras sakinys, tačiau konvencijos negali lemti to teiginio teisingumo ar klaidingumo (Warren 2015a, p. 85). Ši problema bendrai kritikuoja *konvencijų steigiamos tiesos* idėją, nepriklausomai nuo to, ar kalbame apie „teiginius", „faktus" ar „dalykų padėtis". Aptardamas šią problemą Paulas Boghossianas užklausia, kaip gali tik iš fakto, kad S reiškia p, sekti, kad S yra tiesa, jeigu kartu nepasakoma, kad p yra tiesa? (1996, p. 364–365). Anot Boghossiano, negalima teigti, kad kas nors tampa tiesa dėl to, kad mes suteikiame sakiniui tam tikrą prasmę. Theodore'as Sideras taip pat atkreipia dėmesį į šią problemą, teigdamas, kad mano *pasisakymas* (*pronouncement*) gali padaryti teisingu sakinį apie mano pripažįstamas konvencijas, bet pasisakymas negali paveikti dalykų padėties pasaulyje (2005, p. 201). Warrenas duotąjį argumentą formaliai išreiškia taip:

1. $\Box$(sakinys S yra teisingas $\leftrightarrow$ $\exists$p(p yra teiginys & S reiškia p & p));
2. $\forall$p $\neg$lingvistinės konvencijos *lemia* (*make it the case*), kad p;
3. Tad: $\neg$lingvistinės konvencijos lemia, kad sakinys S yra teisingas (1, 2) (2020, p. 175).

Samprotavimo išvada, anot Warreno, turėtų tiesiogiai paneigti konvencionalizmą ir pačią konvencijų steigiamos tiesos idėją.

Konvencionalizmo versijoms, besiremiančioms *neriboto inferencializmo* (*unrestricted inferentialism*) principu, taip pat susiduria su Arthuro N. Prioro pristatytu „Tonk" argumentu. Neribotas inferencializmas teigia, (1) *kad bet koks išraiškos vartojimą apibrėžiantis taisyklių rinkinys gali apibrėžti duotosios išraiškos prasmę ir* (2) *kad prasmę apibrėžiančios taisyklės yra automatiškai pagrįstos* (*automatically valid*) (ibid, p. 56, 199). Prioras savo argumente pastebi, jog jei išvedimo taisyklių pagrįstumas tiesiog kildinamas iš tose taisyklėse vartojamų išraiškų prasmės, tada įmanoma suformuluoti tokias pagrįstas išvedimo taisykles, remiantis kuriomis formalioje sistemoje bus įmanoma įrodyti bet kokį teiginį (1960, p. 38–39). Pavyzdžiui, priėmus dvi naujas išvedimo taisykles, apibrėžiančias naują operatorių „tonk“, mes galime gauti naują dirbtinę *tonkišką* kalbą. Šios dvi papildomos taisyklės bus:

$$(tI)\,\frac{\varphi}{\varphi\ tonk\ \gamma} \qquad\qquad (tE)\,\frac{\varphi\ tonk\ \gamma}{\gamma}$$

Problemiška tai, kad naudojant šias taisykles jas pripažįstančioje kalboje galima trivialiai įrodyti bet kokius teiginius, net akivaizdžiai klaidingus. Todėl problemiška laikyti tokias taisykles automatiškai pagrįstomis ir įtraukti jas į mūsų kalbą. Dėl to, remiantis Prioro argumentu, neriboto inferencializmo neturėtų būti laikomasi.

Severinas Schroederis taip pat aptaria standartinius ankstyvosioms ir nepakankamai išvystytoms konvencionalizmo teorijoms iškeliamus priekaištus (2018, p. 84). Pirmasis iš šių priekaištų – Quine’o teiginys, kad konvencionalistinis logikos aiškinimas susiduria su ydingo rato problema (1964b, p. 342). Nors ši kritika tiesiogiai nenutaikyta prieš matematinį konvencionalizmą, tačiau ji yra aktuali ir pastarajam, kadangi be loginio konvencionalizmo paaiškinimo suprobleminamas ir matematinis konvencionalizmas. Darbe *Truth by Convention,* Quine’as vertina galimybę aksiomatiškai, arba konvencionaliai apibrėžti konkrečių loginių idiomų (pavyzdžiui, „jei“ idiomos) funkcionavimą. Anot Quine’o, tokiu atveju susiduriama su ydingu ratu, nes toks konvencinis loginių išraiškų aiškinimas pats reikalauja šių idiomų (ibid, p. 343). Pavyzdžiui, bandydami apibrėžti idiomą „jei“ ir ją išreikšdami simboliu „⊃“, mes galime teigti, kad *jei* „p“ išreiškia tiesą ir „q“ išreiškia tiesą, *tai* „p⊃q“ išreiškia tiesą. Šiame pavyzdyje matosi, kad duotosios idiomos apibrėžime naudojama ji pati, kas nurodo į ydingą ratą[3]. Anot Schroederio, Quine’o mintis yra ta, kad mes negalime paaiškinti logikos sąvokų, nesinaudodami logikos sąvokomis (2018, p. 86). Bendrai ši Quine’o kritika parodo, jog problemiškos logikos konvencionalizmo teorijos, anot kurių mes per kalbą konvencionaliai steigiame logikos tiesas, kadangi pati kalba numato logiką.

Kitas populiarus priekaištas konvencionalizmui, kurį aptaria Schroederis, yra Michaelo Dummetto teiginys, jog konvencionalizmas negali paaiškinti loginio išvedimo (ibid, p. 89). Dummetto kritika nukreipta prieš loginių pozityvistų ginamą „modifikuoto konvencionalizmo“

[3] Quine’as atkreipia dėmesį, jog ydingo rato problema kyla, bandant būtent schematiškai apibrėžti loginių idiomų funkcionavimą, t. y. kai apibrėžiama tam tikrą idiomą naudojantį sakinio struktūra (1964b, p. 344). Toks apibrėžimas patrauklus tuo, jog konvencija čia steigiama schemos lygmenį ir tada begalės tą pačią schemą atitinkančių sakinių teisingumas seka iš bendros schemos teisingumo. Quine’as pastebi, jog jei teisingumo reikšmės būtų konvencionaliai po vieną priskiriamos kiekvienam sakiniui, kuriame vartojama tam tikra idioma, minėtoji ydingo rato problema nekiltų. Tačiau, kaip teigia Quine’as, tokia prieiga nėra galima, nes teisingų tam tikrą struktūrą atitinkančių logikos sakinių yra begalybė ir mes negalime konvencionaliai po vieną steigti kiekvieno iš jų teisingumo.

poziciją, jog tik kai kurios būtinos tiesos kyla iš konvencijų, o visos kitos gali būti išvestos iš pirmųjų (Dummett 1964, p. 494). Kaip teigia Dummettas, tokia pozicija netenka visų konvencionalizmo privalumų, kadangi ji nepaaiškina statuso teiginio, kad iš tam tikrų konvencijų turi sekti tam tikros išvados. Michaelas Wriglis, aptardamas Dummetto kritiką, pastebi, kad konvencionalizmo pirminis patrauklumas kilo iš epistemologinės būtinų tiesų paslapties išsprendimo (1980, p. 474). Tačiau konvencionalizmas netenka šio privalumo, kadangi jis negeba paaiškinti tiesos, kad iš tam tikrų konvencijų seka tam tikros išvados, būtinumo, kadangi, anot Wriglio, ši tiesa nėra paprasta konvencija. Nors ši kritika, vėlgi, nėra tiesiogiai nutaikyta prieš konvencionalistinį matematikos aiškinimą, tačiau nepateikus konvencionalaus loginio išvedimo paaiškinimo, negalima paaiškinti, kaip iš konvenciškai priimtų matematikos sakinių galima išvesti kitus matematikos sakinius taip, kad jų teisingumas vis vien liktų pagrįstas tik konvencija. Tad be atitinkamo loginio išvedimo konvencinio paaiškinimo, konvencionaliai neišeina pagrįsti visų matematikos sakinių teisingumo.

Dar vienas tradicinis priekaištas konvencionalizmui, kurį aptaria Schroederis, yra Wittgensteino įkvėptas skepticizmas konvencionalių semantinių taisyklių atžvilgiu, kurį išsakė Dummettas ir Wrightas. Anot Wrighto, Wittgensteinas teigė, jog niekada nėra *iš anksto nustatyta*, ar tam tikra sąvoka yra naudotina konkrečiu duotu atveju ir koks yra duoto matematinio skaičiavimo rezultatas (1980, p. 22). Kaip teigia Schroederis, problema, kuri čia yra iškeliama, yra, kaip gali *bendros* sąvokos, nulemti jų taikymą *konkrečiais* atvejais (2018, p. 94). Remiantis Wrighto pateikta Wittgensteino interpretacija, niekad nėra iš anksto nustatyta, ką reikėtų laikyti tam tikros duotosios konvencijų aibės išvada. Dummettas palaiko šią Wittgensteino interpretaciją ir teigia, kad tokiu atveju mums lieka tik *radikalaus konvencionalizmo* (*radical,* arba *full–blooded convenctionalism*) versija, kur būtų teigiama, kad loginė kiekvieno sakinio būtinybė visada yra tiesioginė lingvistinės konvencijos išraiška (1964, p. 495). Remiantis radikaliuoju konvencionalizmu, duotojo sakinio būtinumą visad lemia mūsų viešas sprendimas tą sakinį laikyti neginčytinu. Kitaip tariant, priimtų konvencijų aibė nepagrindžia iš jų išvedamų sakinių būtinumo. Kaip teigia Dummettas, radikalaus konvencionalizmo rėmuose kiekvieno naujo skaičiavimo ar išvados atveju mes esame laisvi tą išvadą ar skaičiavimą priimti arba atmesti. Tačiau, kaip pastebi Schroederis, radikalus konvencionalizmas yra problemiškas tuo, kad jis yra empiriškai klaidingas, kadangi jis neatitinka matematinės praktikos (2018, p. 94). Pasitelkus aritmetikos pavyzdį, galima klausti, kaip aš galiu pagrįsti, kad kitas po skaičiaus 6 sekantis natūralus skaičius yra skaičius 7? Galima būtų teigti, kad šis faktas yra pagrįstas konkrečia konvencija, kuri man buvo pristatyta mokytojos mokykloje arba aritmetikos vadovėlyje. Tačiau toks paaiškinimas negalimas sakinio „2019567 × 51799665 = 104612894045055” atveju. Aš negaliu teigti, kad šis sakinys yra teisingas dėl to, kad visi sutarė jį laikyti teisingu, kadangi aš nesu susidūręs su šiuo konkrečiu sakiniu anksčiau. Matematinėje praktikoje apskritai nėra praktikos archyvuoti teisingais laikytinus ir nelaikytinus sakinius. Taip pat nuo to, ar aš duotąjį sakinį dabar laikau teisingu, nepriklausys, ar ateities matematikai galės pagrįsti jo teisingumą. Priešingai, duotąjį sakinį matematikai laiko teisingu, kadangi jie įsitikinę, kad sakinyje pateikiamas rezultatas gaunamas teisingai atlikus daugybos procedūrą. Šis pavyzdys iliustruoja, kad radikalus konvencionalizmas prieštarauja matematinei praktikai. Dėl šios priežasties, remiantis Dummettu bei Wrightu, skepticizmas atžvilgiu to, kad bendrosios sąvokos gali lemti jų taikymą konkrečiais atvejais, paneigia tiek modifikuotą, arba *kuklų* (*modest*) konvencionalizmą, tiek radikalią konvencionalizmo versiją.

II. E. N. Zaltos ir J. Warreno teorijų pranašumų prieš tradicines teorijas analizė

Išanalizavus tradicinėms matematinio platonizmo bei konvencionalizmo teorijoms kylančias problemas, šių problemų pagrindu galima įvertinti Zaltos bei Warreno pasiūlytų teorijų privalumus. Pagrindus šių teorijų pranašumus prieš tradicines teorijas, galima bus laikyti jas patraukliausiomis ir todėl geriausiai reprezentuojančiomis matematinio platonizmo bei konvencionalizmo pozicijas. Įrodžius Zaltos ir Warreno teorijų pranašumą taip pat galima bus įvertinti, kokių prielaidų sėkmingam problemų išvengimui stokojo tradicinės teorijos. Šios prielaidos tada bus laikomos pamatinėmis platonizmui ir konvencionalizmui.

2.1. E. N. Zaltos matematinio platonizmo teorijos pranašumai

Kaip buvo minėta, Zaltos teorija priklauso prie pliuralistinio platonizmo teorijų grupės. Tačiau Zaltos siūloma versija pasižymi tuo, jog ji operuoja kitokia nei tradicinė abstrakčių objektų samprata. Linskis ir Zalta pastebi, kad dauguma platonizmo atstovų supranta abstrakčių objektų objektyvumą bei nepriklausomybę nuo proto, perimdami šiuo tris fizinių objektų bruožus: (1) fiziniams objektams galioja *rodymosi* (*appearance*) bei *tikrovės* (*reality*) skirtis, (2) fiziniai objektai pasižymi *negausumu* (*sparseness*) ir (3) savybių atžvilgiu fiziniai objektai yra *pilni* (*complete*) (1995, p. 532). Visi šie bruožai grindžia fizinių objektų objektyvumą ir nepriklausomybę nuo proto. Kalbant apie rodymosi ir tikrovės skirtį, mes tiesiogiai nepažįstame viso fizinio objekto per tai, koks jis mums pasirodo, nes fiziniai objektai turi kitą pusę, kurios mes nematome. Fizinių objektų savybių žinojimas taip pat neįmanomas iki empirinio to objekto tyrimo. Tuo tarpu negausumas, kuriuo pasižymi fiziniai objektai, nurodo į tai, kad mes negalime teigti šių objektų egzistavimo iki tol, kol mes juos atradome. Galiausiai fizinių objektų pilnumas nurodo į tai, kad fiziniai objektai yra apibrėžti kiekvienos savybės atžvilgiu, – kiekvienos fizinės savybės F atžvilgiu, fizinis objektas x arba pasižymi šia savybe, arba jos neigimu.

Zaltos platonizmas atsisako abstrakčių objektų apibrėžimo per analogiją su fiziniais objektais. Vietoje to abstrakčių objektų nepriklausomybė nuo proto ir objektyvumas grindžiamas *apimties principais* (*comprehension principles*), arba bendrais egzistavimo teigimais, kurie apibrėžia, kokios sąlygos specifikuoja tam tikros rūšies objektą (ibid, p. 533). Konkretus apimties principas, kuriuo remiasi Zaltos matematinio platonizmo teorija, teigia, jog *kad ir kokiomis savybėmis apibrėžiamas tam tikras abstraktus objektas, yra toks objektas, kuris koduoja (encodes) būtent tas savybes* (forthcoming, p. 9–10). *Kodavimas* čia aiškinamas kaip tradiciniam *egzemplifikavimui* (*exemplification*) priešingas predikavimo būdas. Šis predikavimo būdas pasirenkamas todėl, kad, remiantis Linskiu ir Zalta, abstraktūs objektai vienu metu gali koduoti nesuderinamas fizines savybes (pavyzdžiui, buvimą trikampiu ir penkiakampiu), kurių neįmanoma vienu metu egzemplifikuoti

(1995, p. 537, 32 išnaša). Zalta taip pat prideda, jog daugiau nei vienas abstraktus objektas negali koduoti identiško savybių rinkinio, tad skirtingi abstraktūs objektai privalo skirtis bent viena jų koduojama savybe (forthcoming, p. 10). Apimties principu paremtas Zaltos platonizmas taip pat pripažįsta *abstrakčių santykių egzistavimą* (ibid, p. 12). Pastarieji kaip savybes koduoja santykius ir irgi yra traktuojami kaip abstraktūs esiniai. Matematikos teiginiai, anot Linskio ir Zalto, turėtų būti suprantami kaip beviėčiai predikatai, arba *bevietės savybės* (*0–place properties*), kadangi taip gali būti užtikrinama, kad kiekvieną matematinį teiginį koduoja abstraktus esinys (Linsky ir Zalta 1995, p. 538). Iš to seka, jog Zaltos platonizmo teorija matematikos teorijas per paskirus teiginius susieja su individualiais abstrakčiais objektais, kurie koduoja tuos teiginius (Zalta forthcoming, p. 10).

Nauja Zaltos abstrakčių matematinių objektų samprata išlaiko esminius tradicinės sampratos elementus. Pavyzdžiui, matematiniai objektai čia taip pat esmiškai skiriasi nuo materialių objektų (Linsky ir Zalta 1995, p. 541). Matematiniai objektai negali egzemplifikuoti tokių fizinių savybių, kaip forma, spalva, svoris, plotis. Jie yra anapus laiko ar erdvės, todėl jiems nebūdingas atsiradimas ar irimas. Matematiniai objektai taip pat būtinai egzistuoja[4], todėl į juos referuojančios matematinės tiesos taip pat yra būtinos. Zaltos platonizmas taip pat išlaiko galimybę matematinius objektus aiškinti kaip individualius objektus ir tokiu būdu išlaikyti sveiko proto intuiciją, kad singuliariniai matematinių teorijų terminai žymi individualius matematinius objektus. Tačiau Zaltos teorija taip pat išvengia objektinio platonizmo problemų, teigdama, kad matematiniai objektai pasižymi tuo, jog jie koduoja visas jų *struktūrines savybes* ir tik jas (ibid, p. 545). Tai reiškia, kad Zaltos teorijoje įmanoma patenkinti intuiciją, kad matematiniai objektai yra konkretūs individualūs objektai, o ne struktūros, tačiau dėl to, kad šie objektai apibrėžiami pagal jų vietą struktūroje, arba jų struktūrines savybes, galima kalbėti apie matematiką ir kaip apie struktūrų tyrimą.

Linskis ir Zalta teigia, kad abstrakčių matematinių esinių nepriklausomybė nuo proto kyla iš jų pristatomo apimties principo objektyvumo (ibid, p. 552). Anot Linskio ir Zalto, jų pateikiamas apimties principas yra sintetinis ir žinomas *a priori* (ibid, p. 547). Jis yra sintetinis todėl, kad jis teigia

[4] Zaltos abstraktiems esiniams suteikiamas ontologinis statusas nėra vienareikšmis. Viename iš ankstesnių savo veikalų, Zalta teigia, kad objektas x yra abstraktus, jei ir tik jei jis neegzemplifikuoja *egzistavimo* savybės (1983, p. 12). Sprendžiant iš šio kriterijaus, ankstyvuosiuose veikaluose Zalta pasitelkia ontologinį pliuralizmą, teigdamas, kad fiziniai objektai *egzistuoja*, o abstraktūs objektai tik *yra*. Vėlesniuose autoriaus tekstuose šio kriterijaus nėra. Tarpiniame tekste, skirtame būtent platonizmo problematikai, Zalta kalba būtent apie abstrakčių objektų *egzistavimo* grindimą (Linsky ir Zalta 1995, p. 536, 537, 542). Galiausiai, paskutiniame savo tekste Zalta teigia, jog vėlesni jo tekstai pateikia patobulintą ir todėl geresnę matematikos analizę (forthcoming, p. 10, 12 išnaša). Kartu paskutiniame tekste Zalta teigia, jog apimties principą galima interpretuoti tiek kaip įpareigojantį abstrakčių esinių egzistavimui (naudojant jį platonizmo kontekste), tiek kaip neįpareigojantį jų egzistavimui (naudojant jį nominalizmo kontekste) (ibid, p. 28–30). Iš to galima daryti išvadą, kad nors Zaltos teorijos rėmuose apimties principą galima interpretuoti nominalistiškai, platonizmo kontekste jis įpareigoja abstrakčių objektų egzistavimui, o ne tik buvimui.

tam tikras savybes koduojančių esinių egzistavimą ir jo teisingumas nekyla iš jo paties apibrėžimo. Taip pat principas yra *a priori* žinomas, nes jo negalima patvirtinti ar paneigti empiriniais metodais. Savo ruožtu, apimties principo teisingumas grindžiamas tuo, kad šis principas yra dalis logikos, kuri būtina tinkamai mokslinių teorijų analizei (ibid, p. 549, 552). Šis būtinumas grindžiamas tuo, kad apimties principas kartu su savybių kodavimo logika yra svarbi dalis bendros loginės sistemos, kuri būtina tinkamai natūralios kalbos ir išvedimo analizei. Natūralios kalbos analizė, savo ruožtu, būtina mokslinės kalbos ir mokslinio mąstymo apskritai analizei, kadangi mokslinė kalba perima iš kasdienės kalbos kategorijas bei intensionalų kalbėjimo būdą (pavyzdžiui, kalbėjimą apie ateitį, apie galimybes, apie skirtį tarp faktų bei fikcijų ir t. t.). Apimties principas, savo ruožtu, būtinas natūralios kalbos analizei dėl to, kad, Linskio ir Zaltos manymu, jis reikalingas adekvačiai matematinės kalbos ir loginio išvedimo analizei (ibid, p. 549). Pabrėžtina, jog Linskis ir Zalta taip pat pripažįsta, kad galimi ginčai dėl jų ginamo apimties principo pranašumo prieš kitus matematinės kalbos analizavimo būdus, todėl *a priori* apimties principo pobūdis neužtikrina jo teisingumo.

Pagrindinis Zaltos platonizmo versijos pranašumas prieš tradicinį matematinį platonizmą tas, jog Zaltos teorija išvengia epistemologinio matematinių įsitikinimų patikimumo klausimo. Zaltos teorijoje, referavimas į matematinius esinius griežtai remiasi tik tų esinių apibrėžimu (ibid, p. 546). Apimties principas tokiu atveju užtikrina, kad egzistuoja abstraktūs esiniai, atitinkantys mūsų suformuluotus šių esinių apibūdinimus. Matematinių teiginių tiesa tokioje teorijoje, griežtai tariant, nepriklauso nuo abstrakčios matematinės plotmės, kaip tradicinėse platonizmo versijose. Priešingai, abstrakti matematinė plotmė priklauso nuo mūsų matematinių įsitikinimų. Matematinių teiginių teisingumas grindžiamas galimybe matematinius teiginius analizuoti, remiantis apimties principu. Šis principas, savo ruožtu, užtikrina, kad egzistuoja abstrakti plotmė, kuri atspindi mūsų matematinius įsitikinimus. Tokiu atveju, lyginant su kitomis platonistinėmis matematikos teorijomis, Zaltos teorija pranašesnė tuo, jog jos teikiamas atsakymas į epistemologinę Benacerrafo–Fieldo problemą nereikalauja papildomų stiprių metafizinių prielaidų (pavyzdžiui, sąmonės dualizmo). Paprasčiausiai teigiama, jog patikimam abstrakčių esinių pažinimui tereikia teorijoje pateiktų tų esinių apibrėžimų supratimo (Linsky ir Zalta 1995, p. 547).

Apimties principu paremtas Zaltos platonizmas taip pat pasižymi savo suderinamumu su natūralizmu, arba tokia realistine ontologija, kuri pripažįsta egzistavimą tik tų esinių, kurių reikalauja gamtos mokslų pateikiami aiškinimai (ibid, p. 525). Kaip pastebi Linskis ir Zalta, platonizmo suderinimo su natūralizmu turėtų būti siekiama ne *natūralizuojant platonizmą*, bet veikiau *platonizuojant natūralizmą*. Anot Linskio ir Zalto, šis natūralizmo platonizavimas galimas dėl to, nes apimties principu paremtas platonizmas yra būtinas, norint suprasti gamtos mokslų teorijas, t. y. toks platonizmas yra būtinas pačiam mūsų mokslinių teorijų supratimui (ibid, p. 535).

Galiausiai, kitaip nei prieš tai aptartoms pliuralistinio platonizmo teorijoms, Zaltos platonizmui nėra aktualios minėtos matematinio esinio apibrėžimo bei ontologinio sprogimo problemos. Nors, kaip buvo minėta, Linskis ir Zalta pateikia savo matematinio esinio apibrėžimo variantą, tačiau jų teorijai šis apibrėžimas nėra būtinas. Kaip pastebi autoriai, jų teorija pripažįsta maksimalią abstrakčių esinių ontologiją (ibid, p. 552). Apimties principu paremtas platonizmas neriboja savo ontologijos pagal tai, kiek daug gali būti abstrakčių esinių ir kokios rūšies (matematiniai ar ne) jie gali būti. Potencialiai didelio kiekio skirtingų rūšių abstrakčių esinių egzistavimo pripažinimas gali būti motyvuotas apimties principo būtinumu natūraliai kalbai ir mokslinėms teorijos analizuoti. Tokiu atveju, būtent mūsų natūrali ir mokslinė kalba apibrėžia, kokio kiekio ir kokių abstrakčių esinių egzistavimui mes turime įsipareigoti. Dėl šios priežasties, Zaltos teorijai nekyla Lewiso modaliniam realizmui ir kitoms pliuralistinio platonizmo teorijoms kylančios nepatiklaus žvilgsnio problemos, kadangi mes negalime abejoti ontologija dėl jos dydžio, jei šio dydžio reikalauja mūsų natūrali kalba ir mokslinės teorijos.

2. 2. J. Warreno konvencionalizmo teorijos pranašumai

Anot Warreno konvencionalizmo versijos, logikos ir matematikos teiginius išreiškiančių sakinių teisingumas priklauso nuo ir yra visiškai paaiškinamas mūsų kalbinių konvencijų (2020, p. 137). Pamatinis principas, kuriuo paremtas Warreno konvencionalizmas, yra matematinis bei loginis *inferencializmas*, kuris teigia, kad *matematikos ar logikos teorijoje naudojamų matematinių ar logikos terminų prasmė yra apibrėžiama tos teorijos sintaksinių taisyklių*[5] (ibid, p. 56, 199). Šios sintaksinės taisyklės, savo ruožtu, atspindi duotosios kalbos vartotojų lingvistines praktikas (ibid, p. 26). Taip pat Warrenas priima inferencializmą pastiprinantį „vartojimo dosnumo“ (*charity of use*) principą, jog *visos bazinės* (*basic*) *formalios teorijos sintaksinės taisyklės yra automatiškai pagrįstos ir, taipogi, yra pagrįstos taisyklės, kurių pagrįstumo reikalaują bazinės taisyklės* (ibid, p. 91, 199). Šis principas reikalingas tam, kad būtų užtikrinta, jog bet kokios kokioje nors kalbinėje bendruomenėje priimamos logikos ar matematikos išvedimo taisyklės yra pagrįstos.

Kaip buvo minėta, Warrenas laikosi aiškinamojo konvencionalizmo sampratos, anot kurios lingvistinės konvencijos *paaiškina* matematikos bei logikos teiginių teisingumą bei būtinumą. Remiantis tradicine aiškinimo struktūra, yra faktai[6], kuriuos siekiama paaiškinti (t. y. *explanandum*),

[5] Svarbu, kad Warrenas nebando epistemologiškai pagrįsti savo konvencionalizmo teorijoje naudojamų metasemantinių principų, kurie jungia faktų teisingumą ir pagrįstumą kalboje su sakinių vartojimu. Anot Warreno, galima tikėtis konvencionalistiškai paaiškinti faktus apie loginę tiesą ir pagrįstumą tam tikroje kalboje, tik iš anksto priimant minėtus metasemantinius principus kaip savaime duotus (2020, p. 12).

[6] Warrenas atkreipia dėmesį, jog kalbėdami apie aiškinimą, neprivalome prisirišti prie „faktų“, bet galima kalbėti ir apie „tiesas“ arba tiesiog „dalykus“, kuriuos aiškina kiti „dalykai“ (2020, p. 12).

ir faktai, remiantis kuriais vyksta aiškinimas (t. y. *explanans*). Kaip teigia Warrenas, konvencionalizmas siekia paaiškinti logikos bei matematikos principų teisingumą, loginį teisingumą bei būtinumą ir šis aiškinimas paremtas tik lingvistinėmis konvencijomis konkrečioje kalboje (ibid p. 12). Taip pat svarbu pastebėti, jog šis aiškinimas neprivalo būti kauzalinio pobūdžio, t. y. paaiškinantis faktas neprivalo būti priežastimi fakto, kurį siekiama paaiškinti. Kaip nekauzalinio aiškinimo pavyzdį Warrenas pateikia matematiką, kur mes aiškiname vienus matematinius faktus per kitus matematinius faktus, tačiau tarp jų nėra priežastinio ryšio (ibid, 13). Taipogi svarbu, jog *aiškinimo kontekstai (explanatory contexts)* yra *hiperintensionalūs* (*hyperintensional*), kas reiškia, kad aiškinime keičiant terminus ar sakinius į jiems ekvivalentiškus, gali kisti duotojo aiškinimo teisingumo reikšmė (Daly 2013, p. 282).

Warreno konvencionalizmas nėra nominalistinė pozicija. Priešingai, ši teorija pasižymi realistine stovėsena matematinių esinių ontologijos atžvilgiu ir todėl toks konvencionalizmas suderinamas su platonistine intuicija, kad matematiniai teiginiai referuoja į matematinius esinius. Warreno konvencionalistinės teorijos pranašumas prieš daugumą platonistinių pozicijų ontologijos atžvilgiu tas, kad jo teorijos rėmuose matematinių esinių[7] egzistavimas nėra kontraversiška prielaida, bet veikiau triviali mūsų matematinės kalbos vartojimo pasekmė (2020, p. 213). Kalbant apie matematinių esinių egzistavimą, Warrenas siūlo remtis Quine'o ontologinio įsipareigojimo kriterijumi*, jog būti reiškia būti kintamojo reikšme* (*to be is to be the value of a variable*) (2020, p. 209). Pristatydamas duotąjį kriterijų, Quine'as teigia, jog teorija ontologiškai įsipareigoja tiems ir tik tiems esiniams, į kuriuos turi galėti nurodyti teorijos *apriboti kintamieji* (*bound variables*), kad teorijos *tvirtinimai* (*affirmations*) būtų teisingi (1964a, p. 212). Pasitelkdamas šį kriterijų, Warrenas teigia, kad matematinių esinių egzistavimas trivialiai seka iš mūsų matematinės kalbos vartojimo (2020, p. 213). Dėl to Warreno matematinio konvencionalizmo teorija įsipareigoja tų matematinių esinių egzistavimui, kurių reikalauja mūsų matematinės teorijos.

Warrenas laikosi pozicijos, jog mes neprivalome šių esinių laikyti abstrakčiais, tačiau Quine'o kriterijus lengvai suderinamas su matematiniu platonizmu ir įsitikinimų, kad teorijos apriboti kintamieji nurodo būtent į abstrakčius matematinius esinius[8]. Pastebėtina, jog grindžiant matematinių

---

[7] Kalbėdamas apie matematinį konvencionalizmą Warrenas daugiausiai analizuoja aritmetiką, o kalbėdamas apie realistinę ontologiją Warrenas konkrečiai kalba apie skaičius. Tačiau pats autorius pažymį, jog jo konvencionalistinė prieiga yra turėtų būti pritaikoma visoms grynosios matematikos sritims (2020, p. 281).

[8] Warreno teorija taip pat gali būti suderinta su struktūralizmu, išvengiant objektiniam platonizmui kylančios keleto galimų izomorfiškų modelių problemos. Remiantis Warrenu, struktūralistinis matematikos teorijų aiškinimas gali būti grindžiamas mūsų kalbinėmis praktikomis (ibid, p. 237). Kai kuriais atvejais, pavyzdžiui, aritmetikos, priimta apie skaičius kalbėti būtent kaip apie abstrakčius matematinius objektus. Tačiau anot Warreno, jei mes modifikuotume savo praktikas ir skaičių teoriją interpretuotume struktūralistiškai, toks pokytis konvencionalizmo kontekste nebūtų labai

esinių egzistavimą, Warreno teorija išvengia epistemologinio klausimo panašiai, kaip tai daro Zaltos teorija. Kaip jau buvo minėta, Warreno teorijos rėmuose, mūsų kalbinės konvencijos nurodo į matematinius esinius, kurių egzistavimas steigiamas, remiantis Quine'o kriterijumi. Kaip ir Zaltos teorijos atveju, mūsų įsitikinimų patikimumas abstrakčių esinių atžvilgiu yra grindžiamas principu, kuris abstrakčių matematinių esinių egzistavimą kildina iš jų apibrėžimo teorijos rėmuose. Tačiau Warreno konvencionalistinis ir Quine'o kriterijumi paremtas abstrakčių esinių egzistavimo aiškinimas esmiškai skiriasi nuo Zaltos teorijos tuo, jog Warrenas neteigia matematinių esinių nepriklausomybės nuo proto (ibid, p. 279). Kaip jau buvo minėta anksčiau, Warreno teorijos rėmuose matematinių sakinių teisingumas priklauso tik nuo tų sakinių prasmę apibrėžiančių sintaksinių taisyklių automatiško pagrįstumo, o ne nuo proto nepriklausomos abstrakčios matematinės tikrovės. Dėl šios priežasties Warreno teorija taip pat išvengia Benacerrafo–Fieldo problemos ir šiuo atžvilgiu nelieka pagrindo teigti, kad Zaltos teorija sėkmingiau atsako į minėtąjį epistemologinį klausimą.

Tačiau trivialusis Warreno teorijos realizmas susiduria su priekaištu, kad egzistavimo teiginiai negali būti trivialiai teisingi (ibid, p. 203). Warrenas šią problemą kildina iš Kanto filosofijos ir teigia, kad pagrindinė idėja čia ta, kad su bet kokios rūšies dalyku F, jeigu mes atmetame F egzistavimą, mes negalime tokiu būdu įsipainioti į prieštaravimą. Ši idėja problemiška konvencionalizmui, kadangi, kaip buvo minėta, šios teorijos rėmuose matematinių esinių egzistavimas grindžiamas mūsų kalbinėmis praktikomis. Anot Warreno, egzistavimo teigimas vis dėlto kartais gali būti dalimi sąvokos apibrėžimo tokiu būdu, kad pats sąvokos suvokimas tada reikalauja realizmo jos atžvilgiu, kaip yra abstrakčių esinių (kaip, pavyzdžiui, skaičiai) atveju (ibid, p. 232). Tačiau tokiai Warreno pozicijai iškyla klausimas, kodėl mes pripažindami, kad pačios sąvokos apibrėžime gali glūdėti egzistavimo teigimas, negalime trivialiai įrodyti Dievo egzistavimo, kaip tai padarė Šventasis Anzelmas Kenterberietis (Logan 2009, p. 33–34). Remiantis Dievo kaip egzistuojančio apibrėžimu ir priimant neriboto inferencializmo principą, mes galėtume į mūsų kalbą tiesiog įtraukti atitinkamą išvedimo taisyklę:

$$(Dievas)\ \frac{}{\exists x(x = Dievas)}$$

reikšmingas. Tačiau Warrenas pastebi, jog nors grynai struktūralistinis daugumos matematinių teorijų aiškinimas nesusiduria su sunkumais, aibių teorijos atveju iškyla problema dėl struktūrose vietas užimančių objektų kiekio (ibid, p. 236). Remiantis radikaliuoju struktūralizmu, egzistuoja tik matematinės struktūros, bet ne matematiniai objektai. Tačiau tada problemiška, jog jeigu nebus pakankamai tas struktūras užpildančių fizinių objektų, mūsų matematinės teorijos bus tuščios. Warrenas pastebi, jog tai itin didelė problema aibių teorijos atveju, kadangi aibių teoriją reikalauja milžiniško kiekio objektų. Remiantis aibių teorija, turėtų egzistuoti ne tik begalinis kiekis fizinių objektų, bet ir *nepaskaičiuojamai* (*uncountably*) daug objektų. Maža to, turėtų egzistuoti net tokia objektų daugybė, kuri nebegalėtų sudaryti aibių. Atsižvelgdamas į šią problemą, Warrenas atmeta vien struktūralistinį aibių teorijos aiškinimą.

Warreno teorijos rėmuose niekas nedraudžia įvesti tokios taisyklės, todėl pridedant ją kaip bazinę mūsų kalbos taisyklę, inferencionalizmo pasekėjai turėtų pripažinti jos išvados teisingumą.

Warrenas atsako į šią problemą teigdamas, kad pastarasis Dievo įrodymas parodo tik tai, kad įmanoma tokia kalba, kuri visiškai atitiks mūsų kalbines praktikas, tik joje dar bus pridėta taisyklė (Dievas) (2020, p. 233). Tačiau net jei ši taisyklė būtų teisinga *toje* kalboje, iš to neplaukia, kad ši taisyklė yra teisinga *mūsų* kalboje. Šią klaidą, kai teiginiai iš išplėstos kalbos perkeliami į mūsų kalbą, Warrenas vadina *vertimo klaida* (*the translation mistake*). Savo kalboje mes nesuteikiame sąvokai „Dievas" tokios prasmės, kuri derėtų su taisykle (Dievas). Dėl šios priežasties klaidinga manyti, jog iš mūsų lingvistinių praktikų trivialiai plaukia Dievo egzistavimas. Warreno manymu, priešingai yra su abstrakčiais esiniais, kadangi mūsų lingvistinės praktikos vis dėlto nurodo į skaičių egzistavimą. Tokiu būdu Warreno teorija leidžia išlaikyti trivialų matematinį realizmą, kartu išvengiant trivialaus Dievo egzistavimo įrodymo problemos.

Tokiu pačiu būdu Warrenas taip pat atsako į Prioro „Tonk" argumentą. Savo atsakyme Warrenas pabrėžia, jog Prioro siūlomomis taisyklėmis papildyta „tonkiška" kalba skiriasi nuo mūsų vartojamos kalbos (2015b, p. 8). Anot Warreno, „Tonk" argumentas taip pat susiduria su vertimo klaidos problema, kai dėl paviršutinių kalbų panašumų, klaidingai manoma, kad galimas homofoniškas vertimas iš vienos kalbos į kitą. Šioje vietoje Warrenas pasiūlo remtis principu „išsaugoti teisingumo reikšmes" (*save the truth values*), anot kurio, *verčiant kalbą L į mūsų kalbą, mes turėtume atmesti bet kokį vertimą, kuris priskiria (maps) teisingam L kalbos sakiniui neteisingą mūsų kalbos*[9] *sakinį, arba atvirkščiai* (2020, p. 127). Lygindami *tonkišką* ir savo kalbas, mes pastebime, kad savo kalboje mes nepriimame *tonkiškoje* kalboje suformuluotas *tI* ir *tE* taisykles, kurių pagrindu toje kalboje galima įrodyti bet kokį teiginį. Iš esmės, mūsų kalbinė bendruomenė turi kitokias nuostatas *tI* ir *tE* taisyklių atžvilgiu ir jos mūsų kalboje nėra priimtinos. Dėl šios priežasties, verčiant šias taisykles *tonkiškoje* kalboje išreiškiančius sakinius į mūsų kalbą, pasikeistų jų teisingumo reikšmė. Iš to seka, kad remiantis „išsaugoti teisingumo reikšmes" principus, duotąsias taisykles išreiškiančių sakinių homofoniškas vertimas iš *tonkiškos* kalbos į mūsų turėtų būti atmestas. Tokiu atveju klaidinga teigti, jog laikydamiesi neriboto inferencializmo, mes privalome į savo loginę kalbą priimti tokias problemiškas išvedimo taisykles kaip *tI* ir *tE*.

Anot Warreno, jo konvencionalizmo versijos taip pat nepaneigia Boghossiano ir Siderio argumentas, jog lingvistinės konvencijos gali lemti tik, kurį teiginį gali išreikšti konkretus sakinys, bet ne kad konkretus teiginys yra teisingas. Nesutarimas kyla dėl šio argumento prielaidos, kad konvencijos negali lemti konkretaus teiginio teisingumo. Warreno atsakymas į duotąjį argumentą

[9] Savo darbe Warrenas kalbą apie netinkamus vertimus į būtent anglų kalbą, tačiau jo pateikiamas principas bei atsakymas į „Tonk" argumentą galioja ir tuo atveju, jei mūsų kalba nėra anglų.

prasideda nuo pastebėjimo, jog galimi skirtingai būdai aiškinti, kuria prasme konvencijos gali „lemti“, kad konkretus teiginys yra teisingas (ibid, p. 175–176). Jis pripažįsta, kad konvencijos negali lemti teiginio teisingumo *priežastine* prasme. Priešingai, Warreno teorija teigia, kad konvencijos atlieka *aiškinamąją* (*explanatory*) funkciją. Tad, jei nagrinėjamas argumentas siektų paneigti Warreno teoriją, jis turėtų remtis tokia pačia samprata, ką reiškia „lemti“ konkretaus teiginio teisingumą.

Kitas nesutarimas dėl prielaidos, kad konvencijos negali lemti konkretaus teiginio teisingumo, susijęs su pačia „teiginio“ samprata. Anot Warreno, bendrai galimos dvi sampratos, kas yra „teiginys“, arba „faktas“: metafiziškai *lengvasvorė* (*lightweight*) ir metafiziškai *sunkiasvorė* (*heavyweight*) sampratos (ibid, p. 176). Remiantis sunkiasvore faktų ar teiginių samprata, šie yra objektyvios ir nuo žmogaus proto ar socialinių praktikų nepriklausomos tikrovės dalis. Warrenas teigia, kad konvencionalizmo atstovai paprasčiausiai nepripažįsta tokių metafiziškai objektyvių logikos ar matematikos faktų egzistavimo. Dėl to remiantis sunkiasvore samprata, Boghossiano ir Siderio argumentas, griežtai tariant, net negalioja Warreno teorijai (ibid, p. 179). Remiantis metafiziškai lengvasvore faktų samprata, faktai ar teiginiai yra glaudžiai susiję su kalba. Tokiu atveju, anot Warreno, prielaida, kad konvencijos negali aiškinamąja prasme „lemti“ teiginių teisingumo, atrodo abejotina. Tačiau, kaip pastebi Warrenas, net pripažinus, kad konvencijos negali lemti lengvasvore prasme traktuojamų teiginių teisingumo, konvencionalizmo šalininkai neprivalo pripažinti argumento išvados, kad konvencijos negali lemti logikos ar matematikos teiginius išreiškiančių sakinių teisingumo (ibid, p. 176–177). Taip yra todėl, nes aiškinimo kontekstai yra hiperintensionalūs. Šioje vietoje verta prisiminti visą Boghossiano ir Siderio samprotavimo struktūrą:

1. $\Box$(sakinys S yra teisingas $\leftrightarrow$ $\exists$p(p yra teiginys & S reiškia p & p));
2. $\forall$p $\neg$lingvistinės konvencijos lemia, kad p;
3. Tad: $\neg$lingvistinės konvencijos lemia, kad sakinys S yra teisingas (1, 2).

Anot Warreno, galima pripažinti (2) prielaidos teisingumą, bet atmesti išvadą (3). Tai galima padaryti dėl to, kad (2) ir (3) konvencionalistinės teorijos rėmuose turėtų būti interpretuojami kaip aiškinamieji teiginiai, o aiškinimo kontekstai pasižymi hiperintensionalumu. Warreno teigimu, autoriai čia remiasi principu:

1. $\Box(\varphi \leftrightarrow \gamma)$;
2. Δ lemia, kad φ;
3. Tad: Δ lemia, kad γ.

Tačiau, anot Warreno, taikydami šį principą Boghossianas ir Sideris daro prielaidą, kad „lemia“ kontekstas argumente tėra intensionalus (ibid, p. 177). Tačiau iš tikrųjų susiduriama su hiperintensionaliu kontekstu, todėl duotasis principas negali būti taikomas ir mes galime priimti (2) ir atmesti išvadą.

Kalbant apie minėtus tradicinius priekaištus konvencionalizmui, Warreno teorija taip pat atsako į visus iš jų. Pradedant nuo Quine'o argumento prieš konvencionalistinį logikos sąvokų aiškinimą, kadangi mes negalime paaiškinti logikos sąvokų, nesinaudodami logikos sąvokomis, Warrenas atmeta poziciją, jog lingvistinės konvencijos yra eksplicitiški susitarimai (ibid, p. 183). Jis teigia, kad ir implicitiškos išvedimo taisyklės gali vadovauti mūsų elgesiui (ibid, p. 185). Quine'as kalbėdamas apie elgesiui vadovaujančias taisykles teigia, jog taisyklė negali vadovauti elgesiui, nebent besielgiantis žino tą taisyklę ir gali ją įvardinti (1970, p. 386). Warrenas kritikuoja poziciją, jog lingvistinių konvencijų egzistavimas reikalauja stiprių psichologinių prielaidų priėmimą, pavyzdžiui, jog tam, kad mes galėtume remtis lingvistinėmis taisyklėmis, mes turime turėti jų eksplicitiškas reprezentacijas (2020, p. 50). Anot jo, konvencijos „vadovauja" mūsų elgesiui ta prasme, kad mes turime įvairias dispozicijas tų taisyklių laikymosi atžvilgių – mes protaujame pagal jas, priimame jų pataisymus, mes susierziname, kai jų nesilaikoma ir t. t. Tokiu būdu Warrenas išvengia Quine'o pristatomos ydingo rato problemos logikos sąvokų aiškinimo atveju, atsisakydamas konvencijų kaip tik eksplicitiškų susitarimų sampratos.

Warrenas taipogi atsako į Dummetto ir Wrigley'o kritiką, kad konvencionalizmas negali paaiškinti loginio išvedimo arba būtinybės, kad iš tam tikrų pirminių konvencijų gali būti išvesti kiti matematiniai sakiniai. Anot Warreno, jo konvencionalizmo teorija neteigia, kad išvestinės taisyklės turi būti eksplicitiškai išvestos iš bazinių taisyklių (ibid, p. 188–189). Šios taisyklės yra laikomos išvestinėmis ta prasme, kad bet kas, kas laikosi bazinių taisyklių, taip pat turėtų laikytis išvestinių taisyklių. Pavyzdžiui, galime teigti, kad loginio operatoriaus „ir" prasmė yra apibrėžiama šių bazinių taisyklių:

$$(\&I)\,\frac{\varphi \quad \gamma}{\varphi\ ir\ \gamma} \qquad\qquad (\&E)\,\frac{\varphi\ ir\ \gamma}{\gamma} \quad \frac{\varphi\ ir\ \gamma}{\varphi}$$

Tada, anot Warreno, tie kas laikosi šių dviejų taisyklių, turėtų laikytis ir šios taisyklės:

$$(\&\&)\,\frac{\varphi\ ir\ \gamma}{\gamma\ ir\ \varphi}$$

Šia prasme $(\&\&)$ taisyklė yra išvestinė iš bazinių $(\&I)$ ir $(\&E)$ taisyklių. Tačiau $(\&\&)$ taisyklė turėtų būti laikoma pagrįsta ne dėl to, kad ji logiškai išvedama iš bazinių taisyklių, bet dėl to, kad mes laikome ją taisykle mūsų kalboje. Tad $(\&\&)$ taisyklės pagrįstumas seka iš inferencialistinės metasemantikos. Iš to seka, kad Warreno konvencionalistinės teorijos rėmuose nereikia atskirai nuo bazinių taisyklių dar kitokiu būdu grįsti iš bazinių taisyklių išvestinių taisyklių pagrįstumo, kadangi ir bazinių ir išvestinių taisyklių pagrįstumas grindžiamas tuo pačiu metasemantiniu principu, kad mūsų kalboje pripažįstamos taisyklės yra automatiškai pagrįstos.

Pereinant prie Dummetto ir Wrighto klausimo, kaip bendros konvencionaliai priimtos sąvokos gali apibrėžti jų taikymą konkrečiais atvejais, iškyla problema, kad Warrenas tiesiogiai į šį priekaištą neatsako. Tačiau galima pasiremti Schroederio pateiktu atsakymu, kadangi jis neprieštarauja Warreno konvencionalizmo versijai. Anot Schroederio, pačiai konvencijos sąvokai yra esminis konvencijos galiojimo *bendrumas* (*generality*) (2018, p. 95). Bet kokia konvencija reikalauja jos pritaikymo begalei atskirų atvejų. Dėl tos priežasties kiekvienoje konvencijoje glūdi nurodymai, ką daryti konkrečiais atvejais. Tad klaidingas Dummetto ir Wrighto įsitikinimas, kad niekad nėra iš anksto nustatyta, ką reikėtų laikyti tam tikros duotosios konvencijų aibės išvada. Taip pat klaidinga Dummetto radikalaus konvencionalizmo samprata, kai kiekvieno paskiro sakinio teisingumas ir būtinumas yra steigiamas atskiros konvencijos, kadangi tokiu atveju, priešingai, negalima kalbėti apie konvenciją, kadangi nekalbama apie taisyklės bendrumą, o tik paskirus atvejus.

Galiausiai konvencionalizmas susiduria su matematinių bei loginių tiesų būtinumo suderinamumo su konvencijų atsitiktinumu problema. Ši problema kyla ir tradicinei, ir Warreno konvencionalizmo versijai, todėl problemos atžvilgiu pastaroji nėra pranašesnė. Pastebėtina, kad šios problemos sprendimas taip pat nereikalauja būtent Warreno teorinių prielaidų, kadangi ji nesunkiai išsprendžiama ir tradicinio konvencionalizmo rėmuose. Analizuodamas, ką reiškia, kad mūsų lingvistinės konvencijos galėtų būti kitokios, nepaisant loginių ir matematinių tiesų būtinumo, Alanas Sidellis pasitelkia tautologijos „visi viengungiai yra vyrai“ pavyzdį. Anot Sidellio, buvimas vyru mūsų kalboje yra dalis termino „viengungis“ prasmės (2009, p. 229). Tačiau jeigu buvimo vyru sąlyga apibrėžia termino „viengungis“ prasmę, tada ji galioja ir kontrafaktinių scenarijų sąlygomis. Kadangi mūsų kalboje terminas „vyrai“ ir kontrafaktinių scenarijų atveju vartojamas, kalbant tik apie vyrus, kiekvieno galimo pasaulio atžvilgiu bus tiesa, kad „visi viengungiai yra vyrai“, kas reiškia, kad šis sakinys išreiškia būtiną tiesą. Remiantis mūsų kalbinių konvencijų atsitiktinumu, galima įsivaizduoti alternatyvias kalbines praktikas ir teigti, kad viename iš galimų pasaulių sakinys „visos viengungės yra moterys“ yra teisingas. Tačiau alternatyvios kalbinės praktikos nurodo į *kitą nei mūsų* kalbą, kas reiškia, kad terminas „viengungės“ galimame pasaulyje turi kitą prasmę, nei terminas „viengungis“ turi mūsų kalboje. Teigimas, kad šios sąvokos turi tą pačią prasmę, vėlgi nurodytų į Warreno pristatomą vertimo klaidą. Analizuodami bet kokį pasaulį iš mūsų kalbos perspektyvos, vis vien būtų tiesa, kad „visi viengungiai yra vyrai“. Dėl to klaidinga manyti, kad kalbinių konvencijų atsitiktinumas prieštarauja loginių bei matematinių tiesų būtinumui.

III. E. N. Zaltos ir J. Warreno teorijų problemų ir pamatinių prielaidų analizė

3. 1. Abstrakčių matematinių esinių nepriklausomybės nuo proto problema E. N. Zaltos platonizmo teorijai

Nepaisant Zaltos teorijos minėtų pranašumų prieš kitas matematinio platonizmo teorijas ir Warreno teorijos pranašumų prieš kitas matematinio bei loginio konvencionalizmo teorijas, abejoms iš šių pozicijų vis dėlto kyla sunkumų. Zaltos teorijai kyla abstrakčių matematinių esinių nepriklausomybės nuo proto problema. Nors, pats autorius atmeta tradicinę nepriklausomybės nuo proto sampratą kartu su tradicine abstrakčių esinių samprata, tačiau tokiu atveju iškyla klausimas, ar tikrai, remiantis Zaltos nauja samprata, abstraktūs matematiniai esiniai dar vis tenkina platonizmo kriterijus.

Tradicinio platonizmo rėmuose esinių nepriklausomybė nuo proto reiškia, kad tie esiniai *egzistuoja savarankiškai*, t. y. protas neatlieka esinių sukūrimo funkcijos, bet tik *atpažįsta*, *supranta* arba *atranda* tuos esinius. Pats Zalta kalbėdamas apie matematinių esinių *pažinimą*, teigia, kad šis pažinimas reikalauja tik *supratimo*. Todėl remiantis šiomis paties Zaltos operuojamomis kategorijomis, galima būtų teigti, kad jo teorijos kontekste protas nekuria matematinių esinių, bet būtent juos pažįsta. Tačiau lieka kvestionuotina, ar Zaltos teorijoje pagrįstu lieka teiginys, kad protas iš tikrųjų pažįsta, o ne kuria matematinius esinius.

Kritikuojant matematinių esinių nepriklausomybės statusą Zaltos teorijos rėmuose, galima papriekaištauti, jog Zaltos pateikiamas matematinių esinių neprieštaringumo kriterijus yra primetamas būtent proto, dėl ko jis prieštarauja minėtų esinių nepriklausomybei. Kaip jau buvo minėta, Linskis ir Zalta teigia, kad abstrakčių matematinių esinių nepriklausomybė nuo proto kyla iš jų pristatomo apimties principo objektyvumo. Kaip ir kitų aptartų pliuralistinio platonizmo teorijų atstovai, Linskis ir Zalta daro prielaidą, jog abstraktiems esiniams galioja klasikinė dvireikšmė predikatų logika, teigdami, jog kiekvienas abstraktus esinys yra pilnas – jis arba koduoja konkrečią savybę, arba jos nekoduoja. Tad vienas iš reikalavimų, kuriuos autoriai kelia abstraktiems esiniams, yra jų vidinis neprieštaringumas, t. y. tas pats esinys negali koduoti tam tikros savybės ir jos neigimo. Tačiau čia kyla klausimas, kokiu pagrindu abstraktiems esiniams keliamas būtent klasikine dvireikšme predikatų logika paremtas reikalavimas. Šioje vietoje taip pat kyla klausimas, ar yra pagrindo Linskio ir Zaltos teorijos rėmuose teigti, kad klasikinės logikos principai yra teisingi ir mūsų įsitikinimai apie juos yra patikimi. Čia vėlgi susiduriama su anksčiau minėtu epistemologiniu klausimu. Matematikos įsitikinimų patikimumo klausimas – kaip ir prieš tai minėtų pliuralistinių teorijų atveju – tiesiog yra perkeliamas į logikos sritį, kur analogiškai galima kalbėti apie abstrakčias logines tiesas ir, tokiu atveju, vėlgi iškyla Benacerrafo–Fieldo problemai analogiškas mūsų įsitikinimų apie abstrakčius loginius esinius patikimumo klausimas. Problemiška tik, kad abstrakčių logikos esinių negalima apibrėžti per logiką, kadangi, kaip buvo minėta, tokiu atveju susidurtume su ydingu ratu. Tad Zaltos teorijos rėmuose platonistinė logikos interpretacija atrodo nepriimtina, kadangi pasitelkus ją, Zaltos platonizmas netenka pagrindinio savo privalumo – epistemologinio įsitikinimų apie abstrakčius esinius patikimumo klausimo išvengimo.

Kita alternatyva būtų remtis nominalistine logikos prigimties interpretacija, tačiau tokiu atveju loginio kriterijaus abstraktiems esiniams kilme tampa protas ir abstraktūs esiniai praranda savo nepriklausomybės nuo proto statusą. Į loginio kriterijaus priklausomybę nuo proto taipogi nurodo Zaltos veikaluose pastebimas loginio kriterijaus arbitralumas. Nors, kaip buvo minėta, Linskis ir Zalta remiasi klasikinės logikos principais, vėliau Zalta teigia, jog apimties principas gali būti modifikuotas tokiu būdu, kad būtų remiamasi parakonsistentinės logikos principais (forthcoming, p. 25). Inkorporavus parakonsistentinę logiką į apimties principu paremtą platonizmą, abstraktūs esiniai gali koduoti prieštaringas savybes, bet ne visas įmanomas tam tikroje teorijoje savybes. Jei priimama, kad abstraktūs esiniai nekoduoja visų įmanomų tam tikroje matematinėje teorijoje savybių, tada vidujai prieštaringa matematinė teorija nėra triviali. Taip pat analizuojant Zaltos teoriją, nerandama kriterijų, kurie draustų apimties principą modifikuoti remiantis ir kitomis nei minėtomis klasikine ar parakonsistentine logikomis. Dėl šios priežasties, lieka galimybė taikyti ir daugiau loginių sistemų. Šį alternatyvų galimumą dar labiau patvirtina galimas nominalistinis logikos prigimties traktavimas Zaltos teorijos rėmuose. Zaltos manymu, galimybė apimties principą modifikuoti, remiantis skirtingomis loginėmis sistemomis, yra privalumas (ibid, p. 25). Tačiau platonizmo atveju skirtingų loginių sistemų galimas pasirinkimas nurodo į vienos objektyvios abstrakčius esinius apibrėžiančios logikos nebuvimą. Klausimas, kuria logika remtis, tampa pragmatiniu, t. y. loginė sistema pasirenkama pagal tai, kokias teorijas (t. y. prieštaringas ar neprieštaringas) norima analizuoti. Logikos pasirinkimo galimybė nurodo į apsisprendimo veiksmą, kuris, savo ruožtu, nurodo į keliamų kriterijų abstraktiems esiniams priklausomybę nuo proto, o todėl ir pastarųjų priklausomybę nuo proto.

Abejonių dėl abstrakčių esinių nepriklausomybės nuo proto Zaltos teorijoje kelia ir savybių klausimas, kai apimties principas abstrakčius esinius apibrėžia per savybes. Zalta teigia, kad kiekvienas matematinis esinys yra identifikuojamas pagal jo koduojamas savybes (ibid, p. 21). Iš esmės, tada abstraktaus esinio egzistavimo konstatavimas prasideda nuo savybių rinkinio pasirinkimo, kurį duotas esinys koduoja. Kad ir kokį savybių rinkinį mes pasirinktume, Zaltos teorija teigia, kad egzistuoja abstraktus esinys, koduojantis būtent to rinkinio savybes (ibid, p. 10). Tačiau kyla klausimas, kaip mes tokioje teorijoje traktuojame savybes? Vienas galimų variantų būtų savybes taip pat aiškinti platonistiškai ir kalbėti apie abstrakčias savybes, arba universalijas. Tokiu atveju kyla klausimas, kaip mes galime apibrėžti abstrakčias savybes, kurios savo ruožtu apibrėžia abstrakčius matematinius esinius. Pats Zalta teigia, jog jo teorijoje galima kalbėti apie abstrakčias savybes, kurios koduoja *aukštesnės eilės savybes* (*higher–order properties*) (ibid, p. 14). Tačiau tokia prieiga problemiška, kadangi čia susiduriama su begaliniu regresu – abstrakčius esinius mes apibrėžiame per savybes, šias savybes apibrėžiame per aukštesnės eilės savybes, kurias tada turime apibrėžti per dar aukštesnės eilės savybes ir taip galima tęsti be galo. Problemiška, kad tokiu atveju nelieka platonizmo kontekste tenkinančio abstrakčių esinių ontologinio pagrindo. Kita prieiga būtų savybes traktuoti nominalistiškai ir teigti, jog nėra nuo proto nepriklausomų savybių kaip universalijų. Tačiau remiantis tokia prieiga, nebeišeina Zaltos teorijos kontekste kalbėti apie nuo proto nepriklausomus abstrakčius esinius. Jeigu mes savo protu nominalistiškai apibrėžiame savybes, kurios, savo ruožtu, apibrėžia tas savybes koduojančius abstrakčius esinius, tai tie abstraktūs esiniai negali būti nepriklausomi nuo proto.

Galiausiai abstrakčių esinių nepriklausomybę nuo proto Zaltos teorijoje suproblemina matematinių tiesų objektyvumo kildinimas iš apimties principo objektyvumo. Kaip buvo aptarta anksčiau, tradicinės platonizmo teorijos teigia, kad matematikos tiesų teisingumas priklauso nuo abstrakčių nuo proto nepriklausomų esinių srities. Zaltos atveju, matematikos teiginių teisingumas kyla iš to, jog šie teiginiai gali būti analizuojami, remiantis apimties principu. Savo ruožtu šis principas yra teisingas todėl, kad jis, neva, yra būtinas tinkamam mokslinių teorijų analizavimui. Tačiau problemiška, kad toks apimties principo pagrindimas tėra pragmatinis – iš to, kad mums atrodo, jog šis principas šiuo metu leidžia geriausiai analizuoti mokslines teorijas, neseka, jog šis principas yra objektyviai teisingas, t. y. kad šio principo teisingumas nepriklauso nuo proto. Priešingai, pačių autorių pastebėjimas, kad galima racionali diskusija dėl apimties principo statuso, parodo, kad protas atlieka didelį vaidmenį šio principo pagrindime. Tad nors Zalta pabrėžia jo naudojamų „abstrakčių esinių“ bei „nepriklausomybės nuo proto“ sampratų skirtingumą nuo tradicinių sampratų, tačiau, remiantis apimties principo statuso, savybių prigimties bei loginių kriterijų abstraktiems esiniams problemiškumu, Zaltos teorijoje klaidinga abstrakčius esinius laikyti nuo proto nepriklausomais tokia prasme, kuri tenkintų intuiciją, jog matematikos teiginių teisingumas nepriklauso nuo mūsų proto.

3. 2. Loginio ir matematinio subjektyvizmo problema J. Warreno teorijai

Warreno konvencionalizmo pozicijai iškyla loginio bei matematinio subjektyvizmo problema. Loginį bei matematinį subjektyvizmą galima apibrėžti kaip poziciją, jog loginių bei matematinių išraiškų prasmė bei tas išraiškas talpinančių sakinių teisingumas ir prasmė priklauso nuo pavienių individų nuostatų tų išraiškų atžvilgiu. Kaip buvo minėta, siekdamas išvengti Prioro „Tonk“ argumento bei trivialaus Dievo įrodymo problemos, Warrenas apeliuoja į vertimo klaidą, arba tai, kad loginiai, matematiniai ar net ontologiniai nesutarimai nurodo į sąvokoms suteikiamų prasmių skirtingumą. Jei mes nesutariame dėl tam tikro teiginio teisingumo, tuomet, anot Warreno, mes mūsų sakiniams (kuriais, mūsų manymu, mes išreiškiame tą patį teiginį) priskiriame skirtingas prasmes, kurias lemia skirtingos kalbinės praktikos. Alternatyvios pozicijos sutinkamos tiek logikos (pavyzdžiui, istoriškai sutinkama ginčų dėl trečio negalimo dėsnio statuso), tiek matematikos (pavyzdžiui, kai kurios aibių teorijos sistemos priima, o kitos atmeta garsiąją pasirinkimo aksiomą) teiginius išreiškiančių sakinių atžvilgiu. Nesutarimų logikoje atveju, Warrenas prasmės skirtumą grindžia principu *logikos pokytis – prasmės pokytis* (*change of logic, change of meaning*) (Warren 2018, p. 421). Taip pat skirtingų nuostatų matematikoje atveju, Warrenas teigia, jog pliuralizmas grindžiamas skirtingomis kalbinėmis praktikomis (2020, p. 241). Bet atsižvelgiant į skirtingų praktikų galimumą, problemiška tampa pagrįsti, jog konkrečios kalbinės praktikos yra būdingos daugiau nei vienam individui. Iš to seka, kad problemiška pagrįsti, jog konkrečiai loginiai ar matematiniai išraiškai tą pačią prasmę priskiria daugiau nei vienas individas. Tokiu atveju, bandant išvengti subjektyvizmo problemos, Warreno teorijos rėmuose turi būti suformuluotas kriterijus, remiantis kuriuo, galima būtų atskirti, kada konkrečiai logikos ar matematikos išraiškai skirtingi individai suteikia vienodą prasmę.

Galimas tokio kriterijaus pavyzdys yra principas, jog *sutampant nuostatoms tam tikros matematinės ar loginės išraiškos atžvilgiu, sutampa ir tai išraiškai suteikiama prasmė.* Nuostatų sutapimą tam tikros išraiškos atžvilgiu galima būtų konstatuoti tuo atveju, jei sutaptų sakiniams, kur ši išraiška pasirodo, suteikiamos teisingumo reikšmės. Šis principas tiesiogiai neseka iš to, ką Warrenas sako apie matematinį pliuralizmą ar loginius nesutarimus, kadangi iš to, kad skirtingos nuostatos byloja apie prasmių skirtumą, neplaukia, kad vienodos nuostatos byloja apie prasmės vienodumą. Tačiau Warreno teorija ir neprieštarauja šiai pozicijai, kurią galima įvardinti kaip „nuostatų sutapimas – prasmės sutapimas“. Sakiniams suteikiamų teisingumo reikšmių ir nuostatų tų sakinių atžvilgiu sutapatinimas, taipogi aptinkamas Warreno pozicijoje, todėl jis jai taip pat neprieštarauja.

Tačiau konstatuojant išraiškų prasmių sutapimą, remiantis tik pavieniais sakiniais, kur tos išraiškos pasirodo, yra problemiška. Gali būti taip, jog oponuojančių loginių ar matematinių sistemų gynėjai priskirs tą pačią teisingumo reikšmę vienam duotąją išraišką talpinančiam sakiniui, tačiau išraiškai suteikiama prasmė vis dėlto skirsis. Pavyzdžiui, Grzegorzas Malinowskis atkreipia dėmesį, kad S. C. Kleene’o trireikšmė logika kai kuriais aspektais labai panaši į J. Łukasiewicziaus trireikšmę logiką (Malinowski 2007, p. 23). Šiose sistemose jų abiejų pristatomą trečiąją teisingumo reikšmę galima būtų vienodai įvardinti kaip „neapibrėžtumas“ (Kleene’o atveju interpretatoriai ją linkę angliškai vadinti „undefiniteness“ (ibid, p. 22), o Łukasiewicziaus atveju ji kartais angliškai įvardijama kaip „indeterminacy“ (ibid, p. 18)). Dėl šio panašumo, abiejose sistemose sakiniui „p⊃q“ bus priskiriama teisingumo reikšmė „tiesa“, kai tiek „p“, tiek „q“ bus priskiriama teisingumo reikšmė „tiesa“. Remiantis prie Warreno teorijos pridėta prielaida, kad nuostatų, sutapimas nurodo į prasmės sutapimą, galima būtų manyti, jog Warreno teorijos rėmuose verčiant sakinį „p⊃q“ iš Łukasiewicziaus loginės kalbos į Kleene'o loginę kalbą nedaroma vertimo klaida. Vertimo klaidos, iš pirmo žvilgsnio, nebūtų dėl to, kad abi loginės sistemos priskiria tam pačiam sakiniui tą pačią teisingumo reikšmę, kas turėtų byloti apie vienodas loginių sistemų atstovų nuostatas to sakinio atžvilgiu, kas, savo ruožtu, turėtų byloti apie vienodą tam sakiniui suteikiamą prasmę. Tačiau toks vertimas iš tikrųjų būtų klaidingas. Atidžiau panagrinėjus Łukasiewicziaus ir Kleene'o sistemas, galima pastebėti, jog jos atžvilgiu pozicijos, kad „neapibrėžtumas implikuoja neapibrėžtumą“, turi skirtingas nuostatas. Pasitelkus ankstesnį sakinio „p⊃q“ pavyzdį, jei tiek „p“, tiek „q“ būtų suteikiama teisingumo reikšmė „neapibrėžtumas“, Łukasiewicziaus sistemos atveju šiam sakiniui būtų suteikiama teisingumo reikšmė „tiesa“, o Kleene'o atveju – „neapibrėžtumas“. Todėl klaidinga būtų teigti, kad implikacijai „⊃“ ir ją talpinantiems sakiniams šiose sistemose priskiriama ta pati prasmė.

Tačiau vis dėlto bandant, remiantis nuostatų atitikimu, pagrįsti bendrą loginėms ar matematinėms išraiškoms suteikiamą prasmę, galima remtis holistine inferencializmo interpretacija. Tada išeitų, kad loginės ar matematinės išraiškos prasmę apibrėžia visos bazinės išvedimo taisyklės, pagal kurias ta išraiška yra vartojama. Šias išvedimo taisykles galima griežtai apibrėžti formalioje sistemoje ir tokiu atveju taisyklių kiekis nebūtų begalinis. Remiantis tokia prieiga galima teigti, jog jei vieno individo nuostatos visų bazinių konkrečios loginės ar matematinės išraiškos vartoseną apibrėžiančių išvedimo taisyklių atžvilgiu atitinka kito individo nuostatas visų bazinių tos pačios išraiškos vartoseną apibrėžiančių išvedimo taisyklių atžvilgiu, tada šie individai suteikia šiai išraiškai tą pačią prasmę.

Tokia prieiga galimai išsprendžia loginio bei matematinio subjektyvizmo problemą Warreno konvencionalizmo kontekste. Tačiau nors ši prieiga neprieštarauja Warreno teorijai, ji paremta prielaidomis, kad sakiniams priskiriamos teisingumo reikšmės atspindi mūsų nuostatas tų sakinių atžvilgiu ir kad mūsų nuostatos atspindi tiems sakiniams suteikiamas prasmes. Būtent šioms prielaidoms Warreno teorija eksplicitiškai neįsipareigoja, tačiau, kaip buvo parodyta, jos yra reikalingos, norint išvengti subjektyvizmo.

3. 3. E. N. Zaltos ir J. Warreno teorijų pamatinių prielaidų aptarimas

Atliktos Zaltos ir Warreno teorijų analizės pagrindu galima įvertinti, kurios prielaidos yra būtinos matematinio platonizmo ir matematinio konvencionalizmo pozicijoms. Remiantis Zaltos teorija, platonizmas turi priimti pliuralizmą, kadangi apimties principas tiesiogiai paneigia monizmą. Tas nėra problemiška, turint omenyje, kad būtent Zaltos teorija sugeba išvengti platonistiniam pliuralizmui kylančių sunkumų. Taip pat iš anksčiau aptartos Zaltos teorijai iškylančios problemos seka, kad abstraktūs matematiniai esiniai, remiantis Zaltos samprata, nėra nepriklausomi nuo proto tradicine prasme. Tad remiantis Zaltos bei tradicinių platonizmo teorijų analize, galima teigti, kad matematiniam platonizmui lieka dvi alternatyvos. Pirmoji būtų išlaikyti tradicinę per analogiją su fiziniais objektais suformuotą abstrakčių esinių sampratą, bet tada likti be patenkinamo atsakymo į Benacerrafo–Fieldo epistemologinę problemą. Kita alternatyva, pasirinkti Zaltos teoriją ir, siekiant išvengti epistemologinės problemos, atsisakyti abstrakčių matematinių esinių nepriklausomybės nuo proto. Problema su antrąja prieiga ta, kad abejotina tampa, ar duotą poziciją tada galima laikyti platonizmu. Kadangi pats Zalta teigia, kad apimties principą įmanoma interpretuoti tokiu būdu, kad nebūtų įsipareigojama matematinių esinių egzistavimui, kyla klausimas, ar tas įsipareigojimas yra būtinas. Viena iš tradicinio platonizmo motyvacijų įsipareigoti konkrečių matematinių esinių egzistavimui buvo intuicija, kad matematinės tiesos nepriklauso nuo proto, todėl jos turi referuoti į nepriklausomai nuo proto egzistuojančius esinius. Kaip buvo pasakyta, Zaltos teorija atsisako tos nepriklausomybės pripažinimo. Remiantis tuo, kas buvo pasakyta apie Zaltos teoriją, galima teigti, kad ji nesustiprina platonistinės pozicijos, bet, priešingai, tik parodo, kokių pamatinių prielaidų reikia atsisakyti, siekiant suformuluoti problemų išvengiančią matematikos specifiką aiškinančią filosofinę teoriją.

Warreno teorijos atveju, priešingai, ne tik suformuluojama problemų išvengianti konvencionalizmo teorija, bet ir parodoma, kaip galima tą pačią teorija suderinti su platonistinėmis intuicijomis apie matematiką ne blogiau nei tai daro Zaltos teorija. Kaip buvo parodyta, problemiškiausia Warreno konvencionalizmo teorijai būtina prielaida yra ta, kad atitinkančios nuostatos tam tikro sakinio atžvilgiu nurodo į atitinkančią tam sakiniui suteikiamą prasmę. Nors ši prielaida nėra akivaizdi, kitų konvencionalizmo prielaidų kontekste ji neatrodo problemiška. Tačiau, kaip buvo parodyta, Warreno teorija taip pat gali būti suderinta su platonizmo pozicija, kad matematikos tiesos referuoja į egzistuojančius abstrakčius matematinius esinius ir kad tos tiesos yra būtinos. Svarbu, kad esinių egzistavimą Warreno teorija gali pagrįsti, pasitelkdama ne labiau spekuliatyvų Quine‘o ontologinio įsipareigojimo kriterijų. Kaip buvo minėta, tiek matematikos tiesų būtinumas, tiek matematinių esinių egzistavimas Zaltos teorijoje grindžiamas spekuliatyviu apimties principu, dėl kurio galimo klaidingumo sutinka ir pats Zalta. Šio principo teisingumą Zalta išveda iš jo tariamo (paties Zaltos pripažįstamo kaip galimai nepagrįsto) būtinumo tinkamai mokslinių teorijų analizei. Warreno atveju, tas pats rezultatas pasiekiamas priimant Quine’o ontologinio įsipareigojimo kriterijų bei prielaidą, kad konkrečios sąvokos prasmė mums išlieka ta pati, analizuojant kontrafaktinius scenarijus. Quine‘o ontologinio įsipareigojimo kriterijui taip pat galima kelti jo pagrįstumo klausimą, kreipiant dėmesį į kriterijaus spekuliatyvumą bei tas pačias jo kaip ir Zaltos apimties principo pragmatines priėmimo priežastis. Kaip buvo minėta, Quine‘as savo ontologinį kriterijų grindžia tuo, kad formalios teorijos apriboti kintamieji turi referuoti į egzistuojančius objektus tam, kad teorijos tvirtinimai būtų teisingi. Tad tiek Zaltos apimties principas, tiek Warreno teorijoje panaudojamas Quine‘o ontologinio įsipareigojimo principas grindžiami jų tariamu būtinumu mokslinėms teorijoms, todėl abu principai pasižymi tuo pačiu spekuliatyvumo lygiu platonizmo kontekste. Dėl to negalima teigti, kad Zaltos apimties principo pasitelkimas yra labiau pagrįstas būdas grįsti abstrakčių matematinių esinių egzistavimą. Kartu turint omenyje, kad tiek Warrenas, tiek Zalta nesuteikia abstraktiems esiniams nepriklausomybės nuo proto statuso, nelieka pagrindo teigti, kad net matematinio platonizmo kontekste Zaltos teorija yra bent kuo nors pranašesnė ir todėl patrauklesnė.

IŠVADOS

1. E. N. Zaltos platonizmo teorija negali pagrįsti abstrakčių matematinių esinių nepriklausomybės nuo proto tradicinio platonizmo prasme. Zaltos ginamas apimties principas abstrakčių esinių egzistavimą steigia per loginio kriterijaus tenkinimą bei teorijoje apibrėžiamų to esinio savybių kodavimą. Jei loginį kriterijų pasirenkama interpretuoti platonistiškai, negalima Zaltos teorijos kontekste pagrįsti jo patikimumo. Dėl to lieka jį interpretuoti nominalistiškai, tačiau tokiu atveju, pripažįstama šio kriterijaus, juo paremto apimties principo bei šiuo pagrindžiamų abstrakčių esinių priklausomybė nuo proto. Savybių atžvilgiu iškyla ta pati problema, kad jas interpretuojant platonistiškai, neišeina, remiantis apimties principu, pagrįsti jų apibrėžimo patikimumo. Dėl to (kaip ir loginį kriterijų) savybes Zaltos teorijoje tenka interpretuoti nominalistiškai, iš ko plaukia, kad savybių apibrėžimu paremtas apimties principas negali pagrįsti nuo proto nepriklausomų esinių egzistavimo tradicine platonistine prasme.
2. J. Warreno konvencionalizmo teorijai kyla matematinio ir loginio subjektyvizmo problema, kurios galima išvengti, priimant papildomą principą, kad sutampant visoms nuostatoms tam tikros matematinės ar loginės išraiškos atžvilgiu, sutampa ir tai išraiškai suteikiama prasmė. Subjektyvizmo problema kyla dėl to, kad Warreno teorijos rėmuose, jei skiriasi individų nuostatos to paties sakinio atžvilgiu, skiriasi ir tam sakiniui priskiriama prasmė. Dėl to, siekiant išvengti subjektyvizmo, turi būti pateiktas kriterijus, kuriuo remiantis galima konstatuoti, kad keli individai priskiria tam pačiam sakiniui tą pačią prasmę. Vienas galimas toks kriterijus yra nuostatų konkretaus sakinio atžvilgiu atitikimas. Nors Warreno teorijoje šis principas nėra aptariamas, bet pripažinus, kad individų nuostatoms tam tikro sakinio atžvilgiu atitinkant, atitinka ir individų tam sakiniui priskiriama prasmė, subjektyvizmo problemos galima išvengti.
3. J. Warreno konvencionalizmo teorija pranašesnė už E. N. Zaltos platonizmo teoriją dėl to, kad Warreno teorija išsprendžia tradicines konvencionalizmui kylančias problemas be stiprių spekuliatyvių prielaidų priėmimo, o Zaltos teorija, priešingai, parodo, jog išlaikydamas tradicinę abstrakčių esinių nepriklausomybės nuo proto sampratą negali atsakyti į Benacerrafo-Fieldo problemą. Zaltos teorijos analizė parodo, kad matematinis platonizmas turi dvi alternatyvas: (1) išlaikyti tradicinę abstrakčių objektų sampratą, bet likti be patenkinamo atsakymo į Benacerrafo-Fieldo problemą, arba (2) atsisakyti tradicinės abstrakčių objektų nepriklausomybės nuo proto sampratos, bet išvengti matematinių įsitikinimų patikimumo klausimo. Tokiu būdu Zaltos teorija tik susilpnina tradicinio platonizmo poziciją. Warreno teorija, priešingai, parodo, kaip be problemiškų prielaidų pripažinimo matematinis konvencionalizmas gali išvengti tradicinių sunkumų.
4. J. Warreno teorija taip pat sėkmingai kaip ir E. N. Zaltos platonizmo teorija suderinama su platonizmo nuostatomis abstrakčių matematinių esinių egzistavimo ir matematikos tiesų

būtinumo atžvilgiu. Zaltos platonizmas matematinių esinių egzistavimą bei matematinių tiesų būtinumą grindžia apimties principu, kuris yra spekuliatyvus dėl jo nepakankamo pagrįstumo. Tuo tarpu Warreno teorija grindžia matematinių esinių egzistavimą bei matematinių tiesų būtinumą, pasiremdama ne labiau spekuliatyviu Quine'o ontologinio įsipareigojimo kriterijumi bei kontrafaktinių scenarijų interpretavimo, remiantis mūsų kalbinėmis praktikomis, prieiga.

Iš to seka, kad matematinių teiginių kaip abstrakčius nuo proto nepriklausančius esinius aprašančių tiesų samprata nėra patraukli pozicija, kadangi išlaikant ją neišeina pagrįsti mūsų įsitikinimų apie šiuos abstrakčius esinius patikimumo. Tačiau atsisakius matematikos teiginių nepriklausomybės nuo proto pozicijos, galima vis vien sėkmingai pagrįsti matematinių įsitikinimų būtinumą bei abstrakčių matematinių esinių egzistavimą. Tai iliustruoja E. N. Zaltos platonizmo bei J. Warreno konvencionalizmo teorijos, iš kurių pastaroji taip pat parodo, kad įmanoma patraukli tradicinių problemų išvengianti matematinio konvencionalizmo teorija.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

Ayer, A. J. (1952). *Language, Truth, and Logic*. New York: Dover Publications.

Azzouni, J. (2016). McEvoy on Benacerraf's Problem and the Epistemic Role Puzzle. In F. Pataut (red.), *Truth, Objects, Infinity: New Perspectives on the Philosophy of Paul Benacerraf*, 3–15. Cham: Springer International Publishing,

Bagaria, J., (2020). Set Theory. In E. N. Zalta (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2020 Edition). Prieiga per internetą: https://plato.stanford.edu/archives/spr2020/entries/set-theory/ [žiūrėta 2022 05 02].

Balaguer, M. (1995). A Platonist Epistemology. *Synthese 103*(3): 303–325. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.1007/BF01089731 [žiūrėta 2022 05 02].

Balaguer, M. (1998). *Platonism and Anti-Platonism in Mathematics*. Oxford: Oxford University Press.

Balaguer, M. (2016). Platonism in Methaphysics. In E. N. Zalta (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2016 Edition). Prieiga per internetą: https://plato.stanford.edu/archives/spr2016/entries/platonism/ [žiūrėta 2022 05 02].

Beall, J. (1999). From Full Blooded Platonism to Really Full Blooded Platonism. *Philosophia Mathematica 7*(3): 322–325. Oxford: Oxford University Press. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.1093/philmat/7.3.322 [žiūrėta 2022 05 02].

Benacerraf, P. (1965). What Numbers Could not Be. *The Philosophical Review 74*(1): 47–73. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.2307/2183530 [žiūrėta 2022 05 02].

Benacerraf, P. (1973). Mathematical Truth. *The Journal of Philosophy 70*(19): 661–679. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.2307/2025075 [žiūrėta 2022 05 02].

Ben-Menahem, Y. (2006). *Conventionalism*. Cambridge: Cambridge University Press.

Bernays, P. (1964). On Platonism in Mathematics. In P. Benacerraf and H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics*, 274–286. New Jersey: Prentice–Hall Inc.

Boghossian, P. (1996). Analyticity Reconsidered, *Noûs 30*(3): 360–391. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.2307/2216275 [žiūrėta 2022 05 02].

Daly, C. (2013). *Philosophy of Language*. New York: Bloomsbury Publishing.

Dummett, W. V. O. (1964b). Wittgenstein's Philosophy of Mathematics. In P. Benacerraf and H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics*, 491–509. New Jersey: Prentice–Hall Inc.

Field, H. H. (1989). *Realism, Mathematics and Modality*. Oxford: Basic Blackwell.

Gödel, K. (1964). What is Cantor's Continuum Problem? In P. Benacerraf and H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics*, 258–273. New Jersey: Prentice–Hall Inc.

Gyula, K. (2017). The Medieval Problem of Universals. In E. N. Zalta (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Winter 2017 Edition). Prieiga per internetą: https://plato.stanford.edu/archives/win2017/entries/universals-medieval/ [žiūrėta 2022 05 02].

Hale, B. (1996). Structuralism's Unpaid Epistemological Debts. *Philosophia Mathematica 4*(2): 124–147. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.1093/philmat/4.2.124 [žiūrėta 2022 05 02].

Horsten, L. (2022). Philosophy of Mathematics. In E. N. Zalta (red.), *The Stanford Encyclopedia of Philosophy* (Spring 2022 Edition). Prieiga per internetą: https://plato.stanford.edu/archives/spr2022/entries/philosophy-mathematics/ [žiūrėta 2022 05 31].

Lee, C. (2022). The structuralist approach to underdetermination. *Synthese 200*(108). Prieiga per internetą: https://doi.org/10.1007/s11229-022-03495-3 [žiūrėta 2022 05 31].

Linnebo, Ø. (2017). *Philosophy of Mathematics*. Princeton: Princeton University Press.

Linsky, B. ir Zalta, E. N. (1995). Naturalized platonism versus platonized naturalism. *The Journal of Philosophy 92*(10): 525–555. New York: Columbia University Press. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.2307/2940786 [žiūrėta 2022 05 02].

Logan, I. (2009). *Reading Anselm's Proslogion*. Burlington: Ashgate Publishing Company.

MacBride, F. (2005). Structuralism reconsidered. In S. Shapiro (red.), *The Oxford Handbook of Philosophy of Mathematics and Logic*, 563–589. Oxford: Oxford University Press.

Malinowski, G. (2009). Many-valued Logic and its Philosophy. In Dov M. Gabbay, John Woods (red.), *Handbook of the History of Logic Volume 8. The Many Valued and Nonmonotonic Turn in Logic*, 13–94. Oxford: Elsevier.

Parsons, C. (1980). Mathematical Intuition. *Proceedings of the Aristotelian Society, 80*: 145–168. Prieiga per internetą: http://www.jstor.org/stable/4544956 [žiūrėta 2022 05 02].

Parsons, C. (2008). *Mathematical Thought and Its Objects*. Cambridge: Cambridge University Press.

Prior, A. N. (1960). The Runabout Inference-Ticket. *Analysis, 21*(2), 38–39. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.2307/3326699 [žiūrėta 2022 05 02].

Quine, W. V. (1970). Methodological Reflections on Current Linguistic Theory. *Synthese 21*(3/4): 386–398. Prieiga per internetą: https://www.jstor.org/stable/20114734 [žiūrėta 2022 05 02].

Quine, W. V. O. (1964a). On What There Is. In P. Benacerraf and H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics*, 183–196. New Jersey: Prentice–Hall Inc.

Quine, W. V. O. (1964b). Truth By Convention. In P. Benacerraf and H. Putnam (red.), *Philosophy of Mathematics*, 322–345. New Jersey: Prentice–Hall Inc.

Schechter, J. (2010). The Reliability Challenge and the Epistemology of Logic. *Philosophical Perspectives* 24: 437–464. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.1111/j.1520-8583.2010.00199.x [žiūrėta 2022 05 02].

Schroeder, S. (2018) On some standard objections to mathematical conventionalism. *Belgrade Philosophical Annual 30*: 83–98. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.5937/BPA1730083S [žiūrėta 2022 05 02].

Shapiro, S. (1997). *Philosophy of Mathematics: Structure and Ontology*. Oxford: Oxford University Press.

Sidelle, A. (2009). Conventionalism and the Contingency of Conventions. *Noûs 43*(2): 224–241. Prieiga per internetą: http://www.jstor.org/stable/40267339 [žiūrėta 2022 05 02].

Sider, T. (2005). Reductive Theories of Modality. In M. J. Loux and D. W. Zimmerman (red.), *The Oxford Handbook of Metaphysics*, 180–208. Oxford: Oxford University Press.

Steiner, M. (1975). *Mathematical Knowledge*. Ithaca: Cornell University Press.

Warren, J. (2015a). The Possibility of Truth by Convention. *The Philosophical Quarterly (1950-) 65*(258): 84–93. Prieiga per internetą: http://www.jstor.org/stable/24672681 [žiūrėta 2022 05 30].

Warren, J. (2015b). Talking with Tonkers. *Philosophers Imprint 15*(24). Prieiga per internetą: http://hdl.handle.net/2027/spo.3521354.0015.024 [žiūrėta 2022 05 02].

Warren, J. (2017). Epistemology versus non-causal realism. *Synthese*, *194*(5), 1643–1662. Prieiga per internetą: http://www.jstor.org/stable/26748786 [žiūrėta 2022 05 02].

Warren, J. (2018). Change of Logic, Change of Meaning. *Philos Phenomenol Res*, *96*, 421–442. Prieiga per internetą: https://doi.org/10.1111/phpr.12312 [žiūrėta 2022 05 02].

Warren, J. (2020). *Shadows of Syntax: Revitalizing Logical and Mathematical Conventionalism*. New York: Oxford University Press.

Woods, J. (2018). The Frege-Geach Problem. In T. McPherson and D. Plunkett (red.), *The Routledge Handbook of Metaethics*, 226–242. New York: Taylor & Francis.

Wrigley, M. (1980). Wittgenstein on Inconsistency. *Philosophy 55*(214): 471–484. Prieiga per internetą: http://www.jstor.org/stable/3750316 [žiūrėta 2022 05 02].

Zalta, E. N. (1983). *Abstract Objects*. Dordrecht: D. Reidel Publishing Company.

Zalta, E. N. (forthcoming). *Mathematical Pluralism*. Prieiga per internetą: http://mally.stanford.edu/Papers/math-pluralism.pdf [žiūrėta 2022 05 02].