VILNIAUS UNIVERSITETAS

ŠIAULIŲ AKADEMIJA

MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA

Didžiųjų duomenų analitikos specializacija

ARMINAS BUTKUS

Magistro studijų baigiamasis darbas

JUNGTINIS ANALIZINIŲ FUNKCIJŲ APROKSIMAVIMAS DISKREČIAISIAIS PERIODINIŲ DZETA FUNKCIJŲ POROS POSTŪMIAIS

Darbo vadovė

prof. dr. Renata Macaitienė

Šiauliai, 2022

Studijuojančiojo, teikiančio baigiamąjį darbą, GARANTIJA

WARRANTY of Final Thesis

Vardas, pavardė *Name, Surname*	**Arminas Butkus**
Padalinys *Faculty*	**Šiaulių akademija** ***Šiauliai Academy***
Studijų programa *Study Programme*	**Didžiųjų duomenų analitikos specializacija** ***Specialization in Big Data Analytics***
Darbo pavadinimas *Thesis topic*	**Jungtinis analizinių funkcijų aproksimavimas diskrečiaisiais periodinių dzeta funkcijų poros postūmiais** ***Joint Approximation of Analytic Functions by Discrete Shifts of a Pair of Periodic Zeta-Functions***
Darbo tipas *Thesis type*	**Baigiamasis darbas** ***Final Thesis***

Garantuoju, kad mano baigiamasis darbas yra parengtas sąžiningai ir savarankiškai, kitų asmenų indėlio į parengtą darbą nėra. Jokių neteisėtų mokėjimų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

I guarantee that my thesis is prepared in good faith and independently, there is no contribution to this work from other individuals. I have not made any illegal payments related to this work.

Šiame darbe tiesiogiai ar netiesiogiai panaudotos kitų šaltinių citatos yra pažymėtos literatūros nuorodose.

Quotes from other sources directly or indirectly used in this thesis, are indicated in literature references.

Aš, Arminas Butkus, pateikdamas (-a) šį darbą, patvirtinu (*pažymėti*) ☒

Embargo laikotarpis
Embargo Period

Prašau nustatyti šiam baigiamajam darbui toliau nurodytos trukmės embargo laikotarpį:
I am requesting an embargo of this thesis for the period indicated below:

☐ __________ mėnesių / *months*
(embargo laikotarpis negali viršyti 60 mėn. / *an embargo period shall not exceed 60 months*).

☒ Embargo laikotarpis nereikalingas / *no embargo requested.*

Embargo laikotarpio nustatymo priežastis / *Reason for embargo period*:

Turinys

ĮVADAS **4**

1 NAUDOJAMOS SĄVOKOS IR REZULTATAI **9**

1.1 Silpnasis matų konvergavimas 9

1.2 Haro matas 10

1.3 Tolygus pasiskirstymas moduliu 1 11

2 PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS **12**

2.1 Tikimybių matų silpnasis konvergavimas 12

2.2 Vidurkių įverčiai 15

2.3 Aproksimavimo rezultatai 17

2.4 Ribinė teorema 19

2.5 Pagrindinės teoremos įrodymas 21

3 TAIKYMAS **23**

REZULTATAI IR IŠVADOS **24**

LITERATŪRA **25**

SANTRAUKA **27**

SUMMARY **28**

ĮVADAS

Aktualumas. 1975 metais matematikas S. M. Voroninas (Voronin) pastebėjo įdomią dzeta ir L funkcijų savybę — universalumą — tai, kad analizinės tam tikrose kompaktinėse aibėse funkcijas galima tolygiai aproksimuoti dzeta ar L funkcijų postūmiais. Pavyzdžiui, visos Dirichlė L funkcijos $L(s,\chi)$, kurios pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiamos eilute

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_m}{m^s}, \qquad s = \sigma + it,$$

čia χ_m — Dirichlė charakteris moduliu q, yra universalios ta prasme, kad jų postūmiai $L(s + i\tau, \chi), \tau \in \mathbb{R}$, norimu tikslumu tolygiai juostos $D = \left\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\right\}$ skrituliuose aproksimuoja pačią analizinių funkcijų klasę. Voronas įrodė [22] universalumo savybę Rymano dzeta funkcijai

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}, \qquad s = \sigma + it, \qquad \sigma > 1.$$

Jos rezultatas pateikiamas A teoremoje.

A teorema. *Tarkime, kad* $0 < \theta < \frac{1}{4}$, *o funkcija* $f(s)$ *yra tolydi ir nevirsta nuliu skritulyje* $|s| \leq \theta$ *ir analizinė to skritulio viduje. Tuomet,* $\varepsilon > 0$ *egzistuoja toks skaičius* $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, *su kuriuo yra teisinga nelygybė*

$$\max_{|s|\leq\theta} \left|\zeta(s + \frac{3}{4} + i\tau,\chi) - f(s)\right| < \varepsilon.$$

Minėtame straipsnyje [22] Voroninas pateikė ir analogišką tvirtinimą ne tik Rymano dzeta funkcijai — jis pastebėjo, kad tokia teorema yra teisinga ir visoms Dirichlė L funkcijoms. Nesunku buvo patikrinti, kad prielaida yra teisinga.

Tais pačiais 1975 metais Voroninas gavo dar įdomesnį rezultatą — nagrinėdamas Dirichlė L funkcijų funkcinį nepriklausomumą, jis pastebėjo, kad šios funkcijos turi jungtinę universalumo savybę, t.y., analizinių funkcijų rinkinys tuo pačiu metu gali būti aproksimuojama Dirichlė L funkcijų postūmių rinkiniu. Rezultatas pateikiamas B teoremoje.

B teorema. *Tarkime, kad* $0 < \theta < \frac{1}{4}, \chi_1,\ldots,\chi_\tau$ *yra poromis neekvivalentūs Dirichlė charakteriai, o funkcijos* $f_1(s),\ldots f_\tau(s)$ *yra tolydžios ir nevirsta nuliu skritulyje* $|s| \leq \theta$ *ir yra analizinės to skritulio viduje. Tuomet, kiekvieną* $\varepsilon > 0$ *atitinka toks skaičius* $\tau = \tau(\varepsilon) \in \mathbb{R}$, *kad su visais* $j = 1,\ldots,\tau$ *yra teisinga nelygybė*

$$\max_{|s|\leq\theta} \left|L(s + \frac{3}{4} + i\tau, \chi_j) - f_j(s)\right| < \varepsilon.$$

Po S. M. Voronino darbo [22], daugelis žinomų skaičių teorijos specialistų toliau tęsė dzeta funkcijų universalumo tyrimus. Tarp jų B. Bagčis (B. Bagchi), H. Baueris (H. Bauer), R. Garunkštis, S. M. Gonekas (S. M. Gonek), A. Laurinčikas, K. Matsumotas (K. Matsumoto),

J. Štoidingas (J. Stending) ir daugelis kitų Lietuvos, Japonijos, Vokietijos, Lenkijos matematikų. Dabar Voronino tipo teoremos turi šiuolaikines versijas, tokia forma bus pateikiama ir magistro darbe įrodama teorema.

Jungtinio universalumo tyrimai tęsiami iki dabar, o įvairioms dzeta funkcijoms pateikiami vis nauji rezultatai rodo universalumo problemos aktualumą dzeta ir L funkcijų teorijoje. Tam tikri nauji rezultatai gauti magistro darbe.

Problema. Teoremose A ir B buvo pateikti tolydaus universalumo atvejai, kuomet postūmiai τ įgyja bet kurias realias reikšmes, tačiau taikymuose svarbu nagrinėti atvejus, kai τ įgyja reikšmes iš tam tikros diskrečiosios aibės, pavyzdžiui, aritmetinės progresijos ar kitos universalesnės sekos. Kita labai svarbi problema yra analizinių funkcijų rinkinių aproksimavimo dzeta ar L funkcijų rinkinių postūmiais galimybė. Magistro darbe siekiama nagrinėti jungtinį diskretųjį skirtingų periodinių dzeta funkcijų rinkinių universalumą bei galimybę pateikti modifikuotą universalumo teoremos atvejį, kai postūmių aproksimuojančių duotas analizines funkcijas, apatinis tankis yra pakeičiamas tiesiog tankiu.

Tikslas — įrodyti diskretųjį jungtinių periodinių dzeta funkcijos poros universalumą, postūmiams naudojant netrivalių Rymano dzeta funkcijos nulių menamąsias dalis.

Tyrimų metodai. Jungtinio universalumo teoremų įrodymai remiasi dzeta funkcijų teorija bei silpnojo tikimybinių matų konvergavimo teorija. Taip pat naudojami mato teorijos elementai bei analizinių funkcijų aproksimavimo teorija.

Naujumas ir praktinė vertė. Magistro darbo rezultatai yra nauji. Jie patikslina ir išplėčia periodinių Hurvico dzeta funkcijų jungtinio universalumo rezultatus.

Aprobacija. Magistros darbo rezultatai pristatyti jaunųjų tyrėjų tarptautinėje konferencijoje„Jaunasis tyrėjas išmaniajai visuomenei" (Šiaulių akademija, 2022 m. gegužės 11 d.).

Periodinės dzeta funkcijos. Tegul $0 < \alpha \leq 1$ yra fiksuotas parametras. Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$, $s = \sigma + it \in \mathbb{C}$, pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s,\alpha) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(m+\alpha)^s}$$

ir analiziškai pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu 1. Aišku, kad $\zeta(s,1) = \zeta(s)$ ir

$$\zeta\left(s,\frac{1}{2}\right) = (2^s - 1)\zeta(s),$$

čia $\zeta(s)$ — Rymano dzeta funkcija. Taigi, Hurvico dzeta funkcija $\zeta(s,\alpha)$ yra Rymano dzeta funkcijos apibendrinimas. Kita vertus, $\zeta(s,\alpha)$ iš esmės skiriasi nuo $\zeta(s)$, kadangi bendruoju atveju $\zeta(s,\alpha)$ neturi Oilerio sandaugos pagal pirminius skaičius.

Tegul $a = \{a_m : m \in \mathbb{N}\}$ yra periodinė kompleksinių skaičių seka su minamaliu periodu $k \in \mathbb{N}$. **Periodinė dzeta funkcija** $\zeta(s,\mathfrak{a})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s,\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s}. \tag{1}$$

Kadangi koeficientai a_m yra periodiniai, tai pusplokštumėje $\sigma > 1$ periodinė dzeta funkcija išreiškiama per Hurvico dzeta funkciją ir galioja lygybė

$$\zeta(s,\mathfrak{a}) = \frac{1}{k^s} \sum_{l=1}^{k} a_l \zeta\left(s, \frac{l}{k}\right).$$

Pastaroji lygybė kartu su Hurvico dzeta funkcijos $\zeta(s,\alpha)$ savybėmis duoda funkcijos $\zeta(s,\mathfrak{a})$ analizinį pratęsimą. Jeigu

$$a \stackrel{def}{=} \frac{1}{k} \sum_{l=1}^{k} a_l = 0,$$

tai funkcija $\zeta(s,\mathfrak{a})$ yra sveikoji, o kitais atvejais turi paprastąjį polių taške $s = 1$ su reziduumu a. Jeigu $a_m \equiv 1$ ir $k = 1$, tai funkcija $\zeta(s,\mathfrak{a})$ virsta Rymano dzeta funkcija. Jeigu $a_m = \chi_m$, čia χ_m yra Dirichlė charakteris moduliu k, tada $\zeta(s,\mathfrak{a})$ tampa Dirichlė L-funkcija

$$L(s,\chi) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi_m}{m^s}, \qquad \sigma > 1.$$

Taigi, periodinė dzeta funkcija yra klasikinių Rymano dzeta funkcijos ir Dirichlė L-funkcijų apibendrinimas.

Tegul $0 < \alpha \leq 1$ yra fiksuotas parametras, o $\mathfrak{b} = \{b_m : m \in \mathbb{N}_0\}$ – kita periodinė seka su minimaliuoju periodu $l \in \mathbb{N}$. **Periodinė Hurvico dzeta funkcija** $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ pusplokštumėje $\sigma > 1$ apibrėžiama eilute

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m}{(m+\alpha)^s}. \tag{2}$$

Kadangi koeficientai b_m yra periodiniai, tai pusplokštumėje $\sigma > 1$ galioja lygybė

$$\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}) = \frac{1}{l^s} \sum_{m=0}^{l-1} b_m \zeta\left(s, \frac{m+\alpha}{l}\right).$$

Tai rodo, kad $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ yra pratęsiama į visą kompleksinę plokštumą, išskyrus galbūt tašką $s = 1$, kuris yras paprastasis polius su reziduumu

$$b \stackrel{def}{=} \frac{1}{l} \sum_{m=0}^{l-1} b_m.$$

Jeigu $b = 0$, tai $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ yra sveikoji funkcija. Kai $b_m \equiv 1$ ir $l = 1$, tuomet funkcija $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ virsta Hurvico dzeta funkcija. Jeigu $b_m = e^{2\pi i \frac{m}{l}}$, tada $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ tampa Lercho (Lerch) dzeta funkcija

$$L\left(\frac{1}{l},\alpha,s\right) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi i \frac{m}{l}}}{m^s}.$$

Analizinių funkcijų aproksimavimo funkcijų $\zeta(s;\mathfrak{a})$ ir $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$ postūmiais klausimas buvo nagrinėjama [2], [6], [7], [18], [12], [15], [16], [17] ir [19] straipsniuose. Tačiau pirmasis junginis universalumo rezultatas funkcijų porai $\big(\zeta(s;\mathfrak{a}),\ \zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})\big)$ buvo gautas [8] straipsnyje. Jungtinė aproksimavimo teorema analizinių funkcijų porai įrodyta, darant prielaidas, kad $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi (t.y.: $a_1 = 1$ and $a_{mn} = a_m a_n$ visiems tarpusavyje pirminiams skaičiams m ir n) ir kad parametras yra transcendentinis.

Pateiksime šį rezultatą. Tegul $\mathcal{K}$ yra juostos $D = \{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\}$, kompaktinių poaibių su sujungiaisiais papildiniais klasė, $H(K)$, $K \in \mathcal{K}$, yra tolydžių aibėje $\mathcal{K}$ klasė ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasė. Be to, tegul $H_0(K)$ žymi neįgyjančių nulių funkcijų iš $H(K)$ poklasį. Įrodyta [8], kad jei $K_1,K_2 \in \mathcal{K}$, $f_1(s) \in H_0(K_1)$ ir $f_2(s) \in H(K_2)$,tuomet su visais $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{T\to\infty} \frac{1}{T}\mathrm{meas}\bigg\{\tau \in [0,T] : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+i\tau;\mathfrak{a}) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2} |\zeta(s+i\tau,\alpha;\mathfrak{b}) - f_2(s)| < \varepsilon\bigg\} > 0,$$

kur meas$A$ žymi mačios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego matą. Diskreti šios teoremos versija pateikta [14] publikacijoje. Tegul $\#A$ žymi aibės A elementų skaičių, $N \in \mathbb{N}$, $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė. Apibrėžkime aibę

$$L(\mathbb{P}, \alpha, h, \pi) = \Big\{(\log p : p \in \mathbb{P}),(\log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0,\frac{2\pi}{h}\Big\}, \quad h > 0.$$

Jei aibė $L(\mathbb{P}, \alpha, h, \pi)$ yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, o seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi, tai tiems patiems K_1, K_2 ir $f_1(s), f_2(s)$, buvo įrodyta [14], kad kiekvienam $\varepsilon > 0$,

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\bigg\{0 \le k \le N : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+ikh;\mathfrak{a}) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2} |\zeta(s+ikh,\alpha;\mathfrak{b}) - f_2(s)| < \varepsilon\bigg\} > 0. \tag{3}$$

Be to, buvo įrodyta, kad jei aibė

$$\Big\{(h_1 \log p : p \in \mathbb{P}),(h_2 \log(m+\alpha) : m \in \mathbb{N}_0,2\pi\Big\}$$

yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, tai, universalumo savybė galioja ir skirtingiems h, t.y. įrodyta, jog

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1}\#\bigg\{0 \le k \le N : \sup_{s\in K_1} |\zeta(s+ikh_1;\mathfrak{a}) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s\in K_2} |\zeta(s+ikh_2,\alpha;\mathfrak{b}) - f_2(s)| < \varepsilon\bigg\} > 0.$$

Panašūs rezultatai gauti ir [10], [11] ir [13] darbuose.

Magistro darbo užduotis — pakeisti (3) nelygybėje seką $\{kh\}$ sudėtingesne seka. Tegul $0 < \gamma_1 < \gamma_2 < \ldots \le \gamma_k \le \ldots$ yra Rymano dzeta funkcijos netrivalių nulių menamųjų dalių seka. Sekos $\{\gamma_k : k \in \mathbb{N}\}$ elgesys yra paslapingas, todėl naudosime tam tikrą hipotezę, kuri yra Montgomerio hipotezės [20] apie Rymano dzeta funkcijos nulių porų koreliaciją silpnoji forma. Tiksliau, reikalausime, kad sekai $\{\gamma_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ galiotų įvertis

$$\sum_{\substack{\gamma_k \le 0, \quad \gamma_l \le T \\ |\gamma_k - \gamma_l| \ll \frac{c}{\log T}}} 1 \ll T \log T \tag{4}$$

su fiksuotu $c > 0$ ir $T \to \infty$. Montogomerio hipotezė pateikia asimtotinę formulę kairiajai (4) nelygybės pusei. Ši sąlyga naudota R. Garunkščio, A. Laurinčiko ir R. Macaitienės darbe [5] analizinių funkcijų aproksimavimui Rymano dzeta funkcijos postūmiais $\zeta(s + i\gamma_k h)$, o R. Garunkščio ir A. Laurinčiko darbuose [3], [4], vietoje (4) nelygybės buvo panaudota Rymano hipotezė.

Pateikiame pagrindinį magistro darbo rezultatą.

Universalumo teorema. *Tarkime, kad seka $\mathfrak{a}$ yra multiplikatyvi, parametras α yra transcendentusis skaičius ir sekai $\{\gamma_k\colon k \in \mathbb{N}\}$ teisingas (4) įvertis. Taip pat, tegul $K_1, K_2 \in \mathcal{K}$, $f_1(s) \in H_0(K_1)$, $f_2(s) \in H(K_2)$ ir $h > 0$. Tuomet su visais $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \# \Big\{ 1 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a}) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s \in K_2} |\zeta(s + i\gamma_k h, \alpha; \mathfrak{b}) - f_2(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \# \Big\{ 1 \le k \le N : \sup_{s \in K_1} |\zeta(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a}) - f_1(s)| < \varepsilon,$$
$$\sup_{s \in K_2} |\zeta(s + i\gamma_k h, \alpha; \mathfrak{b}) - f_2(s)| < \varepsilon \Big\} > 0.$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

Teoremos įrodymui bus taikomi Furjė transformacijos ir silpnojo konvergavimo metodai (žr. 2.1-2.4 poskyrius).

1. NAUDOJAMOS SĄVOKOS IR REZULTATAI

Šiame skyriuje pateikiami darbe naudojamų sąvokų apibrėžimai, terminai bei pagalbinės lemos.

1.1. Silpnasis matų konvergavimas

1.1.1 apibrėžimas. *Tarkime, kad Ω yra netuščia aibė. Aibės Ω poaibių sistema $\mathcal{F}$ vadinamas Borelio kūnu (σ-kūnu), jei:*

a) $\Omega \in \mathcal{F}$*;*

b) $A^c \in \mathcal{F}$*, čia* $A \in \mathcal{F}$ *(*A^c *žymi aibės* A *papildinį);*

c) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$ *visoms* $A_m \in \mathcal{F}$*,* $m = 1,2,\ldots$

1.1.2 apibrėžimas. *Trejetas* $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ *vadinamas tikimybine erdve.*

Tegul $\mathcal{T}$ topologinė erdvė, o $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ – erdvės $\mathcal{T}$ Borelio aibių klasė, t. y. visų atvirų aibių sistemos generuotas σ-kūnas. Tada kiekvienas matas klasėje $\mathcal{B}(\mathcal{T})$ vadinamas *Borelio matu.*

Tikimybinių metodų panaudojimo idėja, tyrinėjant funkcijų, apibrėžtų Dirichlė eilutėmis, reikšmių pasiskirstymą, yra grindžiama silpno tikimybinių matų konvergavimo taikymu, kuris yra vienas iš pagrindinių asimptotinių metodų.

Tarkime, kad P_n ir P yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$.

1.1.3 apibrėžimas. *Sakome, kad* P_n *silpnai konverguoja į* P*, kai* $n \to \infty$*, jei*

$$\int\limits_S f dP_n \to \int\limits_S f dP, \quad n \to \infty,$$

kiekvienai realiai aprėžtai, tolydžiąjai funkcijai f *iš* S*. Žymime* $P_n \Rightarrow P$*.*

1.1.1 lema (Galagherio lema.) *Tarkime,* T_0 *ir* $T \geq \delta > 0$ *yra realieji skaičiai, o* $\mathcal{T}$ *yra baigtinė aibė intervale* $[T_0, T+T_0]$ *ir*

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t \in \mathcal{T} \\ |t-x|<\delta}} 1, \tag{5}$$

Be to, tegul $S(x)$ *yra tolydi intervale* $[T_0, T+T_0]$ *kompleksinio kintamojo funkcija , turinti tolydžią išvestinę intervale* $(T_0, T+T_0)$*. Tada*

$$\sum_{t \in T} N_s^{-1}(t)|S(t)|^2 \leq \frac{1}{\delta}\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx \int_{T_0}^{T_0+T} |S'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Darbe naudosime vieną iš paprasčiausių silpno konvergavimo kriterijų.

1.1.2 lema $P_n \Rightarrow P$ tada ir tik tada, jei iš kiekvino posekio $\{P'_n\}$ galima išskirti kitą posekį $\{P''_n\}$ taip, kad $P''_n \Rightarrow P$.

1.2. Haro matas

Šiame skyriuje pateikiame mato, Haro (Harr) mato bei kitas sąvokas, susijusias su jų taikymu ribinių teoremų įrodymuose.

1.2.1 apibrėžimas. *Matu aibės E poaibių algebroje $\mathcal{A}$ vadinamas atvaizdis $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$, tenkinantis šiuos reikalavimus:*

a) $\mu(\varnothing) = 0$,

b) jei $\{A_m : m \in \mathbb{N}\}$ *– poromis nesikertančių aibių iš* $\mathcal{A}$ *seka ir* $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{A}$, *tai*

$$\mu\left(\bigcup_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum_{m=1}^{\infty} \mu(A_m).$$

Tegul Ω yra netuščia aibė, o $\overline{\mathcal{F}\mathcal{A}}$ - poaibių sistema apibrėžta **1.1.1** apibrėžime.

1.2.2 apibrėžimas*Aibės Ω poaibių šeimoje $\mathcal{F}$ apibrėžta neneigiama funkcija P vadinama tikimybiniu matu, jeigu ji tenkina šias savybes:*

a) $P(\Omega) = 1$,

b) $P\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ *su visais* $A_m \in \mathcal{F}$ *tokiais, kad* $A_k \cap A_l = \varnothing$, *jei* $k \neq l$.

1.2.3 apibrėžimas. *Apibrėžtų erdvėje $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, jei kiekvienas elementų iš $\{P\}$ posekis turi silpnai konverguojantį posekį.*

1.2.4 apibrėžimas. *Tikimybinių matų šeima P vadinama suspausta (tiršta), jei kiekvienam $\forall \varepsilon > 0$ egzistuoja kompaktiška aibė $K \subset S$ tokia, kad $P(K) > 1 - \varepsilon$, visiems P iš $\{P\}$.*

Tikimybinių matų silpno konvergavimo teorijoje svarbų vaidmenį atlieka Prochorovo teoremos, susiejančias reliatyvaus kompaktiškumo ir suspaustumo sąvokas.

1.2.1 lema. *Jei tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra tiršta, tai ji yra ir reliatyviai kompaktiška.*

1.2.2 lema. *Tegul S – pilna separabili metrinė erdvė. Jei apibrėžtų erdvėje $(\mathcal{S}, \mathcal{B}(\mathcal{S}))$ tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra reliatyviai kompaktiška, tai ji yra ir suspausta.*

1.2.5 apibrėžimas. *Atsitiktinių elementų seka $\{X_n\}$ konverguoja pagal skirstinį į atsitiktinį elementą X, kai $n \to \infty$, jei X_n skirstiniai konverguoja į elemento X skirstinį.* Žymėsime $(X_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X)$.

Tegul S – separabili metrinė erdvė su metrika ρ, o $X_n, X_{n1}, X_{n2}, \ldots$ yra S–reikšmiai atsitiktiniai elementai, apibrėžti erdvėje $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

1.2.3 lema. *Tarkime, kad $(X_{kn} \xrightarrow{\mathcal{D}} X_k)$, kai $n \to \infty$ (kiekvienam k), bei $(X_k \xrightarrow{\mathcal{D}} X)$, kai $k \to \infty$. Jei kiekvienam $\varepsilon > 0$*

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \mathbb{P}\{\rho(X_{k_n}, Y_n) \geq \varepsilon\} = 0, \tag{6}$$

tai $Y_n \xrightarrow{\mathcal{D}} X$, kai $n \to \infty$.

1.2.6 apibrėžimas. *Tegul aibėje G apibrėžta grupės bei topologinė struktūra. Jei funkcija $h : G \times G \to G$, apibrėžiama lygybe $h(x,y) = xy^{-1}$, yra tolydi, tuomet aibė G vadinama topologine grupe.*

1.2.7 apibrėžimas. *Topologinė grupė vadinama kompaktiška, jei jos topologija yra kompaktiška.*

1.2.8 apibrėžimas. *Borelio matas P, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje G, vadinamas invariantiniu, jei $P(A) = P(xA) = P(Ax)$ visoms $A \in \mathcal{B}(G)$ ir $x \in G$. Čia xA ir Ax yra atitinkamai aibės $\{xy : y \in A\}$ ir $\{xy : x \in A\}$.*

1.2.9 apibrėžimas. *Invariantinis Borelio matas, apibrėžtas kompaktiškoje topologinėje grupėje, vadinamas Haro matu.*

1.2.4 lema. *Kiekvienoje kompaktiškoje topologinėje grupėje egzistuoja vienintelis tikimybinis Haro matas.*

1.3. Tolygus pasiskirstymas moduliu 1

Šiame skyriuje pateikiamos realiųjų skaičių sekų tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 sąlygos.

1.3.1 abibrėžimas. *Seka $\{z^k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ yra vadinama tolygiai pasiskirsčiusia moduliu 1, jei kiekvienam intervalui $I = [a, b) \subset [0{,}1)$, kurio ilgis $|I|$, teisinga lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \chi_I(\{z_k\}) = |I|,$$

it čia χ_I yra intervalo I indikatorius, o $\{u\}$ yra skaičius $u \in \mathbb{R}$ trupmeninė dalis.

Pagrindinės teoremos įrodymui naudojamas Veilio (Weyl) kriterijus, nurodantis būtinas ir pakankamas sekos $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tolygaus konvergavimo moduliu 1 sąlygas.

1.3.1 lema [9]. *Realių skaičių seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\}$ tolygiai konverguoja moduliu 1 tada ir tik tada, kai su visais sveikaisiais $m \neq 0$ yra teisinga lygybė*

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} e^{2\pi i m x_k} = 0.$$

Lemos įrodymą galima rasti [9].

2. PAGRINDINĖS TEOREMOS ĮRODYMAS

2.1. Tikimybių matų silpnasis konvergavimas

2.1.1 lema. *Su visais $a \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ seka $\{\gamma_k a : k \in \mathbb{N}\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1.* Lema įrodyta [21], naudota R. Garunkščio, A. Laurinčiko ir R. Macaitienės darbe [5]. Ji yra esminė, įrodant ribinę teoremą. Be to, 1.2.1 lema bus svarbi silpnojo tikimybių matų konvergavimo tam tikrose topologinėse grupėse įrodymui. Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, ir

$$\Omega_1 = \prod_{p \in \mathbb{P}} \gamma_p \text{ ir } \Omega_2 = \prod_{m \in \mathbb{N}_0} \gamma_m,$$

Remiantis Tikhonovo teorema, su sandaugos topologija ir pataškinės daugybos operacija, begaliniamačiai erdviniai torai Ω_1 ir Ω_2 yra topologinės Abelio grupės. Apibrėžkime

$$\Omega = \Omega_1 \times \Omega_2.$$

Taigi, Ω taip pat yra topologinė Abelio grupė. Todėl erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$ gali būti apibrėžtas tikimybinis Haro matas m_H (žr. 1.2 poskyrį). Tokiu būdu gauname tikimybinę erdvę $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$. Tegul $\omega_1(p)$, $p \in \mathbb{P}$, žymi elemento $\omega_1 \in \Omega_1$ p-tąją komponentę, o $\omega_2(m)$ — m-ąją elemento $\omega_2 \in \Omega_2$ komponentę. Toro Ω elementus žymėsime $\omega = (\omega_1,\omega_2)$.

Tegul $A \in \mathcal{B}(\Omega)$, erdvėje apibrėžkime matą

$$Q_{N,\alpha}(A) = \frac{1}{N}\#\Big\{1 \le k \le \mathbb{N} : \Big(\big(p^{-i\gamma_k h} : p \in \mathbb{N}\big), (m+\alpha)^{-i\gamma_k h} : m \in \mathbb{N}\Big) \in A\Big\}.$$

Kitoje lemoje įrodysime mato $Q_{N,\alpha}$ silnpąjį konvergavimą, kai $N \to \infty$.

2.1.2 lema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet, kai $N \to \infty$ matas, $Q_{N,\alpha}$ silpnai konverguoja į Haro matą m_H.*

Mes naudosime Furje transformacijos metodą. Tegul $g_{N,\alpha}(\underline{k},\underline{l})$, $\underline{k} = (k_p : k_p \in \mathbb{Z}, p \in \mathbb{P})$, $\underline{l} = (l_m : l_m \in \mathbb{Z}, m \in \mathbb{N}_0)$, yra mato $Q_{N,\alpha}$ Furje trasformacija. Tuomet gerai žinome, kad

$$g_{N,\alpha}(\underline{k},\underline{l}) = \int_{\Omega} \Big({\prod_{p\in\mathbb{P}}}' \omega_1^{k_p}(p) {\prod_{m\in\mathbb{N}_0}}' \omega_2^{l_m}(m)\Big) \mathrm{d}Q_{N,\alpha},$$

kur "′" reiškia, kad tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p ir l_m yra nelygūs nuliui. Tuomet, remiantis $Q_{N,\alpha}$ aibrėžimu, turime, jog $g_{N,\alpha}(\underline{k},\underline{l})$ yra tokio pavidalo:

$$g_{N,\alpha}(\underline{k},\underline{l}) = \frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} {\prod_{p\in\mathbb{P}}}' p^{-ihk_p\gamma_k} {\prod_{m\in\mathbb{N}_0}}' (m+\alpha)^{-ihl_m\gamma_k} =$$

$$\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N} \exp\Big\{-ih\gamma_k\Big({\sum_{p\in\mathbb{P}}}' k_p \log p + {\sum_{m\in\mathbb{N}_0}}' l_m \log(m+\alpha)\Big)\Big\}. \tag{7}$$

Akivaizdu, kad

$$g_{N,\alpha}(\underline{0},\underline{0}) = 1.$$

Kadangi α yra transcendentusis skaičius, aibė

$$\Big\{(\log p : p \in \mathbb{P}),(\log(m+n) : m \in \mathbb{N}_0)\Big\}$$

yra tiesiškai priklausoma virš racionaliųjų skaičių kūn $\mathbb{Q}$. Todėl,

$$\sum_{p\in\mathbb{P}}{}' k_p \log p + \sum_{m\in\mathbb{N}_0}{}' l_m \log(m+n) \neq 0$$

su visais $(\underline{k},\underline{l}) \neq (\underline{0},\underline{0})$. Atsižvelgę į 2.1.1 ir 1.3.1 lemas ir remdamiesi (7) gauname, kad su visais $(\underline{k},\underline{l}) \neq (\underline{0},\underline{0})$,

$$g_{N,\alpha}(\underline{k},\underline{l}) = \int_\Omega \Big(\prod_{p\in\mathbb{P}}{}' \omega_1^{k_p}(p) \prod_{m\in\mathbb{N}_0}{}' \omega_2^{l_m}(m)\Big) \mathrm{d}Q_{N,\alpha},$$

ir

$$\lim_{N\to\infty} g_{N,\alpha}(\underline{k},\underline{l}) = 0.$$

Tai kartu su $g_{N,\alpha}(\underline{0},\underline{0}) = 1$ duoda, jog

$$\lim_{N\to\infty} g_{N,\alpha}(\underline{k},\underline{l}) = \begin{cases} 1 & \text{if } (\underline{k},\underline{l}) = (\underline{0},\underline{0}), \\ 0 & \text{if } (\underline{k},\underline{l}) \neq (\underline{0},\underline{0}). \end{cases}$$

Kadangi šios lygybės dešinioji pusė yra Haro mato m_H Furje trasformacija, lemos tvirtinimas gaunamas iš tikimybinių matų kompaktinėse grupėse tolydumo.

Iš 2.1.2 lemos seka tikimybinių matų, apibrėžtų absoliučiai konverguojančių eilučių vidurkiais, silpnasis konvergavimas. Primename, jog $D = \Big\{s \in \mathbb{C} : \frac{1}{2} < \sigma < 1\Big\}$. Tegul $H(D)$ žymi analizinių srityje D funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo ant kompaktų topologija ir $H^2(D) = H(D) \times H(D)$.

Tegul $\theta > \frac{1}{2}$ yra fiksuotas skaičius ir $m,n \in \mathbb{N}$, pažymėkime

$$v_n(m) = \exp\Big\{-\Big(\frac{m}{n}\Big)^\theta\Big\}.$$

Be to, tegul $m \in \mathbb{N}_0$, $n \in \mathbb{N}$,

$$v_n(m,\alpha) = \exp\Big\{-\Big(\frac{m+\alpha}{n+\alpha}\Big)^\theta\Big\}.$$

Apibrėžkime eilutes

$$\zeta_n(s;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m v_n(m)}{m^s}$$

ir

$$\zeta_n(s,\alpha;\mathfrak{b}) = \sum_{m=0}^\infty \frac{b_m v_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s}.$$

Pastaroji eilutė konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \frac{1}{2}$ [6]. Be to, pažymėkime

$$\zeta_n(s,\omega_1;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^\infty \frac{a_m \omega_1(m) v_n(m)}{m^s}$$

ir

$$\zeta_n(s,\alpha,\omega_2;\mathfrak{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m \omega_2(m) v_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s}.$$

Šios eilutės taip pat konverguoja absoliučiai, kai $\sigma > \frac{1}{2}$. Trumpumo dėlei, pažymėkime

$$\underline{\zeta}_n(s,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\zeta_n(s;\mathfrak{a}),\zeta_n(s,\alpha;\mathfrak{b}))$$

ir

$$\underline{\zeta}_n(s,\alpha,\omega;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\zeta_n(s,\omega_1;\mathfrak{a}),\zeta_n(s,\alpha,\omega_2;\mathfrak{b})).$$

Apibrėžkime funkciją $u_{n,\alpha} : \Omega \to H^2(D)$ formule

$$u_{n,\alpha}(\omega) = \underline{\zeta}_n(s,\alpha,\omega;\mathfrak{a},\mathfrak{b}).$$

Kadangi eilutės

$$\zeta_n(s,\omega_1;\mathfrak{a}) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m \omega_1(m) v_n(m)}{m^s}$$

ir

$$\zeta_n(s,\alpha,\omega_2;\mathfrak{b}) = \sum_{m=0}^{\infty} \frac{b_m \omega_2(m) v_n(m,\alpha)}{(m+\alpha)^s},$$

kai $\sigma > \frac{1}{2}$, konverguoja absoliučiai, funkcija $u_{n,\alpha}$ yra tolydi, vadinasi $(\mathcal{B}(\Omega),\mathcal{B}(H^2(D)))$-mati. Todėl matas m_H erdvėje $(H^2(D),\mathcal{B}(H^2(D)))$ indukuoja vienintelį tikimybinį matą $m_H u_{n,\alpha}^{-1}$, su $A \in \mathcal{B}(H^2(D))$, apibrėžiamą sekančiai

$$m_H u_{n,\alpha}^{-1}(A) = m_H(u_{n,\alpha}^{-1} A).$$

Tegul, su $A \in \mathcal{B}(H^2(D))$,

$$P_{N,n,\alpha}(A) = \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \le k \le N : \underline{\zeta}_n(s + i\gamma_k h,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b}) \in A \right\}.$$

Tuomet gauname tokį tvirtinimą.

2.1.3 lema. *Tarkime, kad α yra transcendentusis skaičius. Tuomet, kai $N \to \infty$, tikimybinis matas $P_{N,n,\alpha}$ silpnai konverguoja į $\hat{P}_{n,\alpha} \stackrel{def}{=} m_H u_{n,\alpha}^{-1}$.*

Remiantis $u_{n,\alpha}$ apibrėžimu,

$$u_{n,\alpha}\Big((p^{-i\gamma_k h} : p \in \mathbb{P}), ((m+\alpha)^{-i\gamma_k h} : m \in \mathbb{N}_0) \Big) = \underline{\zeta}_n(s + i\gamma_k h,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b}).$$

Todėl su visais $A \in \mathcal{B}(H^2(D))$,

$$P_{N,n,\alpha}(A) = \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \le k \le N : \Big((p^{-i\gamma_k h} : p \in \mathbb{P}), ((m+\alpha)^{-i\gamma_k h} : m \in \mathbb{N}_0) \Big) \in u_{n,\alpha}^{-1} A \right\},$$

t. y., $P_{N,n,\alpha} = Q_{N,\alpha} u_{n,\alpha}^{-1}$, kur $Q_{N,\alpha}$ yra iš 2.1.2 lemos. Taigi, ši lema yra 2.1.2 lemos, atvaizdžio $u_{n,\alpha}$ tolydumo ir 5.1 teoremos iš [1] išvada.

2.2. Vidurkių įverčiai

Tam, kad pereiti nuo $\underline{\zeta}_n(s,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ prie $\underline{\zeta}(s,\alpha,\mathfrak{a},\mathfrak{b}) = (\zeta(s;\mathfrak{a}),\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b}))$, reikia nagrinėti rinkinio $\underline{\zeta}(s,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ vidurkinę aproksimaciją rinkiniu $\zeta_n(s,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$. Šiam tikslui reikalingi tvirtinimai apie vidurkių įverčius. Šiame žingsnyje (4) įvertis vaidina ypatingą rolę.

Iš $\zeta(s,\mathfrak{a})$ ir $\zeta(s,\alpha,\mathfrak{b})$ išraiškų (žr. Įvadą), seka, jog su fiksuotu σ, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, galioja įverčiai

$$\int\limits_0^T |\zeta(\sigma+it;\mathfrak{a})|^2 \mathrm{d}t \ll_{\sigma,\mathfrak{a}} T \quad \text{and} \quad \int\limits_0^T |\zeta(\sigma+it,\alpha;\mathfrak{b})|^2 \mathrm{d}t \ll_{\sigma,\alpha,\mathfrak{b}} T.$$

Vadinasi, su $\tau \in \mathbb{R}$,

$$\int\limits_0^T |\zeta(\sigma+it+i\tau;\mathfrak{a})|^2 \mathrm{d}t \ll_{\sigma,\mathfrak{a}} T(1+|\tau|) \tag{8}$$

ir

$$\int\limits_0^T |\zeta(\sigma+it+i\tau,\alpha;\mathfrak{b})|^2 \mathrm{d}t \ll_{\sigma,\alpha,\mathfrak{b}} T(1+|\tau|). \tag{9}$$

Šie abu įverčiai yra tolydaus tipo. Tam, kad apjungti tolydųjį ir diskretųjį funkcijų kvadratų vidurkį, pasinaudosime Galaherio (Gallgher) lema.

2.2.1 lema. *Tarkime, kad T_0, $T \geq \delta > 0$ yra realūs skaičiai ir $\mathfrak{T} \neq \varnothing$ yra baigtinė netuščioji aibė intervale $[T_0+\frac{\delta}{2},T_0+T-\frac{\delta}{2}]$. Pažymėkime*

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t\in\mathfrak{T}\\ |t-x|<\delta}} 1.$$

Be to, tegul $S(x)$ yra kompleksines reikšmes įgyjanti tolydžioji intervale $[T_0,T_0+T]$ funkcija, turinti tolydžią išvestinę intervale (T_0,T_0+T). Tuomet

$$\sum_{t\in\mathfrak{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leq \frac{1}{\delta}\int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx + \left(\int\limits_{T_0}^{T_0+T} |S(x)|^2 dx \int_{T_0}^{T_0+T} |S'(x)|^2 dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Lemos įrodymas pateikiamas [20] (1.4 lema).

Netrivialiųjų nulių menamųjų dalių γ_k asimptotika pateikiama [21], ją suformuluosime kaip atskirą lemą.

2.2.2 lema. *Kai $k \to \infty$,*

$$\gamma_k \sim \frac{k}{\log k}.$$

Dabar jau galime pateikti diskrečiuosius vidurkių įverčius funkcijoms $\zeta(s,\mathfrak{a})$ ir $\zeta(s,\alpha;\mathfrak{b})$.

2.2.3 lema. *Tarkime, kad sekai $\{\gamma_k\colon\ k \in \mathbb{N}\}$ galioja (4) įvertis. Tuomet fiksuotiems σ, $\frac{1}{2} < \sigma < 1$, bei $\tau \in \mathbb{R}$,*

$$\sum_{k=1}^N |\zeta(\sigma+i\gamma_k h+i\tau;\mathfrak{a}| \ll_{\sigma,\mathfrak{a},h} N(1+|\tau|)$$

ir

$$\sum_{k=1}^{N} |\zeta(\sigma + i\gamma_k h + i\tau,\alpha; \mathfrak{b}| \ll_{\sigma,\alpha,\mathfrak{b},h} N(1 + |\tau|).$$

Įrodymas. Atsižvelgiant į 2.2.2 lemą, su tam tikrais $c_1 > 0$ ir visais $k \geq 2$, galioja įvertis

$$\gamma_k \leq \frac{c_1 k}{\log k}.$$

Pasinaudosime 2.2.1 lema su $\delta = ch\left(\log \frac{1}{\frac{c_1 N}{\log N}}\right)^{-1}$, $T_0 = \gamma_1 h - \frac{\delta}{2}$, $T = \gamma_N h - T_0 + \frac{\delta}{2}$ ir $\mathfrak{T} = \{\gamma_1 h,...,\gamma_N h\}$. Tuomet, pasinaudoję (4) įverčiu, gauname, jog

$$\sum_{l=1}^{N} N_\delta(\gamma_l h) = \sum_{l=1}^{N} \sum_{\substack{\gamma_k \leq \frac{c_1 N}{\log N} \\ |\gamma_l - \gamma_k| < \frac{\delta}{h}}} 1 = \sum\sum_{\substack{\gamma_l,\gamma_k \leq \frac{c_1 N}{\log N} \\ |\gamma_l - \gamma_k| < \frac{\delta}{h}}} 1 \ll N. \tag{10}$$

Remiantis Koši (Cauchy) integraline formule, turime, kad

$$\zeta'(\sigma + it + i\tau; \mathfrak{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\zeta'(z + it + i\tau; \mathfrak{a})}{(z - \sigma)^2} \mathrm{d}z,$$

kur L yra apskritimas su centru σ, esančiu D. Vadinasi,

$$\left|\zeta'(\sigma + it + i\tau; \mathfrak{a})\right|^2 \ll \left| \int_L \frac{\zeta'(z + it + i\tau; \mathfrak{a})}{(z - \sigma)^2} \mathrm{d}z \right|^2 \ll$$

$$\int_L \frac{|\mathrm{d}z|}{|z - \sigma|^4} \int_L |\zeta(z + it + i\tau; \mathfrak{a})|^2 |\mathrm{d}z| \ll_\sigma \int_L |\zeta(z + it + i\tau; \mathfrak{a})|^2 |\mathrm{d}z|.$$

Todėl, atsižvelgiant į (9), gauname, jog

$$\int_0^T \left|\zeta'(\sigma + it + i\tau; \mathfrak{a})\right|^2 \mathrm{d}t \ll \int_L \left|\mathrm{d}z\right| \int_0^T \left|\zeta(\Re z + i\Im z + it + i\tau; \mathfrak{a})\right|^2 \mathrm{d}t$$

$$\ll_{\sigma,\mathfrak{a}} T(1 + |\tau|).$$

Taigi, iš čia, (8), (10) ir 2.2.1 lemos, pakankamai dideliems N, turime įvertį

$$\sum_{k=1}^{N} |\zeta(\sigma + i\gamma_k h + i\tau; \mathfrak{a})| = \sum_{k=1}^{N} \sqrt{N_\delta(\gamma_k h) N_\delta^{-1}(\gamma_k h)} |\zeta(\sigma + i\gamma_k h + i\tau; \mathfrak{a})| \ll$$

$$\left(\sum_{k=1}^{N} N_\delta(\gamma_k h) \sum_{k=1}^{N} N_\delta^{-1}(\gamma_k h) |\zeta(\sigma + i\gamma_k h + i\tau; \mathfrak{a})|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ll_\sigma$$

$$\sqrt{N}\left(\frac{1}{\delta} \int_0^{2\gamma_N h} |\zeta(\sigma + it + i\tau; \mathfrak{a})|^2 \mathrm{d}t + \left(\int_0^{2\gamma_N h} |\zeta(\sigma + it + i\tau; \mathfrak{a})|^2 \mathrm{d}t \times\right.\right.$$

$$\left.\left.\int_0^{2\gamma_N h} |\zeta'(\sigma + it + i\tau; \mathfrak{a})|^2 \mathrm{d}t\right)^{\frac{1}{2}}\right)^{\frac{1}{2}} \ll_{\sigma,\mathfrak{b},h} N(1 + |\tau|).$$

Analogiškai gaunamas rezultatas ir funkcijai $\zeta(s,\alpha; \mathfrak{b})$.

2.3. Aproksimavimo rezultatai

Šiame poskyryje pateikiamas rinkinio $\underline{\zeta}(s + i\gamma_k h, \alpha; \mathfrak{a},\mathfrak{b})$ aproksimavimo rinkiniu $\underline{\zeta}_n(s + i\gamma_k h,\alpha; \mathfrak{a},\mathfrak{b})$ rezultatas. Kad būtų lengviau skaityti magistro darbą, priminsime keletą sąvokų, svarbiausia iš jų – metrika erdvėje $H^2(D)$. Funkcijoms $g_1, g_2 \in H(D)$ apibrėžkime

$$\rho(g_1,g_2) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup\limits_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|}{1 + \sup\limits_{s\in K_l} |g_1(s) - g_2(s)|},$$

čia $\{K_l : l \in \mathbb{N}\}$ yra tokia kompaktinių juostos D poaibių seka, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ su $l \in \mathbb{N}$ ir jei $K \subset D$ yra kompaktiška aibė, tuomet $K \subset K_l$ kai kuriems $l \in \mathbb{N}$. Tuomet ρ yra erdvės $H(D)$ metrika, indukuojani jos tolygaus konvergavimo kompaktuose topologiją. Tegul $\underline{g}_1 = (g_{11},g_{12})$, $\underline{g}_2(g_{21},g_{22}) \in H^2(D)$, pažymėkime

$$\underline{\rho}(\underline{g}_{11},\underline{g}_{21}) = \max_{1\le j\le 2} \rho(g_{1j},g_{2j}).$$

Tuomet $\underline{\rho}$ yra erdvės $H^2(D)$ metrika, idukuojanti jos sandaugos topologiją.

2.3.1 lema. *Tarkime, kad (4) įvertis yra teisingas. Tuomet*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \underline{\rho}\left(\underline{\zeta}(s + i\gamma_k h, \alpha; \mathfrak{a},\mathfrak{b}),\underline{\zeta}_n(s + i\gamma_k h,\alpha; \mathfrak{a},\mathfrak{b})\right) = 0.$$

Įrodymas. Remiantis metrikos $\underline{\rho}$ apibrėžimu, pakanka įrodyti, kad

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho\left(\zeta(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a}), \zeta_n(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a})\right) = 0 \tag{11}$$

ir

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho\left(\zeta(s + i\gamma_k h,\alpha; \mathfrak{b}), \zeta_n(s + i\gamma_k h,\alpha; \mathfrak{b})\right) = 0. \tag{12}$$

Tegul

$$l_n(s) = \frac{s}{\theta}\Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right) n^s,$$

čia θ imamas iš dydžio $v_n(m)$ apibrėžimo, o $\Gamma(s)$ – Oilerio (Euler) gama funkcija. Yra žinoma, kad

$$\zeta_n(s; \mathfrak{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\theta-i\infty}^{\theta+i\infty} \zeta(s + z; \mathfrak{a}) l_n(z) \frac{\mathrm{d}z}{z}. \tag{13}$$

Pažymėkime a funkcijos $\zeta(s; \mathfrak{a})$ reziduumą taške $s = 1$. Tegul $\hat{\theta} > 0$. Tuomet, remiantis (13), turime

$$\zeta_n(s; \mathfrak{a}) - \zeta(s; \mathfrak{a}) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{-\hat{\theta}-i\infty}^{-\hat{\theta}+i\infty} \zeta(s + z; \mathfrak{a}) \ln(z) \frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{a l_n(1 - s)}{1 - s}. \tag{14}$$

Tarkime, jog K yra fiksuota kompaktinė juostos D aibė, o $\varepsilon > 0$ parinkime tokį, kad $\frac{1}{2} + 2\varepsilon \le \sigma \le 1 - \varepsilon$ bet kuriam taškui $s = \sigma + iv \in K$. Be to, tegul

$$\hat{\theta} = \sigma - \varepsilon - \frac{1}{2} \text{ and } \theta = \frac{1}{2} + \varepsilon.$$

Tuomet iš (14) seka, kad $s \in K$, yra teisinga nelygybė

$$|\zeta(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a}) - \zeta_n(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a})| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} |\zeta(s + i\gamma_k h - \hat{\theta} + it)| \frac{l_n(-\hat{\theta} + it)}{|-\hat{\theta} + it|} \mathrm{d}t$$

$$+ \frac{|a| l_n(1 - s - i\gamma_k h)|}{|1 - s - i\gamma_k h|}.$$

Šiame integrale vietoje $t + v$ imkime t. Iš čia turime

$$|\zeta(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a}) - \zeta_n(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a})| \le \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left| \zeta \left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + \gamma_k h); \mathfrak{a} \right) \right| \times$$

$$\frac{|l_n(\frac{1}{2} + \varepsilon - s + it)|}{|\frac{1}{2} + \varepsilon - s + it|} \mathrm{d}t + \frac{|a| l_n(1 - s - i\gamma_k h)|}{|1 - s - i\gamma_k h|}.$$

Iš čia seka, kad

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\gamma_k; \mathfrak{a}) - \zeta_n(s + i\gamma_k h; \mathfrak{a})| \le S_1 + S_2, \tag{15}$$

kur

$$S_1 = \frac{1}{2\pi N} \int\limits_{-\infty}^{\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \left| \zeta\Big(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + \gamma_k h); \mathfrak{a} \Big) \right| \times \right.$$

$$\left. \sup_{s \in K} \frac{|l_n(\frac{1}{2} + \varepsilon - s + it)|}{|\frac{1}{2} + \varepsilon - s + it|} \right) \mathrm{d}t$$

ir

$$S_2 = \frac{|a|}{N} \sum_{k=1}^{N} \sup_{s \in K} \frac{|l_n(1 - s - i\gamma_k h)|}{|1 - s - i\gamma_k h|}.$$

Funkcijai $\Gamma(\sigma + it)$, kai $\sigma_1 \le \sigma \le \sigma_2$, yra žinomas įvertis

$$\Gamma(\sigma + it) \ll \exp\{-c|t|\}, \ c > 0.$$

Todėl iš funkcijos $l_n(s)$ apibrėžimo seka, kad visiems $s \in K$,

$$\frac{l_n(\frac{1}{2} + \varepsilon - s + it)}{\frac{1}{2} + \varepsilon - s + it} \ll n^{-\varepsilon} \exp\Big\{ - \frac{c|t - v|}{\theta} \Big\} \ll_K n^{-\varepsilon} \exp\{-c|t|\}. \tag{16}$$

Remdamiesi analogiškais argumentais, gauname, kad ir

$$\frac{l_n(1 - s - i\gamma_k h)}{1 - s - i\gamma_k h} \ll_{K,h} n^{1-\sigma} \exp\{-c\gamma_k h\}. \tag{17}$$

Iš (16) ir 2.2.3 lemos seka

$$S_1 \ll_{K,\mathfrak{a},h} n^{-\varepsilon} \int\limits_{-\infty}^{\infty} (1 + |t|) \exp\{-c|t|\} \mathrm{d}t \ll_{K,a,h} n^{-\varepsilon},$$

o iš (17) seka, kad

$$S_2 \ll_{K,a,n} n^{\frac{1}{2}-2\varepsilon}\frac{\log N}{N}.$$

Todėl, atsižvelgę į (15), gauname, kad

$$\lim_{n\to\infty}\limsup_{N\to\infty}\frac{1}{N}\sum_{k=1}^{N}\sup_{s\in K}|\zeta(s+i\gamma_k h;\mathfrak{a})-\zeta_n(s+i\gamma_k h;\mathfrak{a})|=0,$$

o iš čia ir metrikos ρ apibrėžimo seka (11).

Naudojantis išraiška

$$\zeta_n(s,\alpha;\mathfrak{b})=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\theta+i\infty}^{\theta+i\infty}\zeta(s+z,\alpha;\mathfrak{b})\frac{l_n(z,\alpha)}{z}dz,$$

kur

$$l_n(s,\alpha)=\frac{s}{\theta}\Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right)(n+\alpha)^s,$$

analogiškai įrodoma (12) lygybė ir 2.2.3 lema.

2.4. Ribinė teorema

Šiame poskyryje įrodysime ribinę teoremą funkcijai $\underline{\zeta}(s,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ erdvėje $H^2(D)$. Tam kad suformuluoti teoremą, reikalinga apibrėžti $H^2(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą. Tikmybinėje erdvėje $(\Omega,\mathcal{B}(\Omega),m_H)$ apibrėžkime $H^2(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą tokia forma

$$\underline{\zeta}(s,\omega,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})=\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{a_m\omega_1(m)}{m^s},\sum_{m=0}^{\infty}\frac{b_m\omega_2(m)}{(m+\alpha)^s}\right).$$

Pastebime, kad abi eilutės beveik su visais $\omega_1 i(m)$ ir $\omega_2(m)$ konverguoja tolygiai juostos D kompaktinėse aibėse. Pažymėkime $P_{\underline{\zeta},\alpha}$ atsitiktinio elemento $\underline{\zeta}(s,\omega,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})$ skirstinį, t. y.,

$$P_{\underline{\zeta},\alpha}(A)=m_H\{\omega\in\Omega:\underline{\zeta}(s,\omega,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})\in A\}\ ,\ A\in\mathcal{B}(H^2(D)).$$

Be to, pažymėkime

$$P_{N,\alpha}(A)=\frac{1}{N}\#\{1\le k\le N:\underline{\zeta}(s+i\gamma_k h,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b})\in A\}\quad A\in\mathcal{B}(H^2(D)).$$

2.4.1 teorema. *Tarkime, kad seka* $\mathfrak{a}$ *yra multiplikatyvi, parametras* α *– transcendentusis skaičius ir teisinga (4) riba. Tuomet, kai* $N\to\infty$*, matas* $P_{N\alpha}$ *sulpnai konverguoja į* $P_{\underline{\zeta},\alpha}$*.*

Įrodymas. Grįžkime prie 2.1.3 lemos ir ribinio mato $P_{n\alpha}$. Tegul θ_N yra atsitiktinis dydis, apibrėžtas tam tikroje tikimybinėje erdvėje su matu μ ir turintis pasiskirstymą

$$\mu\{\theta_N=\gamma_k h\}=\frac{1}{N},\quad k=1,...,N.$$

Apibrėžkime $H^2(D)$-reikšmį atsitiktinį elelmentą

$$X_{N,n,\alpha}=X_{N,n,\alpha}(s)=\underline{\zeta}_n(s+i\theta_N,\alpha;\mathfrak{a},\mathfrak{b}).$$

$\hat{X}_{n,\alpha}$ pažymėkime $H^2(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą, turintį pasiskirstymą $P_{n,\alpha}$. Tuomet 2.1.3 lemos tvirtinimą galime užrašyti tokiu būdu

$$X_{N,n,\alpha} \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{\mathfrak{D}} = \hat{X}_{n,\alpha}. \tag{18}$$

Įrodyta [8], kad tikimybinių matų $\{\hat{P}_{n,\alpha} : n \in \mathbb{N}\}$ šeima yra suspausta (plačiau apie tai – magistro darbo 1.2 poskyryje), t.y., su kiekvienu $\varepsilon > 0$, egzistuoja tokia kompaktinė aibė $K = K(\varepsilon) \subset H^2(D)$, kad visiems $n \in \mathbb{N}$,

$$\hat{P}_{n,\alpha}(K) > 1 - \varepsilon.$$

Pagal Prokhorovo teoremą [1] (6.1 teorema), kiekviena suspausta tikimybinių matų šeima yra realiatyviai kompaktiška. Vadinasi, iš kiekvienos tos šeimos sekos $\{\hat{P}_{n,\alpha}\}$ galime išskirti tokį posekį $\{\hat{P}_{n_r,\alpha}\}$, kad $\hat{P}_{n_r,\alpha}$, kai $r \to \infty$, silpnai konverguoja į kurį nors tikimybinį matą P_α erdvėje $(H^2(D), B(H^2(D)))$. Tai galima užrašyti tokia forma:

$$\hat{X}_{n_r,\alpha} \xrightarrow[\mathrm{r}\to\infty]{\mathfrak{D}} P_\alpha. \tag{19}$$

Naudodami θ_N, apibrėžkime dar vieną $H^2(D)$-reikšmį atsitiktinį elementą

$$X_{N,\alpha} = X_{N,\alpha}(s) = \underline{\zeta}(s + i\theta_N, \alpha; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}).$$

Tuomet, remiantis 2.3.1 lema, gauname, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \mu\{\underline{\rho}(X_{N,\alpha}, X_{N,n,\alpha}) \geq \varepsilon\} =$$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leq k \leq N : \underline{\rho}(\underline{\zeta}(s + i\gamma_k h, \alpha; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}),\ \underline{\zeta}_n(s + i\gamma_k h, \alpha; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})) \geq \varepsilon \right\}$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N\varepsilon} \sum_{k=1}^{N} \underline{\rho}\left(\underline{\zeta}(s + i\gamma_k h, \alpha; \mathfrak{a}, \mathfrak{b}), \underline{\zeta}_n(s + i\gamma_k h, \alpha; \mathfrak{a}, \mathfrak{b})\right) = 0.$$

Ši lygybė, (18) ir (19) bei 4.2 teorema [1] leidžia tvirtinti, kad

$$X_{N,\alpha} \xrightarrow[\mathrm{N}\to\infty]{\mathfrak{D}} P_\alpha$$

arba $P_{N,\alpha}$, kai $N \to \infty$, silpnai konverguoja į P_α. Be to, pastarasis sąryšis rodo, jog matas P_α yra nepriklausomas nuo posekio $\{\hat{P}_{n_r}, \alpha\}$. Iš šio fakto seka sąryšis

$$\hat{X}_{n,\alpha} \xrightarrow[\mathrm{n}\to\infty]{} P_\alpha$$

arba $\hat{P}_{n,\alpha}$, kai $n \to \infty$, silpnai konverguoja į P_α. Taigi, $P_{N,\alpha}$ silpnai konverguoja į $\hat{P}_{n,\alpha}$ ribinį matą P_α. Yra įrodyta [14], kad P_α sutampa su $P_{\underline{\zeta},\alpha}$.

2.5. Pagrindinės teoremos įrodymas

Šiame skyriuje įrodysime pagrindinį įvade pateiktą universalumo rezultatą.

Tegul

$$S_\alpha = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \ \text{ or } g(s) \equiv 0\} \times H(D).$$

Įrodyta (žr. [8], [12]), kad mato $P_{\zeta,\alpha}$ atrama yra aibė S_α.

Universalumo teoremos įrodymas. Remiantis Mergeliano (Mergelyan) teorema apie analizinių funkcjų aproksimavimą polinomais (žr. [4], [19]) egzistuoja tokie daugianariai $p_1(s)$ and $p_2(s)$, kad

$$\sup_{s\in K_1} |f_1(s) - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \tag{20}$$

ir

$$\sup_{s\in K_2} |f_2(s) - p_2(s)| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{21}$$

Apibrėžkime aibę

$$G_\varepsilon = \Big\{(g_1,g_2) \in H^2(D) : \sup_{s\in K_1} |g_1(s) - e^{p_1(s)}| < \frac{\varepsilon}{2} \ , \ \sup_{s\in K_2} |g_2(s) - p_2(s)| < \frac{\varepsilon}{2}\Big\}.$$

Tuomet G_ε yra atviroji aibė. Be to, $\Big(e^{p_1(s)},p_2(s)\Big) \in S_\alpha$ yra mato $P_{\underline{\zeta},\alpha}$ atramos elementas. Taigi, G_ε yra atramos elemento atviroji aplinka. Todėl iš atramos savybių turime, kad

$$P_{\underline{\zeta},\alpha}(G_\varepsilon) > 0. \tag{22}$$

Iš čia, 2.4.1 teoremos ir silpnojo matų konvergavimo ekvivalento atvirųjų aibių terminais [1] (2.1 teorema), gauname, kad

$$\liminf_{N\to\infty} P_{N,\alpha}(G_n) \geq P_{\underline{\zeta},\alpha}(G_\varepsilon) > 0.$$

Iš čia, $P_{N,\alpha}$ ir G_ε apibrėžimų kartu su (20) ir (21) įrodome pirmąją pagrindinės teoremos dalį.

Apibrėžkime dar vieną aibę

$$\hat{G}_\varepsilon = \{(g_1,g_2) \in H^2(D) : \sup_{1\leq j\leq 2} \sup_{s\in K_j} |g_j(s) - f_j(s)| < \varepsilon\}.$$

Pastebime, kad aibės $\hat{G}_\varepsilon$ siena $\partial\hat{G}_\varepsilon$ priklauso aibei

$$\{(g_1,g_2) \in H^2(D) : \sup_{1\leq j\leq 2} \sup_{s\in K_j} |g_j(s) - f_j(s)| = \varepsilon\}.$$

Todėl sienos $\partial\hat{G}_{\varepsilon_1}$ ir $\partial\hat{G}_{\varepsilon_2}$, su skirtingais teigiamais ε_1 ir ε_2, nesikerta. Iš čia gauname, kad $\hat{G}_\varepsilon$ yra mato $P_{\underline{\zeta},\alpha}$ tolydumo aibė $\Big(P_{\underline{\zeta},\alpha}(\partial\hat{G}_\varepsilon) = 0\Big)$ su visais $\varepsilon > 0$, išskyrus nebent skaičiąją $\varepsilon > 0$

reikšmių aibę. Todėl iš 2.4.1 teoremos ir silpnojo matų konvergavimo ekvivalento atvirųjų aibių terminais, gauname, kad riba

$$\lim_{n\to\infty} P_{N,\alpha}(\hat{G}_\varepsilon) = P_{\underline{\zeta},\alpha}(\hat{G}_\varepsilon) \tag{23}$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Iš G_ε ir $\hat{G}_\varepsilon$ apibrėžimų, (20) ir (21) turime, kad $G_\varepsilon \subset \hat{G}_\varepsilon$. Belieka atsižvelgti į (22) bei mato monotoniškumą, iš ko seka, kad

$$P_{\underline{\zeta},\alpha}(\hat{G}_\varepsilon) > 0.$$

Iš šios nelygybės, $P_{N,\alpha}$ ir $\hat{G}_\varepsilon$ apibrėžimų bei (23) gaunamas teoremos įrodymas.

3. TAIKYMAS

Dzeta ir L funkcijų savybė, įgalinti jų postūmiais aproksimuoti plačias analizinių funkcijų klases, turi platų teorinių ir praktinių pritaikymų spektrą. Universalumas yra pagrindinė sudėtinė dzeta ir L funkcijų funkcinės nepriklausomybės įrodymo dalis, rezultatai naudojami nulių pasiskirstymo ir momentų problemų tyrimuose, padeda įrodyti įvairias reikšmių tirštumo teorijas ir, žinoma, atlieka pagrindinį vaidmenį analizinių funkcijų aproksimavimo teorijoje. Praktikoje šie rezultatai taip pat taikomi, pavyzdžiui, integralų pagal sudėtingas analizines kreives, naudojamų kvantinėje mechanikoje, vertinimui. Visa tai motyvuoja tęsti universalių funkcijų ir jų klasių paieškas.

REZULTATAI IR IŠVADOS

Magistro darbe nagrinėta periodinių dzeta funkcijų poros universalumo savybė, postūmiams naudojant netrivaliųjų Rymano dzeta funkcijos nulių menamąsias dalis.

Įrodyta, jog analizines tam tikrose kompaktinėse aibėse funkcijas galima tolygiai aproksimuoti diskrečiaisiais dzeta funkcijų ir periodinės Hurvico dzeta funkcijos rinkinio postūmiais. Be to, įrodytas modifikuotas universalumo teoremos atvejis, kai postūmių, aproksimuojančių duotas analizines funkcijas, apatinis tankis pakeičiamas tiesiog tankiu.

Gautas rezultatas galės būti pritaikytas funkcijų funkcinio nepriklausomumo ar saviaproksimacijos klausimams nagrinėti.

Numatyta tęsti diskrečiojo universalumo tyrimus, nagrinėjant platesnį atvejį su skirtingomis h reikšmėmis.

LITERATŪRA

[1] P. Billingsley. *Convergence of Probability Measures*, John Wiley and Sons, New York, 1968.

[2] V. Franckevič, A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas. On approximation of analytic functions by periodic Hurwitz zeta-functions.*Math. Modell. Analysis*, **24** (1): 20-33, 2019.

[3] R. Garunkštis, A. Laurinčikas. Discrete mean square of the Riemann zetafunction over imaginary parts of its zeros. *Periodica Math. Hung.*, **76** (2): 217-228, 2018.

[4] R. Garunkštis, A. Laurinčikas. The Riemann hypothesis and universality of the Riemann zeta-function. *Math. Slovaca*, **68** (4): 741-748, 2018.

[5] R. Garunkštis, A. Laurinčikas, R. Macaitienė. Zeros of the Riemann zeta function and its universality *Acta Arith.*, **181** (2): 127-142, 2017.

[6] A. Javtokas, A. Laurinčikas. Universality of the periodic Hurwitz zeta-function. *Integral Transf. Spec. Functions*, **17**: 711-722, 2006.

[7] J. Kaczorowski. Some remarks on the universality of periodicL-functions. InR. Steuding and J. Steuding(Eds.), *New directions in value-distribution theoryof zeta and L-functions*, 113–120. Shaker Verlag, Aachen.

[8] R. Kačinskaitė ir A. Laurinčikas. Universality of composite functions of periodic zeta-functions.*Sb.Math.*, **203**: 1631-1643, 2012.

[9] L. Kuipers, H. Niederreiter. *Uniform Distribution of Sequences.* Pure and Applied Mathematics, Wiley - Interscience, New York, London, Sydney, 1974.

[10] A. Laurinčikas. A discrete version of the Mishou theorem. II. *Proc. Steklov Inst.Math.*, **296** (1): 172-182, 2017.

[11] A. Laurinčikas. Joint value distribution theorems for the Riemann and Hurwitz zeta-functions. *Moscow Math. J.*, **18** (2): 349-366, 2018.

[12] A. Laurinčikas. On discrete universality of the Hurwitz zeta-functions. *Results.Math.*, **72** (1-2): 907-917, 2017.

[13] A. Laurinčikas. On the Mishou theorem with algebraic parameter. *Siber. Math.J.*, (to appear). **60** (6): 1075-1082, 2019.

[14] A. Laurinčikas. The joint discrete universality of periodic zeta-functions. In J. Sander et al.(Ed.), *From Arithmetic to Zeta-Functions,* Number Theory in Memory of Wolfgang Schwarz, pp. 231–246. Springer, 2016.

[15] A. Laurinčikas, R. Macaitienė. The discrete universality of the periodic Hurwitz zeta-function. *Integral Transf. Spec. Functions*, **20**: 673-686, 2009.

[16] A. Laurinčikas, R. Macaitienė, D .Moshov, D. Šiaučiūnas. Universality of the periodic Hurwitz zeta-function with rational parameter. *Siber. Math. J.*, **59** (5): 894-900, 2018.

[17] A. Laurinčikas, D. Mochov. Discrete universality theorem for the periodic Hurwitz zeta-functions. *Chebysh. Sb.*, **17**: 148-159, 2016.

[18] A. Laurinčikas, J. Petuškinaitė. Universality of Dirichle L-functionsand non-trivial zeros of the Riemann zeta-function. *Sb. Math.*, **210**, https://doi.org/10.1070/SM9194.

[19] A. Laurinčikas, D. Šiaučiūnas. Remarks on the universality of periodic zeta-functions. *Math. Notes.*, **80** (3-4): 532-538, 2006.

[20] H. L. Montgomery. The pair correlation of zeros of the zeta function. In H.G.Diamond(Ed.), *Analytic Number Theory*, volume 24 of *Proc. Sympos. Pure Math.*, pp. 181–193. Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1973.

[21] H. L. Montgomery. *T*opics in Multiplicative Number Theory. Leck. Notes Math., Vol 227, Springer, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[22] S. Voronin. Theorem on the 'universality' of the Riemann zeta-function. *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Mat.*, **39** , 475–486 (rusų kalba), 1975.

SANTRAUKA

Magistro darbe nagrinėjama vienalaikio analizinių funkcijų poros aproksimavimo diskrečiaisiais periodinės dzeta funkcijos ir periodinės Hurvico dzeta funkcijos poros postūmiais problema. Sprendžiant šį klausimą, postūmiams naudotos netrivalių Rymano dzeta funkcijos nulių menamosios dalys. Aproksimavimo rezultatų įrodymui naudota Montgomerio hipotezės apie nulių porų koreliaciją silpnoji forma.

SUMMARY

In the master thesis, the problem of simultaneous approximation of a pair of analytic functions by a pair of discrete shifts of the periodic and periodic Hurwitz zeta-function is considered. The above shifts are defined by using the sequence of imaginary parts of non-trivial zeros of the Riemann zeta-function. For the proof of approximation results, a weak form of the Montgomery pair correlation conjecture is applied.