VILNIAUS UNIVERSITETAS
ŠIAULIŲ AKADEMIJA

MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
Didžiųjų duomenų analitikos specializacija

SANDRA PETRONIENĖ

Magistro studijų baigiamasis darbas

GRAMO TAŠKŲ TAIKYMAS RYMANO DZETA FUNKCIJOS UNIVERSALUME

Darbo vadovas: prof. dr. Darius Šiaučiūnas

Šiauliai, 2022

Studijuojančiojo, teikiančio baigiamąjį darbą, GARANTIJA

WARRANTY of Final Thesis

Vardas, pavardė *Name, Surname*	**Sandra Petronienė**
Padalinys *Faculty*	**Šiaulių akademija** ***Šiauliai Academy***
Studijų programa *Study Programme*	**Matematikos magistro studijų programa** ***Master's Degree Program in Mathematics***
Darbo pavadinimas *Thesis topic*	**Gramo taškų taikymas Rymano dzeta funkcijos universalume** ***An Application of the Gram Points in the Universality of the Riemann Zeta-Function***
Darbo tipas *Thesis type*	**Baigiamasis darbas** ***Final Thesis***

Garantuoju, kad mano baigiamasis darbas yra parengtas sąžiningai ir savarankiškai, kitų asmenų indėlio į parengtą darbą nėra. Jokių neteisėtų mokėjimų už šį darbą niekam nesu mokėjęs.

I guarantee that my thesis is prepared in good faith and independently, there is no contribution to this work from other individuals. I have not made any illegal payments related to this work.

Šiame darbe tiesiogiai ar netiesiogiai panaudotos kitų šaltinių citatos yra pažymėtos literatūros nuorodose.

Quotes from other sources directly or indirectly used in this thesis, are indicated in literature references.

Aš, Sandra Petronienė, pateikdamas (-a) šį darbą, patvirtinu (*pažymėti*) ☒

Embargo laikotarpis
Embargo Period

Prašau nustatyti šiam baigiamajam darbui toliau nurodytos trukmės embargo laikotarpį:
I am requesting an embargo of this thesis for the period indicated below:

☐ __________ mėnesių / *months*
(embargo laikotarpis negali viršyti 60 mėn. / *an embargo period shall not exceed 60 months*).

☒ Embargo laikotarpis nereikalingas / *no embargo requested.*

Embargo laikotarpio nustatymo priežastis / *Reason for embargo period*:

Turinys

Įvadas

Analizinių funkcijų aproksimavimas aptinkamas grynojoje ir taikomojoje matematikoje ir, netgi, kvantinėje fizikoje. Todėl analizinių funkcijų aproksimavimas yra vienas iš svarbiusių funkcijų teorijos uždavinių. Tegul $s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, yra kompleksinis kintamasis. Priminsime analizinės ir sveikosios funkcijos apibrėžimus.

1 apibrėžimas ([12])**.** *Funkcija $f(s)$ yra vadinama analizine aibėje $E \subset \mathbb{C}$, jeigu ji yra diferencijuojama kompleksine prasme visuose tos aibės taškuose. Jeigu funkcija yra analizinė visoje baigtinėje kompleksinėje plokštumoje, tai ji yra vadinama sveikąja funkcija.*

Tegul G yra tam tikra sritis kompleksinėje plokštumoje. Funkcijos $f(s)$ diferencijuojamumas srityje G kompleksine prasme yra ekvivalentus teiginiui, kad šią funkciją bet kokiame srities G taške s_0 galima išskleisti konverguojančia laipsnine eilute

$$f(s) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m (s - s_0)^m.$$

Iš pastarojo tvitinimo matome, kad analizines funkcijas tam tikrose srityse galima aproksimuoti polinomais. Šią problemą nesėkmingai bandė išspręsti daugelis matematikų. Ir tik 1951 m. tai padaryti pavyko S. N. Mergelianui (Mergelyan), žr. [10]. Suformuluosime nuostabiąją Mergeliano teoremą.

1 teorema. *Tarkime, kad $K \subset \mathbb{C}$ yra kompaktinė aibė su jungiaisiais papildiniais, o funkcija $f(s)$ yra tolydžioji aibėje K ir analizinė aibės K viduje. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ egzistuoja polinomas $p(s)$ toks, kad*

$$\sup_{s \in K} |f(s) - p(s)| < \varepsilon.$$

Aštuntąjame XX a. dešimtmetyje buvo atrasta keletas kitų, pasižyminčių geromis aproksimavimo savybėmis, funkcijų. Visos šios funkcijos yra apibrėžiamos paprastosiomis

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{a_m}{m^s},$$

arba bendrosiomis

$$\sum_{m=1}^{\infty} a_m \mathrm{e}^{-\lambda_m s},$$

čia seka $\{\lambda_m\} \subset \mathbb{R}$ monotoniškai didėja iki $+\infty$, Dirichlė (Dirichlet) eilutėmis. Kadangi Dirichlė eilučių konvegavimo sritys yra tam tikros pusplokštumės $\sigma > \sigma_0$, todėl funkcijos, apibrėžtos šiomis eilutėmis, yra analizinės tose pusplokštumėse.

Magistro darbe nagrinėsime aproksimavimo savybes vieno iš ką tik apibūdintų objektų – garsiosios Rymano (Riemann) dzeta funkcijos. Priminsime, kad Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama paprastąja Dirichlė eilute arba Oilerio sandauga pirminiais skaičiais

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1},$$

čia ir toliau $\mathbb{P}$ žymi visų pirminių skaičių aibę. Be to, funkcija $\zeta(s)$ turi meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, nes taškas $s = 1$ yra jos paprastasis polius su reziduumu 1.

Pirmasis Rymano dzeta funkcijos $\zeta(s)$ aproksimavimo savybę 1975 m., žr. [18], atskleidė rusų matematikas S. M. Voroninas (Voronin) ir šią savybę pavadino funkcijos $\zeta(s)$ universalumu. Trumpai tariant, jis įrodė, kad plati neįgyjančių nulių ir analizinių funkcijų, apibrėžtų juostoje $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$, klasė gali būti aproksimuojama postūmiais $\zeta(s + i\tau)$, $\tau \in \mathbb{R}$. Tam, kad galėtume suformuluoti šiuolaikinę Voronino teoremos versiją, reikia tam tikrų žymenų. Tegul $\mathcal{K}$ yra juostos D kompaktinių poaibių su jungiaisiais papildiniais klasė, $H_0(K)$, kai $K \in \mathcal{K}$, tolydžiųjų, neįgyjančių nulių aibėje K ir analizinių aibės K viduje funkcijų klasė, o $\text{meas}A$ žymi mačiosios aibės $A \subset \mathbb{R}$ Lebego (Lebesgue) matą.

2 teorema (Šiuolaikinė Voronino teoremos versija)**.** *Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{T \to \infty} \frac{1}{T} \text{meas} \left\{ \tau \in [0, T] : \sup_{s \in K} |\zeta(s + i\tau) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Šios teoremos įrodymą galima rasti, pavyzdžiui, A. Laurinčiko [9] monografijoje.

Iš pastarosios teoremos matome, kad egzistuoja be galo daug postūmių aproksimuojančių tolygiai aibėje K duotąją funkciją $f(s) \in H_0(K)$ tikslumu ε.

2 teoremoje τ postūmiuose $\zeta(s + i\tau)$ įgyja tam tikras realiąsias reikšmes. Todėl ši teorema vadinama tolydžiojo universalumo teorema. Lygiagrečiai gali būti formuluojamos ir diskrečiojo universalumo teoremos funkcijai $\zeta(s)$, kai τ postūmiuose $\zeta(s + i\tau)$ įgyja reikšmes iš tam tikros diskrečiosios aibės. Pirmąją diskrečiojo universalumo teoremą 1980 m. įrodė vokiečių matematikas Reichas (Reich), žr. [14]. Jo teoremoje $\tau \in \{kh : k = 0, 1, 2, \dots\}$, čia $h > 0$ yra fiksuotas skaičius. Suformuluosime diskrečiojo universalumo teoremą Rymano dzeta funkcijai. Tegul $\#A$ žymi aibės $A \subset \mathbb{R}$ galią.

3 teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N + 1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + ikh) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Labai svarbu yra tęsti dzeta ir L funkcjų universalumo tyrimus, t. y. įrodyti universalumo teoremas naudojant sudėtingesnės struktūros nei aritmetinė progresija diskrečiąsias aibes. Todėl daugelis matematikų apibendrino Reicho diskretaus universalumo teoremą. Išskirsime tik du apibendrinimus.

2016 m. A. Dubickas ir A. Laurinčikas diskrečiąją aibę $\{kh\}$ pakeitė sudėtingesne aibe $\{k^\alpha h\}$ su fiksuotu α, $0 < \alpha < 1$, ir suformulavo tokią teoremą, žr. [2]:

4 teorema. *Tarkime, kad* $0 < \alpha < 1$ *ir* $h > 0$. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$, *o* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ik^\alpha h) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N+1} \# \left\{ 0 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + ik^\alpha h) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, *nebent išskyrus skaičiąją* $\varepsilon > 0$ *reikšmių aibę.*

Ženklų diskrečiojo universalumo teoremos apibendrinimą 2017 m. [13] straipsnyje įrodė lenkų matematikas L. Pankovskis (Pańkowski). Postūmiuose jis naudojo diskrečiąją aibę $\{hk^\alpha \log^\beta k\}$ su $\alpha \in \mathbb{R}^+$ ir

$$\beta \in \begin{cases} \mathbb{R}, & \text{jeigu} \quad \alpha \notin \mathbb{Z}, \\ (-\infty, 0) \cup (1, +\infty), & \text{jeigu} \quad \alpha \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Magistro darbo tikslas – įrodyti diskrečiojo universalumo teoremą Rymano dzeta funkcijai, postūmiuose naudojant funkcijos $\zeta(s)$ Gramo taškų aibę $\{t_k\}$. Pirmąją tokio tipo teoremą 2019 m. įrodė M. Koroliovas (Korolev) ir A. Laurinčikas, žr. [7]. Pagrindinis magistro darbo rezultatas yra tokia teorema:

5 teorema. *Tegul* $K \in \mathcal{K}$, *o* $f(s) \in H_0(K)$. *Tuomet su kiekvienu* $\varepsilon > 0$ *ir* $h > 0$

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, *nebent išskyrus skaičiąją* $\varepsilon > 0$ *reikšmių aibę.*

1. Gramo taškai

Yra gerai žinoma, žr., pvz., [9], kad Rymano dzeta funkcija tenkina funkcinę lygtį

$$\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s) = \pi^{-(1-s)/2}\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\zeta(1-s),$$

čia $\Gamma(s)$ yra gerai žinoma Oilerio (Euler) gama funkcija, pusplokštumėje $\sigma > 0$ apibrėžiama integralu

$$\Gamma(s) = \int_0^\infty \mathrm{e}^{-u}u^{s-1}\,\mathrm{d}u.$$

Pažymėję

$$\xi(s) = s(s-1)\pi^{-s/2}\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\zeta(s),$$

Rymano dzeta funkcijos funkcinę lygtį galime užrašyti trumpiau

$$\xi(s) = \xi(1-s). \tag{1.1}$$

Tegul $\theta(t)$, $t > 0$, žymi funkcijos $\pi^{-s/2}\Gamma(s/2)$ argumento pokytį išilgai atkarpos jungiančios taškus $s = 1/2$ ir $s = 1/ + it$. Tuomet iš (1.1) lygybės gauname, kad

$$\mathrm{e}^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = \mathrm{e}^{-i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}-it\right).$$

Ši lygybė rodo, kad funkcija

$$Z(t) = e^{i\theta(t)}\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right)$$

įgyja realiasias reikšmes su visais $t \in \mathbb{R}$, o jos nuliai sutampa su funkcijos $\zeta(s)$ nulių, esančių kritinėje tiesėje $\sigma = 1/2$, menamosiomis dalimis. Yra teisinga tokia lygybė

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = e^{-i\theta(t)}Z(t) = Z(t)\left(\cos\theta(t) - i\sin\theta(t)\right).$$

Pažymėję

$$\zeta\left(\frac{1}{2}+it\right) = a(t) + ib(t),$$

gauname, kad

$$a(t) = Z(t)\cos\theta(t), \qquad \text{o} \qquad b(t) = -Z(t)\sin\theta(t).$$

Tegul $\rho_n = 1/2 + i\hat{\gamma}_n$, $\hat{\gamma}_n > 0$, $n \in \mathbb{N}$, yra funkcijos $\zeta(1/2+it)$ nulis. Tuomet $\hat{\gamma}_n$ yra lygties

$$b(t) = 0$$

šaknys, o kartu ir lygties $\sin\theta(t) = 0$ šaknys. Kitaip tariant,

$$\theta(t) = k\pi, \quad k \in \mathbb{Z}.$$

Kadangi funkcija $\theta(t)$ yra monotoniškai didėjanti ir neaprėžta, kai $t > t^*$ (yra žinoma, kad $t^* = 6.289836\ldots$, o $\theta(t^*) = -3.530573\ldots$), todėl lygtis

$$\theta(t) = (n-1)\pi, \quad n \in \mathbb{N}, \tag{1.2}$$

kai $t > t^*$, turi vienintelį sprendinį t_n. Skaičiai t_n yra vadinami Gramo taškais.

Danų matematikas J. P. Gramas (Gram) nustatė, žr. [3], kad kiekviename intervale $(t_{n-1}, t_n]$, $n = 1, \ldots, 15$, yra vienas funkcijos $Z(t)$ nulis toks, kad $t_{n-1} < \hat{\gamma}_n < t_n$. Taip pat suformulavo hipotezę, kad pastaroji nelygybė negalioja, kai $n > 15$.

Tegul $N(T)$ yra funkcijos $\zeta(s)$ netrivialiųjų nulių, kurių menamoji dalis $\hat{\gamma}_n$ tenkina nelygybes $0 < \hat{\gamma}_n < T$, skaičius. Gerai žinoma Rymano - fon Mongoldto (von Mongoldt) formulė teigia, kad

$$N(T) = \frac{T}{2\pi} \log \frac{T}{2\pi} - \frac{T}{2\pi} + O(\log T).$$

Iš šios formulės gauname, kad $t_n \sim \hat{\gamma}_n$, kai $n \to \infty$. Pastarasis faktas sukėlė didžiulį matematikų susidomėjimą seka $\{t_n\}$.

Tikslesni skaičiavimai, žr. [4, 16, 17], parodė, kad Gramo hipotezė yra teisinga. Pavyzdžiui, Hatčinsonas (Hutchinson) [4] straipsnyje gavo, kad

$$t_{127} < \hat{\gamma}_{127} < \hat{\gamma}_{128} < t_{128} \qquad \text{ir} \qquad t_{134} < \hat{\gamma}_{134} < \hat{\gamma}_{135} < t_{135}.$$

Dar daugiau, Titčmaršas (Titchmarsh) [16] straipsnyje įrodė, kad seka

$$\frac{\hat{\gamma}_n - t_n}{t_{n-1} - t_n}$$

yra neaprėžta, todėl, su be galo daug reikšmių n, nuliai $\hat{\gamma}_n$ nepriklauso intervalui $(t_{n-1}, t_n]$.

Daugiau informacijos apie Gramo taškus galima rasti [5] ir [6] Koroliovo straipsniuose
.

2. Tolygusis pasiskirstymas moduliu 1

Kai $t \to \infty$, funkcijai $\theta(t)$ galioja asimptotinė formulė, žr. [15],

$$\theta(t) \sim \frac{t}{2}\log\frac{t}{2\pi} - \frac{t}{2} - \frac{\pi}{8} + \sum_{m=1}^{\infty}(-1)^{m+1}\frac{(2^{2m-1}-1)B_{2m}}{2^{2m}2m(2m-1)}t^{-(2m-1)},$$

čia

$$B_{2m} = 2(-1)^{m+1}\frac{\zeta(2m)(2m)!}{(2\pi)^{2m}}$$

yra Bernulio (Bernoulli) skaičiai. Vadinasi,

$$t_n = \frac{2\pi n}{\log n}\left(1 + \frac{\log\log n}{\log n}(1+o(1)\right),$$

kai $n \to \infty$. Tačiau mums reikia asimptotinės formulės funkcijai t_u, čia $u \geqslant 0$ bet koks realusis skaičius.

1 lema. *Tarkime, kad t_u, $u \geqslant 0$, yra vienintelis lygties*

$$\theta(t_u) = (u-1)\pi$$

sprendinys toks, kad $\theta'(t_u) > 0$, kai $u \to \infty$. Tuomet

$$t_u = \frac{2\pi u}{\log u}\left(1 + \frac{\log\log u}{\log u}(1+o(1)\right),$$

$$t'_u = \frac{2\pi}{\log u}\left(1 + \frac{\log\log u}{\log u}(1+o(1)\right)$$

ir

$$t''_u = -\frac{\pi}{u(\log u)^2}\left(1 + \frac{\log\log u}{\log u}(2+o(1)\right).$$

Ši lema yra 1.1 lema iš Koroliovo [5] straipsnio.

Priminsime tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 apibrėžimą.

2 apibrėžimas. *Seka $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1, jeigu su kiekvienu intervalu $[a,b) \subset [0,1)$*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} I_{[a,b)}(\{x_k\}) = b-a,$$

čia $\{x_k\}$ yra skaičiaus x_k trupmeninė dalis, o $I_{[a,b)}$ – intervalo $[a,b)$ indikatoriaus funkcija.

Magistro darbe bus reikalinga pakankamoji tolygaus pasiskirstymo moduliu 1 sąlyga.

2 lema. *Tegul $g(u)$ su visais $u \geqslant 1$ yra apibrėžta ir su visais $u > u_0$ yra l kartų diferencijuojama funkcija. Jeigu $g^{(l)}(u)$, kai $u \to \infty$, monotoniškai artėja į 0 ir $\lim_{u\to\infty} u\left|g^{(l)}(u)\right| = \infty$, tuomet seka $\{g(k) : k \in \mathbb{N}\}$ yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1.*

Ši lema yra 3.5 teorema iš [8] monografijos.

3 lema. *Seka* $\{at_k : k > k_0\}$ *su kiekvienu realiuoju* $a \neq 0$ *yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu* 1.

Įrodymas. Iš 1 lemos matome, kad funkcija at_u, $u \geqslant u_0$, su $l = 1$ tenkina 2 lemos sąlygas. Taigi, ši lema yra 2 lemos išvada. $\square$

Ribinės teoremos tore įrodyme bus reikalingas Veilio (Weyl) kriterijus.

4 lema. *Seka* $\{x_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{R}$ *yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1 tada ir tik tada, kai su visais* $m \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \mathrm{e}^{2\pi i x_k m} = 0.$$

Ši lema yra 2.1 teorema iš [8] monografijos.

3. Ribinė teorema analizinių funkcijų erdvėje

Universalumo teoremos įrodymui taikysime tikimybinius metodus, paremtus tikimybinių matų ribinėmis teoremomis analizinių funkcijų erdvėje. Apibrėžkime keletą magistro darbe reikalingų objektų ir sąryšių.

3 apibrėžimas. *Tegul Ω nėra tuščioji aibė. Aibės Ω poaibių šeima $\mathcal{F}$ yra vadinama Borelio (Borel) σ-kūnu, jeigu*

a) $\Omega \in \mathcal{F}$,

b) $A^c \in \mathcal{F}$, *kai* $A \in \mathcal{F}$,

c) $\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m \in \mathcal{F}$, *kai* $A_m \in \mathcal{F}$, $m = 1, 2, \dots$.

4 apibrėžimas. *Aibės Ω poaibių šeimoje $\mathcal{F}$ apibrėžta neneigiama funkcija P vadinama tikimybiniu matu, jeigu ji tenkina šias savybes:*

a) $P(\Omega) = 1$,

b) $P\left(\bigcup\limits_{m=1}^{\infty} A_m\right) = \sum\limits_{m=1}^{\infty} P(A_m)$ *su visais* $A_m \in \mathcal{F}$ *tokiais, kad* $A_k \cap A_l = \varnothing$, *jei* $k \neq l$.

5 apibrėžimas. *Tarkime, kad turime metrinę erdvę $\{\mathbb{X}, d\}$. Aibė $S \subset \mathbb{X}$ yra vadinama reliatyviai kompaktiška, jei iš kiekvienos begalinės jos elementų sekos $\{x_n\} \subset S$ galima išrinkti erdvėje $\mathbb{X}$ konverguojantį posekį. Jei S yra reliatyviai kompaktiška ir uždara, tai ji vadinama kompaktiška aibe arba kompaktu.*

6 apibrėžimas. *Sakome, kad matas P_n silpnai konverguoja į matą P, kai $n \to \infty$, jeigu su kiekviena realiąja, tolydžiąja, aprėžtąja funkcija f erdvėje $\mathbb{X}$ galioja lygybė*

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{X}} f \mathrm{d}P_n = \int_{\mathbb{X}} f \mathrm{d}P.$$

Priminsime, kad $D = \{s \in \mathbb{C} : 1/2 < \sigma < 1\}$. Tegul $H(D)$ žymi analizinių juostoje D funkcijų erdvę su tolygaus konvergavimo kompaktuose topologija. Šiame skyriuje įrodysime teoremą apie mato

$$P_N(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N} \#\{1 \leqslant k \leqslant N : \zeta(s + iht_k) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D))$$

silpnąjį konvergavimą, kai $N \to \infty$. Čia ir toliau tegul $\mathcal{B}(\mathbb{X})$ žymi erdvės $\mathbb{X}$ Borelio (Borel) σ-kūną.

Tegul $\gamma = \{s \in \mathbb{C} : |s| = 1\}$, o

$$\Omega = \prod_p \gamma_p,$$

čia $\gamma_p = \gamma$ su visais pirminiais p. Su sandaugos topologija ir pataškine daugyba, toras Ω yra kompaktinė topologinė Abelio (Abel) grupė. Todėl gauname tikimybinę erdvę

$(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$, čia m_H yra tikimybinis Haro (Haar) matas erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega))$. Tegul $\omega(p)$ yra elemento $\omega \in \Omega$ projekcija į apskritimą γ_p. Tikimybinėje erdvėje $(\Omega, \mathcal{B}(\Omega), m_H)$ apibrėžkime erdvėje $H(D)$ reikšmes įgyjantį (toliau $H(D)$-reikšmį) elementą $\zeta(s, \omega)$ tokia lygybe

$$\zeta(s, \omega) = \prod_p \left(1 - \frac{\omega(p)}{p^s}\right)^{-1}$$

ir tegul P_ζ būna elemento $\zeta(s, \omega)$ skirstinys, t. y.,

$$P_\zeta(A) = m_H \left\{\omega \in \Omega : \zeta(s, \omega) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)).$$

Suformuluosime parindinę šio skyriaus teoremą.

6 teorema. *Matas P_N silpnai konverguoja į matą P_ζ, kai $N \to \infty$.*

Šios teoremos įrodymą išskaidysime į atskiras dalis.

3.1. Ribinė teorema tore

Šiame skyrelyje nagrinėsime mato

$$Q_N(A) = \frac{1}{N} \# \left\{1 \leqslant k \leqslant N : \left(p^{-iht_k} : p \in \mathbb{P}\right) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(\Omega),$$

silpnąjį konvergavimą.

5 lema. *Matas Q_N silpnai konerguoja į Haro matą m_H, kai $N \to \infty$.*

Įrodymas. Yra gerai žinoma, žr., pvz., [9], kad grupės Ω charakteris yra tokios išraiškos

$$\chi(\omega) = \prod_{p \in \mathbb{P}} \omega^{k_p}(p), \quad \omega \in \Omega,$$

čia tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p yra ne nuliai. Todėl mato Q_N Furjė (Fourier) transformacija $g_N(\underline{k})$, $\underline{k} = \{k_p\}$, $p \in \mathbb{P}$, yra apibrėžiama integralu

$$g_N(\underline{k}) = \int_\Omega \prod_{p \in \mathbb{P}} \omega^{k_p}(p) \, \mathrm{d}\, Q_N = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \exp\left\{-iht_k {\sum_{p \in \mathbb{P}}}' k_p \log p\right\}, \tag{3.1}$$

čia "$\sum'$" žymi, kad tik baigtinis skaičius sveikųjų skaičių k_p yra ne nuliai. Akivaizdu, kad

$$g_N(\underline{0}) = 1. \tag{3.2}$$

Tarkime, kad $\underline{k} \neq \underline{0}$. Kadangi pirminių skaičių logaritmų aibė yra tiesiškai nepriklausoma virš racionaliųjų skaičių kūno $\mathbb{Q}$, todėl

$${\sum_{p \in \mathbb{P}}}' k_p \log p \neq 0.$$

Vadinasi, pagal 3 lemą, seka

$$\left\{-\frac{h}{2\pi}t_k\sum_{p\in\mathbb{P}}{}' k_p\log p : k\in\mathbb{N}\right\}$$

yra tolygiai pasiskirsčiusi moduliu 1. Todėl iš 4 lemos ir (3.1) lygybės gauname, kad

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\underline{k}) = 0.$$

Todėl, iš pastarosios ir (3.2) lygybių, turime

$$\lim_{N\to\infty} g_N(\underline{k}) = \begin{cases} 1, & \text{jeigu} \quad \underline{k} = \underline{0}, \\ 0, & \text{jeigu} \quad \underline{k} \neq \underline{0}. \end{cases}$$

Šios lygybės dešinioji pusė yra Haro mato m_H Furjė transformacija. Lema yra įrodyta. □

3.2. Ribinė teorema absoliučiai konverguojančioms Dirichlė eilutėms

Iš 5 lemos matome, kad galioja ribinė teorema tam tikrai funkcijai apibrėžtai absoliučiai konverguojančia Dirichlė eilute. Tegul $\theta > 1/2$ yra fiksuotas skaičius ir su $m, n \in \mathbb{N}$

$$v_n(m) = \exp\left\{-\left(\frac{m}{n}\right)^\theta\right\}.$$

Formule

$$\omega(m) = \prod_{\substack{p^l | m \\ p^{l+1} \nmid m}} \omega^l(p), \quad m\in\mathbb{N},$$

funkciją $\omega(p)$ pratęskime į visą aibę $\mathbb{N}$. Tuomet eilutės

$$\zeta_n(s) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{v_n(m)}{m^s} \qquad \text{ir} \qquad \zeta_n(s,\omega) = \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\omega(m)v_n(m)}{m^s}$$

absoliučiai konverguoja, kai $\sigma > 1/2$, žr. [9]. Todėl funkcija $u_n : \Omega \to H(D)$ apibrėžta formule

$$u_n(\omega) = \zeta_n(s,\omega)$$

yra tolydžioji. Priminsime vieną silpnojo tikimybinių matų savybę.

6 lema. *Tegul P ir P_n, $n\in\mathbb{N}$, yra tikimybiniai matai erdvėje $(\mathbb{X}_1, \mathcal{B}(\mathbb{X}_1))$, o $u : \mathbb{X}_1 \to \mathbb{X}_2$ – tolydusis atvaizdis. Jeigu P_n, kai $n\to\infty$, silpnai konverguoja į matą P, tai tuomet ir matas $P_n u^{-1}$, kai $n\to\infty$, silpnai konverguoja į matą Pu^{-1}.*

Ši lema yra 5.1 teoremos iš [1] monografijos atskirasis atvejis.

7 lema. *Matas*

$$P_{N,n}(A) \stackrel{def}{=} \frac{1}{N}\#\{1 \leqslant k \leqslant N : \zeta_n(s+iht_k) \in A\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

silpnai konverguoja į matą $\hat{P}_n = m_H u_n^{-1}$*, kai* $N \to \infty$.

Įrodymas. Iš matų Q_N, $P_{N,n}$ ir funkcijos u_n apibrėžimų gauname, kad $P_{N,n} = Q_N u_n^{-1}$. Kadangi fukcija u_n tolydžioji, tai iš 5 ir 6 lemų gauname teoremos tvirtinimą. □

3.3. Funkcijos $\zeta(s)$ vidurkinis artinys

Tegul ρ yra erdvės $H(D)$ metrika indukuojanti jos tolygaus konvergavimo kompaktuose topologiją., t. y., su $f, g \in H(D)$,

$$\rho(f,g) = \sum_{l=1}^{\infty} 2^{-l} \frac{\sup_{s\in K_l} |f(s)-g(s)|}{1+\sup_{s\in K_l} |f(s)-g(s)|},$$

čia $\{K_l : l \in \mathbb{N}\}$ juostos D kompaktinių poaibių seka tokia, kad

$$D = \bigcup_{l=1}^{\infty} K_l,$$

$K_l \subset K_{l+1}$ su visais $l \in \mathbb{N}$ ir kiekvienas kompaktas $K \subset D$ yra kompakto K_l viduje.

Taip pat mums bus reikalinga Galaherio (Gallagher) lema, kuri sujungia tolydųjį ir diskretųjį tam tikrų funkcijų kvadratinius vidurkius.

8 lema. *Tegul* T_0*,* $T \geqslant \delta > 0$*,* $\mathcal{T}$ *– baigtinė netuščioji aibė intervale* $[T_0+\delta/2, T_0+T-\delta/2]$*, o*

$$N_\delta(x) = \sum_{\substack{t\in\mathcal{T} \\ |t-x|<\delta}} 1.$$

Jeigu $S(t)$ *– kompleksines reikšmes įgyjanti, tolydžioji uždarame intervale* $[T_0, T+T_0]$ *ir bent atvirame intervale* (T_0, T_0+T) *turinti tolydžiąją išvestinę funkcija, tai tuomet*

$$\sum_{t\in\mathcal{T}} N_\delta^{-1}(t)|S(t)|^2 \leqslant \frac{1}{\delta}\int_{T_0}^{T_0+T} |S(t)|^2 \mathrm{d}t + \left(\int_{T_0}^{T_0+T} |S(t)|^2 \mathrm{d}t \int_{T_0}^{T_0+T} |S'(t)|^2 \mathrm{d}t\right)^{1/2}.$$

Lemos įrodymą galima rasti [11, lema 1.4].

Čia ir toliau naudosime klasikinį Landau (Landau) žymėjimą $a \ll b$, $b > 0$. Jis reiškia, kad egzistuoja konstanta $C > 0$ tokia, kad $|a| \leqslant Cb$. Bendriau, $a \ll_\theta b$ reiškia, kad konstanta C priklauso nuo θ. Kad galėtume perkelti rezultatus įrodytus $\zeta_n(s)$ funkcijai $\zeta(s)$, reikalingas toks vidurkinis artinys.

9 lema. *Yra teisinga tokia lygybė:*

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \rho\left(\zeta(s+iht_k), \zeta_n(s+iht_k)\right) = 0.$$

Įrodymas. Pirmiausia priminsime Rymano dzeta fukcijos kvadratinio vidurkio įverčius. Yra žinoma, žr. [9], kad su $\sigma > 1/2$

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it)|^2 \,\mathrm{d}\, t \ll_\sigma T$$

ir

$$\int_1^T |\zeta'(\sigma+it)|^2 \,\mathrm{d}\, t \ll_\sigma T.$$

Iš šių įverčių, su $\sigma > 1/2$ ir $t \in \mathbb{R}$ gauname, kad

$$\int_1^T |\zeta(\sigma+it+iht_u)|^2 \,\mathrm{d}\, u \ll T(1+|t|) \tag{3.3}$$

ir

$$\int_1^T |\zeta'(\sigma+it+iht_u)|^2 \,\mathrm{d}\, u \ll T(1+|t|). \tag{3.4}$$

Iš 1 lemos matome, kad funkcija t_u yra monotoniškai didėjanti. Todėl, atsižvelgdami į 1 lemos įverčius, su $K \geqslant 1$ ir $\sigma > \frac{1}{2}$ gauname, kad

$$\begin{aligned}
\int_K^{2K} |\zeta(\sigma+it+iht_u)|^2 \,\mathrm{d}\, u &= \int_K^{2K} \frac{1}{t'_u} |\zeta(\sigma+it+iht_u)|^2 \,\mathrm{d}\, t_u \\
&\ll_{h,\sigma} \max_{K\leqslant t\leqslant 2K} \frac{1}{t'_u} \int_K^{2K} \mathrm{d}\left(\int_1^{t+ht_u} |\zeta(\sigma+iv)|^2 \,\mathrm{d}\, v\right) \\
&\ll_{h,\sigma} \max_{K\leqslant t\leqslant 2K} \frac{1}{t'_u} \int_1^{t+ht_u} |\zeta(\sigma+iv)|^2 \,\mathrm{d}\, v \Big|_K^{2K} \\
&\ll_{h,\sigma} (t_{2K}+|t|) \max_{K\leqslant t\leqslant 2K} \frac{1}{t'_u} \\
&\ll_{h,\sigma} \frac{K}{\log K} \cdot \log K + |t|\log K \ll_{h,\sigma} K + |t|\log K \\
&\ll_{h,\sigma} K(1+|t|)
\end{aligned}$$

Imdami $K = T2^{-l-1}$ ir sumuodami pagal $l = 0, 1, \ldots,$ gauname (3.3) įvertį. Analogiškai gaunamas ir (3.4) įvertis.

Dabar gausime funkcijos $\zeta(s+iht_k)$ diskrečiojo kvadratinio vidurkio įvertį. Tam naudosime 8 lemą. Atsižvelgdami į (3.3) ir (3.4) įverčius turime, kad

$$\begin{aligned}
\sum_{k=1}^N |\zeta(\sigma+it+iht_k)|^2 &\ll_{\sigma,h} \int_{\frac{3}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta(\sigma+it+iht_u)|^2 \,\mathrm{d}\, u \\
&\quad + \left(\int_{\frac{3}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta(\sigma+it+iht_u)|^2 \,\mathrm{d}\, u \int_{\frac{3}{2}}^{N+\frac{1}{2}} |\zeta'(\sigma+it+iht_u)|^2 \,\mathrm{d}\, u\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\ll N(1+|t|)
\end{aligned} \tag{3.5}$$

Tegul $\theta > 1/2$ yra iš parametro $v_n(m)$ apibrėžimo. Pažymėkime

$$l_n(s) = \frac{s}{\theta}\Gamma\left(\frac{s}{\theta}\right) n^s,$$

čia $n \in \mathbb{N}$. Yra žinoma, žr. [9], kad funkcijai $\zeta_n(s)$ su $\sigma > 1/2$ galioja integralinė išraiška

$$\zeta_n(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\theta - i\infty}^{\theta + i\infty} \zeta(s+z) l_n(z) \frac{\mathrm{d}\, z}{z}. \tag{3.6}$$

Tarkime, kad K yra fiksuota kompaktinė aibė. Apibrėžkime $\varepsilon > 0$ tokį, kad $\frac{1}{2} + 2\varepsilon \leqslant \operatorname{Re} w \leqslant 1 - \varepsilon$ su visais $w \in K$. Be to, tarkime, kad $\alpha > 0$ ir (3.6) išraiškoje imkime $\theta = -\alpha$. Tuomet gauname, kad

$$\zeta_n(s) - \zeta(s) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\alpha - i\infty}^{-\alpha + i\infty} \zeta(s+z) l_n(z) \frac{\mathrm{d}z}{z} + \frac{l_n(1-s)}{1-s}.$$

Tarkime, kad $s = \sigma + i\tau$ yra bet koks taškas iš aibės K, o $1 \leqslant k \leqslant N$. Imdami

$$\alpha = \sigma - \varepsilon - \frac{1}{2}, \qquad \theta = \frac{1}{2} + \varepsilon,$$

gauname nelygybę

$$\begin{aligned} |\zeta(s + iht_k) - \zeta_n(s + iht_k)| \leqslant & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} |\zeta(s + iht_k - \alpha + it)| \frac{|l_n(-\alpha + it)|}{|-\alpha + it|} \mathrm{d}t \\ & + \frac{|l_n(1 - s - iht_k)|}{|1 - s - iht_k|}. \end{aligned}$$

Pastarojoje nelygybėje $t + \tau$ pakeitę t, turime

$$\begin{aligned} |\zeta(s + iht_k) - \zeta_n(s + iht_k)| \leqslant \; & \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + ht_k)\right) \right| \frac{|l_n\,(1/2 + \varepsilon - s + it)|}{|1/2 + \varepsilon - s + it|} \mathrm{d}t \\ + \frac{|l_n(1 - s - iht_k)|}{|1 - s - iht_k|}. \end{aligned}$$

Pažymėkime

$$\frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sup_{s \in K} |\zeta(s + iht_k) - \zeta_n(s + iht_k)| \leqslant J + S,$$

čia

$$J = \frac{1}{2\pi N} \int_{-\infty}^{+\infty} \left(\sum_{k=1}^{N} \left| \zeta\left(\frac{1}{2} + \varepsilon + i(t + ht_k)\right) \right| \right) \sup_{s \in K} \frac{|l_n\,(1/2 + \varepsilon - s + it)|}{|1/2 + \varepsilon - s + it|} \mathrm{d}t,$$

o

$$S = \frac{1}{N} \sum_{k=1}^{N} \sup_{s \in K} \frac{|l_n(1 - s - iht_k)|}{|1 - s - iht_k|}.$$

Iš Stirlingo (Stirling) formulės gauname įvertį

$$|\Gamma(\xi + it)| \ll (|t| + 1)^{\xi - 1/2} \exp\left\{ -\frac{\pi |t|}{2} \right\},$$

kuris yra tolygus, kai $0 \leqslant \xi \leqslant 1$. Todėl, atsižvelgę į pastarąjį įvertį, turime, kad

$$\begin{aligned} \frac{|l_n\,(1/2 + \varepsilon - s + it)|}{|1/2 + \varepsilon - s + it|} &= \frac{n^{1/2 + \varepsilon - \sigma}}{\theta} \left| \Gamma\left(\frac{1/2 + \varepsilon - \sigma}{\theta} + \frac{i(t - \tau)}{\theta} \right) \right| \\ &\ll \frac{n^{-\varepsilon}}{\theta} \left(1 + \frac{|t - \tau|}{\theta} \right)^{(1/2 + \varepsilon - \sigma)/\theta - 1/2} \exp\left\{ -\frac{\pi}{2\theta} |t - \theta| \right\}. \end{aligned}$$

Tegul $\tau_0 = \tau_0(K) = \sup_{s\in K} |\operatorname{Im} s| + 1$. Todėl $|t-\tau| \geqslant |t| - |\tau| \geqslant |t| - \tau_0$ ir

$$\frac{|l_n\left(1/2+\varepsilon-s+it\right)|}{|1/2+\varepsilon-s+it|} \ll \frac{n^{-\varepsilon}}{\theta} \exp\left\{\frac{\pi\tau_0}{2\theta}\right\} \exp\left\{-\frac{\pi|t|}{2\theta}\right\} \ll_{\theta,K} n^{-\varepsilon} \exp\left\{-\frac{\pi|t|}{2\theta}\right\}.$$

Analogiškai gauname, kad

$$\frac{|l_n(1-s-iht_k)|}{|1-s-iht_k|} \ll_{\theta,K} n^{1-\sigma} \exp\left\{-\frac{\pi h t_k}{2\theta}\right\}.$$

Kad įvertintume sumą S, ją išskaidykime į sumas S_1 ir S_2: kai $1 \leqslant k \leqslant \log N$ ir $\log N \leqslant k \leqslant N$, atitinkamai. Nesunku pastebėti, kad

$$S_1 \ll_{\theta,K} \frac{\log N}{N} n^{1-\sigma}.$$

Suma S_2 yra įvertinama taip:

$$S_2 \ll_{\theta,K} \frac{n^{1-\sigma}}{N} \sum_{k\geqslant \log N} \exp\left\{-\frac{\pi h}{2\theta}\cdot\frac{2\pi k}{\log k}\right\} \ll_{\theta,K,h} \frac{n^{1-\sigma}}{N} \exp\left\{-\frac{\pi^2 h}{2\theta}\cdot\frac{\log N}{\log\log N}\right\} < \frac{n^{1-\sigma}}{N}.$$

Vadinasi,

$$S \ll_{\theta,K,h} \frac{\log N}{N} n^{1-\sigma}.$$

Iš Koši (Cauchy) nelygybės ir (3.5) įverčio gauname, kad

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{N} \left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+i(t+ht_k)\right)\right| &\leqslant \left(N\sum_{k=1}^{N}\left|\zeta\left(\frac{1}{2}+\varepsilon+i(t+ht_k)\right)\right|^2\right)^{1/2} \\ &\ll_h N(1+|t|)^{1/2}.\end{aligned}$$

Todėl

$$J \ll_{\theta,K,h} n^{-\varepsilon} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{N} N(1+|t|)^{1/2} \exp\left\{-\frac{\pi|t|}{2\theta}\right\} \mathrm{d}\, t \ll_{\theta,K,h} n^{-\varepsilon}.$$

Susumavę aukščiau gautus J ir S įverčius, turime, kad

$$\frac{1}{N}\sum_{k+1}^{N} \sup_{s\in K} |\zeta(s+iht_k) - \zeta_n(s+iht_k)| \ll_{\theta,K,h} n^{-\varepsilon} + \frac{\log N}{N} n^{1-\sigma}.$$

Artindami $N \to \infty$, o po to $n \to \infty$ ir naudodami metrikos ρ apibrėžimą, gauname lemos tvirtinimą. □

3.4. Ribinės teoremos įrodymas

Šiame skyrelyje pateiksime ribinės teoremos analizinių funkcijų erdvėje įrodymą. Priminsime labai svarbią Prochorovo (Prokhorov) teoremą, kuri sieja tikimybinių matų šeimų reliatyvų šeimų kompaktiškumą ir suspaustumą.

10 lema (Prochorovo teorema)**.** *Jeigu tikimybinių matų šeima $\{P\}$ yra suspausta, tai ji yra reliatyviai kompaktiška.*

Ši lema yra 6.1 teorema iš [1] monografijos.

Suformuluosime dar vieną labai svarbią lemą.

11 lema. *Tarkime, kad erdvė* $(\mathbb{X}, d)$ *yra separabili, atsitiktiniai elementai* Y_n, X_{1n}, $X_{2n}, \ldots$ *turi bendrą apibrėžimo sritį, kurioje apibrėžtas matas* μ, *su visais* k

$$X_{kn} \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X_k$$

ir

$$X_k \xrightarrow[k\to\infty]{\mathcal{D}} X.$$

Jeigu su visais $\varepsilon > 0$

$$\lim_{k\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mu\left\{d(X_{kn}, Y_n) \geqslant \varepsilon\right\} = 0,$$

tai tuomet

$$Y_n \xrightarrow[n\to\infty]{\mathcal{D}} X$$

.

Lema yra 4.2 teorema iš [1] monografijos.

6 teoremos įrodymas. Tegul $(\hat{\Omega}, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ yra tam tikra tikimybinė erdvė. Tarkime, kad η_N yra pastarosios tikimybinės erdvės atsitiktinis elementas toks, kad

$$\mathcal{P}\{\eta_N = ht_k\} = \frac{1}{N}, \quad k = 1, \ldots, N.$$

Naudodami atsitiktinį elementą η_N, apibrėšime du $H(D)$-reikšmius atsitiktinius elementus

$$X_{N,n} = X_{N,n}(s) = \zeta_n(s + i\eta_N)$$

ir

$$X_N = X_N(s) = \zeta(s + i\eta_N).$$

Tegul $X_n = X_n(s)$ yra $H(D)$-reikšmis atsitiktinis elementas, kurio skirstinys $\hat{P}_n$, čia $\hat{P}_n$ yra 7 lemos ribinis matas. Tegul $\xrightarrow{\mathcal{D}}$ žymi konvergavimą į skirstinį. Tuomet iš 7 lemos turime, kad

$$X_{N,n} \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} X_n. \tag{3.7}$$

Iš [9] monografijos, yra žinoma, kad tikimybinių matų šeima $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra suspausta. Iš 10 lemos turime, kad tikimybinių matų šeima $\{\hat{P}_n : n \in \mathbb{N}\}$ yra reliatyviai kompaktiška, t. y., kiekviena tikimybinių matų šeimos $\hat{P}_n$ seka turi posekį $\hat{P}_{n_r}$, kuris silpnai konverguoja į tam tikrą erdvės $(H(D), \mathcal{B}(H(D)))$ tikimybinį matą P, kai $r \to \infty$. Vadinasi,

$$X_{n_r} \xrightarrow[r\to\infty]{\mathcal{D}} P. \tag{3.8}$$

Naudodami 9 lemą randame, kad su kiekvienu $\varepsilon > 0$

$$\lim_{n\to\infty} \limsup_{N\to\infty} \frac{1}{N}\mathcal{P}\{\rho(X_N(s), X_{N,n}(s)) \geqslant \varepsilon\} = 0.$$

Ši lygybė, (3.7), (3.8) sąryšiai ir 11 lema duoda, kad

$$X_N \xrightarrow[N\to\infty]{\mathcal{D}} P, \tag{3.9}$$

t. y., kad matas P_N silpnai konverguoja į matą P, kai $N \to \infty$. Be to, (3.9) sąryšis todo, kad matas P iš (3.8) sąryšio nepriklauso nuo posekio $\hat{P}_{n_r}$. Vadinasi, gauname, kad matas $\hat{P}_n$ silpnai konverguoja į matą P, kai $n \to \infty$.

Tam, kad identifikuotume matą P, pasinaudosime vienu [2] straipsnio rezultatu. Šiame straipsnyje buvo įrodyta, kad matas

$$\frac{1}{T}\text{meas}\left\{\tau \in [0, T] : \zeta(s + i\tau) \in A\right\}, \quad A \in \mathcal{B}(H(D)),$$

taip pat silpnai konverguoja į ribinį mato $\hat{P}_n$ matą P, kai $n \to \infty$, ir, kad $P = P_\zeta$. Todėl matas P_N taip pat silpnai konverguoja į matą P_ζ, kai $N \to \infty$. $\square$

4. Universalumo teoremos įrodymas

Šiame skyriuje įrodysime pagrindinę magistro darbo teoremą. Teoremos įrodyme esminį vaidmenį vaidina ribinio mato atrama analizinių funkcijų erdvėje. Priminsime mato atramos apibrėžimą.

7 apibrėžimas. *Tikimybinio mato P atrama erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$ vadinama minimali uždaroji aibė S_P tokia, kad $P(S_P) = 1$.*

Universalumo teoremos įrodyme naudosime kai kuriuos silpnojo tikimybinių matų konvergavimo ekvivalentus. Mums reikalingus faktus suformuluosime sekančioje lemoje.

12 lema. *Tegul P_n, $n \in \mathbb{N}$ ir P yra matai tikimybinėje erdvėje $(\mathbb{X}, \mathcal{B}(\mathbb{X}))$. Tuomet šie teiginiai yra ekvivalentūs:*

(i) tikimybinis matas P_n silpnai konverguoja į tikimybinį matą P, kai $n \to \infty$;

(ii) su visomis atvirosioms aibėmis G

$$\liminf_{n\to\infty} P_n(G) \geqslant P(G);$$

(iii) su visomis mato P tolydumo aibėmis A

$$\lim_{n\to\infty} P_n(A) = P(A).$$

Ši lema yra 2.1 teoremos dalis iš [1] monografijos.

5 teoremos įrodymas. Tegul

$$S = \{g \in H(D) : g(s) \neq 0 \ \text{ or } \ g(s) \equiv 0\}.$$

Yra gerai žinoma, žr. [9], kad mato P_ζ atrama yra aibė S. Aibė S yra sudaryta iš visų elementų $g \in H(D)$ tokių, kad su kiekviena elemento g aplinka G galioja nelygybė $P(G) > 0$, žr., pvz, [1].

Apibrėžkime aibę

$$G_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s \in K} \left| g(s) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\},$$

čia $p(s)$ yra polinomas. Iš tiesų, $\mathrm{e}^{p(s)} \in S$, todėl

$$P_\zeta(G_\varepsilon) > 0.$$

Iš 6 teoremos ir 12 lemos (ii) dalies gauname, kad

$$\liminf_{N\to\infty} P_N(G_\varepsilon) \geqslant P_\zeta(G_\varepsilon) > 0,$$

arba

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} \left| \zeta(s+iht_k) - \mathrm{e}^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2} \right\} > 0. \tag{4.1}$$

Remdamiesi 1 teorema galime parinkti polinomą $p(s)$ tenkinantį nelygybę

$$\sup_{s\in K} \left| f(s) - e^{p(s)} \right| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{4.2}$$

Iš šios nelygybės ir (4.1) nelygybės gauname teoremos pirmosios dalies tvirtinimą.

Apibrėžkime aibę

$$\hat{G}_\varepsilon = \left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| < \varepsilon \right\}.$$

Iš (4.2) nelygybės turime, kad $G_\varepsilon \subset \hat{G}_\varepsilon$.

Aibės $\hat{G}_\varepsilon$ siena $\partial\hat{G}_\varepsilon$ yra aibė

$$\left\{ g \in H(D) : \sup_{s\in K} |g(s) - f(s)| = \varepsilon \right\}.$$

Todėl sienos $\partial\hat{G}_{\varepsilon_1}$ ir $\partial\hat{G}_{\varepsilon_2}$ nesikerta su skirtingomis ε_1 ir ε_2 reikšmėmis. Vadinasi, $P_\zeta(\partial\hat{G}_\varepsilon) > 0$ daugiausia su skaičiąja $\varepsilon > 0$ reikšmių aibe. Todėl aibė $\hat{G}_\varepsilon$ yra mato P_ζ tolydumo aibė ($\partial\hat{G}_\varepsilon = 0$) su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Tuomet iš 6 teoremos ir iš 12 lemos (iii) dalies gauname, kad

$$\lim_{N\to\infty} P_n(\hat{G}_\varepsilon) = P_\zeta(\hat{G}_\varepsilon),$$

arba

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s+iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} = P_\zeta(\hat{G}_\varepsilon)$$

su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę. Lieka parodyti, kad $P_\zeta(\hat{G}_\varepsilon) > 0$. Tačiau, šiame skyrelyje jau parodėme, jog $G_\varepsilon \subset \hat{G}_\varepsilon$. Kadangi $P_\zeta(G_\varepsilon) > 0$, turime, kad $P_\zeta(\hat{G}_\varepsilon) > 0$ taip pat. Teorema įrodyta. $\square$

Literatūra

[1] P. Billingsley, *Convergence of Probability Measures*, Wiley, New York, 1968.

[2] A. Dubickas and A. Laurinčikas, Distribution modulo 1 and the discrete universality of the Riemann zeta-function, *Abh. Math. Semin. Univ. Hambg.* **86** (2016), no. 1, 79–87.

[3] J.-P. Gram, Sur les zéros de la fonction $\zeta(s)$ de Riemann, *Acta Math.* **27** (1903), 289–304.

[4] J. I. Hutchinson, On the roots of the Riemann zeta-function, *Trans. Amer. Math. Soc.* **27** (1925), 49–60.

[5] M. A. Korolev, Gram's law in the theory of the Riemann zeta-function. Part 1, *Proc. Steklov Inst. Math* **292** (2016), no. 2, 1–146.

[6] M. A. Korolev, Gram's law in the theory of the Riemann zeta-function. Part 2, *Proc. Steklov Inst. Math* **294**(2016), no. 1, 1–78.

[7] M. Korolev, A. Laurinčikas, A new application of the gram points, *Aequat. Math.* **93** (2019), 859–873.

[8] L. Kuipers and H. Niederreiter, *Uniform Distribution of Sequences*, Pure and Applied Math., Wiley-Interscience, New York, London, Sydney, 1974.

[9] A. Laurinčikas, *Limit Theorems for the Riemann Zeta-Function*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, 1996.

[10] S. N. Mergelyan, Uniform approximations to functions of a complex variable, *Amer. Math. Soc. Translation* **1954** (1954), no. 101, 99 pp.

[11] H. L. Montgomery, *Topics in Multiplicative Number Theory*, Lecture Notes Math., vol. 227, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, 1971.

[12] A. Nagelė, L. Papreckienė, *Kompleksinio kintamojo funkcijų teorija*, Žara, Vilnius, 1996.

[13] Ł. Pańkowski, Joint universality for dependent L-functions, *Ramanujan J.* **45** (2018), 181–195.

[14] A. Reich, Werteverteilung von Zetafunktionen, *Arch. Math.* **34** (1980), 440–451.

[15] C. L. Siegel, Contributions to the theory of the Dirichlet L-series and the Epstein zeta-functions, *Ann. Math.* **44** (1943), no. 2, 143–172.

[16] E. C. Titchmarsh, The zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Royal Soc. London. Ser. A* **151** (1935), 234–255.

[17] E. C. Titchmarsh, The zeros of the Riemann zeta-function, *Proc. Royal Soc. London. Ser. A* **157** (1936), 261–263.

[18] S. M. Voronin, Theorem on the "universality" of the Riemann zeta-function, *Izv. Akad. Nauk SSSR, Ser. Matem.* **39** (1975), no. 3, 475–486.

Gramo taškų taikymas Rymano dzeta funkcijos universalume

Santrauka

Tegul $s = \sigma + it$, $\sigma, t \in \mathbb{R}$, $i = \sqrt{-1}$, yra kompleksinis kintamasis. Rymano dzeta funkcija pusplokštumėje $\sigma > 1$ yra apibrėžiama paprastaja Dirichlė eilute arba Oilerio sandauga pirminiais skaičiais

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s} = \prod_{p \in \mathbb{P}} \left(1 - \frac{1}{p^s}\right)^{-1}.$$

čia $\mathbb{P}$ yra visų pirminių skaičių aibė. Be to, funkcija $\zeta(s)$ turi meromorfinį pratęsimą į visą kompleksinę plokštumą, nes taškas $s = 1$ yra jos paprastasis polius su reziduumu 1.

Magistro darbe yra įrodyta diskrečiojo universalumo teorema Rymano dzeta funkcijai postūmiuose naudojant funkcijos $\zeta(s)$ Gramo taškų aibę $\{t_k\}$.

5 teorema. *Tegul $K \in \mathcal{K}$, o $f(s) \in H_0(K)$. Tuomet su kiekvienu $\varepsilon > 0$ ir $h > 0$*

$$\liminf_{N \to \infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Be to, riba

$$\lim_{N \to \infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s \in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

egzistuoja su visais $\varepsilon > 0$, nebent išskyrus skaičiąją $\varepsilon > 0$ reikšmių aibę.

An Application of the Gram Points in the Universality of the Riemann Zeta-Function

Summary

Let $s = \sigma + it$ be a complex variable, and $\zeta(s)$ denote the Riemann zeta-function, i.e., for $\sigma > 1$,

$$\zeta(s) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{m^s}.$$

Moreover, the function $\zeta(s)$ has the meromorphic continuation to the whole complex plane with the unique simple pole at the point $s = 1$ with residue 1.

The aim of master thesis is the using of the sequence $\{t_n\}$ of Gram's points of the Riemann zeta-function in the theory of discrete universality of the function $\zeta(s)$. The main result is the following theorem.

Theorem 5. *Let $K \in \mathcal{K}$ and $f(s) \in H_0(K)$. Then, for every $\varepsilon > 0$,*

$$\liminf_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0.$$

Moreover, the limit

$$\lim_{N\to\infty} \frac{1}{N} \# \left\{ 1 \leqslant k \leqslant N : \sup_{s\in K} |\zeta(s + iht_k) - f(s)| < \varepsilon \right\} > 0$$

exists for all but at most countably many $\varepsilon > 0$.