



VILNIAUS UNIVERSITETAS
ŠIAULIŲ AKADEMIJA

MATEMATIKOS MAGISTRO STUDIJŲ PROGRAMA
Didžiųjų duomenų analitikos specializacija

ADOMAS RAUDONIS

Magistro studijų baigiamasis darbas

NEIGIAMŲ FAKTORIŲ ĮTAKA LIETUVOS GYVENTOJŲ SENĖJIMUI
XXI AMŽIUJE

Darbo vadovas: doc. dr. V. Kanišauskas

Šiauliai, 2022

Studento, teikiančio baigiamąjį darbą, GARANTIJA WARRANTY of Final Thesis

Vardas, pavardė <i>Name, Surname</i>	Adomas Raudonis
Padalinys <i>Faculty</i>	Šiaulių akademija <i>Šiauliai Academy</i>
Studijų programa <i>Study Programme</i>	Matematika <i>Mathematics</i>
Darbo pavadinimas <i>Thesistopic</i>	Neigiamų faktorių įtaka Lietuvos gyventojų senėjimui XXI amžiuje. The impact of negative factors on the aging of the Lithuanian population in the 21 st century
Darbotipas <i>Thesistype</i>	Baigiamasis darbas <i>Final Thesis</i>

Garantuojau, kad mano baigiamasis darbas yra parengtas sąžiningai ir savarankiškai, kitų asmenų indėlio į parengtą darbą nėra. Jokių neteisėtų mokėjimų už šį darbą niekam nesu mokėjęs. Šiame darbe tiesiogiai ar netiesiogiai panaudotos kitų šaltinių citatos yra pažymėtos literatūros nuorodose.

I guarantee that my thesis is prepared in good faith and independently, there is no contribution to this work from other individuals. I have not made any illegal payments related to this work. Quotes from other sources directly or indirectly used in this thesis, are indicated in literature references.

Aš, Adomas Raudonis, pateikdamas šį darbą, patvirtinu (pažymėti)

I, Adomas Raudonis, by submitting this paper confirm (check)

Embargo laikotarpis
Embargo Period

Prašau nustatyti šiam baigiamajam darbui toliau nurodytos trukmės embargo laikotarpį: *I am requesting an embargo of this thesis for the period indicated below:*

_____ mėnesių / months
(embargo laikotarpis negali viršyti 60 mėn. / *an embargo period shall not exceed 60 months*).

Embargo laikotarpis nereikalingas / *no embargo requested*.

Embargo laikotarpio nustatymo priežastis / *Reason for*

TURINYS

ĮVADAS.....	5
1. TEORINĖ DALIS	7
1.2 PAGRINDINĖS DARBO SAŲOKOS.....	7
1.3 ŽODŽIŲ SUTRUMPINIMAI IR ŽYMĖJIMAI	7
1.4 PAGRINDINĖS MATEMATINĖS SAŲOKOS	8
1.5 NORMALUSIS SKIRSTINYS	9
1.6 BENDRIEJI DEMOGRAFINIAI RODIKLIAI.....	10
1.7 POLINOMINIO SKIRSTINIO MODELIO TAIKYMAS.....	12
1.8 SERIJŲ KRITERIJUS.....	13
1.9 EMPIRINIS KORELIACIJOS KOEFICIENTAS	14
1.10 HIPOTEZĖ APIE KORELIACIJOS KOEFICIENTĄ	15
1.11 TIESINĖ REGRESIJA.....	16
1.12 TIESINĖS REGRESIJOS LYGTIES MODELIO TINKAMUMO KRITERIJAI	17
1.13 DEMOGRAFINIAI PROGNOZAVIMO MODELIAI.....	19
1.14 AR(1) MODELIS	21
1.15 AUTOREGRESINIŲ PROCESŲ PARAMETRŲ VERTINIMAS.....	22
1.16 LAIKO EILUČIŲ IŠLYGINIMO METODAS.....	23
2. TYRIMAS	25
2.1 APSKRIČIŲ SUGRUPAVIMAS PAGAL GYVENTOJŲ SKAIČIŲ	25
2.2 SENĖJIMO KOEFICIENTAS PAGAL REGIONUS.....	26
2.3 FAKTORIŲ PERSKAIČIAVIMAS PAGAL REGIONUS.....	31
2.3.1 GYVENTOJŲ SKAIČIUS	31
2.3.2 BENDRASIS GIMSTAMUMO RODIKLIS	33
2.3.3 BENDRASIS MIRTINGUMO RODIKLIS	35
2.3.4 MIGRACIJOS SOLDO KOEFICIENTAS	38
2.3.5 BENDRASIS SANTUOKOS (IŠTUOKOS) RODIKLIS.....	40
2.4 NEIGIAMŲ FAKTORIŲ IR SENĖJIMO KOEFICIENTO DINAMIKOS POKYČIŲ TYRIMAS	43
2.4.1 SENĖJIMO KOEFICIENTO POKYČIAI	43
2.4.2 GYVENTOJŲ SKAIČIAUS POKYČIAI.....	47
2.4.3 GIMSTAMUMO RODIKLIO POKYČIAI.....	50
2.4.4 MIRTINGUMO RODIKLIO POKYČIAI	52

2.4.5 MIGRACIJOS SOLDO KOEFICIENTO POKYČIAI	54
2.4.6 SANTUOKŲ IR IŠTUOKŲ RODIKLIO POKYČIAI	57
2.5 LAIKO EILUTĖS	59
2.5.1 DUOMENŲ ATSITIKTINUMO IR NEPRIKLAUSOMUMO TIKRINIMAS	59
2.5.2 TRENDŲ EGZISTAVIMO PATIKRINIMAS	61
2.5.3 TRENDŲ ELIMINAVIMAS IR AR(1) RADIMAS.....	62
2.6 DEMOGRAFINIŲ MODELIŲ PRITAIKYMAS SENĖJIMO KOEFICIENTUI PROGNOZUOTI.....	64
2.7 REGRESINĖ ANALIZĖ	67
2.7.1 NORMALUMO TIKRINIMAS	67
2.7.2 KORELIACIJOS KOEFICIENTAS	68
2.7.3 TIESINĖS REGRESIJOS MODELIO ANALIZĖ.....	70
2.7.4 PIRMINIO MODELIO TIKRINIMAS SU SPSS.....	72
IŠVADOS	77
LITERATŪROS SĄRAŠAS.....	78
SANTRAUKA.....	79
SUMMARY.....	80
PRIEDAI	82

ĮVADAS

Temos aktualumas. Gyventojų senėjimas – teigiamas ar neigiamas reiškinys? Kaip į šį klausimą atsakysime, priklausau nuo to, iš kokios pusės pažvelgsime. Teigiamas reiškinys – tai visiškai pasikeitusi žmogaus biologija, gyvenimas, senėjimas siejamas su gerokai patobulėjusia medicina, švietimu, saugumu, kultūriniu gyvenimu, tai viskas, kas mums leidžia ilgiau išgyventi. Tačiau jei žvilgtelėsime iš ekonominės ar socialinės pusės pamatysime, kad tai viena didžiausių problemų, su kuria susiduria daugelis pasaulio valstybių, tarp jų ir Lietuva. Kad ši problema egzistuoja mums rodo [9] šaltinio, valstybės kuriami planai, kaip įveikti problemas, susijusias su gyventojų senėjimu. Vienos iš reformų – tai ilginamas pensinis amžius, pensijų kaupimo perskaičiavimo reformos. Senėjimą lemia tam tikri veiksniai, kurie metams bėgant keičia šalies gyventojų struktūrą.

Gyventojų senėjimą lemia daug veiksnių, jie skirstomi į demografinius ir nedemografinius. Nedemografinius veiksnius, kaip medicinos, technologijų pasiekimai ir panašiai, sunkiau pamatuoti, todėl magistriniam darbui pasirinkau demografinius duomenis, kuriuos galima išmatuoti ir kurie galimai turi didžiausią įtaką gyventojų senėjimui: gyventojų skaičius, gimstamumas, mirtingumas, migracija, santuokos, ištuokos.

Temą pasirinkau todėl, kad daug lietuvių autorių aprašo pasekmes, veiksnius, tačiau mažai dėmesio skiria ryšiui prognozuoti tarp veiksnių ir paties senėjimo koeficiento, jei niekas nesikeis.

Tyrimo objektas. Lietuvos gyventojų senėjimas, demografiniai veiksniai: gyventojų skaičius, gimstamumo, mirtingumo, migracijos, santuokos, ištuokos rodiklių skaičių duomenys iš Lietuvos statistikos departamento.

Chronologinės ribos. 2002–2019 metai.

Tyrimo tikslas. Statistiškai ištirti gyventojų senėjimą Lietuvoje ir su jais susijusių faktorių kaitą.

Tyrimo uždaviniai.

1. Rasti optimalų apskričių grupavimą į keturias grupes, kad gyventojų skaičius būtų panašus. Perskaičiuoti duomenis pagal naujai gautas grupes.
2. Nustatyti, kaip kinta senėjimo koeficientas visuose regionuose tiriamuoju laikotarpiu, 2002–2019 m.

3. Neigiamų faktorių (senėjimo koef., gyventojų sk., gimstamumas, mirtingumas, migracijos koef., santuokų (ištuokų) sk.) pagal regionus apskaičiavimas 2002–2019 m. laikotarpiu.
4. Ištirti duomenų pokyčių dinamiką kas penkerius metus, pavaizduoti Lietuvos žemėlapiuose. Pritaikant polinominio skirstinio statistinę hipotezę, nustatyti, kuriais laikotarpiais pokyčiai buvo esminiai.
5. Taikant regresinę analizę nustatyti senėjimo koeficiento priklausomybę su kitais rodikliais.
6. Rasti tiriamų rodiklių priklausomybę nuo laiko, apskaičiuoti trendo lygtis.
7. Nustatyti, kurias duomenų eilutes galima aprašyti laiko eilučių modeliais. Rasti AR(1) lygtis.
8. Taikant tris demografinio prognozavimo modelius, nustatyti tinkamiausią prognozavimo modelį, atlikti grupių senėjimo koeficiento prognozę 2025 m.

Tyrimo metodai. Taikomi matematinės statistikos, lyginamosios analizės, vizualinis – dedukcinis ir prognozuojamieji metodai.

Darbo struktūra. Darbas yra sudarytas iš įvado, teorinės, tyrimosios dalies, išvadų, santraukos, literatūros sąrašo ir priedo.

Pirmajame skyriuje „Teorinė dalis“ pateiktos pagrindinės darbo sąvokos, pagrindiniai matematiniai metodai, taikomi darbe, matematinės statistikos sąvokos.

Antrasis skyrius pavadintas „Tyrimas“. Skyrių sudaro poskyriai, kuriuose pateiktas darbo tyrimas.

Išvadose apibendrinami visi gauti rezultatai.

Santraukoje lietuvių ir anglų kalbomis trumpai pristatomas magistro darbas.

Literatūros sąrašė pateikiama darbe naudota literatūra.

Paskutinėje dalyje priedai pateikiamos papildomos lentelės, skaičiavimai.

1. TEORINĖ DALIS

Šioje dalyje pateiktos pagrindinės darbo matematinės statistikos sąvokos, formulės, teorinė dalis, žodžių sutrumpinimai ir žymėjimai.

1.2 PAGRINDINĖS DARBO SĄVOKOS

Demografinis senėjimas – tai gyventojų amžiaus kaita, pasižyminti senyvo amžiaus žmonių skaičiaus didėjimu arba jauno amžiaus žmonių mažėjimu.

Gyventojai – demografijos ir statistikos sąvoka, išreiškianti valstybės, jos regiono, savivaldybės, miesto, kaimo ar kitokio tipo gyvenvietės dydį pagal nuolat toje teritorijoje gyvenančių žmonių skaičių. Gyventojų skaičius greta teritorijos ploto yra vienas iš pagrindinių rodiklių, pagal kuriuos sprendžiama apie gyvenamosios vietovės dydį, jos ekonomines, socialines, funkcines ir kitas galimybes.

Gimstamumas – demografinis rodiklis, nusakantis, kiek gimimų per metus tenka 1000 gyventojų tam tikroje teritorijoje.

Mirtingumas – visų per tam tikrą laikotarpį mirusių žmonių ir vidutinio gyventojų skaičiaus santykis arba mirusiųjų ir rizikos populiacijos narių stebėjimo laikotarpių sumos santykis.

Migracija – apibrėžiama, kaip gyventojų kėlimasis arba perkėlimas gyventi iš vienos vietovės į kitą tam tikram nustatytam laikotarpiui.

Santuoka – socialinė ir dažniausiai religinė, valstybės pripažįstama civilinė asmenų sąjunga, sukurianti giminystę.

Regionas – teritorija, turinti tam tikrus bendrus bruožus (ūkinius, geografinius, kultūrinius).

1.3 ŽODŽIŲ SUTRUMPINIMAI IR ŽYMĖJIMAI

Magistro darbe bus vartojami trumpiniai ir žymėjimai.

Regionai:

V. R – Vakarų regionas,

Š. R – Šiaurės regionas,

R. R – Rytų regionas,

PV. R – Pietų vidurio regionas.

Veiksnių trumpiniai:

IA – senėjimo koeficientas,

GV – gyventojų skaičius,

BGM – bendras gimstamumo rodiklis,

BMR – bendras mirtingumo rodiklis,

K_{Δ} – migracijos saldo koeficientas,

SIR – santuokos (ištuokos) rodiklis.

1.4 PAGRINDINĖS MATEMATINĖS SĄVOKOS

Pagrindinės matematinės sąvokos, formulės ir apibrėžimai, aprašyti remiantis [1] knyga.

Variacinė eilutė – imties reikšmių išdėstymas nemažėjančia tvarka. T.y. $x_1^* \leq x_2^* \leq \dots \leq x_n^*$, čia $x_{min} = x_1^*$ – mažiausias elementas, o $x_{max} = x_n^*$ – didžiausias imties elementas.

Vidurkis – tai taškas, kuris vidutiniškai artimiausias visiems statistinės eilutės elementams. Vidurkis yra visų statistinės eilutės elementų suma, padalyta iš jų skaičiaus.

Diskretaus atsitiktinio dydžio vidurkio formulė yra:

$$MX = \sum_{i=1}^n x_i p_i,$$

jei dydis X duotas skirstinio lentele:

X	x_1	x_2	...	x_n
P	p_1	p_2	...	p_n

Pagal empirinį skirstinį, į šią formulę vietoj p_i įrašę $\frac{1}{n}$, o vietoj x_i dydį X_i , gauname empirinį vidurkį, kurį žymėsime \bar{X} :

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i.$$

Mediana – vidurinė variacinės eilutės reikšmė, apskaičiuojama formule:

$$M_e = \begin{cases} X_{\left(\frac{n+1}{2}\right)}, & \text{jei } n = 2l + 1, \\ \frac{1}{2} \left(X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right), & \text{jei } n = 2l. \end{cases} \quad (1)$$

Dispersija – parodo duomenų sklaidą apie vidurkį. randama pagal formulę:

$$S^2 = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X}_i)^2.$$

1.5 NORMALUSIS SKIRSTINYS

Teorija aprašyta remiantis [8] knyga.

Sakoma, kad atsitiktinio dydžio X tikimybinis skirstinys yra normalus, jei tas a. d. įgyja reikšmes iš intervalo $(-\infty, +\infty)$, o jo tankio funkcija yra

$$\varphi(x | \mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left\{-\frac{(x-\mu)^2}{\sigma^2}\right\}, \sigma > 0, -\infty < \mu < \infty. \quad (2)$$

Normalųjį skirstinį nusako vidurkis $\mu = MX$ ir dispersija $\sigma^2 = DX$. Atsitiktinio dydžio X skirstinį, kurio tankis išreikštas (2) formule, sutrumpintai žymimas $X \sim N(\mu, \sigma^2)$.

Atskiras (2) skirstinio atvejis, kai $\mu = 0, \sigma = 1$, vadinamas standartiniu normaliuoju skirstiniu. Jo tankis ir pasiskirstymo funkcijos yra:

$$\varphi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} \quad \text{ir} \quad \Phi(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad -\infty < x < +\infty.$$

Kadangi tankio $\varphi(x)$ yra simetrinė funkcija, tai pakanka pateikti $\Phi(x)$ ir $\varphi(x)$, kai $x > 0$ ir z_p , kai $P \leq \frac{1}{2}$. Šių funkcijų reikšmės, esant kitoms argumento reikšmėms, gali būti surasos taip:

$$\varphi(-x) = \varphi(x), \Phi(-x) = 1 - \Phi(x), z_{1-p} = -z_p.$$

Jeigu $X \sim N(\mu, \sigma^2)$, tai $Z = \frac{X-\mu}{\sigma} \sim N(0,1)$. Todėl atsitiktinio dydžio X pasiskirstymo ir tankio funkcijų lentelių nereikia; tos funkcijos išreiškiamos funkcijomis $\Phi(x)$ ir $\varphi(x)$:

$$\varphi(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sigma} \varphi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right),$$

$$\Phi(x|\mu, \sigma) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^x \exp\left\{-\frac{(t-\mu)^2}{2\sigma^2}\right\} dt = \Phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

1.6 BENDRIEJI DEMOGRAFINIAI RODIKLIAI

Teorija aprašyta remiantis [5], [7], [12] knygomis.

Senėjimo koeficientas

Demografinis senatvės koeficientas – $IA(t)$ pagyvenusių (65 metų ir vyresnio amžiaus) žmonių skaičius, tenkantis šimtui vaikų iki 15 metų amžiaus t metų pradžioje:

$$IA(t) = \frac{P_{\geq 65}(t)}{P_{< 15}(t)} \cdot 100$$

čia: t – metai; $P_{< 15}(t)$ – 15 metų amžiaus gyventojų skaičius t metų pradžioje; $P_{\geq 65}(t)$ – 65 metų ir vyresnio amžiaus gyventojų skaičius t metų pradžioje.

Kai gautas koeficientas $IA \leq 100$ laikome, kad populiacijos senėjimas nevyksta, nes jaunoji karta yra didesnė už senąją. Kai skaičius viršija 100, laikome, kad populiacija sensta – jaunos kartos yra mažiau nei senosios.

Mirtingumas

Demografijoje egzistuoja daugybė mirtingumo statistika besiremiančių matų. Paprasčiausias ir bene dažniausiai vartojamas – bendrasis mirtingumo rodiklis. Jis apskaičiuojamas kaip mirusiųjų per metus skaičius, padalytas iš vidutinio metinio gyventojų skaičiaus ir padaugintas iš 1000 (matuojamas promilėmis (%)):

$$BMR = \frac{M}{GV(vid)} \cdot 1000$$

Čia BMR – bendrasis mirtingumo rodiklis; M – mirusiųjų skaičius per laikotarpį (kalendorinius metus); $GV(vid)$ – vidutinis metinis gyventojų skaičius.

Bendrasis mirtingumo rodiklis sąlyginai pagal intensyvumo lygį yra skiriamas į mažą – mažiau 9, vidutinį – 9–15 ir didelį – daugiau 15 mirusiųjų 1 000 gyventojų per metus.

Gimstamumas

Gimstamumui matuoti naudojama rodiklių sistema, leidžianti apibūdinti jo bendrąjį lygį ir dinamiką, taip pat intensyvumą bei reikšmes įvairiose socialinėse-demografinėse grupėse. Atitinkamai ir gimstamumo rodikliai yra skirstomi į laikotarpio rodiklius ir kohortų rodiklius. Pirmieji rodikliai parodo, koks gimstamumo lygis tam tikru laiku, konkrečiu laikotarpiu, paprastai kalendoriniais metais, tuo tarpu kohortų gimstamumo matai parodo, koks gimstamumas būdingas tam tikroms moterų kartoms.

Labiausiai apibendrinantis yra bendrasis gimstamumo rodiklis, kuris skaičiuojamas pagal formulę:

$$BGR = \frac{G}{P(vid)} \cdot 1000$$

Čia BGR – bendrasis gimstamumo rodiklis; M – gyvų gimusių skaičius per laikotarpį (t); $P(vid)$ – vidutinis metinis gyventojų skaičius.

Gimstamumo rodiklis sąlyginai pagal lygį yra skiriamas į mažą – mažiau 15, vidutinį – 15–25 ir didelį – daugiau 25 gyvų gimusių 1 000 gyventojų per metus.

Migracija

Migracija yra viena iš svarbiausių dabartinio demografijos mokslo sričių. Kartu su gimstamumu ir mirtingumu migracija lemia bendrojo gyventojų skaičiaus pasikeitimą bei struktūrą.

Migracijai apibūdinti yra naudojama daug matų, kurie padeda tiriant demografijos kaitą. Migracijos saldo (Δ) – tai skirtumas tarp atvykusiųjų ir išvykusiųjų skaičiaus per tam tikrą laikotarpį. Jis išreiškiamas absoliučiaisiais skaičiais arba 1 000 gyventojų. Skaičiuojamas formule:

$$K_{\Delta} = \frac{\text{Atvykusių skaičius} - \text{Išvykusių skaičius}}{P(vid)} \cdot 100$$

Čia K_{Δ} – migracijos saldo rodiklis; *Atvykusių skaičius* – atvykusių gyventojų skaičius per laikotarpį (t); *Išvykusių skaičius* – išvykusių gyventojų skaičius per laikotarpį (t); $P(vid)$ – vidutinis metinis gyventojų skaičius.

Šio rodiklio reikšmė gali būti teigiama – kai atvykusių gyventojų skaičius yra didesnis negu išvykusių, ir neigiama – kai daugiau žmonių išvyksta negu atvyksta.

Santuokos (ištuokos) rodiklis

Santuokos (ištuokos) rodiklis neatsiejama dalis nuo demografinių tyrimų. Santuokos, ištuokos stipriausiai veikia gimstamumą, migraciją. Todėl šis rodiklis naudojamas arba kaip atskiros imtys, arba skaičiuojami santuokų (ištuokų) rodikliai – tai įregistruotų santuokų (ištuokų) skaičius per metus 1 000 gyventojų. Formulė:

$$SIR = \frac{\text{Santuokų skaičius} - \text{ištuokų skaičius}}{GV_{vid}} \cdot 1000,$$

Čia SIR – migracijos saldo rodiklis; *Santuokų skaičius* – susituokusių porų skaičius per laikotarpį (t); *Ištuokų skaičius* – išsiskyrusių porų skaičius per laikotarpį (t); $P(vid)$ – vidutinis metinis gyventojų skaičius.

Šio rodiklio reikšmė gali būti teigiama – kai daugiau susituokia nei išsiskiria, ir neigiama – kai daugiau išsiskiria nei susituokia.

1.7 POLINOMINIO SKIRSTINIO MODELIO TAIKYMAS

Teorija aprašyta remiantis [4] straipsniu.

Tarkime, kad turime paprastąją atsitiktinę imtį $X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$, kur X_1, X_2, \dots, X_n yra nepriklausomi atsitiktiniai elementai, simbolizuojantys apskrities ar kitos didelės teritorijos gyventojus. Bendrą gyventojų skaičių žymime n . Tegų A_j simbolizuoja j -ąją apskritį, kai $j = 1, 2, \dots, k$; k – apskričių skaičius. Pažymėkime Y_j gyventojų, patekusių į A_j apskritį, skaičių:

$$Y_j = \sum_{i=1}^n \mathbb{1}(X_i \in A_j), \quad j = 1, \dots, k.$$

Vietoje pradinės imties $X^n = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ gauname imtį $Y^k = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$. Atsitiktinis vektorius $Y^k = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$ turi polinominių skirstinį $Y^k \sim P = (p_1, p_2, \dots, p_k, n)$, t.y.

$$P(Y_1 = n_1, Y_2 = n_2, \dots, Y_k = n_k) = \frac{n!}{n_1! \dots n_k!} p_1^{n_1} \dots p_k^{n_k},$$

čia $n_1 + \dots + n_k = n$ ir $p_1 + p_2 + \dots + p_k = 1$, p_i , $i = 1, \dots, k$ yra tikimybės.

Yra žinoma, kad parametų p_i maksimalaus tikėtimumo įverčiai yra pavidalo $\frac{Y_i}{n}$.

Tikriname statistinę hipotezę $H_0 : p_i = p_{i0}, i = 1, \dots, k$, turėdami imtį $Y^k = (Y_1, Y_2, \dots, Y_k)$

Taikome Chi kvadrato kriterijų. Sudarome Pirsono statistiką:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^k \frac{(Y_i - n \cdot p_{i0})^2}{n \cdot p_{i0}},$$

kuri asimptotiškai turi χ^2 skirstinį su $k-1$ laisvės laipsnių, kai hipotezė H_0 teisinga.

Parinkę reikšmingumo lygmenį α , hipotezei H_0 tikrinti konstruojame tokią kritinę sritį:

jei imties realizacija $y^k = (y_1, y_2, \dots, y_k)$ tokia, kad

$$\chi^2 = \chi^2(y^k) > \chi_{1-\alpha}^2(k-1),$$

tada hipotezę H_0 atmetame, o jei

$$\chi^2 \leq \chi_{1-\alpha}^2(k-1),$$

tada hipotezę priimame.

1.8 SERIJŲ KRITERIJUS

Teorija aprašyta remiantis [3] knyga.

Atsitiktinė imtis $X^n = (X_1, \dots, X_n)$ pagal prielaidą yra sudaryta iš nepriklausomų atsitiktinių dydžių. Tačiau konkrečiame modelyje imties elementai X_1, \dots, X_n gali būti ir net visai ne atsitiktiniai ir priklausomi. Norint įsitikinti, kaip yra iš tikrųjų, tikrinama nulinė hipotezė H_0 : imties elementai X_1, \dots, X_n yra atsitiktiniai ir nepriklausomi. Tokiai hipotezei tikrinti taikomas serijus kriterijus su empirine mediana.

Pagal šį kriterijų pirmiausia surašomi imties X_1, \dots, X_n elementai nemažėjančia tvarka.

Pagal (1) formulę randama imties empirinė mediana M_e . Po to M_e reikšmė lyginama su pradinės imties elementais X_1, \dots, X_n . Rašomas „+“, jei $X_1 > M_e$, ir „-“, jei $X_1 < M_e$. Jei reikšmės sutampa, nerašoma nieko. Šį procesas tęsiamas tol, kol patikrinami visus imties elementai. Gautoje „+“-ų ir „-“-ų eilutėje, esančių „+“-ų, skaičių žymėsime raide k_1 , o „-“-ų skaičių – k_2 . Bendrą visų serijų skaičių žymėsime raide N . $N = N(X^n)$ bus serijų kriterijaus statistika.

Mažas imties serijų skaičius N rodo, kad imties elementai yra giminingi, o didelis imties serijų skaičius N nurodo tarp imties elementų esamą dėsninę kaitą. Abiem šiais atvejais pažeidžiamas imties elementams keliamas atsitiktinumo ir nepriklausomumo reikalavimas. Tuo remiantis, hipotezei H_0 tikrinti gali susidaryti viena iš trijų alternatyvų:

$H_1^{(1)}$: imties elementai priklausomi ir neatsitiktiniai,

$H_1^{(2)}$: imties elementai giminingi,

$H_1^{(3)}$: tarp imties elementų yra dėsninė kaita.

Hipotezei H_0 tikrinti, priklausomai nuo alternatyvos, turime kritines sritis:

$$W_1 = \{X^n : N \leq N_{\frac{\alpha}{2}}(A, n_1, n_2) \text{ arba } N \geq N_{\frac{\alpha}{2}}(V, n_1, n_2)\},$$

kai alternatyva $H_1^{(1)}$,

$W_2 = \{X^n : N \leq N_\alpha(A, n_1, n_2)\}$, kai alternatyva $H_1^{(2)}$,

$W_3 = \{X^n : N \geq N_\alpha(V, n_1, n_2)\}$, kai alternatyva $H_1^{(3)}$,

čia $n_1 = \max(k_1, k_2)$, $n_2 = \min(k_1, k_2)$, $N_\alpha(A, n_1, n_2) = N_\alpha(\text{Apatinė}, n_1, n_2)$

$N_\alpha(V, n_1, n_2) = N_\alpha(\text{Viršutinė}, n_1, n_2)$ – tam tikros kritinės reikšmės, priklausančios nuo kriterijaus reikšmingumo lygmens α ir n_1, n_2 reikšmių, atitinkančių nagrinėjamą imtį.

1.9 EMPIRINIS KORELIACIJOS KOEFICIENTAS

Teorija aprašyta remiantis [3] knyga.

Sakykim, kad turime dvimatę atsitiktinę imtį $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$, kurios elementai (X_i, Y_i) , turintys tą patį dvimatį skirstinį $P_\theta^{(2)}$, $\theta \in \Theta$, paimti iš nepriklausomų dvimačių atsitiktinių vektorių sekos $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n), \dots$. Šią imtį pirmiausia charakterizuoja išsibarstymo diagrama ir dvimatis empirinis skirstinys.

Apibrėžimas. Dvimatės imties išsisklaidymo diagrama vadiname imties taškų $(X_i, Y_i), i=1, \dots, n$, atidėtų stačiakampėje koordinačių sistemoje, visumą.

Apibrėžimas. Dvimatės imties empiriniu skirstiniu vadiname sąlyginį skirstinį diskretaus atsitiktinio vektoriaus (X, Y) , įgyjančio reikšmes $(X_i, Y_i), i=1, 2, \dots, n$ su tikimybe $\frac{1}{n}$, esant sąlygai, kad pasirodė $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$.

To vektoriaus skirstinio skaitinės charakteristikos vadinamos dvimatės imties empirinėmis charakteristikomis.

Vadinasi, teorinio dvimatės atsitiktinės imties $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$ koreliacijos koeficiento

$$\rho = \frac{M(X_i - MX_i)(Y_i - MY_i)}{\sqrt{DX_iDY_i}},$$

empirinis analogas yra empirinis koreliacijos koeficientas, apskaičiuojamas pagal formulę

$$r = \frac{m_{XY}}{S_X S_Y} = \frac{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y})}{\sqrt{\sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2}}$$

kur

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

Koreliacijos koeficientas ρ apibūdina tiesinę priklausomybę tarp dydžių X_i ir Y_i .

Kadangi teorinio (tikrojo) koreliacijos koeficiento ρ tarp X_i ir Y_i nežinome, tai vietoj jo naudojame jo įvertį – empirinį koreliacijos koeficientą r .

1.10 HIPOTEZĖ APIE KORELIACIJOS KOEFICIENTĄ

Teorija aprašyta remiantis [3] knyga.

Empirinis koreliacijos koeficientas r yra atsitiktinis dydis, todėl turėdami jo reikšmę, apskaičiuotą pagal vieną dvimatės imties realizaciją, negalime būti visiškai tikri, kad ji pakankamai artima tikrajai koreliacijos koeficiento ρ reikšmei. Šiuo atveju daug patikimiau yra patikrinti statistinę hipotezę dėl galimos ρ reikšmės. Kadangi praktiškai yra labai svarbu žinoti, ar tarp dydžių X_i ir Y_i yra (tiesinė) priklausomybė, ar ne, tai pirmiausia tikrinama hipotezė $H_0: \rho = 0$.

Tarkim, kad turime dvimatę atsitiktinę imtį $(X_1, Y_1), (X_2, Y_2), \dots, (X_n, Y_n)$, kurios elementai (X_i, Y_i) turi dvimatį normalųjį skirstinį

$$N_2 \left(\begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \sigma_X^2 & \rho \sigma_X \sigma_Y \\ \rho \sigma_X \sigma_Y & \sigma_Y^2 \end{pmatrix} \right)$$

su parametrais $a_1, a_2, \sigma_X^2, \sigma_Y^2, \rho$, čia ρ – koreliacijos koeficientas tarp X_i ir Y_i .

Kai imties tūris $n > 10$, o $|r|$ artimas vienetui, tada taikoma R. A. Fišerio transformacija

$$Arthr = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r}.$$

Šiuo atveju, jei teisinga hipotezė $H_0: \rho = \rho_0$, kur ρ_0 – duotas skaičius, tai

$$Arthr \sim N \left(Arth\rho_0, \frac{1}{n-3} \right).$$

Todėl

$$Z = \sqrt{n-3} (Arthr - Arth\rho_0) \sim N(0,1),$$

kai H_0 teisinga.

Tuo remiantis, hipotezei $H_0: \rho = \rho_0$ tikrinti su reikšmingumo lygmeniu α sudaroma kritinė sritis:

$$W = \left\{ (X_i, Y_i), i = 1 \dots, n: |Z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}} \right\}, \text{ jei } H_0 \text{ alternatyva yra } H_1: \rho \neq \rho_0$$

1.11 TIESINĖ REGRESIJA

Teorija aprašyta remiantis [3] knyga.

Sakykim, kad turime du atsitiktinius dydžius X ir Y . Apskaičiavę jų koreliacijos koeficientą $\rho = \rho(X, Y)$, gauname, kad jis artimas ± 1 . Tai reiškia, kad tarp dydžių X ir Y egzistuoja beveik tiesinė priklausomybė, kuri užrašoma per sąlyginę vidurkį

$$M(Y|X = x) = \beta_0 + \beta_1 x. \quad (3)$$

(3) formulė nusako atsitiktinio dydžio Y tiesinės regresijos lygtį X atžvilgiu. Skaičiai β_0 ir β_1 vadinami tiesinės regresijos parametrais.

Paprastai atsitiktinių dydžių X ir Y tikimybiniai skirstiniai tiksliai nežinomi, todėl tiesinės regresijos lygtį $y = \beta_0 + \beta_1 x$ įvertiname pagal (X, Y) stebėjimo rezultatus $(x_1, y_2), \dots, (x_n, y_n)$, kurie teoriškai yra realizacija atsitiktinės dvimatės imties $(X_1, Y_1, \dots, (X_n, Y_n)$, kur $M(Y_i|X_i = x_i) = \beta_0 + \beta_1 x_i$, $i = 1, 2, \dots, n$. Toliau darome prielaidą, kad

$$(Y_i|X_i = x_i) \sim N(\beta_0 + \beta_1 x_i, \sigma^2),$$

kuri reiškia, kad

$$Y_i = \beta_0 + \beta_1 X_i + \varepsilon_i, \quad (4)$$

čia $\varepsilon_i \sim N(0, \sigma^2)$, $i = 1, 2, \dots, n$, – nepriklausomi atsitiktiniai dydžiai.

Kadangi kiekvienai fiksuotai X_i reikšmei x_i turime normalųjį atsitiktinio dydžio išsibarstymą, tai pradinės dvimatės imties nagrinėjimas ekvivalentus nagrinėjimui dvimatės imties $(X_1, Y_1, \dots, (X_n, Y_n)$, kurioje X_1, \dots, X_n yra ne atsitiktiniai dydžiai, o atsitiktiniai dydžiai Y_i užrašomi (4) pavidalu. Kitaip sakant, turime iš anksto žinomų skaičių rinkinį (X_1, \dots, X_n) ir atsitiktinę nepriklausomų dydžių imtį (Y_1, \dots, Y_n) , kur

$$Y_i \sim N(\beta_0 + \beta_1 X_i, \sigma^2), \quad i = 1, \dots, n. \quad (5)$$

(5) formulė nusako tiesinės regresijos modelį.

Tiesinės regresijos analizės uždavinys yra toks: naudojantis imtimi $(X_1, Y_1), \dots, (X_n, Y_n)$

1. gauti nežinomų parametru β_0, β_1 ir σ^2 taškinius ir intervalinius įvertinius,
2. patikrinti statistines hipotezes apie parametrus β_0 ir β_1 ,
3. nustatyti, ar modelis gerai suderintas su imties duomenimis (modelio adekvatumo patikrinimas).

Tiesinės regresijos parametru β_0 ir β_1 įverčius randame mažiausių kvadratų metodu, minimalizuodami dydį

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{\beta}_0 - \widehat{\beta}_1 X_i)^2 \rightarrow \min_{\widehat{\beta}_0, \widehat{\beta}_1}.$$

Panaudoję būtiną ekstremumo sąlygą $\frac{\partial S^2}{\partial \beta_1} = 0$ ir $\frac{\partial S^2}{\partial \beta_2} = 0$, gauname

$$\begin{cases} \sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{\beta}_1 X_i - \widehat{\beta}_0) X_i = 0, \\ \sum_{i=1}^n (Y_i - \widehat{\beta}_1 X_i - \widehat{\beta}_0) = 0. \end{cases}$$

Išsprendę šią sistemą, turime įverčius

$$\widehat{\beta}_0 = \bar{Y} - \widehat{\beta}_1 \bar{X}, \widehat{\beta}_1 = \frac{Q_{XY}}{Q_X},$$

kur

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i, \quad \bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i,$$

$$Q_X = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2,$$

$$Q_{XY} = \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}).$$

(5) prielaida leidžia įsitikinti, kad

$$\frac{S^2(n-2)}{\sigma^2} \sim C(n-2),$$

t. y. turi χ^2 skirstinį su $n-2$ laisvės laipsnių.

1.12 TIESINĖS REGRESIJOS LYGTIES MODELIO TINKAMUMO KRITERIJAI

Teorija aprašyta remiantis [11] knyga.

Determinacijos koeficientas (*R kvadratas*). Tai svarbiausia tiesinės regresijos modelio tikimo duomenims charakteristika, kuri privaloma visuose aprašymuose. Determinacijos koeficientas – modeliuojamų ir stebimų priklausomo kintamojo reikšmių skirtumų matas. Labai apytikslė R^2 interpretacija, padedanti geriau suvokti jo prasmę, yra tokia – kiek procentų Y

elgesio paaiškina kintamųjų X , Z , W elgesys. Determinacijos koeficientas įgyja reikšmes iš intervalo $[0, 1]$. Kuo koeficiento reikšmė didesnė, tuo modelis geriau tinka duomenims. Blogai, kai $R^2 < 0,20$. Apskritai nėra ko labai džiaugtis ir tada, kai $R^2 = 0,25$ (modelis tinka tik iš bėdos). O štai, jei $R^2 = 0,89$, tai modelis gana tiksliai aprašo duomenis. Tiesa, didelė R^2 reikšmė dar neužtikrina, kad visi regresoriai jame būtini, o modelis yra prasmingas.

ANOVA p reikšmė. Ji parodo, ar modelyje yra su priklausomu kintamuoju susijusių regresorių. Jeigu p reikšmė didesnė už $0,05$, tai regresijos modelio tinkamumas labai abejotinas (faktiškai gauname, kad Y nepriklauso nuo X , Z ir W). Jeigu p reikšmė mažesnė už $0,05$, gavome patvirtinimą, kad modelis nėra beviltiškas (o gal ir visai geras – reikia tirti toliau). Dažniausiai apie ANOVA p reikšmę regresijos modelio aprašyme neužsimenama. Jeigu regresijos modelis pristatomas kaip duomenims tinkamas, tai visi ir taip supranta, kad ši reikšmė buvo maža.

T (Stjudento) kriterijai atskiriems regresoriams. Padeda nuspręsti, ar atitinkamas regresorius šalintinas iš modelio. Jeigu atitinkamo kriterijaus p reikšmė $< 0,05$, tariama, kad *regresorius yra statistiškai reikšmingas* ir dažniausiai (jei nėra multikolinearumo) jis modelyje paliekamas. Jeigu p reikšmė $\geq 0,05$, tai regresorius (tiksliau – daugiklis prie regresoriaus) yra statistiškai nereikšmingas ir modelyje regresorius paliekamas tik ypatingais atvejais. Dažniausiai modelio konstanta C paliekama net ir tada, kai ji statistiškai nereikšminga.

Kuko matas. Jis parodo, ar duomenyse yra išskirčių. Skaičiuojamas kiekvienam regresorių stebiniui. Kai Kuko matas > 1 , atitinkamas stebiny yra išskirtis.

Standartizuotosios liekamosios paklaidos naudojamos patikrinti, ar Y normaliai pasiskirstęs. Dažniausiai tiriama histograma, kuri lyginama su normaliąja kreive (turi nedaug skirtis), ir standartizuotojų liekamųjų paklaidų ir standartinio normaliojo atsitiktinio dydžio santykinių procentinių dažnių P–P grafikas. Kuo šiame grafike taškai yra arčiau nubrėžtos tiesės (idealiu atveju visi taškai *priklauso* tiesei), tuo duomenys normalesni.

Šapiro–Vilko (Shapiro–Wilk) kriterijaus p reikšmė $\geq 0,05$ rodo, kad standartizuotosios paklaidos yra normalios. Reikia nepamiršti, kad didelėms imtims šis kriterijus gali nepagrįstai atmesti normalumo hipotezę. Didelėms imtims grafikai (žr. ankstesnį punktą) informatyvesni.

1.13 DEMOGRAFINIAI PROGNOZAVIMO MODELIAI

Teorija aprašyta remiantis [7] knyga.

Yra keletas demografinių prognozių būdų. Dažniausiai vyriausybinių organizacijų ir mokslininkų naudojami šie būsimo gyventojų skaičiaus įvertinimo metodai:

1. Ekstrapoliacija, naudojant paprastuosius augimo modelius. Tokiu būdu metinio gyventojų skaičiaus augimo koeficientas pritaikomas dabartiniam gyventojų skaičiui ir galima įvertinti, kokio gyventojų skaičiaus tikėtis tam tikrais metais;
2. Komponentų metodai, kurių pagrindas yra balansinė gyventojų lygybė (gyventojų skaičiaus prieaugis=natūralusis prieaugis+grynoji migracija).

Paprasčiausia prognozuoti pratęsiant (ekstrapoliuojant) praeities tendencijas ateities laikotarpiui.

Paprastiesiems augimo modeliams naudojamos viena arba kelios matematikos formulės, kuriose, atsižvelgiant į pokyčių pobūdį, pritaikoma atitinkama kreivė ir įvertinamas būsimas gyventojų skaičius.

Praktikoje taikomi augimo modeliai: tiesinis, geometrinis, eksponentinis. Modelių prielaida yra tokia: gyventojų skaičiaus didėjimo (arba mažėjimo) tendencija yra tolygi, taisyklinga, jos trajektorijoje nenumatomi staigūs šuoliai aukštyn arba nuosmukiai ir krypties pasikeitimas.

Aritmetinis augimas

Aritmetinio, arba tiesinio, augimo modelis numato, kad gyventojų skaičiaus pokytis tarp dviejų laikotarpių išlieka pastovus. Pavyzdžiui, jeigu dešimties metų laikotarpio pradžioje metinio gyventojų skaičiaus augimo koeficientas buvo 0,9%, tai pagal šį modelį ir bus įvertinta, kad gyventojų skaičius kiekvienais metais padidėja 0,9%.

Aritmetinio (tiesinio) augimo modelis:

$$P_t = P_0 + (P_0 \times AK \times t).$$

Čia P_t – gyventojų skaičius prognoziniu laikotarpiu t ; P_0 – pradinis gyventojų skaičius; t – metų skaičius laikotarpiu tarp 0 ir t ., AK – augimo koeficientas.

Aritmetinio augimo koeficientas skaičiuojamas pagal formulę:

$$AK = \frac{P_t - P_0}{P_0 \times t}.$$

Geometrinis augimas

Šio modelio pavadinimas primena T. Maltuso idėjas: gyventojų skaičius, anot jo, didėja geometrine progresija 1, 2, 4, 8, 16 ir t. t. Geometrinio augimo modelis skaičiuojamas pagal formulę:

$$P_t = P_0 \times (1 + AK)^t.$$

Čia P_t – gyventojų skaičius prognoziniu laikotarpiu t ; P_0 – pradinis gyventojų skaičius; AK – augimo koeficientas ; t – metų skaičius laikotarpiu tarp 0 ir t . Geometrinis augimas yra spartesnis, palyginti su aritmetiniu.

Geometrinio augimo koeficientas skaičiuojamas pagal formulę:

$$AK = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1$$

EkspONENTINIS augimas

Geometrinio augimo prielaida nusako, kad tam tikras gyventojų skaičiaus prieaugis kiekvienų metų pabaigoje vis pridamas prie „bazinio“ laikotarpio gyventojų skaičiaus. Ši prielaida retai kada tinka realiame gyvenime. Taikant augimo modelius demografijoje, būtina atsižvelgti į nenutrūkstamus demografinius įvykius – gimimų, mirčių, imigracijos ir emigracijos atvejų – seką. EkspONENTINIO modelio lygtimis ir kreivėmis geriau įvertinamas gyventojų skaičiaus prieaugio arba sumažėjimo veiksnys. EkspONENTINIO augimo kreivė – tolygiai kylanti aukštyn.

EkspONENTINIO augimo modelis skaičiuojamas:

$$P_t = P_0 \times e^{AK \times t}.$$

Čia P_t – gyventojų skaičius prognoziniu laikotarpiu t ; P_0 – pradinis gyventojų skaičius; AK – augimo koeficientas; t – metų skaičius laikotarpiu tarp 0 ir t .

EkspONENTINIO augimo koeficientas apskaičiuojamas pagal formulę:

$$AK = \frac{\ln \frac{P_t}{P_0}}{t}.$$

Ne visada ir ne visos funkcijos vienodai gerai išreiškia pagrindinę raidos tendenciją. Faktinių ir išlygintų reikšmių atitikimo laipsnis išreiškiamas skaičiuojant paklaidas.

Absoliučių nuokrypių vidurkis MAD apskaičiuojamas pagal formulę:

$$MAD = \frac{\sum |y_t - F_t|}{n}$$

Čia y_t – faktinė reikšmė laikotarpiu t ; F_t – numatoma reikšmė laikotarpiu t ; n – laikotarpis

metais.

Remiantis paklaidų analize, išlyginimui ir ekstrapoliacijai pasirenkamas tas modelis, kurio paklaidos yra mažiausios.

Ekstrapoliuojant svarbus klausimas yra prognozavimo horizonto L nustatymas (pvz., kiek metų į priekį galima įvertinti gyventojų skaičių). Suprantama, kad, didėjant prognozavimo horizontui, ekstrapoliacijos patikimumas mažėja, nes nustatyti laiko eilutės dėsniumas pasikeičia didesniu mastu. Be to, tikslesnė bus intervalinė, o ne taškinė prognozė: tikimybė, kad faktiniai duomenys tiksliai sutaps su taškine prognoze, yra labai maža. Plečiantis prognozavimo horizontui, taškinių įverčių paklaida didėja. Pagrindinės tokio nesutapimo priežastys yra šios:

- negalima griežtai tvirtinti, kad pasirinktas matematinis augimo modelis yra idealus nagrinėjamos eilutės atveju, t. y. esama subjektyvumo elementų;
- visuose modeliuose egzistuoja atsitiktinumo komponentas, lemiantis tam tikrą neapibrėžtumą;
- laiko eilutės dėsniumo pobūdis ateityje gali pasikeisti (pvz., dėl naujai priimtos šeimos politikos, su migracija susijusių įstatymų).

1.14 AR(1) MODELIS

Teorija aprašyta remiantis [10], [6] knyga.

Apibrėžimas. Procesas $\{X_t, t = 0, \pm 1, \pm 2, \dots\}$ yra vadinamas grynai atsitiktiniu, jeigu jis yra nekoreliuotųjų atsitiktinių dydžių seka. Tai yra paprasčiausias iš visų diskrečiojo laiko modelių ir atitinka tolydžiojo laiko procesą $\{X(t)\}$, kuris neturi atminties: proceso reikšmė $X(t)$, įgyjama laiko momentu t , yra nekoreliuota su visomis iki laiko $(t - 1)$ buvusiomis reikšmėmis (ir su visomis būsimomis proceso reikšmėmis). Toks procesas dažnai vadinamas baltuoju triukšmu. Kad procesas būtų stacionarusis iki antrosios eilės, pakanka, kad jo vidurkis ir dispersija būtų pastovieji dydžiai:

$$E\{X_t\} = m \text{ (pastovus) visiems } t$$

ir

$$E\{(X_t - m)^2\} = \sigma^2, \text{ (pastovi) visiems } t.$$

Tada jo autokovariacinė funkcija

$$R(s) = cov\{X_t, X_{t+s}\} = \begin{cases} \sigma^2, & s = 0, \\ 0, & s \neq 0. \end{cases}$$

Sąlyginis mažiausių kvadratų metodas. Autoregresijos procesas.

Pirmiausia nagrinėkime kauzalų autoregresijos modelį

$$X_t = a_1 Y_{t-1} + \dots + a_p Y_{t-p} + \varepsilon_t, \quad (6)$$

kur $\varepsilon_t \sim BT(0, \sigma^2)$ – baltojo triukšmo su $D\varepsilon_t = \sigma^2$. Šią lygtį galime perrašyti įprastine regresijos forma:

$$X_t = \mathbb{X}_{t-1} a + \varepsilon_t,$$

čia $a = (a_1, \dots, a_p)'$, $\mathbb{X}_{t-1} = (X_{t-1}, \dots, X_{t-p})$.

Gerai žinoma, kad $X_t = \mathbb{X}_{t-1} a + \varepsilon_t$ regresijai mažiausių kvadratų a įvertis yra

$$\hat{a} = \left(\sum_{t=1}^n \mathbb{X}_{t-1} \mathbb{X}'_{t-1} \right)^{-1} \left(\sum_{t=1}^n \mathbb{X}_{t-1} X_t \right).$$

Pastebėsime, kad tuo atveju, kai ε_t yra nepriklausomi, vienodai pasiskirstę $N = (0, \sigma^2)$ dydžiai, \hat{a} yra ir didžiausio tikėtimumo įvertis. Paprasčiausiu AR(1) atveju, kai $X_t = aX_{t-1} + \varepsilon_t$, turime

$$\hat{a} = \frac{\sum_{t=1}^n X_t X_{t-1}}{\sum_{t=1}^n X_{t-1}^2}.$$

1.15 AUTOREGRESINIŲ PROCESŲ PARAMETRŲ VERTINIMAS

Teorija aprašyta remiantis [10] knyga.

Tarkime, kad turime autoregresijos proceso $\{X_t\}$, išreiškiamo (6) lygtimi, stebinius X_1, X_2, \dots, X_n

ir žinoma lygties eilė p . Reikia gauti nežinomų parametrų $a_1, a_2, \dots, a_p, \sigma^2$.

Žinome, kad

$$\hat{\gamma}(p) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n-k} (X_{j+k} - \bar{X}) \cdot (X_j - \bar{X}),$$

čia

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^n X_j.$$

Iš lygčių sistemos apskaičiuojame įverčius $\hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1), \dots, \hat{\gamma}(p)$ ir įrašome į sistemą

hipotezė $H_0: MX(t) = a = \text{const.}$ teisinga. Čia nurodysime apytikslį kriterijų ir jo sukonkstravimui pasinaudosime:

- penkių procentų taško įverčiu $\tau_{0,05}(n)$, pasiskirsčiusio $\tau_{0,05}(n) \approx [1,43 \cdot \ln(n + 1)]$ (čia $[x]$ žymi „sveiką x dalį“),
- įverčiais iš viršaus ir apačios dėl tikimybių $P\{\gamma(n) < \gamma_{0,95}(n); \tau(n) > \tau_{0,05}(n)\}$.

Tai leidžia suformuluoti taisyklę (tikrinant hipotezę $H_0: MX(t) = a = \text{const.}$):

jei nors viena iš nelygybių

$$\gamma(n) > \left[\frac{1}{2}(n + 2 - 1,96\sqrt{n - 1}) \right]$$

$$\tau(n) < [1,43 \ln(n + 1)]$$

negalioja, tada hipotezė atmetama su tikimybe α , esančia tarp 0,05 ir 0,0975.

2. TYRIMAS

2.1 APSKRIČIŲ SUGRUPAVIMAS PAGAL GYVENTOJŲ SKAIČIŲ

Lietuvos teritorija suskirstyta į 10 apskričių. Tyrime bus naudojami kasmetiniai duomenys apie senėjimo koeficientą, gyventojų skaičių, gimstamumą, mirtingumą, migraciją, santuokos ir ištuokos rodiklius.

Lietuvoje yra 10 apskričių, kurios tarpusavyje skiriasi demografiniais duomenimis, todėl lyginti ar analizuoti apskritis, kuriose šie duomenys skiriasi net kelis kartus, būtų netikslinga.

Lietuvos apskritis yra grupuojamos į kelias skirtingas grupes pagal įvairiausias kriterijus: plotą, regionus, gyventojų skaičių, kalbą, papročius. Darbui labiausiai tiko grupavimas pagal Lietuvos gyventojų skaičių.

Uždavinys. Sugrupuoti duomenis į grupes, kad kiekvienoje grupėje nuo tiriamojo laikotarpio pradžios (2002 m.) gyventojų skaičius būtų panašus.

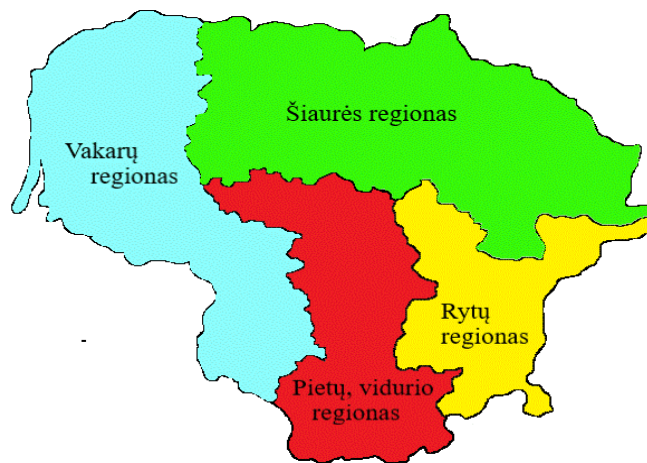
Sprendimas. Apskritis sudedamos taip, kad jose būtų panašus gyventojų skaičius.

Analizuojant 2002 m. gyventojų skaičių duomenis, matyti, kad didžiausia apskritis yra Vilniaus, joje gyvena 850 tūkst. gyventojų, todėl pavadinsime Rytų regionu. Po Vilniaus didžiausia apskritis yra Kaunas, tačiau gyventojų skaičius skiriasi nuo Rytų regiono, todėl pridėjęs Alytaus apskritį gaunu panašų gyventojų skaičių – 880 tūkst. Kadangi Kaunas yra vidurio Lietuvos regionas, o Alytus – pietų, bendras pavadinimas bus Pietų vidurio regionas. Vakarų regione didžiausia apskritis yra Klaipėdos su 380 tūkst. gyventojų. Prie šio regiono prijungę Telšių apskritį su 178 tūkst. gyventojų, Tauragės su 133 tūkst. gyventojų ir Marijampolės su 187 tūkst. gyventojų gauname Vakarų regioną su 878 tūkst. gyventojų. Liko šiaurinės apskritis. Didžiausia apskritis – Šiaulių su 366 tūkst. gyventojų, prie jos jungiame Panevėžio apskritį su 296 tūkst. gyventojų ir Utenos apskritį su 184 tūkst. gyventojais. Apskritis kartu sudarys Šiaurės regioną su 846 tūkst. gyventojais.

Išvados. Rastas optimalus Lietuvos teritorijos suskirstymas pagal gyventojų skaičių į keturias grupes:

1 lentelė. Lietuvos gyventojų skaičius apskrityse 2002 m.

Regionai	Apskritis	Gyventojų sk.
Rytų regionas	Vilniaus apskritis	845 292
Pietų vidurio regionas	Alytaus apskritis	186 484
	Kauno apskritis	695 033
Vakarų regionas	Klaipėdos apskritis	382 076
	Marijampolės apskritis	187 281
	Tauragės apskritis	132 982
	Telšių apskritis	178 315
Šiaurės regionas	Šiaulių apskritis	366 330
	Panevėžio apskritis	296 871
	Utenos apskritis	183 973



1 pav. Lietuvos regionai pagal gyventojų skaičių

2.2 SENĖJIMO KOEFICIENTAS PAGAL REGIONUS

Šiame skyrelyje, bus perskaičiuojamas senėjimo koeficientas pagal regionus.

Senėjimo koeficientas $IA(t) = \frac{P_{\geq 65}(t)}{P_{< 15}(t)} \times 100$, parodo, koks pagyvenusiu (65 metų ir vyresnio amžiaus) žmonių skaičius tenka šimtui vaikų iki 15 metų amžiaus metų pradžioje.

Norint paskaičiuoti senėjimo koeficientą, mums reikia duomenų, kuriuose atsispindėtų Šiaurės regiono gyventojų skaičius tam tikrose amžiaus grupėse, t. y. vaikų iki 15 metų ir gyventojų amžius nuo 65 m.

1. Uždavinys. Paskaičiuoti gyventojų senėjimo koeficientus Šiaurės regionui 2002–2019 m. laikotarpiu.

Sprendimas. Šio uždavinio sprendimą išskaidomas į dvi dalis – A ir B:

A) Paskaičiuojami duomenys pagal regionus, randami vaikų iki 15 m. ir 65 metų ir vyresnių gyventojų skaičiai.

B) Taikant senėjimo koeficiento formulę, paskaičiuojami viso analizuojamo laikotarpio senėjimo koeficientai.

A. Turimi Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskrities duomenys (žr. 1 priedas).

2 lentelė. Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių gyventojų skaičius iki 15 m. ir 65 m., bei vyresni 2002 m.

Metai	Šiauliai		Panevėžys		Utena	
	iki 15 m.	65+	iki 15 m.	65+	iki 15 m.	65+
2002	72 976	53 686	57 795	47 189	33 002	32 158

2 lentelės duomenys sudedami pagal metus ir amžiaus grupes. 2002 m. gyventojų skaičius bus:

iki 15 m. Šiauliai (72 976) + Panevėžys (57 795) + Utena (33 002) = 163 773,

65 m. ir vyresni Šiauliai (53 686) + Panevėžys (47 189) + Utena (32 158) = 133 033

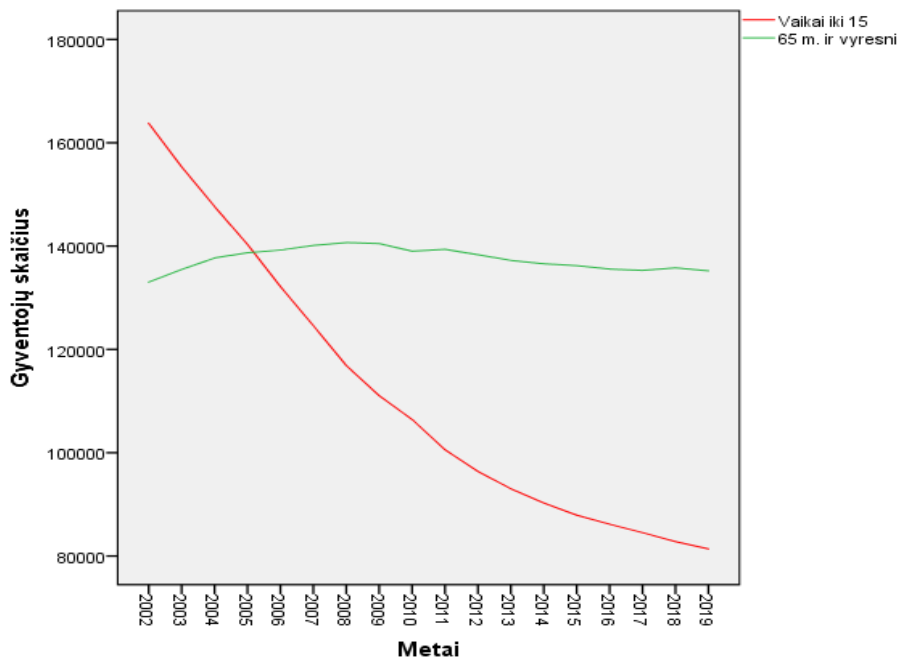
Analogiškai paskaičiuojami ir kitų Šiaurės regiono metų duomenys ir gaunama:

3 lentelė. Šiaurės regiono vaikų iki 15m. ir vyresnių nei 65 gyventojų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
iki 15 m.	163 773	155 317	147 655	140 317	132 151	124 600	116 877	111 034	106 438
65+	133 033	135 470	137 703	138 715	139 226	140 133	140 681	140 489	139 004

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
iki 15 m.	100 581	96 367	93 020	90 272	87 904	86 156	84 532	82 790	81 385
65+	139 364	138 318	137 234	136 581	136 201	135 542	135 304	135 786	135 209

Kitų regionų sudėtus duomenis žr. (2 priedas). 3 lentelės duomenis pavaizduokime grafike.



2 pav. Šiaurės regiono gyventojų skaičiaus iki 15 m. ir 65 m. ir vyresnių grafikas

Grafike matyti, kad iki 2005 m. vaikų skaičius iki 15 m. buvo didesnis už 65 m. ir vyresnių. Vaikų skaičius iki 15 m. per visą analizuojamą laikotarpį sumažėjo dvigubai: nuo 160 tūkst. iki 80 tūkst., tuo tarpu 65 m. ir vyresnių gyventojų skaičius per analizuojamą laikotarpį pakito nedaug.

Turint tokius duomenis, galima paskaičiuoti demografinį senatvės koeficientą (IA).

A) Pagal naujai gautus Šiaurės regiono duomenis paskaičiuojamas Šiaurės regiono senėjimo koeficientas 2002–2019 m. laikotarpiu.

Turimi 3 lentelės duomenys ir formulė:

$$IA(t) = \frac{P_{\geq 65}(t)}{P_{< 15}(t)} \times 100$$

čia: t – metai; $P_{< 15}(t)$ iki 15 metų amžiaus gyventojų skaičius t metų pradžioje; $P_{\geq 65}(t)$ – 65 metų ir vyresnio amžiaus gyventojų skaičius t metų pradžioje.

Kai gautas koeficientas $IA < 100$, laikome, kad populiacijos senėjimas nevyksta, nes jaunoji karta yra gausesnė už senąją. Kai skaičius viršija 100, laikome, kad populiacija sensta.

$$IA(2002) = \frac{133033(2002)}{163773(2002)} \times 100 = 81$$

Analogiškai paskaičiuojami ir kitų metų Šiaurės regiono senėjimo koeficientai, lentelė:

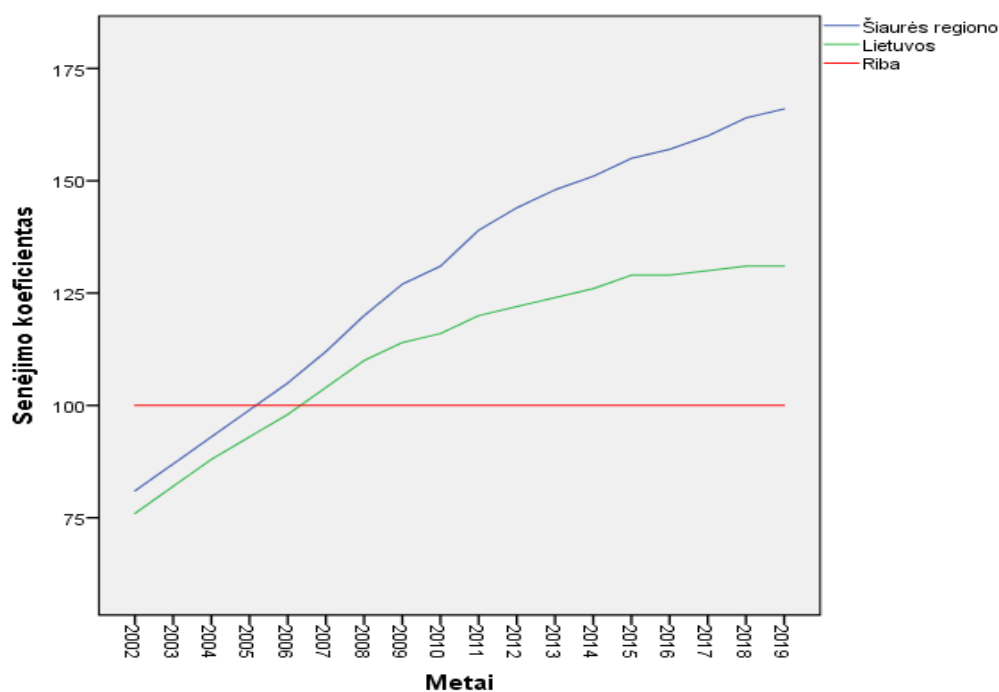
4 lentelė. Senėjimo koeficientas Šiaurės regione 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
IA	81	87	93	99	105	112	120	127	131

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
IA	139	144	148	151	155	157	160	164	166

Kitų regionų senėjimo koeficientai analogiškai paskaičiuoti ir pateikti lentelėje (žr. 3 priedą).

Senėjimo koeficiento duomenys pavaizduoti grafike kartu su bendru šalies senėjimo koeficientu, kurio duomenys paimti iš Lietuvos statistikos departamento.



3 pav. Šiaurės regiono ir bendras Lietuvos senėjimo koeficientų grafikas

Išvados. Iš grafiko matyti, kad Šiaurės regione viso analizuojamo laikotarpio senėjimo koeficientas buvo didesnis už bendrą Lietuvos senėjimo koeficientą. Šiaurės regionas pradeda senti nuo 2005 m., kai rodiklis viršijo 100, o bendras Lietuvos senėjimas prasidėjo 2006 m. Matyti, kad nuo 2008 m. Šiaurės regiono senėjimo koeficientas ima sparčiau didėti, o bendras

Lietuvos senėjimo koeficientas taip sparčiai nedidėja. 2008 m. krizė galėjo turėti įtakos Šiaurės regionui, kai regione sumažėjo gimstamumas arba dėl krizės daug gyventojų išvyko iš regiono.

Kitų regionų grafikus žr. 3 priede. Čia pateikiamos tik išvados.

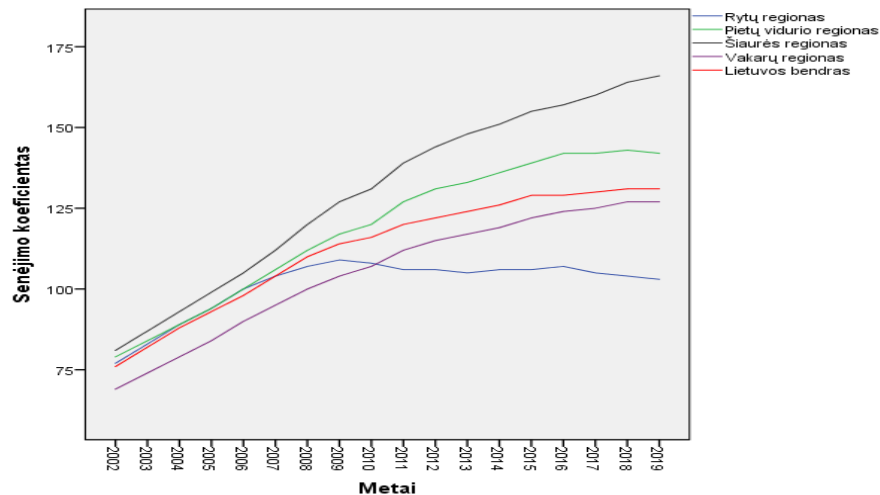
Rytų regiono senėjimo koeficientas lyginant su Lietuvos koeficientu nuo analizuojamo laikotarpio pradžios iki 2007 m. buvo panašus. Rytų regionas senti pradėjo nuo 2006 m. iki 2007 m. Bendras Lietuvos senėjimo koeficientas toliau augo, tačiau Rytų regiono senėjimo koeficientas nuo 2009 m. pradėjo mažėti. Tai galėjo turėti įtakos krizės laikotarpis, kai žmonės iš mažesnių miestų kėlėsi gyventi į Rytų regioną. Nežiūrint į 2016 m. nedidelio senėjimo koeficiento padidėjimą, senėjimo koeficientas Rytų regione artėja prie ribos, kada Rytų regionas nebesens – senėjimo koeficientas bus mažesnis už 100.

Pietų vidurio regionas taip pat senti pradėjo nuo 2006 m., kai senėjimo koeficientas viršijo 100. Iki 2009 m. senėjimo koeficientas buvo arti bendro Lietuvos senėjimo koeficiento, tačiau šiek tiek didesnis. Taip pat pastebima, kad senėjimo koeficientas pradeda sparčiau augti nuo 2009 m., to priežastis – krizės laikotarpis. Pietų vidurio regiono senėjimo koeficientas stabilizavosi tik 2016 m. ir nuo 2018 m. matomas senėjimo koeficiento mažėjimas.

Vakarų regionas vienintelis, kurio senėjimo koeficientas visą analizuojamą laikotarpį yra mažesnis už bendrą Lietuvos senėjimo koeficientą. Regionas, kuris pradėjo senti nuo 2008 m., tai yra nuo finansinės krizės pradžios.

Vakarų regiono senėjimo koeficientas tiksliausiai atspindi bendrą Lietuvos senėjimo koeficientą, nes abi kreivės juda labai panašiai visą analizuolamą laikotarpį. Galima daryti išvadą, kad nuo 2018 m. senėjimo koeficientas stabilizuojasi ir augimas nebematomas.

Palyginsime visų keturių regionų senėjimo koeficientus tarpusavyje ir su bendru Lietuvos senėjimo koeficientu. Pateikiamas grafikas.



4 pav. 4 regionų ir bendras Lietuvos senėjimo koeficientų grafikas

Išvados: Palyginus visus regionus, matoma, kad senėjimo koeficientai visuose regionuose iki 2007 m. auga tolygiai ir panašiai. Nuo pasaulinės finansinės krizės pradžios, tai yra 2008 m., kai kuriuose regionuose situacija stipriai keičiasi: stipriausiai senėjimo koeficientas pradeda augti Šiaurės regione ir Pietų vidurio regione. Vakarų regione senėjimo koeficiento augimas išlieka panašus į bendrą Lietuvos. Rytų regiono senėjimo koeficientas mažėja. Priežastys, kodėl krizės laikotarpiu kai kuriuose regionuose senėjimo koeficientas stipriai auga, o kituose išlieka stabilus arba net ima mažėti, tai, kad iš Šiaurės, Pietų vidurio regionų, kur koeficientas stipriai pradeda augti, žmonės, ieškodami geresnio darbo ar finansinio stabilumo, per krizę kėlėsi gyventi į Rytų arba Vakarų regioną, kur galimai didesnė darbo pasiūla.

2.3 FAKTORIŲ PERSKAIČIAVIMAS PAGAL REGIONUS

Kadangi buvo sudaryti keturi regionai, faktoriai pagal apskritis nebetinka, šiame skyriuje duomenys perskaičiuojami pagal regionus.

2.3.1 GYVENTOJŲ SKAIČIUS

Gyventojų skaičius ir jo struktūra valstybės pagrindas, dauguma demografijos veiksnių yra susiję su žmonių skaičiumi tiesiogiai. Kiti veiksniai susiję su tam tikromis struktūromis, kaip amžiaus grupės, lytis. Tiesioginis žmonių skaičius ar tam tikra struktūra gali stipriai lemti populiacijos senėjimą.

Darbe būtina panagrinėti žmonių skaičiaus kaitą analizuojamu laikotarpiu.

Uždavinys. Gauti bendrą gyventojų skaičių Šiaurės regione nuo 2002 m. iki 2019 m.

Sprendimas. Turimi Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskrities gyventojų skaičiaus duomenys (žr. 1 priedą):

5 lentelė. Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių gyventojų skaičius 2002–2019 m.

Metai	Panevėžys	Šiauliai	Utena
2002	296 871	366 330	183 973

Sudedame visų trijų apskričių tų metų duomenis ir gauname Šiaurės regiono bendrą gyventojų skaičių:

GV_{2002} (gyventojų skaičius): Šiauliai(296871) + Panevėžys(366330) + Utena(183973) = 847174,

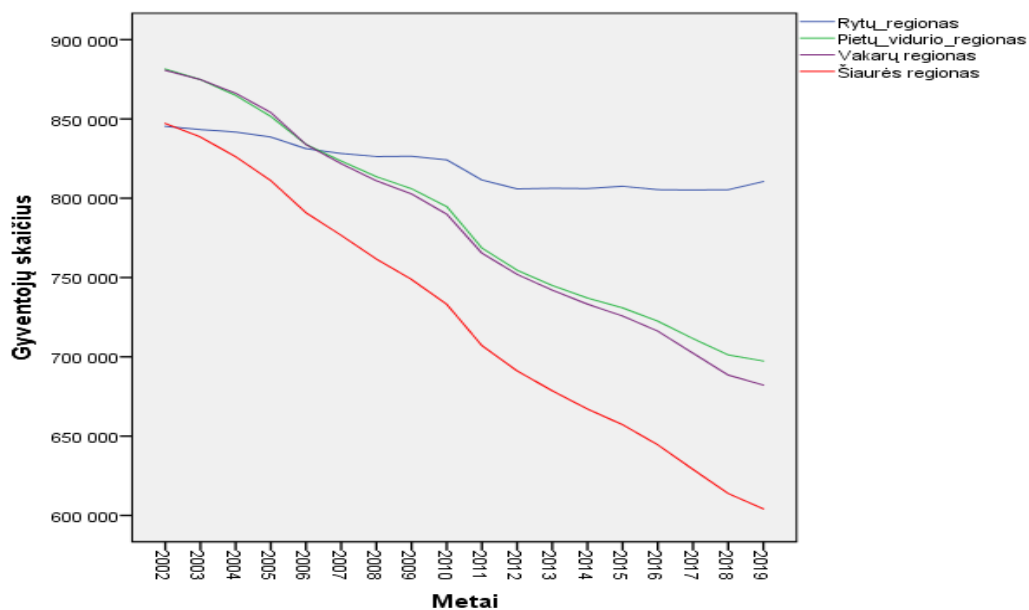
Analogiškai paskaičiavus ir kitų Šiaurės regiono metų duomenis gaunama:

6 lentelė. Šiaurės regiono bendrasis gyventojų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Š.R	847 174	838 603	826 175	811 082	790 852	776 600	761 681	748 734	733 124

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Š.R	707 088	691 123	678 571	667 075	657 196	644 523	628 996	613 832	604 133

Kitų regionų bendrąjį gyventojų skaičių žiūrėti žr. (2 priedą). 2 priedo lentelei (gyventojų skaičius regionuose) galime nubrėžti grafiką:



5 pav. 4 regionų gyventojų skaičiaus grafikas 2002–2019 m.

Išvados. Iš grafiko matyti, kad gyventojų skaičius per analizuojamą laikotarpį visuose regionuose mažėjo. Blogiausia situacija yra Šiaurės regione, matoma, kaip žmonių skaičius sparčiai mažėja. Geriausia situacija yra Rytų regione, nors gyventojų skaičius mažėja, tačiau ne taip sparčiai, o nuo 2018 m. gyventojų skaičius paaugo. Pietų vidurio ir Vakarų regionų gyventojų skaičius juda žemyn panašiai, bet nuo 2013 m. pastebima, kad Vakarų regiono žmonių skaičius ima sparčiau mažėti nei Pietų vidurio. Kokios priežastys lemia tokį gyventojų spartų mažėjimą, pasakyti negalime be papildomų tyrimų.

2.3.2 BENDRASIS GIMSTAMUMO RODIKLIS

Gimstamumas yra vienas svarbiausių faktorių, kuris lemia gyventojų skaičių, o kartu populiacijos senėjimą. Matydami, kaip kinta gimstamumas, galime padaryti daug išvadų apie kai kuriuos rodiklius, tačiau be išsamesnio tyrimo tvirtinti negalime.

Gimstamumą lemia daug veiksnių, kurie yra skirstomi į dvi grupes: biologines ir socialines. Todėl tyrimai, atliekami su gimstamumu ir jos prognozavimu, – labai sudėtingi. Yra labai daug gimstamumo rodiklio skaičiavimų būdų. Savo tyrimui pasirinkau paskaičiuoti bendrą gimstamumo rodiklį.

1. Uždavinys. Gauti gimusiųjų kūdikių skaičių Šiaurės regione nuo 2002 m. iki 2019 m.

Sprendimas. Turimi Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių duomenys 2002 m., kitus duomenis žr. (1 priede):

7 lentelė. Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių gimusių kūdikių skaičius 2002 m.

Metai	Šiauliai	Panevėžys	Utena
2002	3 181	2 554	1 305

Rodiklius sudedame:

$$(\text{gimstamumas}) = \text{Šiauliai}(3182) + \text{Panevėžys}(2554) + \text{Utena}(1305) = 7040$$

Analogiškai sudedami ir kitų metų duomenys ir gauname:

8 lentelė. Šiaurės regiono gimusių kūdikių skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Gimusieji	7 040	7 043	6 915	6 703	6 507	6 393	6 606	6 549	6 048

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Gimusieji	6 002	6 056	5 996	6 039	6 113	5 839	5 433	5 139	5 016

Kitų regionų analogiškas lenteles žr. (2 priedą).

Bendrasis gimstamumo rodiklis parodo gyvų gimusiųjų vaikų skaičių santykį su vidutiniu metiniu gyventojų skaičiumi. Šis rodiklis rodo, kiek gimė gyvų kūdikių 1 000 gyventojų per metus.

2. Uždavinys. Pagal naujai gautus Šiaurės regiono duomenis paskaičiuoti Šiaurės regiono bendrąjį gimstamumo rodiklį (BGR) 2002–2019 m. laikotarpiu.

Sprendimas. Norint paskaičiuoti bendrąjį gimstamumo rodiklį (BGR), reikalingi duomenys: gyventojų skaičius ir gimstamumas regionuose (žr. 2 priedą).

9 lentelė. Šiaurės regiono gyventojų sk., gimusių kūdikių skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Gyventojų skaičius	847174	838603	826175	811082	790852	776600	761681	748734	733124
Gimusių skaičius	7 040	7 043	6 915	6 703	6 507	6 393	6 606	6 549	6 048

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Gyventojų skaičius	707088	691123	678571	667075	657196	644523	628996	613832	604133
Gimusių skaičius	6 002	6 056	5 996	6 039	6 113	5 839	5 433	5 139	5 016

Duomenis įrašomi į bendrasis gimstamumas formulę

$$BGR = \frac{G}{GV_{vid}} * 1000,$$

čia G – gimusių vaikų per metus skaičius, GV_{vid} – vidutinis metinis gyventojų skaičius.

$$BGR(2002\ m.) = \frac{7040}{847174} * 1000 = 8,3$$

Analogiškai paskaičiuojami ir kitų metų duomenys ir gaunami Šiaurės regiono bendrieji gimstamumo rodikliai:

10 lentelė. Bendrasis gimstamumo rodiklis Šiaurės regione 2002–2012 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
BGR	8,3	8,4	8,4	8,3	8,2	8,2	8,7	8,7	8,2

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
BGR	8,5	8,8	8,8	9,1	9,3	9,1	8,6	8,4	8,3

Kitų regionų bendrąjį gimstamumo rodiklį (BGR) žr. (3 priedą). Nubrėžtas 3 priedo lentelės (bendras gimstamumo rodiklis) grafikas.



6 pav. 4 regionų ir bendrasis Lietuvos gimstamumo rodiklių grafikas

Išvados. Bendrasis gimstamumo rodiklis sąlyginai pagal lygį yra skiriamas į mažą – mažiau 15, vidutinį – 15–25 ir didelį – daugiau 25 gyvų gimusių 1 000 gyventojų per metus. Matome iš 9 lentelės, kad visi regionai per visą analizuojamą laikotarpį priskiriami prie mažo gimstamumo, nes rodiklis neviršija 15. Grafike matyti, kad bendrasis gimstamumo rodiklis nėra stabilus: jis auga ir krenta. Tačiau nuo analizuojamo laikotarpio pradžios iki 2015 m. bendrasis gimstamumo rodiklis didėjo visuose apskrityse, po to ėmė mažėti. Lietuvos bendrąją gimstamumo kreivę lyginant su regionų kreivėmis, žemiau yra Šiaurės ir Pietų vidurio regionai. Labai artimas Lietuvos bendrajam gimstamumo rodikliui yra Vakarų regionas, aukščiau yra tik Rytų regionas.

2.3.3 BENDRASIS MIRTINGUMO RODIKLIS

Mirtingumo statistika yra taip pat viena svarbiausių statistikų demografiniai situacijai ir potencialiam gyventojų skaičiaus pokyčio analizei. Mirties statistika yra analizuojama ne tik bendroju rodikliu, bet ir amžiaus grupėmis, lyties atžvilgiu, apskritimis. Visose grupėse mirties rodikliai skirtingi.

Analizuojant mirtingumą, yra daug matavimų vienetų, darbe taikysiu dažniausiai naudojamą, tai yra bendrąjį mirtingumo rodiklį.

1. Uždavinys. Apskaičiuoti mirusiųjų skaičių Šiaurės regione nuo 2002 m. iki 2019 m.

Sprendimas. Turimi Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių 2002 m. duomenys, kiti duomenys (žr. 1 priedą):

11 lentelė. Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių mirusiųjų skaičius 2002 m.

Metai	Šiauliai	Panevėžys	Utena
2002	4 563	3 724	2 664

Rodiklius sudedame:

(mirusių skaičius) = Šiauliai(4563) + Panevėžys(3724) + Utena(2 664) = 10951

Analogiškai sudedami ir kitų metų duomenys ir gaunama:

12 lentelė. Šiaurės regiono mirusiųjų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Mirusieji	10 951	10 833	10 889	11 454	11 571	11 858	11 511	10 999	11 010

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Mirusieji	10 647	10 666	10 592	10 154	10 601	10 459	10 337	10 052	9 608

Kitų regionų lentelės analogiškos (žr. 2 priedą).

2. Uždavinys. Pagal naujai gautus Šiaurės regiono duomenis paskaičiuoti Šiaurės regiono 2002–2019 m. laikotarpio bendrąjį mirtingumo rodiklį (BMR).

Sprendimas. Norint paskaičiuoti bendrąjį mirtingumo rodiklį (BMR), reikalingi duomenys: gyventojų skaičius ir mirusiųjų skaičius regionuose (žr. 2 priedą).

13 lentelė. Šiaurės regiono gyventojų sk., mirusiųjų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Gyventojų skaičius	847174	838603	826175	811082	790852	776600	761681	748734	733124
Mirusiųjų skaičius	10 951	10 833	10 889	11 454	11 571	11 858	11 511	10 999	11 010

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Gyventojų skaičius	707088	691123	678571	667075	657196	644523	628996	613832	604133
Mirusiųjų skaičius	10 647	10 666	10 592	10 154	10 601	10 459	10 337	10 052	9 608

Duomenys įrašomi į bendrasis mirtingumas formulę

$$BMR (2002 m.) = \frac{10951}{847174} * 1000 = 12,9$$

Analogiškai paskaičiuojami ir kitų Šiaurės regiono metų duomenys ir gauname:

14 lentelė. Bendrasis mirtingumo rodiklis Šiaurės regione 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
BMR	12,9	12,9	13,2	14,1	14,6	15,3	15,1	14,7	15,0

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
BMR	15,1	15,4	15,6	15,2	16,1	16,2	16,4	16,4	15,9

Kitų regionų bendrąjį mirtingumo rodiklį žiūrėti 3 priede. Pavaizduota 3 priedo lentelės (bendrasis mirtingumo rodiklis) (BMR) ir Lietuvos duomenys grafike.



7 pav. 4 regionų ir bendrasis Lietuvos mirtingumo rodiklių grafikas

Išvados. Bendrasis mirtingumo rodiklis sąlyginai pagal intensyvumo lygį yra skiriamas į mažą – mažiau 9, vidutinį – 9–15 ir didelį – daugiau 15 mirusiųjų 1 000 gyventojų per metus. Pagal šiuos požymius Rytų, Pietų vidurio, Vakarų ir bendras Lietuvos mirtingumo rodiklis (BMR) priskiriamas prie vidutinio mirtingumo. Šiaurės regionas nuo 2002 m. iki 2005 m. taip pat buvo prie vidutinio mirtingumo, nuo 2006 m. mirtingumas padidėjo ir jis priskiriamas prie didelio mirtingumo, tik 2009 ir 2010 m. mirtingumas buvo vėl sumažėjęs iki vidutinio, po to, iki pat 2019 m., mirtingumas Šiaurės regione priskiriamas prie didelio mirtingumo.

Matyti, kad, kaip ir gimstamumo, mirtingumo rodiklis irgi kiekvienais metais svyruoja įvairiai: tai auga, tai mažėja. Didelis mirtingumo lygis yra Šiaurės regione, mažiausias – Rytų ir

jame mirtingumo rodiklis nuo 2007 m. mažėja. Pietų vidurio, Vakarų regionų mirtingumas panašus kaip ir Lietuvos bendrasis mirtingumo rodiklis ir jis nuo 2015 m. taip pat mažėja.

2.3.4 MIGRACIJOS SOLDO KOEFICIENTAS

Nė vienas demografinių pokyčių modelis nebus išsamus, jeigu į jį nebus įtraukta migracija. Migracija (lot. *migratio* – kėlimasis, kraustymasis) apibrėžiama, kaip gyventojų kėlimasis arba perkėlimas gyventi iš vienos vietovės į kitą tam tikram nustatytam laikotarpiui.

Migracija yra viena iš svarbiausių dabartinio demografijos mokslo sričių. Kartu su gimstamumu ir mirtingumu migracija lemia bendrojo gyventojų skaičiaus pokytį. Be to, individų, arba žmonių grupių, judėjimas iš vienos gyvenamosios vietos į kitą turi įtakos ne tik gyventojų skaičiui tose teritorijose, bet ir jų sudėčiai, pasiskirstymui, įvairioms gyventojų charakteristikoms. Migracijos saldo kaip skirtumas, tenkantis 1 000 gyventojų tarp atvykusių ir išvykusių skaičiaus, yra vienas iš pagrindinės demografinės lygybės elementų.

1. Uždavinys. Gauti atvykusių ir išvykusių skaičių Šiaurės regione 2002–2019 m.

Sprendimas. Turimi Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių 2002 m. duomenys, kitus duomenis žr. (1 priede).

15. lentelė. Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių atvykusių ir išvykusių asmenų skaičius 2002 m.

Metai	Šiauliai		Panevėžys		Utena	
	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę
2002	9 451	12 120	4 067	5 586	3 020	3 996

2002 m. rodikliai sudedami pagal grupes:

(atvykusių skaičius)= Šiauliai(9451) + Panevėžys(4067) + Utena(3020) = 16538

(išvykusių skaičius)= Šiauliai(12120) + Panevėžys(5586) + Utena(3996) = 21702

Analogiškai sudedami ir kitų metų duomenys ir gaunama:

16 lentelė. Šiaurės regiono atvykusių ir išvykusių skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Atvyko	16 538	20 482	21 663	19 066	19 444	21 427	20 710	18 688	18 962
Išvyko	21 702	30 193	33 824	35 536	29 597	32 145	29 988	30 787	40 892

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Atvyko	22 048	23 918	23 829	24 717	24 182	25 257	25 288	29 095	28 744
Išvyko	34 169	33 121	31 821	31 645	33 614	37 368	36 863	35 375	32 390

Kitų regionų analogiškos lentelės (žr. 2 priedą).

2. Uždavinys. Pagal naujai gautus Šiaurės regiono duomenis paskaičiuoti Šiaurės regiono migracijos saldo koeficientą (K_{Δ}) 2002–2019 m. laikotarpiu.

Sprendimas. Norint paskaičiuoti migracijos saldo koeficientą (K_{Δ}) reikalingi duomenys: gyventojų skaičius ir išvykusių, atvykusių žmonių skaičius regione (žr. 2 priedą).

17 lentelė. Šiaurės regiono gyventojų sk., atvykusių, išvykusių skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Gyventojų skaičius	847174	838603	826175	811082	790852	776600	761681	748734	733124
Atvyko į regioną	16 538	20 482	21 663	19 066	19 444	21 427	20 710	18 688	18 962
Išvyko iš regiono	21 702	30 193	33 824	35 536	29 597	32 145	29 988	30 787	40 892

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Gyventojų skaičius	707088	691123	678571	667075	657196	644523	628996	613832	604133
Atvyko į regioną	22 048	23 918	23 829	24 717	24 182	25 257	25 288	29 095	28 744
Išvyko iš regiono	34 169	33 121	31 821	31 645	33 614	37 368	36 863	35 375	32 390

Duomenys įrašomi į migracijos saldo formulę:

$$K_{\Delta} = \frac{\text{Atvykusių skaičius} - \text{išvykusių skaičius}}{GV_{vid}} \cdot 1000$$

$$K_{\Delta}(2002 \text{ m.}) = \frac{16538 - 21702}{847174} \cdot 1000 = -6,1.$$

Šio rodiklio reikšmė gali būti teigiama – kai atvykusių gyventojų skaičius yra didesnis negu išvykusių, ir neigiama – kai daugiau žmonių išvyksta negu atvyksta.

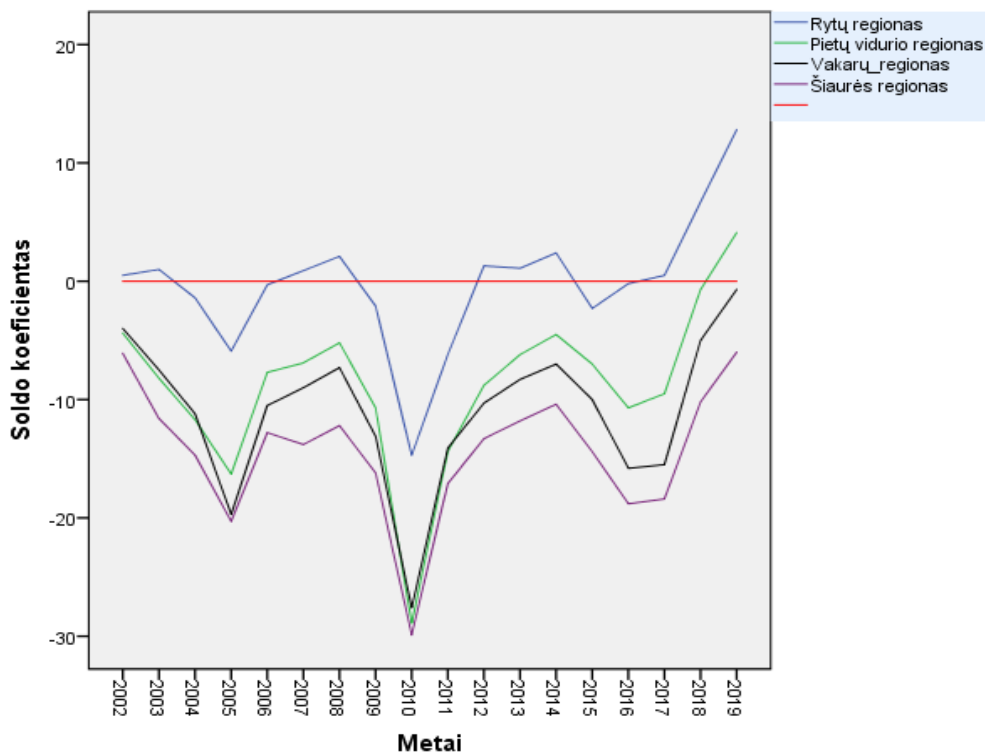
Kiti Šiaurės migracijos saldo koeficientai paskaičiuojami analogiškai ir gaunami:

18 lentelė. Migracijos saldo koeficientas Šiaurės regione 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
K_{Δ}	-6,1	-11,6	-14,7	-20,3	-12,8	-13,8	-12,2	-16,2	-29,9

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
K_{Δ}	-17,1	-13,3	-11,8	-10,4	-14,4	-18,8	-18,4	-10,2	-6,0

Kitų regionų migracijos saldo koeficiento rodiklius žr. (3 priede). Pavaizduokime 3 priedo lentelės (migracijos saldo koeficientas) (K_{Δ}) duomenis grafike.



8 pav. Šiaurės regiono migracijos soldo koficiento grafikas

Išvados. Iš grafiko matyti, kad visą analizuojamą laikotarpį migracijos soldo koeficientas neigiamas Šiaurės, Vakarų regionuose. Pietų vidurio regionuose jis taip pat neigiamas, tik 2018 m. tapo teigiamas. Rytų regiono migracijos soldo svyruoja arti 0 linijos, tai rodo, kad Rytų regione vienais metais yra teigiamas, kitais – neigiamas soldo koeficientas. Matyti, kad 2010 m. visuose regionuose buvo didžiulė emigracijos banga, iš visų regionų gyventojai išvyko į kitas šalis. Nuo 2017 m. visuose regionuose emigracijos koeficientas auga, tačiau 0 barjero tiek Vakarų, tiek Šiaurės regionai nepasiekė. Vadinasi, iš tų regionų daugiau žmonių išvyksta, negu į juos atvyksta.

2.3.5 BENDRASIS SANTUOKOS (IŠTUOKOS) RODIKLIS

Santuokų ar ištuokų rodiklis lemti Lietuvos tautos senėjimą veikdamas kitus kintamuosius, kaip gimstamumą, migraciją. Labiausiai naudojamas rodiklis yra santuokos, ištuokos rodiklis, tenkantis 1000 gyventojų.

1. Uždavinys. Gauti santuokos, ištuokos skaičių Šiaurės regione nuo 2002m. iki 2019 m.

Sprendimas. Turimi Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių 2002 m. duomenys, kitus duomenis žr. (1 priede):

19 lentelė. Šiaulių, Panevėžio, Utenos apskričių santuokų ir ištuokų skaičius 2002 m.

Metai	Šiauliai		Panevėžys		Utena	
	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos
2002	1 538	1 191	1 208	874	743	528

2002 m. rodikliai sudedami pagal grupes:

$$(\text{santuokų skaičius}) = \text{Šiauliai}(1538) + \text{Panevėžys}(1208) + \text{Utena}(743) = 3489$$

$$(\text{ištuokų skaičius}) = \text{Šiauliai}(1191) + \text{Panevėžys}(874) + \text{Utena}(528) = 2593$$

Analogiškai sudedami ir kitų metų duomenys ir gaunama:

20 lentelė. Šiaurės regiono santuokų, ištuokų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Santuokos	3 489	3 525	4 275	4 330	4 623	5 079	5 224	4 266	3 937
Ištuokos	2 593	2 553	2 767	2 630	2 617	2 689	2 375	2 222	2 468

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Santuokos	3 963	4 450	4 343	4 630	4 605	4 327	4 297	3 973	3 707
Ištuokos	2 479	2 471	2 320	2 195	2 097	1 976	1 804	1 714	1 885

Kitų regionų analogiškas lenteles žr. (2 priedas).

2. Uždavinys. Pagal naujai gautus Šiaurės regiono duomenis paskaičiuoti Šiaurės regiono santuokų, ištuokų rodiklį (SIR) 2002–2019 m. laikotarpiu.

Sprendimas. Norint paskaičiuoti santuokų, ištuokų rodiklį (SIR), reikalingi gyventojų skaičiaus duomenys ir santuokų, ištuokų skaičius regione (žr. 2 priedą).

21 lentelė. Šiaurės regiono gyventojų sk., atvykusių, išvykusių skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Gyventojų skaičius	847174	838603	826175	811082	790852	776600	761681	748734	733124
Santuokos	3 489	3 525	4 275	4 330	4 623	5 079	5 224	4 266	3 937
Ištuokos	2 593	2 553	2 767	2 630	2 617	2 689	2 375	2 222	2 468

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Gyventojų skaičius	707088	691123	678571	667075	657196	644523	628996	613832	604133
Santuokos	3 963	4 450	4 343	4 630	4 605	4 327	4 297	3 973	3 707
Ištuokos	2 479	2 471	2 320	2 195	2 097	1 976	1 804	1 714	1 885

Duomenys įrašomi į santuokos, ištuokos rodiklio formulę:

$$SIR (2002 \text{ m.}) = \frac{3489 - 2593}{847174} \cdot 1000 = 1,06$$

Šio rodiklio reikšmė gali būti teigiama – kai santuokų skaičius yra didesnis negu ištuokų, ir neigiama – kai daugiau žmonių išsiskiria negu susituokia.

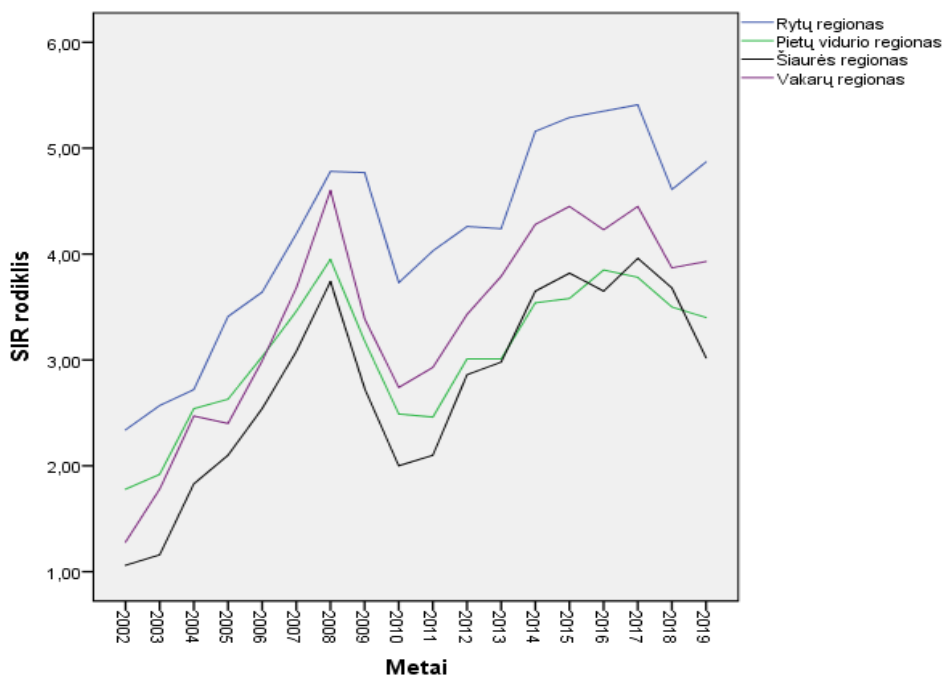
Kitų metų Šiaurės regiono santuokų, ištuokų rodikliai perskaičiuojami analogiškai ir gaunama:

22 lentelė. Santuokų (ištuokų) rodiklis 2002–2019 m. Šiaurės regione

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
SIR	1,06	1,16	1,83	2,10	2,54	3,08	3,74	2,73	2

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
SIR	2,10	2,86	2,98	3,65	3,82	3,65	3,96	3,68	3,02

Kitų regionų santuokų, ištuokų rodiklius žr. 3 priede. Pavaizduokime 3 priedo lentelės (santuokų, ištuokų rodiklis) (SIR) duomenis grafiku.



9 pav. 4 regionų santuokų, ištuokų koeficientų grafikas

Išvados. Bendrasis santuokų (ištuokų) rodiklis, tenkantis 1 000 gyventojų, per analizuojamą laikotarpį didėjo visuose regionuose nuo 2002 m. iki 2008 m., vadinasi, mažėjo ištuokų skaičius, o santuokų skaičius didėjo. Nuo 2008 m. iki 2010 m., krizės laikotarpiu, pastebimas sntuokų skaičiaus mažėjimas, o ištuokų skaičiaus didėjimas, visuose regionuose. Nuo

2010 m., vėl santuokų skaičius ima didėti, o ištuokų mažėti. Mažiausi santuokų, ištuokų skaičiai, tenkantis 1 000 gyventojų, yra Vakarų, Pietų vidurio, Šiaurės regionuose, didžiausi – Rytų regione.

Perskaičiavus visus faktorius pagal Šiaurės regioną, gauta tokia duomenų lentelė:

23 lentelė. Šiaurės regiono faktoriai 2002 m.

Metai	Šiaurės regionas					
	IA	GV	BGR	BMR	KΔ	SIR
2002	81	847 174	8,3	12,9	-6,1	1,06

Kitų regionų lentelių (žr. 4 priedą) duomenys bus toliau taikomi atliekant statistinį tyrimą.

2.4 NEIGIAMŲ FAKTORIŲ IR SENĖJIMO KOEFICIENTO DINAMIKOS POKYČIŲ TYRIMAS

Šiame poskyryje bus pateikiami duomenys vizualiai ir tikrinama polinominio skirstinio hipotezė, ar duomenys kas penkerius metus turėjo esminių pokyčių ar ne.

2.4.1 SENĖJIMO KOEFICIENTO POKYČIAI

Tam, kad nustatyti, kaip vyko procesai Lietuvos regionuose lyginant juos analizuojamuoju laikotarpiu, geriausiai matyti iš jų pasiskirstymo Lietuvos žemėlapiuose.

1. Uždavinys. Paskaičiuoti Šiaurės regiono senėjimo koeficiento kaitą kas 5 metus.

Sprendimas. Visas analizuojamas laikotarpis padalytas į keturias laiko atkarpas: 2002–2006 m., 2006–2010 m., 2010–2014 m., 2014–2019 m. ir turimi Šiaurės regiono senėjimo koeficiento (žr. 4 priedą) duomenys.

24 lentelė. Šiaurės regiono senėjimo koeficientas 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
IA	81	87	93	99	105	112	120	127	131

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
IA	139	144	148	151	155	157	160	164	166

Paskaičiuojami pokyčiai:

$$2006 \text{ m. (105)} - 2002 \text{ m. (81)} = 24$$

$$2010 \text{ m. (131)} - 2006 \text{ m. (105)} = 26$$

$$2014 \text{ m. (151)} - 2010 \text{ m. (131)} = 20$$

$$2019 \text{ m. (166)} - 2014 \text{ m. (151)} = 15$$

Analogiškai paskaičiuojami ir kitų regionų senėjimo koeficiento pokyčiai ir gaunama lentelė:

25 lentelė. Senėjimo koeficiento pokyčiai regionuose

IA				
Laikotarpiai	R.R	PV.R	V.R	Š.R
2002–2006	23	5	20	24
2006–2010	8	2	16	26
2010–2014	-2	16	13	20
2014–2019	-3	6	8	15

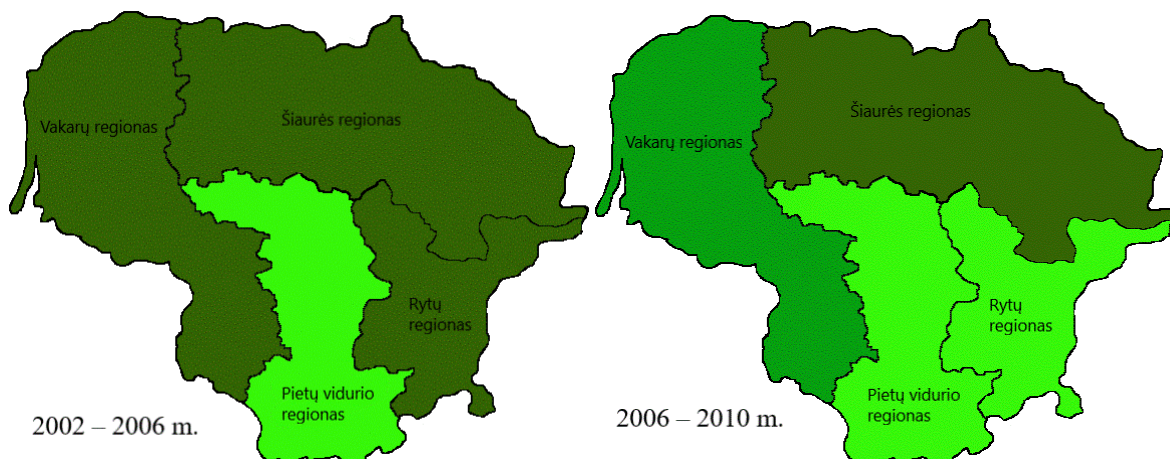
2. Uždavinys. Pavaizduoti keturių regionų senėjimo koeficiento pokyčių dinamiką Lietuvos žemėlapiuose.

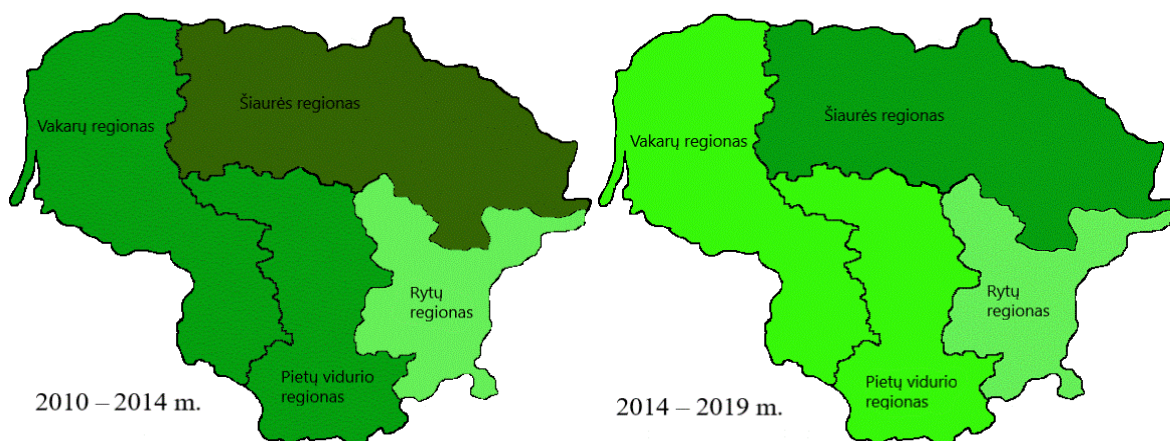
Sprendimas. Pateikiama spalvų gamą su intervalais, pagal 25 lentelės duomenis:

26 lentelė. Spalvų reikšmės Lietuvos žemėlapyje

	≤ 0
	[1 ; 8]
	[9 ; 16]
	≥ 17

Žemėlapiuose tamsiai žalia spalva reiškia, kad tame regione tuo laikotarpiu daugiausia padidėjo senėjimo koeficientas, kuo šviesesnė žalia spalva, tuo mažiau didėjo koeficientas, pati šviesiausia – senėjimo koeficientas sumažėjo.





10 pav. Senėjimo koeficiento pokyčiai regionuose 2002–2019 m.

10 paveikslėlio žemėlapių spalvos rodo, kad nuo 2002 m. iki 2019 m. beveik visuose regionuose senėjimo koeficientai kito. Tam, kad priimtume sprendimus apie senėjimo koeficiento kaitą regionuose, patikrinsime hipotezę $H_0: p_i = p_{i0}$.

Polinominio skirstinio matematinį modelį galima taikyti ne tik tiriant gyventojų vidinę migraciją, bet ir tiriant kitų duomenų dinamiką.

3. Uždavinys. Patikrinti statistinę hipotezę $H_0: p_i = p_{i0}$ su $\alpha = 0,1$, ar senėjimo koeficientas turėjo esminių pokyčių kas 5 metus visuose keturiuose regionuose.

Sprendimas. Turima tokia duomenų lentelė, kurioje atsispindi visų keturių regionų senėjimo koeficientas kas 5 metus ir procentinės jų dalys:

27 lentelė. Senėjimo koeficiento procentinės dalys grupėse, kas penkerius metus

Regionai	Bendras 2002 m.	Proc. dalis 2002 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.
Iš viso:	306		395		395		466	
Rytų regionas	77	25,1	100	25,3	100	25,3	108	23,2
Pietų vidurio regionas	79	25,7	100	25,3	100	25,3	120	25,8
Vakarų regionas	69	22,7	90	22,7	90	22,7	107	22,9
Šiaurės regionas	81	26,5	105	26,7	105	26,7	131	28,1

Regionai	Bendras 2010m.	Proc. dalis 2010 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2019 m.	Proc. dalis 2019 m.
Iš viso:	466		512		512		538	
Rytų regionas	108	23,2	106	20,6	106	20,6	103	19,2
Pietų vidurio regionas	120	25,8	136	26,6	136	26,6	142	26,4
Vakarų regionas	107	22,9	119	23,3	119	23,3	127	23,6
Šiaurės regionas	131	28,1	151	29,5	151	29,5	166	30,8

Grupių procentinės dalys, padalytos iš 100, duoda skaičius, kurie laikomi polinominio skirstinio parametrais, pvz. $25,1 : 100 = 0,251$

$$H_0: p_1 = 0,251; p_2 = 0,257; p_3 = 0,227; p_4 = 0,265.$$

Po 5 metų, 2006 metais, senėjimo koeficiento skaičiai Lietuvoje bus kiti – jie vėl suskirstyti į 4 grupes pagal regionus ir sudaro tam tikras naujas procentines dalis, atitinkančias konkrečias grupes. Tos grupių procentinės dalys, padalytos iš 100, pvz. $25,3 : 100 = 0,253$, duos skaičius, kuriuos laikysime nagrinėjamo polinominio skirstinio matematinio modelio parametrų įverčiais:

$$\hat{p}_1 = 0,253; \hat{p}_2 = 0,253; \hat{p}_3 = 0,227; \hat{p}_4 = 0,267$$

Jei tie įverčiai (su atitinkamomis procentinėmis dalimis) nedaug skirsis nuo ankstesnių metų (2002 m.) polinominio skirstinio parametrų, suformuluotų statistinėje hipotezėje, tada juos atitinkanti Pirsono statistika bus maža, t. y. mažesnė už atitinkamą Chi kvadrato $\chi^2_{1-\alpha}(k-1)$ kvantilį. Tuo atveju nulinė hipotezė priimama ir galima teigti, kad per nagrinėjamą laikotarpį nuo 2002 m. iki 2006 m. Lietuvos senėjimo koeficientas regionų grupėse statistiškai nepakito su tikimybe $1 - \alpha$. Jei nulinė hipotezė atmetama, tada Lietuvos senėjimo koeficientas regionų grupėse laikomas statistiškai reikšmingas ir reikalauja papildomo tyrimo, norint suprasti tokių pokyčių priežastis.

Nagrinėjamas 2002–2006 m. atvejis. Pirsono statistika tokia:

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 394 \left(\frac{0,253 - 0,251}{0,251} \right)^2 + \left(\frac{0,253 - 0,257}{0,257} \right)^2 + \left(\frac{0,227 - 0,227}{0,227} \right)^2 + \left(\frac{0,267 - 0,265}{0,265} \right)^2$$

$$= 0,129$$

$$k = 4$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{1-0,1}(4-1) = \chi^2_{0,9}(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,129 \not\geq \chi^2_{1-\alpha}(k-1) = 6,25$, hipotezė H_0 priimama. Senėjimo koeficientas regionuose iš esmės statistiškai nepakito per penkerius metus, t. y. 2002–2006 m.

Likusius skaičiavimus žiūrėti 5 priede, čia pateikiamas tik apibendrinimas.

Išvados. Iš 10 paveikslėlio matyti, kad nuo 2002 m. iki 2006 m. beveik visuose regionuose senėjimo koeficientai išaugo, išskyrus Pietų vidurio regioną. Pagal polinominio skirstinio hipotezės tikrinimą, tie pokyčiai nebuvo esminiai.

Nuo 2006 m. iki 2010 m. senėjimo koeficientas sparčiausiai augo tik Šiaurės regione. Mažiausiai augo Rytų ir Pietų vidurio regionuose, Vakarų regiono augimas, lyginant su 2002–

2006 m. augimu, sumažėjo. Pagal polinominio skirstinio hipotezės tikrinimą, tie pokyčiai nebuvo esminiai.

Nuo 2010 m. iki 2014 m. Šiaurės regionas išliko tarp sparčiausiai augančių senėjimo koeficientų regionų. Rytų regione senėjimo koeficientas sumažėjo, Vakarų – augimas liko panašus, išaugo tik Pietų vidurio regiono senėjimo koeficientas. Pagal polinominio skirstinio hipotezės tikrinimą tie pokyčiai buvo esminiai.

2014–2019 m. Vakarų, Šiaurės, Pietų vidurio regionuose senėjimo koeficiento augimas sumažėjo lyginant su 2010–2014 m., Rytų regione senėjimo koeficientas išliko toks pat. Pagal polinominio skirstinio hipotezės tikrinimą, tie pokyčiai nebuvo esminiai.

Nustatyta, kad senėjimo koeficientai augo visuose regionuose, didžiausias augimas buvo Šiaurės regione, jis vyko nuo 2002 m. iki pat 2014 m., po to augimas šiek tiek sumažėjo. Nuo 2010 m. Rytų regiono senėjimo koeficientas ėmė mažėti. Kituose regionuose keitėsi įvairiai: tai augo, tai mažėjo. Pagal polinominio skirstinio hipotezės tikrinimą, pokyčiai buvo esminiai tik 2010–2014 m. laikotarpiu.

2.4.2 GYVENTOJŲ SKAIČIAUS POKYČIAI

1. Uždavinys. Paskaičiuoti Šiaurės regiono gyventojų skaičiaus kaitą kas 5 metus.

Sprendimas. Visas analizuojamas laikotarpis padalytas į keturias laiko atkarpas: 2002–2006 m., 2006–2010 m., 2010–2014 m., 2014–2019 m. ir turimi duomenys (žr. 4 priedą):

28 lentelė. Šiaurės regiono gyventojų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
GV	847 174	838 603	826 175	811 082	790 852	776 600	761 681	748 734	733 124

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
GV	707088	691123	678 571	667 075	657 196	644 523	628 996	613 832	604 133

Apskaičiuojamas gyventojų skaičiaus pokytis:

$$2006 \text{ m. } (790852) - 2002 \text{ m. } (847174) = -56322$$

$$2010 \text{ m. } (733124) - 2006 \text{ m. } (790852) = -57728$$

$$2014 \text{ m. } (667075) - 2010 \text{ m. } (733124) = -66049$$

$$2019 \text{ m. } (604133) - 2014 \text{ m. } (667075) = -62942$$

Analogiškai apskaičiuojamas ir kitų regionų pokytis ir gauti rezultatai pateikiami lentelėje:

29 lentelė. Gyventojų skaičiaus pokyčiai regionuose

GV				
Laikotarpiai	R.R	PV.R	V.R	Š.R
2002–2006	-14 055	-47 604	-46 821	-56 322
2006–2010	-7 044	-39 184	-43 903	-57 728
2010–2014	-18 087	-57 640	-56 728	-66 049
2014–2019	4 432	-39 753	-51 025	-62 942

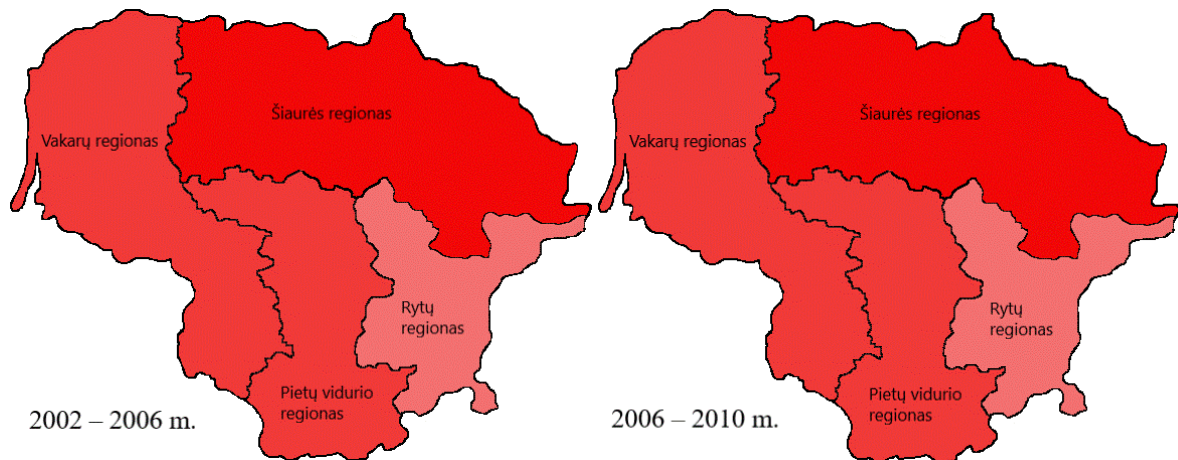
2. Uždavinys. Pavaizduoti keturių regionų gyventojų skaičių pokyčių dinamiką Lietuvos žemėlapyje.

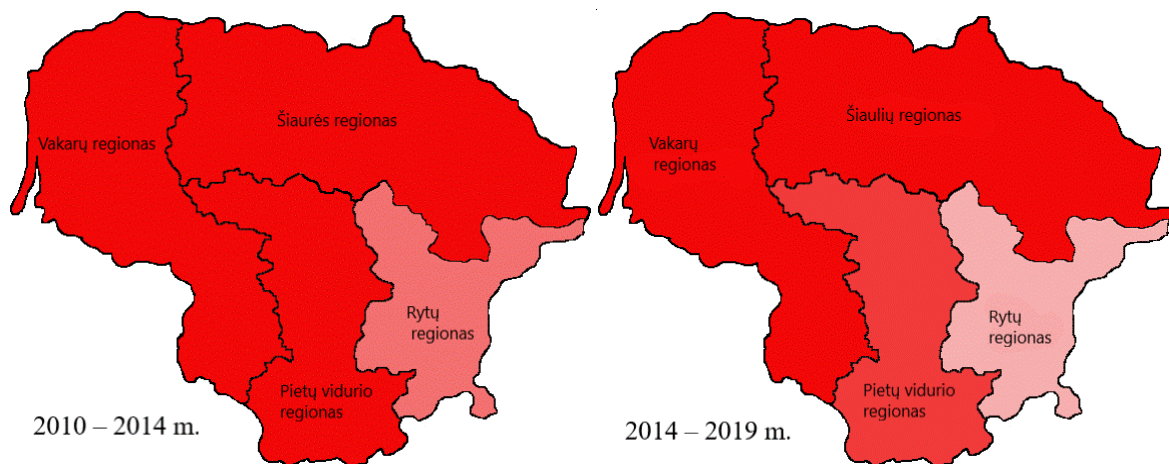
Sprendimas. Pateikiama spalvų gama su intervalais, pagal 29 lentelės duomenis:

30 lentelė. Spalvų reikšmės Lietuvos žemėlapyje

	≥ 0
	[1 ; -25 000]
	[-25 001 ; -50 000]
	$\leq -50 001$

Žemėlapiuose tamsiai raudona spalva žymi, kad tame regione tuo laikotarpiu sumažėjo gyventojų skaičius. Kuo šviesesnė raudona spalva, tuo mažiau gyventojų sumažėjo, pati šviesiausia reiškia, kad gyventojų skaičius padidėjo.





11 pav. Gyventojų skaičiaus pokyčiai regionuose 2002–2019m.

11 paveikslėlyje matoma, kad gyventojų skaičius visuose regionuose mažėjo. Labiausiai jis mažėjo Šiaurės ir Vakarų regionuose, lyginant su Rytų regionu. Taip pat matome, kad 2010–2014 m. laikotarpiu buvo fiksuojami didžiausi sumažėjimai. 2014–2019 m. laikotarpiu Rytų regiono žmonių skaičius padidėjo, lyginant su kitų metų laikotarpiais.

3. Uždavinys. Patikrinti statistinę hipotezę $H_0: p_i = p_{i0}$, su $\alpha = 0,1$ ar gyventojų skaičius turėjo esminių pokyčių kas 5 metus visuose keturiuose regionuose.

Sprendimas. Skaičiavimai analogiški, kaip ir 2.4.1 poskyryje, todėl lentelės ir skaičiavimus žiūrėti 5 priede, čia pateikiamas tik apibendrinimas.

Išvados. 2002–2006 m. visuose regionuose fiksuojamas gyventojų sumažėjimas. Didžiausias gyventojų sumažėjimas buvo Šiaurės regione. Pietų vidurio ir Vakarų regionuose sumažėjimas buvo vidutinis, Rytų regione sumažėjimas mažiausias.

2006–2010 m. mažėjimas išliko toks pats, kaip ir 2002–2006 m.

2010–2014 m. fiksuojamas didžiausias sumažėjimas Šiaurės, Pietų vidurio, Vakarų regionuose. Rytų regionuose sumažėjimas išliko kaip ir ankstesniais metais.

2014–2019 m. žmonių skaičius labiausiai ir toliau mažėjo Šiaurės, Vakarų regionuose. Pietų vidurio regione sumažėjimas vidutinis, o Rytų regione fiksuojamas ir žmonių padidėjimas, lyginat su 2010–2014 m.

Patikrinus polinomino skirstinio hipotezę, daroma išvada, kad visi tie pokyčiai buvo esminiai.

2.4.3 GIMSTAMUMO RODIKLIO POKYČIAI

1. Uždavinys. Paskaičiuoti Šiaurės regiono bendrojo gimstamumo kaitą kas 5 metus.

Sprendimas. Visas analizuojamas laikotarpis padalytas į keturias laiko atkarpas: 2002–2006 m., 2006–2010 m., 2010–2014 m., 2014–2019 m. ir turimi duomenys (žr. 4 priedą):

31 lentelė. Šiaurės regiono bendrasis gimstamumo rodiklio skaičius, 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
BGR	8,3	8,4	8,4	8,3	8,2	8,2	8,7	8,7	8,2

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
BGR	8,5	8,8	8,8	9,1	9,3	9,1	8,6	8,4	8,3

Apskaičiuojami pokyčiai:

$$2006 \text{ m. } (8,2) - 2002 \text{ m. } (8,3) = -0,1$$

$$2010 \text{ m. } (8,2) - 2006 \text{ m. } (8,2) = 0$$

$$2014 \text{ m. } (9,1) - 2010 \text{ m. } (8,2) = 0,9$$

$$2019 \text{ m. } (8,3) - 2014 \text{ m. } (9,1) = -0,8$$

Analogiškai apskaičiuojami ir kitų regionų pokyčiai, kurie pateikiami lentelėje:

32 lentelė. Bendro gimstamumo rodiklio skaičiaus pokyčiai regionuose

BGR				
Laikotarpiai	R.R	PV.R	V.R	Š.R
2002–2006	1,4	0,2	1,6	-0,1
2006–2010	1,8	0,9	-0,2	0,0
2010–2014	0,2	0,4	0,5	0,9
2014–2019	-0,5	-0,5	0,2	-0,8

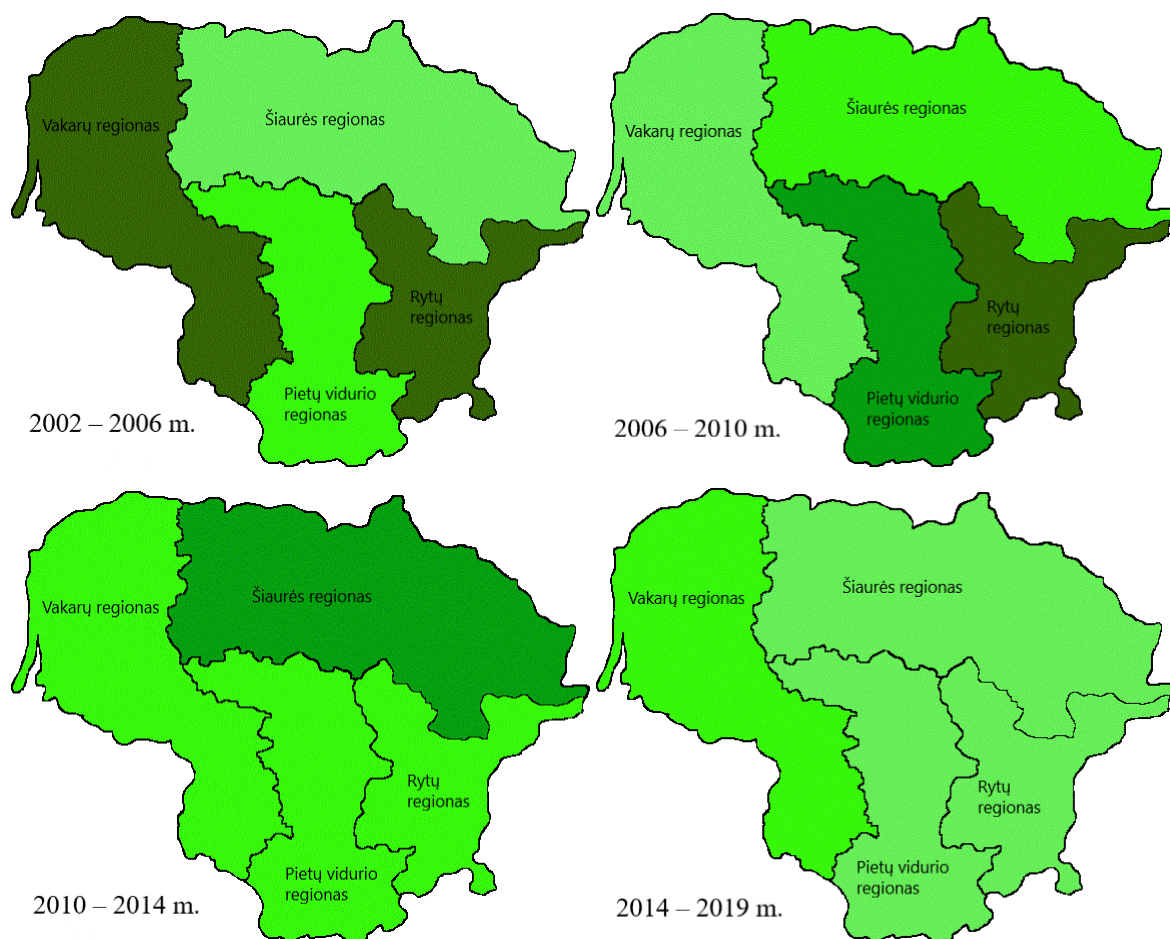
2. Uždavinys. Pavaizduoti keturių regionų bendrąjį gimstamumo rodiklio skaičiaus pokyčių dinamiką Lietuvos žemėlapiuose.

Sprendimas. Pavaizduojama spalvų gama su intervalais, pagal 32 lentelės duomenis:

33 lentelė. Spalvų reikšmės Lietuvos žemėlapyje

	$\leq -0,1$
	$[0 ; 0,6]$
	$[0,7 ; 1,3]$
	$\geq 1,4$

Žemėlapiuose tamsiai žalia spalva reiškia, kad tame regione tuo laikotarpiu padaugėjo gimusiųjų skaičius. Kuo šviesesnė žalia spalva, tuo mažesnis gimstamumas.



12 pav. Gimstamumo rodiklio pokyčiai regionuose 2002–2019m.

Iš 12 paveikslėlyje pavaizduotų žemėlapių matyti, kaip sumažėjo bendras gimstamumo rodiklis per analizuojamą laikotarpį. Vakarų regione gimstamumas buvo didžiausias 2002–2006 m. Nuo 2006 m. iki 2010 m. gimstamumas buvo gerokai sumažėjęs. Nuo 2010 m. iki 2019 m. gimstamumas auga pamažu. Šiaurės regione didžiausias gimstamumo rodiklio šuolis buvo nuo 2010 m. iki 2014 m., po to gimstamumas ėmė mažėti. Rytų regione gimstamumas augo nuo 2002 m. iki 2010 m., po to iki pat 2019 m. – mažėja. Pietų vidurio regione panašiai, kaip ir Rytų regione: iki 2010 m. gimstamumas didėjo, po 2010 m. ėmė mažėti.

3. Uždavinys. Patikrinti statistinę hipotezę $H_0: p_i = p_{i0}$, su $\alpha = 0,1$ ar bendrasis gimstamumo rodiklis turėjo esminių pokyčių kas 5 metus visuose keturiuose regionuose.

Sprendimas. Skaičiavimai analogiški kaip ir 2.4.1 poskyryje, todėl lentelės ir skaičiavimus žiūrėti 5 priede, čia pateikiamas tik apibendrinimas.

Išvados. 2002–2006 m. didžiausias gimstamumas buvo Vakarų ir Rytų regionuose. Vidutinis gimstamumas buvo Pietų vidurio regione, o mažiausias – Šiaurės regione.

2006–2010 m. didžiausias gimstamumas išliko Rytų regione. Vidutinis – Šiaurėje ir Pietų vidurio, o Vakarų regione, lyginant su 2002–2006 m., gimstamumas sumažėjo. Polinominio skirstinio hipotezė teigia, kad pokyčiai nebuvo esminiai.

2010–2014 m. Rytų ir Pietų vidurio regionuose gimstamumas sumažėjo. Šiaurės ir Vakarų regionuose gimstamumas padidėjo. Tačiau pagal polinominio skirstinio hipotezę, pokyčiai nebuvo esminiai.

2014–2019 m. Vakarų regione gimstamumas išliko kaip ir 2010–2014 m., o kituose regionuose gimstamumas sumažėjo. Pokyčiai nebuvo esminiai.

Pagal polinominio skirstinio hipotezę, nustatyta, kad gimstamumo rodiklio pokyčiai kas 5 metus nebuvo esminiai. Tačiau visu analizuojamu laikotarpiu gimstamumas regionuose sumažėjo.

2.4.4 MIRTINGUMO RODIKLIO POKYČIAI

1. Uždavinys. Paskaičiuoti Šiaurės regiono bendro mirtingumo rodiklio kaitą kas 5 metus.

Sprendimas. Visas analizuojamas laikotarpis padalytas į keturias laiko atkarpas: 2002–2006 m., 2006–2010 m., 2010–2014 m., 2014–2019 m. ir turimi duomenys (žr. 4 priedą):

34 lentelė. Šiaurės regiono bendrojo mirtingumo rodiklio skaičius, 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
BMR	12,9	12,9	13,2	14,1	14,6	15,3	15,1	14,7	15,0

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
BMR	15,1	15,4	15,6	15,2	16,1	16,2	16,4	16,4	15,9

Apkaičiuojami pokyčiai:

$$2006 \text{ m. } (14,6) - 2002 \text{ m. } (12,9) = 1,7$$

$$2010 \text{ m. } (15) - 2006 \text{ m. } (14,6) = 0,4$$

$$2014 \text{ m. } (15,2) - 2010 \text{ m. } (15) = 0,2$$

$$2019 \text{ m. } (15,9) - 2014 \text{ m. } (15,2) = 0,7$$

Analogiškai apskaičiuoti ir kitų regionų pokyčiai, jie pateikiami lentelėje:

35 lentelė. Bendrojo mirtingumo rodiklio skaičiaus pokyčiai regionuose

BMR				
Laikotarpiai	R.R	PV.R	V.R	Š.R
2002–2006	1,9	1,8	1,6	1,7
2006–2010	-0,9	-0,1	-0,3	0,4
2010–2014	0,1	0,3	0,4	0,2
2014–2019	-0,7	0,2	0,2	0,7

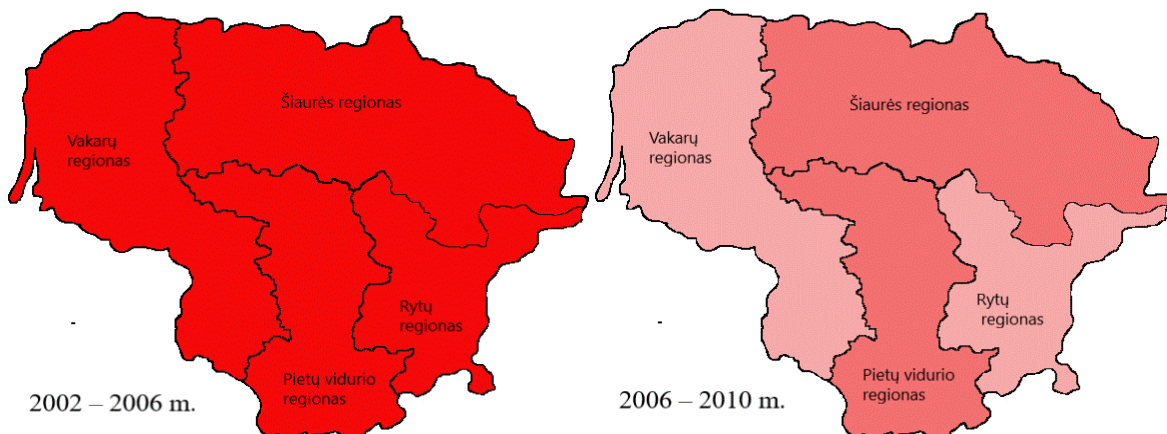
2. Uždavinys. Pavaizduoti keturių regionų bendrą mirtingumo rodiklio skaičiaus pokyčių dinamiką Lietuvos žemėlapiuose.

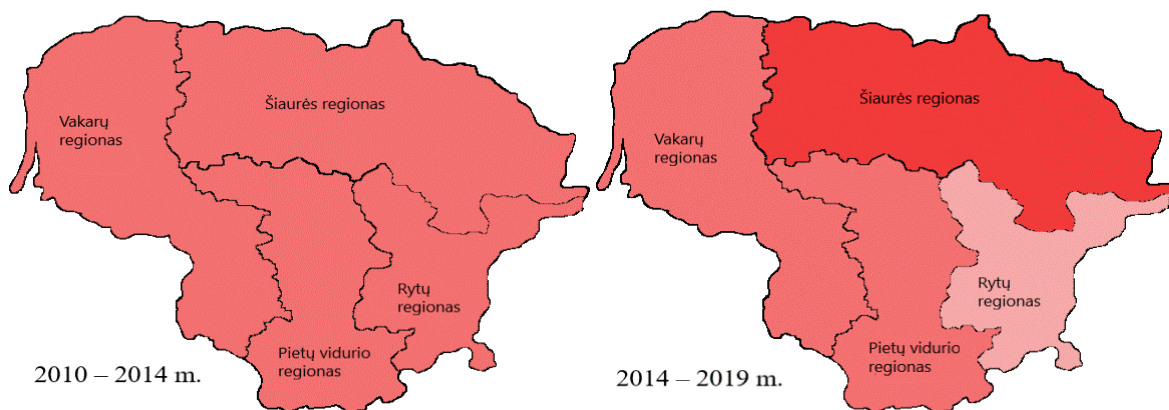
Sprendimas. Pateikiama spalvų gama su intervalais, pagal 35 lentelės duomenis:

36 lentelė. Spalvų reikšmės Lietuvos žemėlapyje

	$\leq -0,3$
	$[-0,2 ; 0,4]$
	$[0,5 ; 1,1]$
	$\geq 1,2$

Žemėlapiuose tamsiai raudona spalva žymi, kad tame regione tuo laikotarpiu mirusiųjų skaičiaus pokytis buvo didžiausias. Kuo šviesesnė raudona spalva, tuo pokytis mažesnis.





13 pav. Mirtingumo pokyčiai regionuose 2002–2019m.

3. Uždavinys. Patikrinti statistinę hipotezę $H_0: p_i = p_{i0}$, su $\alpha = 0,1$ ar bendrasis mirtingumo rodiklis turėjo esminių pokyčių kas 5 metus visuose keturiuose regionuose.

Sprendimas. Skaičiavimai analogiški kaip ir 2.4.1 poskyryje, todėl lenteles ir skaičiavimus žiūrėti 5 priede, čia pateikiamas tik apibendrinimas.

Išvados. Iš žemėlapių matoma, kad gyventojų mirtingumas per analizuojamą laikotarpį augo, tačiau tas augimas nebuvo vienodas. Matyti, kad didžiausias mirtingumo pokytis buvo 2002–2006 m. laikotarpiu visuose regionuose. O jau kitų metų intervale, 2006–2010 m., mirtingumo rodiklis visuose regionuose nebuvo toks spartus, sumažėjo. 2010–2014 m. vėl mirtingumas padidėjo, lyginant su 2006–2010 m. laikotarpiu. Paskutiniu laikotarpiu, 2014–2019 m., pastebima, kad mirtingumas sumažėjo Rytų regione, o padaugėjo Šiaurės regione. Kituose regionuose išliko toks pats kaip 2010–2014 m. Patikrinus polinominio skirstinio hipotezę, nustatyta, kad mirtingumo rodiklio pokyčiai kas 5 metus nebuvo esminiai.

2.4.5 MIGRACIJOS SOLDO KOEFICIENTO POKYČIAI

1. Uždavinys. Paskaičiuoti Šiaurės regiono bendrojo migracijos saldo koeficiento kaitą kas 5 metus.

Sprendimas. Visas analizuojamas laikotarpis padalytas į keturias laiko atkarpas: 2002–2006 m., 2006–2010 m., 2010–2014 m., 2014–2019 m. ir turimi duomenys (žr. 4 priedą):

37 lentelė. Šiaurės regiono migracijos saldo koeficiento skaičius, 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
K_{Δ}	-6,1	-11,6	-14,7	-20,3	-12,8	-13,8	-12,2	-16,2	-29,9

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
K_{Δ}	-17,1	-13,3	-11,8	-10,4	-14,4	-18,8	-18,4	-10,2	-6,0

Paskaičiuojamas pokytis:

$$2006 \text{ m. } (-12,8) - 2002 \text{ m. } (-6,1) = -6,7$$

$$2010 \text{ m. } (-29,9) - 2006 \text{ m. } (-12,8) = -17,1$$

$$2014 \text{ m. } (-10,4) - 2010 \text{ m. } (-29,9) = 19,5$$

$$2019 \text{ m. } (-6) - 2014 \text{ m. } (-10,4) = 4,4$$

Analogiškai apskaičiuojamas ir kitų regionų pokytis ir gauti duomenys pateikiami lentelėje:

38 lentelė. Migracijos soldo rodiklio skaičiaus pokyčiai regionuose

Laikotarpiai	K_{Δ}			
	R.R	PV.R	V.R	Š.R
2002–2006	-0,8	-3,3	-6,5	-6,7
2006–2010	-14,3	-21,2	-17,1	-17,1
2010–2014	17,0	24,3	20,6	19,5
2014–2019	10,4	8,6	6,3	4,4

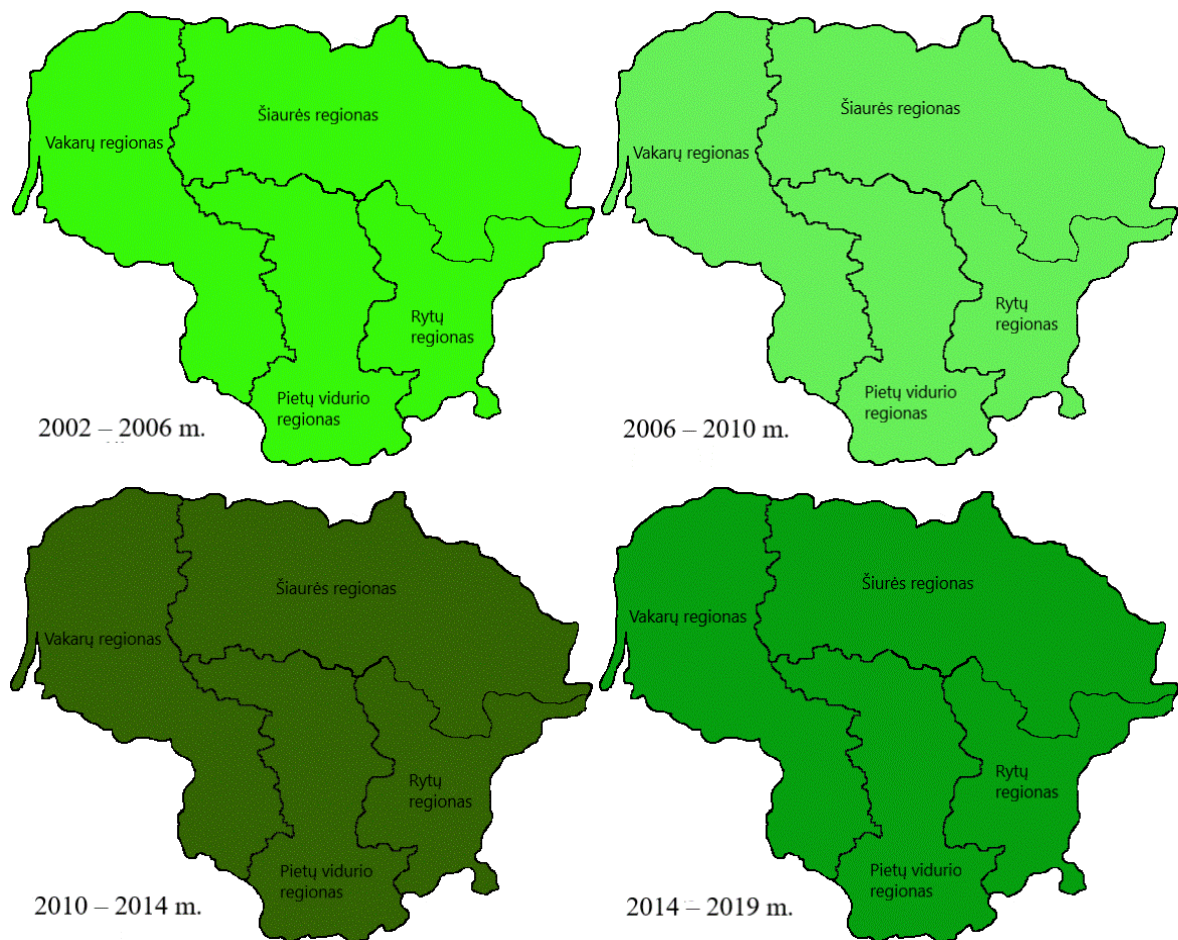
2. Uždavinys. Pavaizduoti keturių regionų migracijos soldo koeficientų pokyčių dinamiką Lietuvos žemėlapyje.

Sprendimas. Pateikiama spalvų gama su intervalais, pagal 38 lentelės duomenis:

39 lentelė. Spalvų reikšmės Lietuvos žemėlapyje

	≤ -13
	$[-12 ; 0]$
	$[0 ; 12]$
	≥ 13

Žemėlapiuose tamsiai žalia spalva žymi, kad tame regione tuo laikotarpiu gyventojų migracijos tempas mažėjo (mažiau gyventojų paliko regionus). Kuo šviesesnė žalia spalva, tuo gyventojų migracijos tempas didesnis (gyventojų išvykusių saičius didėja).



14 pav. Migracijos saldo pokyčiai regionuose 2002–2019m.

3. Uždavinys. Patikrinti statistinę hipotezę $H_0: p_i = p_{i0}$, su $\alpha = 0,1$ ar bendrasis migracijos saldo rodiklis turėjo esminių pokyčių kas 5 metus visuose keturiuose regionuose.

Sprendimas. Skaičiavimai analogiški kaip ir 2.4.1 poskyryje, todėl lenteles ir skaičiavimus žiūrėti 5 priede, čia pateikiamas tik apibendrinimas.

Išvados. Nustatyta, kad migracija per analizuojamą laikotarpį buvo skirtinga, bet visuose regionuose panaši, nes 14 paveikslėlyje matome, kad žemėlapiuose regionų spalvos sutampa. 2002–2006 m. matomas gyventojų mažėjimas visuose regionuose. Didžiausias gyventojų išvykimas buvo fiksuojamas 2006–2010 m. laikotarpiu, kai pasaulį ištiko finansinė krizė. Kitų metų laikotarpiu, 2010–2014 m., fiksuojamas teigiamas rodiklis, vadinasi, daugiau žmonių sugrįžo, nei išvyko. Teigiamas rodiklis taip pat išliko ir 2014–2019 m. Patikrinus polinominio skirstinio hipotezę apie migracijos saldo koeficientų pokyčius kas 5 metus, nustatyta, kad pokyčiai buvo esminiai.

2.4.6 SANTUOKŲ IR IŠTUOKŲ RODIKLIO POKYČIAI

1. Uždavinys. Paskaičiuoti Šiaurės regiono bendrojo santuokų ir ištuokų rodiklio kaitą kas 5 metus.

Sprendimas. Visas analizuojamas laikotarpis padalintas į keturias laiko atkarpas: 2002–2006 m., 2006–2010 m., 2010–2014 m., 2014–2019 m. ir turimi duomenys (žr. 4 priedą):

40 lentelė. Šiaurės regiono santuokų (ištuokų) rodikliaus skaičius, 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
SIR	1,06	1,16	1,83	2,10	2,54	3,08	3,74	2,73	2

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
SIR	2,10	2,86	2,98	3,65	3,82	3,65	3,96	3,68	3,02

Paskaičiuojamas pokytis:

$$2006 \text{ m. } (2,54) - 2002 \text{ m. } (1,06) = 1,48$$

$$2010 \text{ m. } (2) - 2006 \text{ m. } (2,54) = -0,54$$

$$2014 \text{ m. } (3,65) - 2010 \text{ m. } (2) = 1,65$$

$$2019 \text{ m. } (3,02) - 2014 \text{ m. } (3,65) = -0,63$$

Analogiškai apskaičiuojami ir kitų regionų pokyčiai ir pateikiami lentelėje:

41 lentelė. Santuokų ir ištuokų rodiklio skaičiaus pokyčiai regionuose (suapvalinti)

Laikotarpiai	SIR			
	R.R	PV.R	V.R	Š.R
2002–2006	1,3	1,3	1,7	1,5
2006–2010	0,1	-0,5	-0,3	-0,5
2010–2014	1,4	1,0	1,5	1,7
2014–2019	-0,3	-0,1	-0,4	-0,6

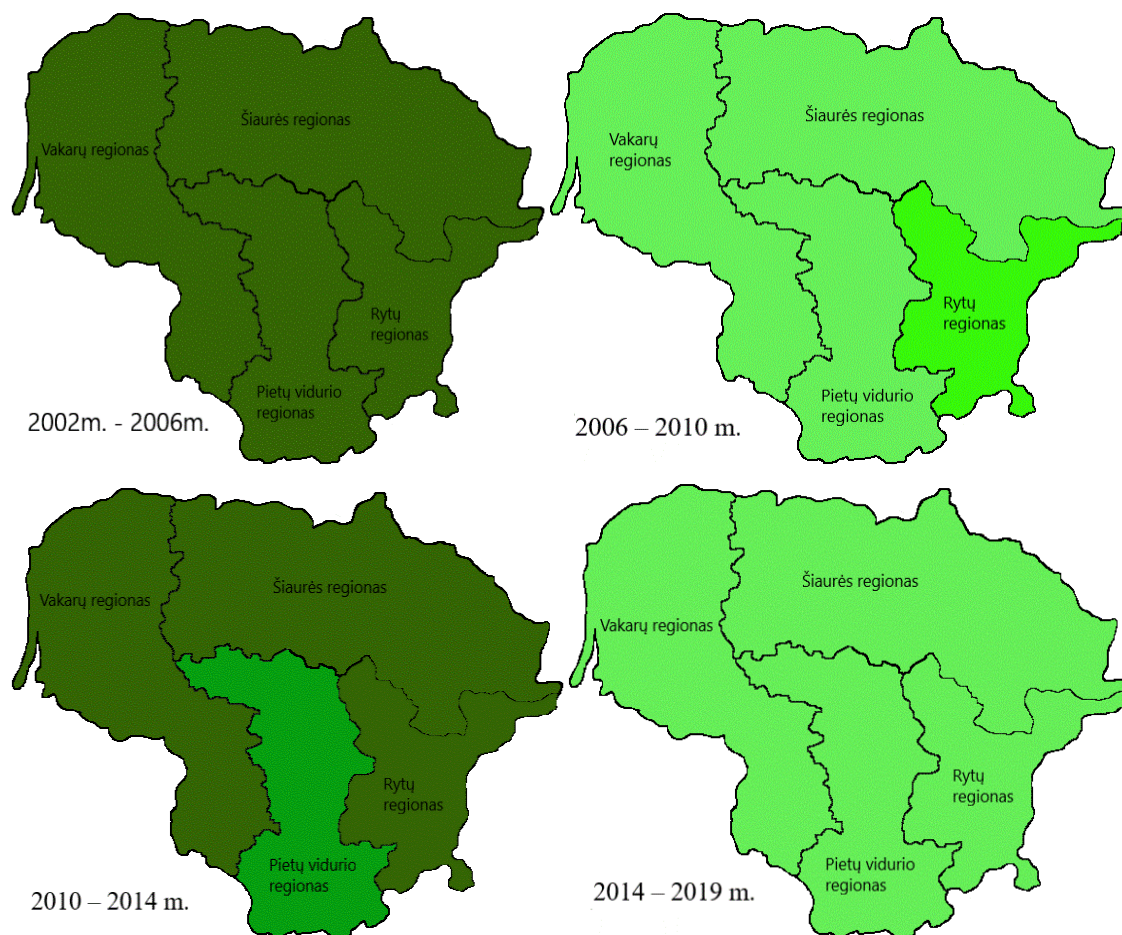
2. Uždavinys. Pavaizduoti keturių regionų santuokų, ištuokų rodiklio pokyčių dinamiką Lietuvos žemėlapiuose.

Sprendimas. Pateikiama spalvų gama su intervalais, pagal 41 lentelės duomenis:

42 lentelė. Spalvų reikšmės Lietuvos žemėlapyje

	≤ 0
	$[0,1 ; 0,5]$
	$[0,6 ; 1,1]$
	$\geq 1,2$

Žemėlapiuose tamsiai žalia spalva žymi, kad tame regione tuo laikotarpiu santuokų skaičius didėjo. Kuo šviesesnė spalva, tuo santuokų skaičius mažėjo.



15 pav. Santuokų ir ištuokų rodiklio pokyčiai regionuose 2002–2019 m.

3. Uždavinys. Patikrinti statistinę hipotezę $H_0: p_i = p_{i0}$, su $\alpha = 0,1$ ar santuokų, ištuokų rodiklis turėjo esminių pokyčių kas 5 metus visuose keturiuose regionuose.

Sprendimas. Skaičiavimai analogiški kaip ir 2.4.1 poskyryje, todėl lenteles ir skaičiavimus žiūrėti 5 priede, čia pateikiamas tik apibendrinimas.

Išvados. Nustatyta, kad nuo 2002 m. iki 2006 m. santuokų skaičius Lietuvoje augo ir visuose regionuose augimo pokytis buvo panašus. 2006–2010 m. santuokų skaičius mažėjo visuose regionuose, Rytų regione kritimo tempas buvo mažesnis, lyginant su kitais regionais. 2010–2014 m. vėl santuokų skaičius augo visuose regionuose, tačiau mažesnis augimas buvo Pietų vidurio regionuose. Nuo 2014 m. iki 2019 m. santuokų skaičius mažėjo visuose regionuose

panašiai. Patikrinus polinominio skirstinio hipotezę apie santuokų, ištuokų rodiklio pokyčius kas 5 metus, nustatyta, kad pokyčiai regionuose nebuvo esminiai.

2.5 LAIKO EILUTĖS

Turimi duomenys, kurie išsidėstę nuo 2002–2019 m. kasmet, esant tokiems duomenims, paprastai taikomi laiko eilučių metodai, tačiau tam dar papildomai reikia, kad tarp tų duomenų būtų tam tikra priklausomybė.

2.5.1 DUOMENŲ ATSITIKTINUMO IR NEPRIKLAUSOMUMO TIKRINIMAS

Uždavinys. Patikrinti statistinę hipotezę apie duomenų atsitiktinumą ir nepriklausomumą, Šiaurės regiono 2002–2019 m. laikotarpio duomenims. Imant reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,1$ ir $\alpha = 0,05$.

Sprendimas. 4 priede turimi duomenys apie senėjimo koeficientą Šiaurės regione:

43 Lentelė. Šiaurės regiono senėjimo koeficientas 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
IA	81	87	93	99	105	112	120	127	131

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
IA	139	144	148	151	156	163	162	164	166

Tikrinama statistinė hipotezė, H_0 : duomenys nepriklausomi ir atsitiktiniai su $\alpha = 0,1$.

Užrašoma Šiaurės regiono (senėjimo koeficiento) variacinė eilutė:

81, 87, 93, 99, 105, 112, 120, 127, 131, 139, 144, 148, 151, 156, 162, 163, 164, 166

$$n = 18,$$

$$Me = \frac{1}{2} \left(X_{\left(\frac{n}{2}\right)} + X_{\left(\frac{n}{2}+1\right)} \right) = \frac{1}{2} \left(X_{\left(\frac{18}{2}\right)} + X_{\left(\frac{18}{2}+1\right)} \right) = \frac{1}{2} \left(X_{(9)} + X_{(10)} \right) = \frac{1}{2} (131 + 139) = 135$$

sudaroma ženklų eilutė:

$$(-, -, -, -, -, -, -, -, -)(+, +, +, +, +, +, +, +)$$

$$N = \{\text{serijų skaičius}\} = 2$$

$$k_1 = \{+\} = 9; k_2 = \{-\} = 9$$

kritinė sritis:

$$W_1 = \left\{ X^n: N \leq N_{\frac{\alpha}{2}}(A, n_1, n_2) \text{ arba } N \geq N_{\frac{\alpha}{2}}(V, n_1, n_2) \right\};$$

$$\text{čia } n_1 = \max(k_1, k_2), n_2 = \min(k_1, k_2).$$

1. $\alpha = 0,1$

$$N_{0,05}(A, 9, 9) = 6$$

$$N_{0,05}(V, 9, 9) = 14$$

$6 \leq 2 \leq 14$ statistinė hipotezė H_0 atmetama, vadinasi, duomenys priklausomi ir neatsitiktiniai.

2. $\alpha = 0,05$

$$N_{0,025}(A, 9, 9) = 5$$

$$N_{0,025}(V, 9, 9) = 15$$

$5 \leq 2 \leq 15$ statistinė hipotezė H_0 atmetama, vadinasi, duomenys priklausomi ir neatsitiktiniai

44 lentelė. Hipotezės H_0 duomenys nepriklausomi ir atsitiktiniai su $\alpha = 0,1$

Regionai	IA	GV	BGR	BMR	K_{Δ}	SIR
R.R	–	–	–	+	+	–
PV.R	–	–	–	–	?	–
V.R	–	–	–	+	?	?
Š.R	–	–	–	+	+	–

45 lentelė. Hipotezės H_0 duomenys nepriklausomi ir atsitiktiniai su $\alpha = 0,05$

Regionai	IA	GV	BGR	BMR	K_{Δ}	SIR
R.R	+	–	+	+	+	+
PV.R	–	–	–	–	?	–
V.R	–	–	+	+	?	?
Š.R	–	–	+	+	+	–

(Jei H_0 priimame, „+“, jei atmetame, „–“, „?“ – nieko negalime pasakyti.)

Išvados. Patikrinus statistinę hipotezę, ar duomenys nepriklausomi ir atsitiktiniai su skirtingomis α , nustatyta, kad laiko eilutės labiau taikytinos duomenims, kai $\alpha = 0,1$. Duomenų eilutės, kurioms netaikytinos laiko eilutės, yra visų regionų bendram mirtingumo rodikliui, išskyrus Pietų vidurio regioną. Kur pažymėta „?“ (dėl per mažo duomenų kiekio nepavyko nustatyti duomenų nepriklausomumo), tokiu atveju galima pasirinktinai taikyti laiko eilutes arba ne. Dėl per mažo kiekio duomenų laiko eilutės netaikytinos Vakarų regiono santuokų, ištuokų rodikliams.

2.5.2 TRENDŲ EGZISTAVIMO PATIKRINIMAS

Iš ankstesnio poskyrio 2.5.1 nustatyta, kad daugumai duomenų, kai $\alpha = 0,1$, taikytini laiko eilučių modeliai. Duomenims, kur nepavyko nustatyti duomenų nepriklausomumo, laiko eilučių modelių netaikysime.

Uždavinys. Patikrinti Šiaurės regiono senėjimo koeficiento duomenims statistinę hipotezę $H_0: MX_t = a = const.$, jei hipotezė H_0 atmetama, tai laiko eilutė turi tendą.

Sprendimas. Sudaroma ženklų „+“ ir „-“ eilutė, ji lyginama su mediana.

$$M_e = 135$$

$$(- - - - - - - - - -)(+ + + + + + + + +)$$

Palyginus duomenis su mediana, tikrinama hipotezė $H_0: MX_t = a = const.$

$\gamma(n)$ – bendras serijų skaičius = 2. $\tau(n)$ – ilgiausios serijos ilgis = 9.

$$\gamma(n) > \left[\frac{1}{2}(n + 2 - 1,96\sqrt{n - 1}) \right]$$

$$\tau(n) < [1,43 \ln(n + 1)]$$

Jei viena iš aukščiau pateiktų nelygybių negalioja, H_0 atmetame.

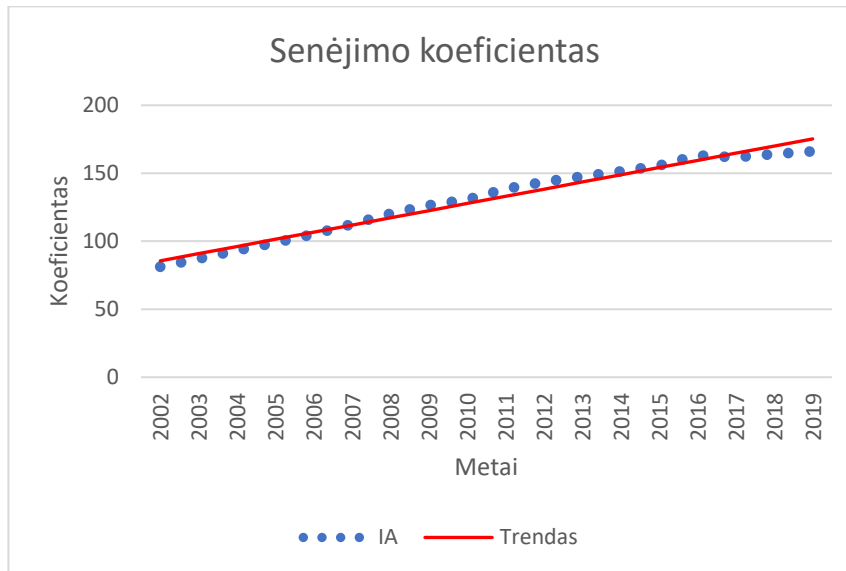
$$2 > \left[\frac{1}{2}(18 + 2 - 1,96\sqrt{18 - 1}) \right] \Leftrightarrow 2 \not\geq 6$$

$$\tau(n) < [1,43 \ln(18 + 1)] \Leftrightarrow 9 \not\leq 4,05$$

Matoma, kad lygybės negalioja, vadinasi, H_0 atmetamas, o tai reiškia, kad duomenų eilutė turi tendą. Kitų duomenų eilučių rezultatų lentelė žr. 6 priede.

2.5.3 TRENDO ELIMINAVIMAS IR AR(1) RADIMAS

Grafike matomi Šiaurės regiono senėjimo koeficiento duomenys ir tiesinio trendo lygtis. Galima laikyti, kad trendas yra tiesinis $f_t = \widehat{\beta}_0 + \widehat{\beta}_1 t$.



16 pav. Šiaurės regiono senėjimo koeficiento ir trendo tiesės

Su *Excel* programa suskaičiavus įverčius, gaunama lygtis $f_t = 5,1538t + 81,283$. Lygties determinacijos koeficientas $R^2 = 0,98$, tai rodo lygties tinkamumą. Kitų regionų ir faktorių tiesinės lygtys žr. 6 priede. Eliminavus trendą, gaunami nauji duomenys:

44 Lentelė. Šiaurės regiono duomenys eliminavus trendą iš senėjimo koeficiento duomenų eilutės 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Y_t	-4,3	-3,6	-2,9	-2,5	-1,3	0,5	3,1	4,0	2,8

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Y_t	5,5	5,2	3,9	2,4	1,5	3,7	-2,9	-6,0	-9,1

Randamas AR(1) modelis Šiaurės regiono senėjimo koeficiento duomenims. Tarkime, turime autoregresijos procesą, išreikštą lygtimi: $Y_t = a_1 \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t$, ir stebinius: $Y_1 = -4,3, Y_2 = -3,6, Y_3 = -2,9, Y_4 = -2,5, Y_5 = -1,3, Y_6 = 0,5, Y_7 = 3,1, Y_8 = 4, Y_9 = 2,8, Y_{10} = 5,5, Y_{11} = 5,2, Y_{12} = 3,9, Y_{13} = 2,4, Y_{14} = 1,5, Y_{15} = 3,7, Y_{16} = -2,9, Y_{17} = -6, Y_{18} = -9,1$, ir žinome lygties eilę AR(1), tikslas – įvertinti koeficientus \hat{a}_1 ir $\hat{\sigma}^2$.

Stebėjimų skaičius: $n = 18$. Apskaičiuojamas šios imties vidurkis pagal formulę:

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = -0,0003.$$

Remiantis formule

$$\hat{\gamma}(k) = \frac{1}{n} \cdot \sum_{j=1}^{n-k} (Y_{j+k} - \bar{Y}) \cdot (Y_j - \bar{Y}),$$

Excel programa apskaičiuojami $\hat{\gamma}(0), \hat{\gamma}(1)$ įverčiai:

$$\begin{cases} \hat{\gamma}(0) = 19,1 \\ \hat{\gamma}(1) = 12,9 \end{cases}$$

Gautus įverčius įstatome į *Yule–Walker* lygtis:

$$\begin{cases} 19,1 = a_1 \cdot 12,9 + \sigma^2 \\ 12,9 = a_1 \cdot 19,1 \end{cases}$$

Išsprendus lygčių sistemą, gaunama $\hat{a}_1 = 0,67, \hat{\sigma}^2 = 10,46$.

Taigi, gaunama AR(1) proceso lygtis

$$Y_t = 0,67 \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0; 10,46).$$

Gauta AR(1) proceso lygtį $Y_t = 0,67 \cdot Y_{t-1} + \varepsilon_t$ sujungiama su anksčiau gauta trendo lygtimi $f_t = 5,1538t + 81,283$ ir turime:

$$X_t - 5,1538t - 81,283 = 0,67X_{t-1} - 0,67 \cdot 5,1538t + 0,67 \cdot 5,138 - 0,67 \cdot$$

81,283;

$$X_t = 0,67X_{t-1} + 5,1538t \cdot (1 - 0,67) + 81,283 \cdot (1 - 0,67) + 0,67 \cdot 5,1538;$$

$$X_t = 0,67X_{t-1} + 5,1538t \cdot 0,33 + 81,283 \cdot 0,33 + 0,67 \cdot 5,1538;$$

$$X_t = 0,67X_{t-1} + 1,701t + 26,8234 + 3,5;$$

$$X_t = 0,67X_{t-1} + 1,70t + 30,32 + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t \sim N(0; 10,46).$$

Patikrinama, ar ši lygtis teisinga su 2010 metų duomenimis:

$$X_{2010} = 0,67 \cdot 127 + 1,70 \cdot 8 + 30,32 = 129,01 \sim 129.$$

Išvada. 2010 metų Šiaurės regiono senėjimo koeficientas = 131, o surašius turimus duomenis į apskaičiuotą AR(1) proceso lygtį, gaunama 129. Akivaizdu, kad naudojant gautą AR(1) proceso lygtį galima su nedidele paklaida prognozuoti duomenis.

Kitų duomenų eilutės patikrintos analogiškai ir rezultatai pateikiami 6 priede.

2.6 DEMOGRAFINIŲ MODELIŲ PRITAIKYMAS SENĖJIMO KOEFICIENTUI PROGNOZUOTI

Taikant modelius prognozei, rekomenduojama prognozuoti $\frac{1}{3}$ analizuojamo laikotarpio, nes kitu atveju prognozė nebelaikoma tiksli.

1. Uždavinys. Apskaičiuoti Šiaurės regiono senėjimo koeficiento augimo koeficientą aritmetiniam tiesiniam modeliui, geometriniam augimo modeliui ir eksponentiniam modeliui.

Sprendimas. 4 priede turimi Šiaurės regiono 2002–2019 m. senėjimo koeficiento duomenys.

45 Lentelė. Šiaurės regiono senėjimo koeficientas 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
IA	81	87	93	99	105	112	120	127	131

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
IA	139	144	148	151	156	163	162	164	166

Aritmetinio tiesinio augimo modelio augimo koeficientai (AK) skaičiuojami pagal formulę:

$$AK = \frac{P_t - P_0}{P_0 \times t}$$

$$t = 18$$

$$AK = \frac{P_t - P_0}{P_0 \times t} = \frac{166 - 81}{81 \times 18} = -\frac{85}{1458} = 0,058$$

Geometrinio augimo modelio augimo koeficientai (AK) skaičiuojami pagal formulę:

$$AK = \sqrt[t]{\frac{P_t}{P_0}} - 1$$

$$AK = \sqrt[18]{\frac{166}{81}} - 1 = \sqrt[18]{2,049} - 1 = 0,041$$

Eksponentinio modelio augimo koeficientai (AK) paskaičiuojami pagal formulę:

$$AK = \frac{\ln \frac{P_t}{P_0}}{t}$$

$$AK = \frac{\ln \frac{P_t}{P_0}}{t} = \frac{\ln \frac{166}{81}}{18} = 0,04$$

Analogiškai paskaičiuojami ir kitų regionų senėjimo koeficiento augimas.

46 lentelė. Senėjimo augimo koeficientai regionuose

Regionai / modeliai	Aritmetinio (AK)	Geometrinio (AK)	Eksponentinio (AK)
Rytų regionas	0,019	0,016	0,016
Pietų vidurio regionas	0,045	0,033	0,033
Vakarų regionas	0,046	0,035	0,034
Šiaurės regionas	0,058	0,041	0,040

2. Uždavinys. Paskaičiuoti aritmetinio tiesinio, geometrinio, eksponentinio, augimo modelio naujus duomenis, pagal Šiaurės regiono senėjimo koeficiento duomenis.

Sprendimas. Turimi Šiaurės regiono senėjimo koeficiento duomenys 2002–2019 m. ir žinomi visų modelių augimo koeficientai ir formulės, pagal ką paskaičiuojami nauji duomenys nuo 2002–2019 m. su skirtingais modeliais:

Aritmetinio tiesinio modelio: $P_{2002} = P_0 + (P_0 \times AK \times t) = 81 + (81 \times 0,058 \times 1) = 86$.

Geometrinio augimo modelio: $P_{2002} = P_0 \times (1 + AK)^t = 81 \times (1 + 0,041)^1 = 84$.

Eksponentinio augimo modelio: $P_{2002} = P_0 \times e^{AK \times t} = 81 \times e^{0,040 \times 1} = 84$.

Analogiškai paskaičiuojami ir kiti duomenys iki 2019 m. skirtingais modeliais ir gaunama tokia duomenų lentelė:

47 lentelė. Nauji prognozuojami duomenys pagal 4 skirtingus modelius Šiaurės regiono senėjimo koeficientui. 2002–2019 m.

Modelis	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
Aritmetinis	86	90	95	100	105	109	114	119	123
Geometrinis	84	88	91	95	99	103	107	112	116
Eksponentinis	84	88	91	95	99	103	107	112	116

Modelis	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
Aritmetinis	128	133	137	142	147	152	156	161	166
Geometrinis	121	126	131	137	142	148	154	160	167
Eksponentinis	121	126	131	136	142	148	154	160	166

3. Uždavinys. Rasti visų modelių paklaidas ir nustatyti tinkamą modelį Šiaurės regiono senėjimo koeficiento duomenims prognozuoti.

Sprendimas. Pagal 47 lentelės duomenis ir formulę $MAD = \frac{\sum |y_t - F_t|}{n}$ galima rasti visų modelių paklaidas:

$$MAD_{Aritmetinis} = \frac{\sum |y_t - F_t|}{n} = \frac{|81 - 86| + |87 - 90| + \dots + |166 - 166|}{18} = 5,7,$$

$$MAD_{Geometrinis} = \frac{\sum |y_t - F_t|}{n} = \frac{|81 - 84| + |87 - 88| + \dots + |166 - 167|}{18} = 9,4,$$

$$MAD_{Eksponentinis} = \frac{\sum |y_t - F_t|}{n} = \frac{|81 - 84| + |87 - 88| + \dots + |166 - 166|}{18} = 9,8,$$

Aritmetinio tiesinio augimo modelio paklaida yra mažiausia $MAD = 5,7$, pagal teoriją teigiama, kad modelio, kurio absoliutinė paklaida mažiausia, yra labiausiai tinkamas modelis tiems duomenims prognozuoti. Kitų regionų paklaidos pateikiamos lentelėje žr. 10 priedas. Sujungus visus gautus modelio parametrus, gaunamas modelis:

$$P(t) = 81 + (81 \times 0,058 \times t) + 5,7.$$

4. Uždavinys. Atlikti prognozę Šiaurės regiono 2020–2025 m. laikotarpio senėjimo koeficientui aritmetinio tiesinio augimo modeliu.

Sprendimas. Turime aritmetinio tiesinio augimo modelį $P(t) = 81 + (81 \times 0,058 \times t) + 5,7$, pagal modelį įsistatome prognozuojamų metų skaičiaus eilės numerį:

$$P(2020) = 81 + (81 \times 0,058 \times 19) + 5,7 = 176,$$

$$P(2021) = 81 + (81 \times 0,058 \times 20) + 5,7 = 181,$$

$$P(2022) = 81 + (81 \times 0,058 \times 21) + 5,7 = 185,$$

$$P(2023) = 81 + (81 \times 0,058 \times 22) + 5,7 = 190,$$

$$P(2024) = 81 + (81 \times 0,058 \times 23) + 5,7 = 195,$$

$$P(2025) = 81 + (81 \times 0,058 \times 24) + 5,7 = 200.$$

Išvados. Taikant demografinio prognozavimo modelius (aritmetinį, geometrinį, eksponentinį) Šiaurės regiono senėjimo koeficientui, rastas augimo koeficientas nuo 2002 m. iki 2019 m. Perskaičiuoti duomenys, rastos modelių paklaidos. Pagal mažiausios paklaidos rodiklį labiausiai Šiaurės regiono senėjimo koeficientui prognozuoti tiko aritmetinio tiesinio augimo modelis. Pagal modelio prognozę 2025 m. senėjimo koeficientas padidės iki 200. Prognozė yra laikoma tinkama, jei augimo koeficientas Šiaurės regione išliks toks pats iki 2025 m.

Kitų regionų senėjimo koeficientų prognozės paskaičiuojamos analogiškai. pateikiamos lentelės žr. 10 priedas.

Išvados. Pritaikius analogiškus skaičiavimus kitų regionų senėjimo koeficientams, nustatyta, kad Rytų bei Šiaurės regionams labiausiai tinkamas geometrinis augimo modelis, Pietų

vidurio ir Vakarų regionams aritmetinis augimo modelis. Atlikus prognozę pagal modelius, prognozuojama, kad senėjimo koeficientai 2025 m. bus Rytų regione – 123, Šiaurės regione – 200. Vakarų regione – 163 ir Pietų vidurio regione – 178.

2.7 REGRESINĖ ANALIZĖ

Šiame skyriuje taikysiu koreliacinę analizę tarp senėjimo koeficiento ir charakteristikų (gyventojų sk., gimstamumas, mirtingumas, migracijos koef., santuokų (ištuokų) sk.) visose regionų grupėse.

2.7.1 NORMALUMO TIKRINIMAS

Matematinėje statistikoje dažniausiai reikalaujama, kad duomenys būtų pasiskirstę pagal normalųjį skirstinį, $X \sim N(a; \sigma^2)$. Tam galima nubraižyti histogramą su normaliąja kreive, tačiau visiškai teigti, ar duomenys turi normalųjį skirstinį, negalima. Tam būtina taikyti Kolmogorovo-Smirnovo testą.

Uždavinys. Patikrinti, ar Šiaurės regiono duomenų eilutėms galima taikyti metodus, tinkančius normaliajam skirstiniui 2002–2019 m. laikotarpiu.

Sprendimas. Duomenys sukelti į SPSS programą ir su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0,01$ gaunama išklotinės lentelė:

48 Lentelė. Kolmogorov-Smirnovo testo Šiaurės regiono rezultatai

	IA	GV	BGR	BMR	K	SIR	
N	18	18	18	18	18	18	
Normal Parameters ^{a,b}	Mean	130,44	723697,89	8,572	15,006	-14,333	130,14
	Std. Deviation	28,613	79948,236	,3392	1,1159	5,5180	28,613
Most Extreme							
Differences	Absolute	,127	,103	,194	,165	,140	,127
	Positive	,107	,103	,194	,114	,116	,107
	Negative	-,127	-,085	-,136	-,165	-,140	-,127
Test Statistic		,127	,103	,194	,165	,140	,127
Asymp. Sig. (2-tailed)		,200 ^{c,d}	,200 ^{c,d}	,071 ^c	,200 ^{c,d}	,200 ^{c,d}	,200 ^{c,d}

Iš 48 lentelės matyti, kad Šiaurės regiono senėjimo koeficiento $p = 0,200$, gyventojų skaičiaus $p = 0,200$, bendro gimstamumo rodiklio $p = 0,079$, bendro mirtingumo rodiklio $p =$

0,200, migracijos soldo koeficiento $p = 0,200$, santuokų (ištuokų) rodiklio 0,200. Visais atvejais p reikšmės didesnės už pasirinktą reikšmingumo lygmenį $\alpha = 0,01$.

Kitas analogiškas lenteles žr. (7 priede). Darbe pateikta bendra rezultatų lentelė:

49 lentelė. $X \sim N(a; \sigma^2)$

	IA	GV	BGR	BMR	KΔ	SIR
Rytų regionas	–	–	–	+	–	+
Pietų vidurio regionas	+	+	+	+	+	+
Šiaurės regionas	+	+	+	+	+	+
Vakarų regionas	+	+	–	+	+	+

Jeigu duomenys pasiskirstę pagal $X \sim N(a; \sigma^2)$, rašomas +, jei ne, –.

Išvados. Iš 49 lentelės matyti, kad Rytų regione pagal normalųjį skirstinį pasiskirstę tik bendrieji mirtingumo ir santuokų, ištuokų rodikliai. Kitoms duomenų eilutėms metodų, tinkančių normaliajam skirstiniui, taikyti negalime. Pietų vidurio, Šiaurės regiono visų duomenų eilutėms taikytini metodai, tinkantys normaliajam skirstiniui. Vakarų regione tik bendrojo gimstamumo rodiklio duomenys netinkami analizuoti taikant modelius, tinkančius normaliajam skirstiniui.

2.7.2 KORELIACIJOS KOEFICIENTAS

Bandant suprasti, nuo ko priklauso Lietuvos gyventojų senėjimas, svarbu patikrinti, kokia priklausomybė egzistuoja tarp faktorių ir senėjimo koeficiento.

Uždavinys. Apskaičiuoti Šiaurės regiono (senėjimo koeficiento ir gyventojų skaičiaus), empirinį koreliacijos koeficientą.

Sprendimas. Turimi duomenys iš 4 priedo:

50 Lentelė. Šiaurės regiono senėjimo koeficientas ir gyventojų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
IA	81	87	93	99	105	112	120	127	131
GV	847174	838603	826175	811082	790852	776600	761681	748734	733124

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
IA	139	144	148	151	156	163	162	164	166
GV	707088	691123	678571	667075	657196	644523	628996	613832	604133

Koreliacijos koeficientas skaičiuojamas:

IA(Y) 81, 87, 93, 99, 105, 112, 120, 127, 131, 139, 144, 148, 151, 156, 163, 162, 164, 166

GV(X) 847 174, 838 603, 826 175, 811 082, 790 852, 776 600, 761 681, 748 734, 733 124, 707 088, 691 123, 678 571, 667 075, 657 196, 644 523, 628 996, 613 832, 604 133

$$\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i = \frac{1}{18} (847174 + 838603 + \dots + 613832 + 604133) = 723697,9$$

$$\bar{Y} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n Y_i = \frac{1}{18} (81 + 87 + \dots + 164 + 166) = 130,4$$

$$r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x \cdot Q_y}}$$

$$\begin{aligned} Q_{xy} &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})(Y_i - \bar{Y}) = \\ &= (81 - 130,4)(84174 - 723697) + \dots + (166 - 130,4)(604133 - 723697,9) \\ &= -38436186,97 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} Q_x &= \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2 = (847174 - 723697)^2 + \dots + (604133 - 723697,9)^2 \\ &= 108659246563,8 \end{aligned}$$

$$Q_y = \sum_{i=1}^n (Y_i - \bar{Y})^2 = (81 - 130,4)^2 + \dots + (166 - 130,4)^2 = 13795,6$$

$$r = \frac{Q_{xy}}{\sqrt{Q_x \cdot Q_y}} = \frac{-38436186,97}{\sqrt{13795,6 * 108659246563,8}} = \frac{-38436186,97}{38717173,22} = -0,992$$

Išvados. Empirinis koreliacijos koeficientas tarp senėjimo koeficiento bei gyventojų skaičiaus Šiaurės regione nuo 2002 iki 2019 metų gaunamas -0,992, tai rodo didelę tiesinę priklausomybę tarp duomenų. Žmonių skaičiui mažėjant, auga senėjimo koeficientas.

Kitų duomenų koreliacijos koeficientų, paskaičiuotų *Excel* programa, rezultatų lentelė:

51 lentelė. Empirinis koreliacijos koeficientas tarp AI ir faktorių

Rytų regionas					
	GV	BGR	BMR	K_Δ	SIR
IA	–	–	0,63	–	-0,85
Pietų vidurio regionas					
	GV	BGR	BMR	K_Δ	SIR
IA	-0,99	0,89	0,89	0,2	-0,72
Vakarų regionas					
	GV	BGR	BMR	K_Δ	SIR
IA	-0,99	0,83	0,91	0,01	-0,83

Šiaurės regionas					
	GV	BGR	BMR	K_{Δ}	SIR
IA	-0,99	–	0,93	0,05	-0,8

Matome, kad senėjimo koeficientas labai stipriai koreliuoja su visais faktoriais, išskyrus bendrąjį migracijos saldo rodiklį, su kuriuo koreliacijos visai nėra arba ji labai maža.

Empirinį koreliacijos koeficientą gavome -0,992, tai rodo, kad priklausomybė tarp tų duomenų neigiama ir labai stipri.

Tačiau, norint įsitikinti, kad gauta koreliacija – neatsitiktinis sutapimas, apskaičiuojama p reikšmė. P reikšmė parodo, ar koreliacija statistiškai reikšminga. Koreliacijos statistiniam reikšmingumui įvertinti tikriname statistinę hipotezę $H_0: \rho = -0,995$, imdami reikšmingumo lygmenį $\alpha=0,01$:

$$Arthr = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r},$$

$$Arthr = \frac{1}{2} \ln \frac{1+(-0,992)}{1-(-0,992)} = -2,76,$$

$$Arthr(-0,995) = \frac{1}{2} \ln \frac{1+(-0,995)}{1-(-0,995)} = -2,99$$

$$Z = \sqrt{n-3} \cdot (Arthr - Arth0,995),$$

$$Z = \sqrt{18-3} \cdot (-2,76 - (-2,99)) = -0,89.$$

Tuo remdamiesi, hipotezę $H_0: \rho = 0,995$ tikriname su reikšmingumo lygmeniu $\alpha = 0,01$ sudarome kritinę sritį:

$$W_1 = \{(X_i, Y_i), i = 1 \dots, n: |Z| > u_{1-\frac{\alpha}{2}}\}, \text{ jei } H_0 \text{ alternatyva yra } H_1^{(1)}: \rho \neq 0,995.$$

Kadangi $|Z| = 0,89 < u_{0,995} = 2,576$, tai hipotezė H_0 priimama, galima teigti, kad statistiniai duomenys neprieštarauja hipotezės $H_0: \rho = 0,995$ teisingumui.

Galime teigti, kad gautas empirinis koreliacijos koeficientas statistiškai reikšmingas ir artimas vienetui.

2.7.3 TIESINĖS REGRESIJOS MODELIO ANALIZĖ

2.7.2 poskyryje buvo nustatyta, kad tarp duomenų yra didelė priklausomybė ir koreliacijos koeficientas yra statistiškai reikšmingas, todėl vertinga užrašyti tiesinės regresijos modelį, kuriuo remdamiesi galėtume prognozuoti senėjimo koeficientą keleriems metams į priekį:

$$y = \beta_0 + \beta_1 x + \varepsilon, \quad \varepsilon \sim N(0, \sigma^2)$$

Uždavinys. Užrašyti tiesinės regresijos lygtį, Šiaurės regiono senėjimo koeficiento ir gyventojų skaičiaus duomenims 2002–2019 m. laikotarpiu rasti σ^2 .)

Sprendimas. Turimi duomenys iš 4 priedo:

52 Lentelė. Šiaurės regiono senėjimo koeficientas ir gyventojų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
IA	81	87	93	99	105	112	120	127	131
GV	847174	838603	826175	811082	790852	776600	761681	748734	733124

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
IA	139	144	148	151	156	163	162	164	166
GV	707088	691123	678571	667075	657196	644523	628996	613832	604133

Pažymėkime $X - GV$, $Y - IA$.

2.7.2 skyrelyje apskaičiavome, kad:

$$n = 18, \quad Q_X = 108659246563,8,$$

$$\bar{X} = 723697,9, \quad Q_Y = 13795,6,$$

$$\bar{Y} = 130,4, \quad Q_{XY} = -38436186,97.$$

$\hat{\beta}_1$ ir $\hat{\beta}_0$ parametų įverčiai:

$$\hat{\beta}_1 = \frac{Q_{XY}}{Q_X} = \frac{-38436186,97}{108659246563,8} = -0,00035$$

$$\hat{\beta}_0 = \bar{Y} - \hat{\beta}_1 \cdot \bar{X} = 130,4 - (-0,00035) \cdot 723697,9 = 383,69$$

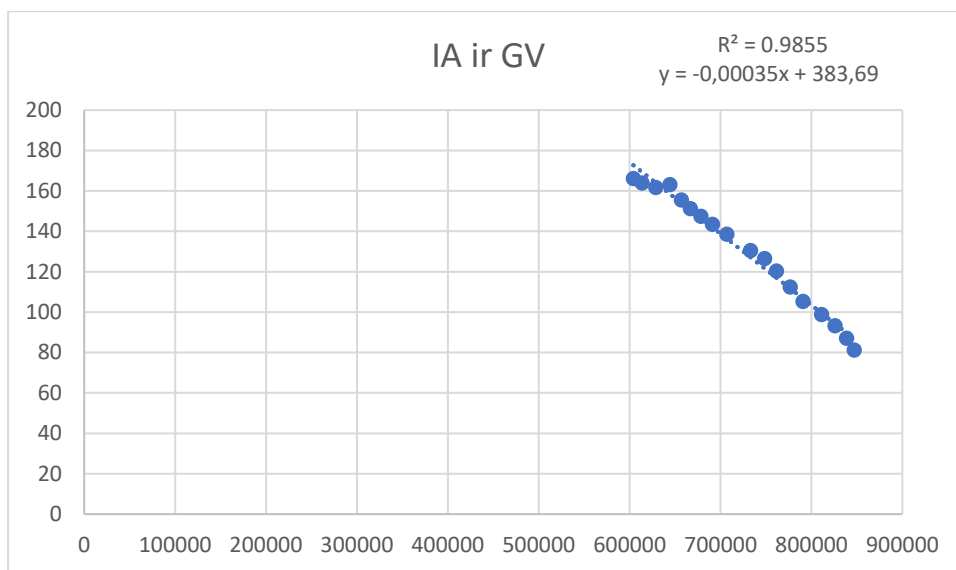
σ^2 skaičiavimas:

$$S^2 = \frac{1}{n-2} \sum_1^n (Y_i - \hat{\beta}_0 - \hat{\beta}_1 \cdot X_i)^2 = \frac{1}{18-2} (847174 - 383,69 - (-0,00035) \cdot 81)^2 + \dots$$

$$+ (604133 - 383,69 - (-0,00035) \cdot 166)^2 = 771601,1,$$

$$y = -0,00035x + 386,42 + \varepsilon_i, \varepsilon_i \sim N(0; 771601,1).$$

Tą patį skaičiavimą galima atlikti ir *Excel* programa, gaunama:



17 pav. Sklaidos diagrama

Išvados. Iš 17 paveikslėlio matyti, kad visi taškai išsidėstę labai arti tiesės ir determinacijos koeficientas $R^2 = 0,99$, vadinasi, galima teigti, kad tiesinės regresijos modelis kaip ir teisingas.

Galima patikrinti, ar lygtis $y = -0,00035x + 383,69 + \varepsilon_i$ Šiaurės regiono senėjimo koeficiento ir gyventojų skaičiaus rodiklių yra teisinga. Y yra senėjimo koeficientas, kurį norime rasti, kai žinome, kad 2007 metais gyventojų skaičius buvo 776 600, surašome skaičius į lygtį $y = -0,00035 \cdot 776\,600 + 383,69 + \varepsilon_i$, apskaičiavus gaunama, kad $y = 112,2$ pažiūrėjus 4 priede į Šiaurės regiono 2007 metų senėjimo koeficiento skaičių, matyti, kad yra 112. Čia taip pat nustatyta, kad modelis su nedidele paklaida paskaičiuoja senėjimo koeficientą, kai žinomas žmonių skaičius.

2.7.4 PIRMINIO MODELIO TIKRINIMAS SU SPSS

Tačiau norint tiesinės regresijos modelį laikyti visiškai tinkamu analizuoti ateities duomenims reikalinga išsamesnė modelio tinkamumo analizė.

2.7.3 poskyryje tiesinės regresijos modelis $y = -0,00035x + 383,69 + \varepsilon_i$ nėra laikomas tikslingu, kol nėra patikrinti 1.12 teorijoje nurodyti modelio tinkamumo kriterijai. Todėl tiesinės regresijos modelio tinkamumo kriterijai patikrinami su SPSS programa, ar modelis tikrai tinkamas prognozuoti duomenims.

Uždavinys. SPSS programa išsamiau tikrinama Šiaurės regiono senėjimo koeficiento ir gyventojų skaičiaus tiesinės regresijos modelio tinkamumo kriterijai.

Sprendimas. Turimi duomenys iš 4 priedo:

53 Lentelė. Šiaurės regiono senėjimo koeficientas ir gyventojų skaičius 2002–2019 m.

Metai	2002	2003	2004	2005	2006	2007	2008	2009	2010
IA	81	87	93	99	105	112	120	127	131
GV	847174	838603	826175	811082	790852	776600	761681	748734	733124

Metai	2011	2012	2013	2014	2015	2016	2017	2018	2019
IA	139	144	148	151	156	163	162	164	166
GV	707088	691123	678571	667075	657196	644523	628996	613832	604133

Suvedami į SPSS programą. Atlikę skaičiavimus gauname lentelių išklotines:

Determinacijos koeficientas R^2 – parodo, kiek procentų Y elgesio paaiškina kintamojo X elgesys. Determinacijos koeficientas įgyja reikšmes iš intervalo [0;1], kuo koeficiento reikšmė didesnė, tuo modelis labiau tinka duomenims.

54 Lentelė. „Model Summary“ lentelės rezultatai

Model	R	R Square	Adjusted R Square	Std. Error of the Estimate
1	-,992	,985	,984	3,667

54 lentelės išklotinėje determinacijos koeficientas $R^2 = 0,985$. Primenu, kad teorijoje buvo paminėta, kad jei $R^2 < 0,20$, modelis nėra tinkamas. Mūsų atveju galime daryti išvadą, kad determinacijos koeficientas labai didelis ir atmesti tiesinės regresijos modelio, kaip netinkamo, negalima.

55 Lentelė. „ANOVA“ lentelės rezultatai

Model		Sum of Squares	df	Mean Square	F	Sig.
1	Regression	13703,255	1	13703,255	1018,879	,000
	Residual	215,189	16	13,449		
	Total	13918,444	17			

55 lentelėje matyti, kad kriterijaus p reikšmė Sig. = 0,000 ir yra mažesnė už 0,05, todėl galima teigti, kad modelyje gyventojų skaičius yra regresorius, nuo kurio priklauso senėjimo koeficientas.

56 Lentelė. „Coefficients“ lentelės rezultatai

Model		Unstandardized Coefficients		Standardized Coefficients	t	Sig.	Collinearity Statistics	
		B	Std. Error	Beta			Tolerance	VIF
1	(Constant)	383,692	8,098		47,846	,000		
	GV	-0,00035	0,00001	-,992	-31,920	,000	1,000	1,000

Lentelėje *Coefficients* pateikiama pagrindinė informacija apie modelio koeficientus. Lentelėje *p* reikšmė mažesnė už 0,05, vadinasi, hipotezė apie koeficientų lygybę nuliui atmesta. Koeficientas yra statistiškai reikšmingas. Ir modelis yra tinkamas.

Modelyje buvo vienas regresorius ir multikolinerumo problemos nėra, nes (VIF=1). Beta stulpelis taip pat netaikomas, nes yra vienas priklausomas kintamasis ir vienas regresorius.

Svarbu pateikti parametų pasikliautinuosius intervalus, jie matomi šioje lentelėje:

57 Lentelė. „Coefficients“ lentelės tesinys

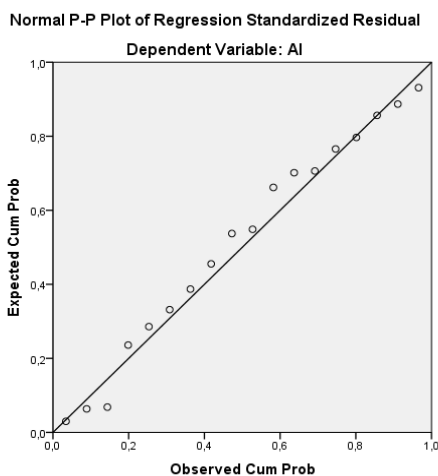
Model		Unstandardized Coefficients		95,0% Confidence Interval for B	
		B	Std. Error	Lower Bound	Upper Bound
1	(Constant)	383,692	8,098	370,280	404,612
	GV	-0,00035	0,00001	-0,00033	-0,00038

Parametro β_1 pasikliautinis intervalas (-0,00033; -0,00038), parametro β_0 (370,28; 404,61).

58 Lentelė. „Residual Statistics“ lentelės rezultatai

	Minimum	Maximum	Mean	Std. Deviation	N
Predicted Value	86,60	172,90	130,44	28,391	18
.....
Cook's Distance	,000	,502	,085	,142	18
Centered Leverage Value	,001	,140	,056	,048	18

58 lentelės aktualiausias rodiklis yra eilutėje *Cook's Distance* stulpelyje *maximum*, jis yra mažesnis už 1, vadinasi išskirčių nėra.



18 pav. P-P plot grafikas

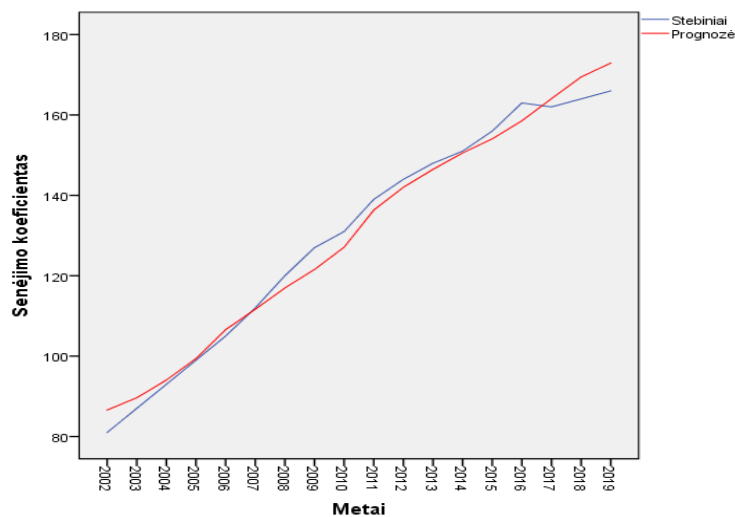
Matoma, kad taškai išsidėstę arti tiesės, tai leidžia manyti, kad standartizuotųjų liekamųjų paklaidų normalumo reikalavimas yra tenkinamas. Kad tuo geriau įsitikintume, patikrinkime Šapiro–Vilko testu.

59 Lentelė., „Tests of Normality“ lentelės rezultatai

	Kolmogorov-Smirnov			Shapiro-Wilk		
	Statistic	df	Sig.	Statistic	df	Sig.
Standardized Residual	,111	18	,200	,959	18	,588

Iš lentelės matyti, kad Šapiro–Vilko kriterijaus $p = 0,588$, o tai daugiau už 0,05, kas įrodo, kad standartizuotųjų liekamųjų paklaidų normalumo reikalavimas yra tenkinamas.

Taip pat galime pateikti prognozės ir stebinių grafinį palyginimą:



19 pav. Stebinių ir modelio prognozės grafikai

Idealiu modeliu laikytina, jeigu abi linijos sutaptų. Iš grafiko matoma, kad abi linijos juda panašia kreive, yra ir sutapimų. Tačiau griežtiems statistikams gali pasirodyti ir nelabai tinkamas modelis.

Išvados. Sudarytas regresijos modelis $IA = -0,00035GV + 383,69 + \varepsilon_i$, rodantis senėjimo koeficiento priklausomybę nuo gyventojų skaičiaus. Gautas $R^2 = 0,985$, ANOVA kriterijaus p reikšmė mažesnė už 0,05, koeficientas yra statistiškai reikšmingas, išskirčių nėra, standartizuotųjų liekanų normalumo reikalavimas yra tenkinamas. Stebinių ir prognozės grafikų kreivės juda panašiai ir gana arti šalia viena kitos. Visi reikalavimai leidžia modelį laikyti tinkamą prognozuoti duomenims. Analogiškai patikrinti ir kiti modeliai.

Visų modelių R^2 yra tinkamas priimti modelio tinkamumą, ANOVA p reikšmė tenkina visus modelius, Stjudento p reikšmė taip pat. Šapiro–Vilko kriterijaus neatitiko Rytų regiono IA ir GV, Pietų vidurio, Vakarų regiono modelis IA ir BMR modelių. Kuko mato kriterijus nebuvo tenkinamas. Rytų regione tarp IA ir BMR duomenų. Modeliai tarp IA ir K_{Δ} nebuvo skaičiuojami, nes tarp tų duomenų nebuvo koreliacijos. Tinkami modeliai, žr. 9 priedą.

IŠVADOS

1. Lietuvos gyventojų senėjimą geriausiai tirti Lietuvos apskritys sugrupavus pagal gyventojų skaičių, suskirsčius jas į Šiaurės (Šiauliai, Panevėžys, Utena), Vakarų (Klaipėda, Telšiai, Tauragė, Marijampolė), Rytų (Vilnius) ir Pietų vidurio (Kaunas, Alytus) regionus.
2. Nustatyta, kad senėjimo koeficientas 2002–2008 m. visuose regionuose didėjo panašiai. Kritinis senėjimas visuose regionuose prasidėjo tarp 2006–2009 m. Per finansinę krizę ir po jos senėjimo koeficientai labiausiai augo Šiaurės regione.
3. Rasti neigiamų faktorių pagal regionus 2002–2019 m. laikotarpio duomenys.
4. Ištirta gyventojų senėjimą atspindinčių veiksnių (senėjimo koef., gyventojų sk., gimstamumas, mirtingumas, migracijos koef., santuokų (ištuokų) sk.) raida nagrinėjamu laikotarpiu. Taikant polinominio skirstinio hipotezę, nustatyta, kuriais laikotarpiais tie pokyčiai buvo reikšmingi. Veiksnių dinamika pavaizduota žemėlapiuose.
5. Nustatyta senėjimo koeficiento priklausomybė nuo rodiklių taikant regresijos analizę ir tikrinant atitinkamas statistines hipotezes.
6. Nustatyta tiriamų rodiklių ir koeficientų priklausomybė nuo laiko, rastos trendo lygtys.
7. Nustatytos tiriamų veiksnių duomenų eilutės, kurioms galioja laiko eilučių modeliai. Tiems duomenims rasti trendai ir AR(1) modeliai, leidžiantys prognozuoti duomenis.
8. Senėjimo koeficiento prognozei tinkamiausi modeliai yra: geometrinis augimo modelis (Šiaurės ir Rytų regionams) ir aritmetinis augimo modelis (Vakarų, Pietų vidurio regionams). Prognozuojama, kad senėjimo koeficientai 2025 m. Rytų regione bus 123, Šiaurės regione – 200, Vakarų regione – 163, ir Pietų vidurio regione – 178.

LITERATŪROS SĄRAŠAS

1. Bakštys A., *Statistikos namų darbai su skaičiuokle MS EXCEL*, mokytoji knyga. Vilnius: BMK leidykla, 2015.
2. Boguslauskas V., *Ekonometrika*. Kaunas: 2008.
3. Kanišauskas V., *Tikimybių teorijos ir matematinės statistikos pagrindai*, mokytoji knyga, Šiaulių universitetas, Šiauliai: 2000.
4. Kanišauskas V., *Vidinės migracijos matematinis modelis*, Vilniaus universiteto leidykla, [žiūrėta 2022-04-12] Prieiga per internetą <<https://www.zurnalai.vu.lt/LMR/article/view/17727>>.
5. Kanopienė V., *Socialinė demografija*, Mykolo Romerio universitetas, Vilnius: 2008.
6. Kligienė N., *Įvadas į atsitiktinių sekų statistinę analizę*, VGTU leidykla, Vilnius: 1998.
7. Kasnauskienė G., *Demografiniai pagrindai*, Vilniaus universitetas, Vilnius: 2006.
8. Kruopis J., *Matematinė statistika*, Vilnius: 1993.
9. Lietuvos Respublikos Seimas, *Nutarimas dėl nacionalinės gyventojų senėjimo pasekmių įveikimo strategijos patvirtinimo*, [žiūrėta 2022-03-23] Prieiga per internetą <<https://e-seimas.lrs.lt/portal/legalAct/lt/TAD/TAIS.235511>>.
10. Leipus R., *Finansinės laiko eilutės*. Vilnius: 2010. [žiūrėta 2022-04-10] <http://web.vu.lt/mif/a.reklaite/files/2012/09/fin_laik_eil_2.pdf>.
11. Leonavičienė T., *SPSS programų paketo taikymas statistiniuose tyrimuose*, Vilniaus pedagoginis universitetas, Vilnius: 2007.
12. Stankūnienė V., *Lietuvos gyventojai: struktūra ir demografinė raida*, Vilnius: 2006.

SANTRAUKA

Magistrinio darbo tyrimo objektas – statistiniai duomenys iš Lietuvos statistikos departamento apie Lietuvos gyventojų senėjimo koeficientą ir jį neigiamai lemiančius demografinius veiksnius: gyventojų skaičių, gimstamumo, mirtingumo, migracijos, santuokų ir ištuokų rodiklių skaičius 2002–2019 metų laikotarpiu. Darbo tikslas – statistiškai ištirti gyventojų senėjimą Lietuvoje ir su tuo susijusių faktorių kaitą. Tam buvo išskelti keli uždaviniai: rasti optimaliausią apskričių grupavimą į keturias grupes, kad gyventojų skaičius būtų panašus. Perskaičiuoti duomenis pagal naujai gautas grupes, nustatyti, kaip kinta senėjimo koeficientas visuose regionuose tiriamuoju 2002–2019 m. laikotarpiu. 2002–2019 m. neigiamų faktorių pagal regionus apskaičiavimas, ištirti duomenų pokyčių dinamiką, pritaikant polinominio skirstinio statistinę hipotezę, pavaizduoti Lietuvos žemėlapiuose. Taikant regresinę analizę, nustatyti senėjimo koeficiento priklausomybę su kitais rodikliais, rasti tinkamus tiesinius regresijos modelius. Nustatyti, kurias duomenų eilutes galima aprašyti laiko eilučių modeliais, rasti AR(1) lygtis, eliminavus trendą. Taikant keturis demografinio prognozavimo modelius, nustatyti tinkamiausią prognozavimo modelį, atlikti 2025 m. grupių senėjimo koeficiento prognozę. Magistro darbe gauti rezultatai – Lietuvos gyventojų senėjimą geriausia tirti Lietuvos apskritis sugrupavus pagal gyventojų skaičių į Šiaurės, Vakarų, Rytų ir Pietų vidurio regionus. Nustatyta, kad senėjimo koeficientas 2002–2008 m. visuose regionuose didėjo panašiai. Kritinis senėjimas visuose regionuose prasidėjo tarp 2006–2009 m. Per finansinę krizę senėjimo koeficientai labiausiai paaugo Šiaurės regione. Rasti 2002–2019 m. laikotarpio neigiamų faktorių duomenys pagal regionus. Taikant polinominio skirstinio hipotezę, nustatyta, kad esminiai pokyčiai kas penkerius metus buvo ir gyventojų, ir migracijos saldo duomenims, senėjimo koeficiento duomenims 2010–2014 m. laikotarpiu, veiksnių dinamika pavaizduota žemėlapiuose. Nustatyta didžiausia senėjimo koeficiento priklausomybė nuo gyventojų skaičiaus, empirinis koreliacijos koeficientas -0,99. Nustatyta, kurioms duomenų eilutėms tinka laiko eilučių modeliai ir rasti AR(1) modeliai, leidžiantys prognozuoti duomenis. Senėjimo koeficiento prognozei tinkamiausias yra geometrinis augimo modelis, pagal modelį prognozuojama, kad senėjimo koeficientai 2025 m. Rytų regione bus 123, Šiaurės regione – 200. Aritmetinis augimo modelis tinka Pietų vidurio regione – 178, Vakarų regione – 163, Jei niekas nesikeis, senėjimo koeficientas ir toliau sparčiai didės visuose regionuose.

SUMMARY

The object of research is statistical data from the Lithuanian Department of Statistics on the aging index of the Lithuanian population and the demographic factors that negatively affect it: the population rate, the number of birth, death, migration, marriage, and divorce rate during 2002-2019. The aim of the work is to statistically investigate the aging of the population in Lithuania and the changes in related factors. In order to do this, several objectives have been set: to find the optimal grouping of counties into four groups, so that the population would be similar. To recalculate the data according to the newly obtained groups. To determine how the aging index shifts in all regions during the investigated period of 2002-2019. Calculation of negative factors by regions during 2002-2019. To investigate the dynamics of changes in the data by employing the statistical hypothesis of a polynomial distribution and to display the data on maps of Lithuania. By employing regression analysis, to identify the correlation of the aging index with other indicators, find appropriate linear regression models. To determine which data series can be described by time series models, to find the AR(1) equations after eliminating the trend. By employing four demographic forecasting models, to identify the most appropriate forecasting model, to make a forecast regarding the groups aging index for 2025. The obtained results of the MA thesis show that the aging of the Lithuanian population can best be investigated by grouping Lithuanian counties according to their population into the northern, western, eastern, and south-central regions. It was found that the aging index in 2002-2008 increased similarly in all regions. Critical aging in all regions started between 2006 and 2009. During the financial crisis, aging indices increased most in the northern region. Data on negative factors by region for the period of 2002-2019 is found. By employing the hypothesis of a polynomial distribution, it was found that there were significant changes every five years in the population, migration saldo, and aging index data during 2010-2014, the dynamics of the factors being displayed in the maps. The highest correlation of the aging index with the population was identified, an empirical correlation index is -0.98. It was identified which data series are suitable for time series models and AR(1) models allowing to forecast the data were found. The most appropriate models for the forecast of the aging index are the geometric growth model, based on the model it is forecasted that aging indices in 2025 will be 123 in the eastern region and 200 in the northern region. The arithmetic

growth model fits in the western region – 163 and 178 in the south-central region. If nothing changes, the aging index will continue to increase rapidly in all regions.

PRIEDAI

1 PRIEDAS

Pradiniai duomenys pagal apskritis

gyventojų skaičius apskrityse iki 15 m., 65 ir vyresni

Metai	Šiaulių apskritis		Panevėžio apskritis		Utenos apskritis	
	iki 15m.	65+	iki 15m.	65+	iki 15m.	65+
2002	72 976	53 686	57 795	47 189	33 002	32 158
2003	69 403	54 704	55 054	48 156	30 860	32 610
2004	66 183	55 671	52 448	48 916	29 024	33 116
2005	63 037	56 083	49 854	49 274	27 426	33 358
2006	59 268	56 119	47 074	49 625	25 809	33 482
2007	55 775	56 288	44 447	50 276	24 378	33 569
2008	52 307	56 562	41 662	50 719	22 908	33 400
2009	49 711	56 532	39 543	50 774	21 780	33 183
2010	47 630	55 952	37 956	50 448	20 852	32 604
2011	45 157	56 521	36 024	50 496	19 400	32 347
2012	43 262	56 335	34 508	50 121	18 597	31 862
2013	41 822	55 924	33 366	49 760	17 832	31 550
2014	40 650	55 584	32 419	49 629	17 203	31 368
2015	39 668	55 781	31 567	49 050	16 669	31 370
2016	38 950	53 349	30 981	48 348	16 225	33 845
2017	38 187	54 966	30 501	49 237	15 844	31 101
2018	37 718	55 756	29 449	49 063	15623	30 967
2019	37 124	55 548	28 837	48 850	15 424	30 811

Vilniaus apskritis			Alytus apskritis			Kauno apskritis	
Metai	iki 15 m.	65+	Metai	iki 15 m.	65+	iki 15 m.	65+
2002	146 200	112 369	2002	36 341	29 967	127 441	98 906
2003	140 087	116 223	2003	34 635	30 531	122 191	101 104
2004	134 720	120 116	2004	33 159	31 244	117 628	103 576
2005	130 385	123 081	2005	31 478	31 461	113 247	104 997
2006	125 903	125 464	2006	29 785	31 625	108 181	106 272
2007	122 630	126 973	2007	28 145	31 677	103 801	107 805
2008	120 175	128 797	2008	26 467	31 792	99 566	109 688
2009	119 382	129 650	2009	25 125	31 861	96 659	110 954
2010	119 945	129 875	2010	24 074	31 664	944 44	111 043
2011	121 062	127 780	2011	21 898	31 512	90 970	111 942
2012	121 435	128 187	2012	21 069	31 321	88 548	111 831
2013	122 355	128 969	2013	20 324	31 131	86 901	111 637
2014	123 127	130 167	2014	19 617	31 176	85 455	111 840

2015	124 502	132 170	2015	18 992	31 351	84 470	112 883
2016	126 291	137 236	2016	18 566	27 284	84 126	99 232
2017	128 518	134 548	2017	18 045	31 561	83 951	113 365
2018	130 705	136 278	2018	17 752	31 556	83 787	113 545
2019	133 147	137 290	2019	17 386	31 561	84 212	113 070

Metai	Klaipėda		Marijampolė		Tauragė		Telšiai	
	iki 15m.	65+	iki 15m.	65+	iki 15m.	65+	iki 15m.	65+
2002	73 896	50 887	39 601	29 665	28 809	20 917	39 367	24 655
2003	70 290	52 738	37 934	29 998	27 431	21 105	37 537	25 024
2004	67 142	54 502	36 424	30 357	26 253	21 282	35 947	25 362
2005	64 134	55 785	34 962	30 310	24 924	21 247	34 174	25 526
2006	60 435	56 443	33 020	30 409	23 296	21 035	32 186	25 465
2007	57 708	57 253	31 448	30 554	21 973	21 027	30 411	25 653
2008	55 538	57 636	29 823	30 693	20 569	21 024	28 556	25 626
2009	54 160	57 698	28 518	30 648	19 459	20 896	27 339	25 553
2010	53 172	57 317	27 408	30 095	18 455	20 557	26 101	25 341
2011	52 510	58 106	25 697	30 067	16 998	20 719	24 702	25 817
2012	51 537	57 984	24 875	29 645	16 347	20 375	23 883	25 672
2013	50 901	58 155	23 957	29 297	15 858	20 196	23 260	25 579
2014	50 461	58 491	23 160	28 946	15 397	19 998	22 599	25 540
2015	50 236	59 379	22 509	28 862	14 934	20 002	21 915	25 667
2016	50 353	53 147	22 070	25 021	14 657	17 482	21 528	22 831
2017	50 397	60 148	21 510	28 660	14 384	19 755	21 085	25 856
2018	50 645	60 621	20 920	28 464	14 126	19 608	20 712	25 939
2019	51 209	61 047	20 390	28 313	13 727	19 463	20 401	25 941

Gyventojų skaičius apskrityse

Metai	Panevėžys	Šiauliai	Utena	Alytus	Kaunas
2002	296 871	366 330	183 973	186 484	695 033
2003	294 182	362 783	181 638	184 992	689 787
2004	290 097	357 441	178 637	182 751	682 074
2005	284 918	350 938	175 226	179 626	671 923
2006	278 262	341 761	170 829	175 813	658 100
2007	273 701	335 221	167 678	173 028	650 408
2008	268 815	328 699	164 167	170 249	643 358
2009	264 319	323 353	161 062	167 603	638 385
2010	259 374	316 278	157 472	164 833	629 896
2011	251 401	303 110	152 577	158 403	610 225
2012	246 298	295 824	149 001	154 980	599 638
2013	242 340	290 471	145 760	152 139	592 816
2014	238 748	285 763	142 564	149 851	587 238
2015	235 394	281 632	140 170	147 809	583 047

2016	231 001	276 329	137 193	145 109	577 358
2017	225 033	270 482	133 481	141 616	569 875
2018	218 726	265 467	129 639	138 095	563 112
2019	214 617	262 487	127 029	135 906	561 430

Metai	Vilnius	Klaipėda	Marijampolė	Tauragė	Telšiai
2002	845 292	382 076	187 281	132 982	178 315
2003	843 320	379 878	185 970	131 808	177 139
2004	841 748	376 854	184 058	130 179	175 090
2005	838 556	372 541	181 376	127 690	172 426
2006	831 237	364 486	177 439	124 020	167 888
2007	828 191	360 434	174 810	121 549	164 963
2008	826 306	357 201	172 200	119 179	162 431
2009	826 445	355 084	169 973	117 100	160 532
2010	824 193	350 306	167 143	114 763	157 718
2011	811 515	340 047	162 205	110 511	152 594
2012	805 915	334 744	159 273	108 125	149 843
2013	806 308	331 553	156 455	106 335	147 728
2014	806 106	329 013	154 084	104 623	145 482
2015	807 523	327 300	151 793	103 083	143 511
2016	805 380	324 618	149 077	101 200	141 293
2017	805 173	320 507	145 360	98 608	137 769
2018	805 367	317 252	141 287	95 817	134 139
2019	810 538	317 722	138 678	93 695	132 082

Gimstamumas apskrityse

Metai	Šiauliai	Panevėžys	Utena	Alytus	Kaunas
2002	3 181	2 554	1 305	1 550	5 879
2003	3 198	2 508	1 337	1 614	5 926
2004	3 154	2 417	1 344	1 488	5 879
2005	2 963	2 409	1 331	1 483	5 906
2006	2 868	2 333	1 306	1 464	5 704
2007	2 951	2 206	1 236	1 350	5 920
2008	3 024	2 236	1 346	1 370	6 312
2009	2 937	2 332	1 280	1 428	6 490
2010	2 738	2 122	1 188	1 326	6 187
2011	2 789	2 076	1 137	1 301	6 019
2012	2 751	2 144	1 161	1 377	5 978
2013	2 760	2 116	1 120	1 333	5 789
2014	2 714	2 173	1 152	1 297	5 956
2015	2 754	2 224	1 135	1 348	6 117
2016	2 730	2 018	1 091	1 249	6 025

2017	2 511	1 937	985	1 234	5 564
2018	2 365	1 789	985	1 092	5 618
2019	2 341	1 743	932	1 080	5 416

Metai	Vilnius	Klaipėda	Marijampolė	Tauragė	Telšiai
2002	6 995	3 316	1 840	1 223	1 678
2003	7 104	3 398	1 814	1 299	1 729
2004	7 437	3 413	1 744	1 136	1 734
2005	7 711	3 327	1 538	1 141	1 624
2006	8 040	3 433	1 676	1 080	1 657
2007	8 424	3 597	1 522	1 128	1 628
2008	9 022	3 737	1 586	1 113	1 745
2009	9 527	3 869	1 608	1 072	1 573
2010	9 420	3 640	1 498	1 015	1 506
2011	9 155	3 590	1 470	1 035	1 580
2012	9 146	3 627	1 552	1 092	1 603
2013	8 961	3 617	1 516	1 089	1 535
2014	9 392	3 643	1 468	1 078	1 447
2015	9 780	3 859	1 488	1 153	1 558
2016	9 903	3 584	1 402	1 072	1 460
2017	9 374	3 438	1 352	964	1 332
2018	9 372	3 477	1 312	889	1 303
2019	8 999	3 408	1 260	862	1 321

Mirusių skaičius apskrityse

Metai	Šiauliai	Panevėžys	Utena	Alytus	Kaunas
2002	4 563	3 724	2 664	2 359	7 955
2003	4 409	3 745	2 679	2 311	7 998
2004	4 486	3 741	2 662	2 370	8 174
2005	4 752	3 895	2 807	2 651	8 471
2006	4 925	3 862	2 784	2 655	8 567
2007	4 918	4 022	2 918	2 614	8 831
2008	4 635	4 053	2 823	2 498	8 540
2009	4 427	3 870	2 702	2 331	8 201
2010	4 478	3 846	2 686	2 407	8 246
2011	4 301	3 741	2 605	2 288	7 985
2012	4 393	3 697	2 576	2 382	8 012
2013	4 382	3 584	2 626	2 332	8 042
2014	4 113	3 547	2 494	2 291	7 846
2015	4 332	3 748	2 521	2 292	8 468
2016	4 193	3 719	2 547	2 294	8 215
2017	4 195	3 630	2 512	2 324	8 012
2018	4 142	3 461	2 449	2 223	7 885

2019	3 799	3 363	2 446	2 240	7 515
------	-------	-------	-------	-------	-------

Metai	Klaipėda	Marijampolė	Tauragė	Telšiai	Vilnius
2002	4 112	2 424	1 755	2 098	9 418
2003	4 065	2 397	1 747	2 125	9 514
2004	4 137	2 471	1 834	2 044	9 421
2005	4 476	2 507	1 897	2 221	10 122
2006	4 560	2 523	1 932	2 174	10 831
2007	4 647	2 567	1 809	2 227	11 071
2008	4 490	2 348	1 730	2 058	10 657
2009	4 373	2 344	1 690	2 031	10 063
2010	4 359	2 346	1 764	1 967	10 021
2011	4 408	2 267	1 691	2 026	9 725
2012	4 212	2 300	1 606	1 943	9 817
2013	4 368	2 376	1 699	2 057	10 045
2014	4 195	2 324	1 544	1 992	9 906
2015	4 369	2 370	1 666	1 951	10 059
2016	4 415	2 239	1 655	1 897	9 932
2017	4 281	2 194	1 542	1 905	9 547
2018	4 180	2 216	1 501	1 884	9 633
2019	4 242	2 136	1 374	1 762	9 404

Išvykusių ir atvykusių skaičius apskrityse

Metai	Šiauliai		Panevėžys		Utena		Alytus		Kaunas	
	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę
2002	9 451	12 120	4 067	5 586	3 020	3 996	2 078	2 761	8 564	11 734
2003	11 830	17 037	5 169	8 017	3 483	5 139	3 333	4 877	11 898	17 539
2004	12 949	19 162	5 079	8 934	3 635	5 728	3 718	5 961	12 237	20 093
2005	11 735	20 114	4 236	9 406	3 095	6 016	3 815	6 460	11 819	23 077
2006	12 202	17 650	4 318	7 350	2 924	4 597	3 084	4 678	11 825	16 654
2007	13 823	19 642	4 636	7 706	2 968	4 797	3 111	4 626	13 032	17 171
2008	13 119	18 090	4 390	7 069	3 201	4 829	3 113	4 631	14 011	16 756
2009	11 784	18 308	4 287	7 694	2 617	4 785	2 771	4 638	11 454	18 232
2010	11 678	23 962	4 193	10 442	3 091	6 488	2 792	8 141	10 702	28 314
2011	13 800	20 375	4 810	8 248	3 438	5 546	3 726	6 162	13 194	21 815
2012	14 611	19 577	5 585	7 989	3 722	5 555	3 814	5 655	15 373	20 157
2013	14 525	18 703	5 449	7 573	3 855	5 545	3 762	5 051	15 971	19 296
2014	15 095	18 991	5 591	7 571	4 031	5 083	4 082	5 130	17 505	19 806
2015	15 128	20 100	5 242	8 111	3 812	5 403	3 990	5 746	16 975	20 313
2016	16 046	21 634	5 430	9 697	3 781	6 037	3 890	6 338	17 908	23 201
2017	16 598	21 244	5 139	9 753	3 551	5 866	3 498	5 929	18 387	22 702
2018	18 611	21 308	6 343	8 780	4 141	5 287	4 405	5 463	21 300	20 715
2019	18 523	19 809	6 090	7 898	4 131	4 683	4 595	5 271	24 351	20 841

Metai	Vilnius		Klaipėda		Marijampolė		Tauragė		Telšiai	
	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę
2002	10 261	9 810	4 944	6 346	2 176	2 923	1 704	2 346	2 729	3 485
2003	16 063	15 225	7 828	10 185	2 862	4 253	2 123	3 295	3 744	5 397
2004	15 703	16 911	8 320	11 909	3 132	5 110	2 461	4 252	3 930	6 284
2005	14 170	19 078	7 882	14 788	2 934	5 979	2 160	5 074	3 412	7 353
2006	13 584	13 839	8 086	11 011	3 141	4 968	2 227	3 846	3 773	6 181
2007	15 250	14 488	9 207	11 390	3 239	4 862	2 310	3 999	4 069	6 002
2008	16 022	14 248	9 319	10 683	3 097	4 607	2 044	3 506	3 982	5 568
2009	13 701	15 417	7 536	11 810	2 793	4 936	1 872	3 591	3 105	5 461
2010	13 306	25 383	7 134	16 674	2 794	6 920	1 688	5 191	3 135	7 798
2011	16 785	21 815	8 595	13 080	3 366	5 617	2 400	4 130	3 617	5 922
2012	22 317	21 241	9 551	12 154	3 743	5 843	2 981	4 259	4 192	5 969
2013	21397	20 515	10 075	11 864	3 720	5 280	2 713	3 815	3 650	5 374
2014	23 416	21 485	11 207	12 368	3 990	5 474	2 779	3 853	4 096	5 522
2015	23 355	25 219	10 948	13 120	3 762	5 655	2 663	4 033	3 827	5 652
2016	25 885	26 063	11 926	15 206	3 687	6 656	2 677	4 686	4 246	7 333
2017	25 823	25 456	12 774	15 186	4 259	7 495	2 486	4 699	3 874	6 931
2018	29 835	24 403	15 336	14 163	4 862	6 514	2 826	4 336	4 726	6 202
2019	33 993	23 615	16 308	13 238	4 672	5 834	2 644	4 005	4 327	5 355

Santuokų ir ištuokų skaičius apskrityse

Metai	Šiauliai		Panevėžys		Utena		Alytus		Kaunas	
	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos
2002	1 538	1 191	1 208	874	743	528	791	485	3 532	2 273
2003	1 573	1 168	1 198	916	754	469	839	554	3 663	2 270
2004	1 936	1 239	1 430	925	909	603	902	577	4 072	2 198
2005	2 003	1 201	1 414	864	913	565	1 017	629	4 149	2 298
2006	2 138	1 166	1 479	923	1 006	528	1 081	624	4 375	2 307
2007	2 408	1 164	1 528	948	1 143	577	1 128	578	4 665	2 369
2008	2 392	1 062	1 719	832	1 113	481	1 128	534	4 734	2 113
2009	1 932	970	1 401	776	933	476	962	495	3 938	1 842
2010	1 763	1 059	1 286	862	888	547	866	530	3 631	1 989
2011	1 769	1 104	1 329	845	865	530	886	534	3 628	2 093
2012	1 954	1 091	1 552	863	944	517	979	519	3 798	1 984
2013	1 965	1 069	1 467	740	911	511	959	447	3 723	1 994
2014	2 036	991	1 614	730	980	474	990	446	4 072	2 010
2015	2 041	961	1 594	682	970	454	958	423	4 018	1 940
2016	1 926	872	1 501	678	900	426	975	426	3 949	1 719
2017	1 881	826	1 492	582	924	396	925	437	3 926	1 722
2018	1 797	736	1 346	608	830	370	893	393	3 687	1 730
2019	1 656	814	1 249	681	802	390	854	414	3 628	1 699

Metai	Vilnius		Klaipėda		Marijampolė		Tauragė		Telšiai	
	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos
2002	4 392	2 410	1 792	1 279	885	572	565	347	705	620
2003	4 604	2 435	2 100	1 352	900	506	552	340	792	589
2004	4 941	2 652	2 304	1 291	998	576	690	374	948	562
2005	5 386	2 530	2 340	1 440	1 065	572	680	397	971	601
2006	5 663	2 641	2 523	1 402	1 114	625	757	393	1 110	593
2007	6 277	2 808	2 792	1 372	1 182	567	808	375	1 134	578
2008	6 687	2 734	2 953	1 171	1 191	537	907	344	1 239	509
2009	6 288	2 345	2 475	1 041	998	517	711	347	904	461
2010	5 530	2 457	2 291	1 099	910	561	679	353	844	549
2011	5 870	2 601	2 300	1 220	958	574	698	349	918	491
2012	6 220	2 790	2 431	1 173	1 020	592	701	340	1 061	530
2013	6 117	2 699	2 527	1 142	1 045	543	753	327	1 002	502
2014	6 794	2 637	2 673	1 182	1 102	546	784	322	1 097	468
2015	6 768	2 500	2 636	1 130	1 128	546	754	317	1 120	418
2016	6 724	2 417	2 477	1 081	1 086	477	760	312	1 049	471
2017	6 662	2 304	2 531	1 095	1 031	427	757	316	1 057	413
2018	6 343	2 631	2 300	1 013	895	461	703	318	940	380
2019	6 487	2 538	2 302	1 047	901	461	682	278	941	361

2 PRIEDAS

Duomenys pagal regionus

Regionų gyventojų sudėtis, iki 15 m. ir 65 ir vyresni.

Metai	Rytų regionas		Pietų vidurio regionas		Šiurės regionas		Vakarų regionas	
	iki 15m.	65+	iki 15m.	65+	iki 15m.	65+	iki 15m.	65+
2002	146 200	112 369	163 782	128 873	163 773	133 033	181 673	126 124
2003	140 087	116 223	156 826	131 635	155 317	135 470	173 192	128 865
2004	134 720	120 116	150 787	134 820	147 655	137 703	165 766	131 503
2005	130 385	123 081	144 725	136 458	140 317	138 715	158 194	132 868
2006	125 903	125 464	137 966	137 897	132 151	139 226	148 937	133 352
2007	122 630	126 973	131 946	139 482	124 600	140 133	141 540	134 487
2008	120 175	128 797	126 033	141 480	116 877	140 681	134 486	134 979
2009	119 382	129 650	121 784	142 815	111 034	140 489	129 476	134 795
2010	119 945	129 875	118 518	142 707	106 438	139 004	125 136	133 310
2011	121 062	127 780	112 868	143 454	100 581	139 364	119 907	134 709
2012	121 435	128 187	109 617	143 152	96 367	138 318	116 642	133 676
2013	122 355	128 969	107 225	142 768	93 020	137 234	113 976	133 227
2014	123 127	130 167	105 072	143 016	90 272	136 581	111 617	132 975
2015	124 502	132 170	103 462	144 234	87 904	136 801	109 594	133 910

2016	126 291	137 236	102 692	148 826	86 156	140 596	108 608	139 055
2017	128 518	134 548	101 996	144 926	84 232	136 304	107 376	134 419
2018	130 705	136 278	101 539	145 101	82 790	135 786	106 403	134 632
2019	133 147	137 290	101 598	144 631	81 385	135 209	105 727	134 764

Gyventojų skaičius (GV) regionuose

Metai	Rytų regionas	Pietų vidurio regionas	Šiaurės regionas	Vakarų regionas
2002	845 292	881 517	847 174	880 654
2003	843 320	874 779	838 603	874 795
2004	841 748	864 825	826 175	866 181
2005	838 556	851 549	811 082	854 033
2006	831 237	833 913	790 852	833 833
2007	828 191	823 436	776 600	821 756
2008	826 306	813 607	761 681	811 011
2009	826 445	805 988	748 734	802 689
2010	824 193	794 729	733 124	789 930
2011	811 515	768 628	707 088	765 357
2012	805 915	754 618	691 123	751 985
2013	806 308	744 955	678 571	742 071
2014	806 106	737 089	667 075	733 202
2015	807 523	730 856	657 196	725 687
2016	805 380	722 467	644 523	716 188
2017	805 173	711 491	628 996	702 244
2018	805 367	701 207	613 832	688 495
2019	810 538	697 336	604 133	682 177

Gimstamumas regionuose

Metai	Rytų regionas	Pietų vidurio regionas	Šiaurės regionas	Vakarų regionas
2002	6 995	7 429	7 040	8 057
2003	7 104	7 540	7 040	8 231
2004	7 437	7 367	6 915	8 027
2005	7 711	7 389	6 703	7 630
2006	8 040	7 168	6 507	7 846
2007	8 424	7 270	6 393	7 875
2008	9 022	7 682	6 606	8 181
2009	9 527	7 918	6 549	8 122
2010	9 420	7 513	6 048	7 659
2011	9 155	7 320	6 002	7 675
2012	9 146	7 355	6 056	7 874
2013	8 961	7 122	5 996	7 757
2014	9 392	7 253	6 039	7 636
2015	9 780	7 465	6 113	8 058

2016	9 903	7 274	5 839	7 518
2017	9 374	6 798	5 433	7 086
2018	9 372	6 710	5 139	6 981
2019	8 999	6 496	5 016	6 851

Mirusių skaičius regionuose

Metai	Rytų regionas	Pietų vidurio regionas	Šiaurės regionas	Vakarų regionas
2002	9 418	10 314	10 951	10 389
2003	9 514	10 309	10 833	10 334
2004	9 421	10 544	10 889	10 486
2005	10 122	11 122	11 454	11 101
2006	10 831	11 222	11 571	11 189
2007	11 071	11 445	11 858	11 250
2008	10 657	11 038	11 511	10 626
2009	10 063	10 532	10 999	10 438
2010	10 021	10 653	11 010	10 436
2011	9 725	10 273	10 647	10 392
2012	9 817	10 394	10 666	10 061
2013	10 045	10 374	10 592	10 500
2014	9 906	10 137	10 154	10 055
2015	10 059	10 760	10 601	10 356
2016	9 932	10 509	10 459	10 206
2017	9 547	10 336	10 337	9 922
2018	9 633	10 108	10 052	9 781
2019	9 404	9 755	9 608	9 514

Išvykusių ir atvykusių skaičius regionuose

Metai	Rytų regionas		Pietų vidurio regionas		Šiaurės regionas		Vakarų regionas	
	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę	Atvykę	Išvykę
2002	10 261	9 810	10 642	14 495	16 538	21 702	11 553	15 100
2003	16 063	15 225	15 231	22 416	20 482	30 193	16 557	23 130
2004	15 703	16 911	15 955	26 054	21 663	33 824	17 843	27 555
2005	14 170	19 078	15 634	29 537	19 066	35 536	16 388	33 194
2006	13 584	13 839	14 909	21 332	19 444	29 597	17 227	26 006
2007	15 250	14 488	16 143	21 797	21 427	32 145	18 825	26 253
2008	16 022	14 248	17 124	21 387	20 710	29 988	18 442	24 364
2009	13 701	15 417	14 225	22 870	18 688	30 787	15 306	25 798
2010	13 306	25 383	13 494	36 455	18 962	40 892	14 751	36 583
2011	16 785	21 815	16 920	27 977	22 048	34 169	17 978	28 749
2012	22 317	21 241	19 187	25 812	23 918	33 121	20 467	28 225
2013	21 397	20 515	19 733	24 347	23 829	31 821	20 158	26 333
2014	23 416	21 485	21 587	24 936	24 717	31 645	22 072	27 217

2015	23 355	25 219	20 965	26 059	24 182	33 614	21 200	28 460
2016	25 885	26 063	21 798	29 539	25 257	37 368	22 536	33 881
2017	25 823	25 456	21 885	28 631	25 288	36 863	23 393	34 311
2018	29 835	24 403	25 705	26 178	29 095	35 375	27 750	31 215
2019	33 993	23 615	28 946	26 112	28 744	32 390	27 951	28 432

Santuokų ir ištuokų skaičius regionuose

Metai	Rytų regionas		Pietų vidurio regionas		Šiaurės regionas		Vakarų regionas	
	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos	Santuokos	Ištuokos
2002	4 392	2 410	4 323	2 758	3 489	2 593	3 947	2 818
2003	4 604	2 435	4 502	2 824	3 525	2 553	4 344	2 787
2004	4 941	2 652	4 974	2 775	4 275	2 767	4 940	2 803
2005	5 386	2 530	5 166	2 927	4 330	2 630	5 056	3 010
2006	5 663	2 641	5 456	2 931	4 623	2 617	5 504	3 013
2007	6 277	2 808	5 793	2 947	5 079	2 689	5 916	2 892
2008	6 687	2 734	5 862	2 647	5 224	2 375	6 290	2 561
2009	6 288	2 345	4 900	2 337	4 266	2 222	5 088	2 366
2010	5 530	2 457	4 497	2 519	3 937	2 468	4 724	2 562
2011	5 870	2 601	4 514	2 627	3 963	2 479	4 874	2 634
2012	6 220	2 790	4 777	2 503	4 450	2 471	5 213	2 635
2013	6 117	2 699	4 682	2 441	4 343	2 320	5 327	2 514
2014	6 794	2 637	5 062	2 456	4 630	2 195	5 656	2 518
2015	6 768	2 500	4 976	2 363	4 605	2 097	5 638	2 411
2016	6 724	2 417	4 924	2 145	4 327	1 976	5 372	2 341
2017	6 662	2 304	4 851	2 159	4 297	1 804	5 376	2 251
2018	6 343	2 631	4 580	2 123	3 973	1 714	4 838	2 172
2019	6 487	2 538	4 482	2 113	3 707	1 885	4 826	2 147

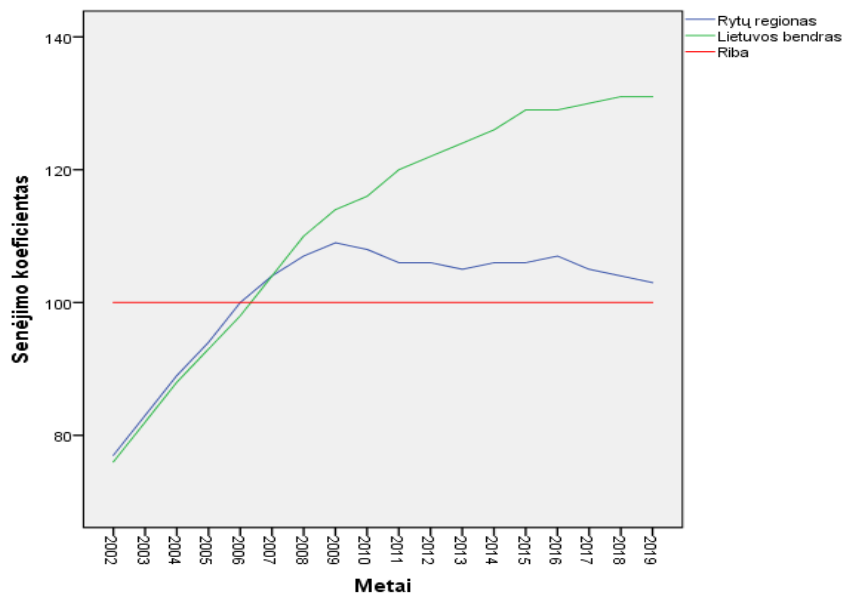
3 PRIEDAS

Regionų ir bendras Lietuvos senėjimo koeficientas (IA)

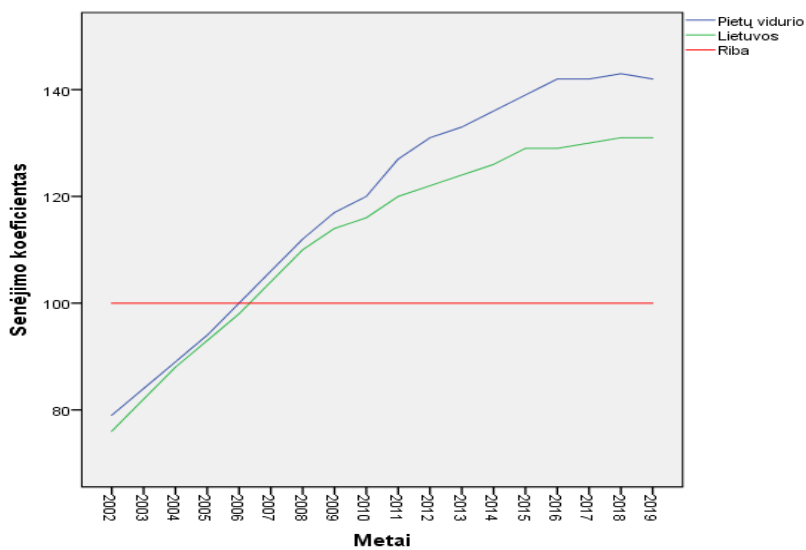
Metai	Rytų regionas	Pietų vidurio regionas	Vakarų regionas	Šiaurės regionas	Bendras Lietuvos
2002	77	79	69	81	76
2003	83	84	74	87	82
2004	89	89	79	93	88
2005	94	94	84	99	93
2006	100	100	90	105	98
2007	104	106	95	112	104
2008	107	112	100	120	110
2009	109	117	104	127	114
2010	108	120	107	131	116
2011	106	127	112	139	120
2012	106	131	115	144	122

2013	105	133	117	148	124
2014	106	136	119	151	126
2015	106	139	122	155	129
2016	107	142	124	157	129
2017	105	142	125	160	130
2018	104	143	127	164	131
2019	103	142	127	166	131

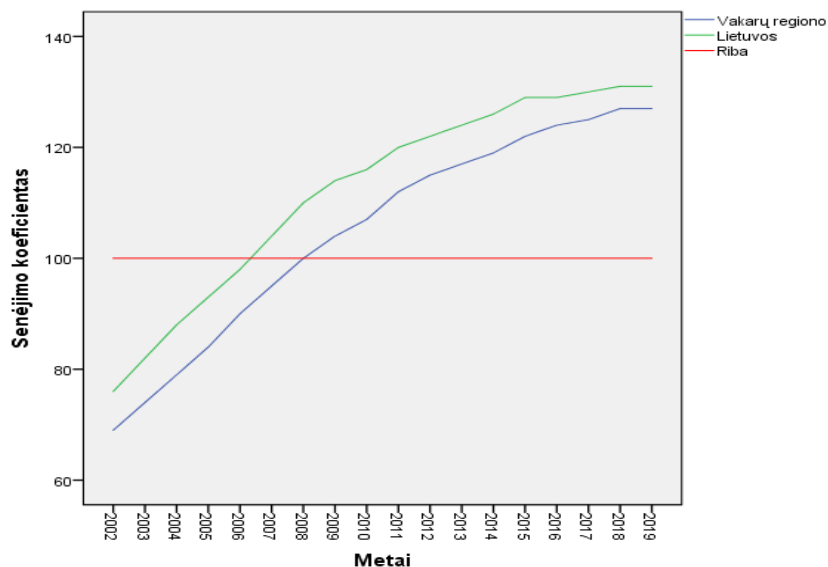
Rytų regiono grafikas



Pietų vidurio grafikas



Vakarų regionas



Bendras gimstamumo rodiklis (BGR) regionuose ir visoje Lietuvoje

Metai	Rytų regionas	Pietų vidurio regionas	Šiaurės regionas	Vakarų regionas	Bendras Lietuvos
2002	8,3	8,4	8,3	9,1	8,6
2003	8,4	8,6	8,4	9,4	8,8
2004	8,8	8,5	8,4	9,3	8,8
2005	9,2	8,7	8,3	8,9	8,9
2006	9,7	8,6	8,2	9,4	9,1
2007	10,2	8,8	8,2	9,6	9,3
2008	10,9	9,4	8,7	10,1	9,9
2009	11,5	9,8	8,7	10,1	10,2
2010	11,4	9,5	8,2	9,7	9,9
2011	11,3	9,5	8,5	10,0	10
2012	11,3	9,7	8,8	10,5	10,2
2013	11,1	9,6	8,8	10,5	10,1
2014	11,7	9,8	9,1	10,4	10,3
2015	12,1	10,2	9,3	11,1	10,8
2016	12,3	10,1	9,1	10,5	10,7
2017	11,6	9,6	8,6	10,1	10,1
2018	11,6	9,6	8,4	10,1	10
2019	11,1	9,3	8,3	10,0	9,8

Bendras mirtingumo rodiklis (BMR) regionuose ir visoje Lietuvoje

Metai	Rytų regionas	Pietų vidurio regionas	Vakarų regionas	Šiaurės regionas	Bendras Lietuvos
2002	11,1	11,7	11,8	12,9	14,0
2003	11,3	11,8	11,8	12,9	14,4

2004	11,2	12,2	12,1	13,2	14,5
2005	12,1	13,1	13,0	14,1	14,5
2006	13,0	13,5	13,4	14,6	14,7
2007	13,4	13,9	13,7	15,3	13,8
2008	12,9	13,6	13,1	15,1	13,9
2009	12,2	13,1	13,0	14,7	13,8
2010	12,2	13,4	13,2	15,0	13,4
2011	12,0	13,4	13,6	15,1	13,4
2012	12,2	13,8	13,4	15,4	13,1
2013	12,5	13,9	14,1	15,6	13,6
2014	12,3	13,8	13,7	15,2	13,9
2015	12,5	14,7	14,3	16,1	13,5
2016	12,3	14,5	14,3	16,2	13,1
2017	11,9	14,5	14,1	16,4	12,2
2018	12,0	14,4	14,2	16,4	11,8
2019	11,6	14,0	13,9	15,9	11,7

Bendras migracijos saldo koeficientas (K_{Δ}) regionuose

Metai	Rytų regionas	Pietų vidurio regionas	Šiaurės regionas	Vakarų regionas
2002	0,5	-4,4	-6,1	-4,0
2003	1,0	-8,2	-11,6	-7,5
2004	-1,4	-11,7	-14,7	-11,2
2005	-5,9	-16,3	-20,3	-19,7
2006	-0,3	-7,7	-12,8	-10,5
2007	0,9	-6,9	-13,8	-9,0
2008	2,1	-5,2	-12,2	-7,3
2009	-2,1	-10,7	-16,2	-13,1
2010	-14,7	-28,9	-29,9	-27,6
2011	-6,2	-14,4	-17,1	-14,1
2012	1,3	-8,8	-13,3	-10,3
2013	1,1	-6,2	-11,8	-8,3
2014	2,4	-4,5	-10,4	-7,0
2015	-2,3	-7,0	-14,4	-10,0
2016	-0,2	-10,7	-18,8	-15,8
2017	0,5	-9,5	-18,4	-15,5
2018	6,7	-0,7	-10,2	-5,0
2019	12,8	4,1	-6,0	-0,7

Santuokų (ištuokų) rodiklis (SIR) regionuose

Metai	Rytų regionas	Pietų vidurio regionas	Vakarų regionas	Šiaurės regionas
2002	2,34	1,78	1,28	1,06
2003	2,57	1,92	1,78	1,16
2004	2,72	2,54	2,47	1,83
2005	3,41	2,63	2,40	2,10
2006	3,64	3,03	2,99	2,54
2007	4,19	3,46	3,68	3,08
2008	4,78	3,95	4,60	3,74
2009	4,77	3,18	3,39	2,73
2010	3,73	2,49	2,74	2,00
2011	4,03	2,46	2,93	2,10
2012	4,26	3,01	3,43	2,86
2013	4,24	3,01	3,79	2,98
2014	5,16	3,54	4,28	3,65
2015	5,29	3,58	4,45	3,82
2016	5,35	3,85	4,23	3,65
2017	5,41	3,78	4,45	3,96
2018	4,61	3,50	3,87	3,68
2019	4,87	3,40	3,93	3,02

4 PRIEDAS

Paruošti duomenys tyrimui

Metai	Rytų regionas					
	IA	GV	BGR	BMR	K_{Δ}	SIR
2002	77	845 292	8,3	11,1	0,5	2,34
2003	83	843 320	8,4	11,3	1,0	2,57
2004	89	841 748	8,8	11,2	-1,4	2,72
2005	94	838 556	9,2	12,1	-5,9	3,41
2006	100	831 237	9,7	13,0	-0,3	3,64
2007	104	828 191	10,2	13,4	0,9	4,19
2008	107	826 306	10,9	12,9	2,1	4,78
2009	109	826 445	11,5	12,2	-2,1	4,77
2010	108	824 193	11,4	12,2	-14,7	3,73
2011	106	811 515	11,3	12,0	-6,2	4,03
2012	106	805 915	11,3	12,2	1,3	4,26
2013	105	806 308	11,1	12,5	1,1	4,24
2014	106	806 106	11,7	12,3	2,4	5,16
2015	106	807 523	12,1	12,5	-2,3	5,29
2016	109	805 380	12,3	12,3	-0,2	5,35
2017	105	805 173	11,6	11,9	0,5	5,41

2018	104	805 367	11,6	12,0	6,7	4,61
2019	103	810 538	11,1	11,6	12,8	4,87

Metai	Pietų vidurio regionas					
	IA	GV	BGR	BMR	K_{Δ}	SIR
2002	79	881 517	8,4	11,7	-4,4	1,78
2003	84	874 779	8,6	11,8	-8,2	1,92
2004	89	864 825	8,5	12,2	-11,7	2,54
2005	94	851 549	8,7	13,1	-16,3	2,63
2006	100	833 913	8,6	13,5	-7,7	3,03
2007	106	823 436	8,8	13,9	-6,9	3,46
2008	112	813 607	9,4	13,6	-5,2	3,95
2009	117	805 988	9,8	13,1	-10,7	3,18
2010	120	794 729	9,5	13,4	-28,9	2,49
2011	127	768 628	9,5	13,4	-14,4	2,46
2012	131	754 618	9,7	13,8	-8,8	3,01
2013	133	744 955	9,6	13,9	-6,2	3,01
2014	136	737 089	9,8	13,8	-4,5	3,54
2015	139	730 856	10,2	14,7	-7,0	3,58
2016	145	722 467	10,1	14,5	-10,7	3,85
2017	142	711 491	9,6	14,5	-9,5	3,78
2018	143	701 207	9,6	14,4	-0,7	3,50
2019	142	697 336	9,3	14,0	4,1	3,40

Metai	Vakarų regionas					
	IA	Gyv. sk.	BGR	BMR	K_{Δ}	SIR
2002	69	880 654	9,1	11,8	-4,0	1,28
2003	74	874 795	9,4	11,8	-7,5	1,78
2004	79	866 181	9,3	12,1	-11,2	2,47
2005	84	854 033	8,9	13,0	-19,7	2,40
2006	90	833 833	9,4	13,4	-10,5	2,99
2007	95	821 756	9,6	13,7	-9,0	3,68
2008	100	811 011	10,1	13,1	-7,3	4,60
2009	104	802 689	10,1	13,0	-13,1	3,39
2010	107	789 930	9,7	13,2	-27,6	2,74
2011	112	765 357	10,0	13,6	-14,1	2,93
2012	115	751 985	10,5	13,4	-10,3	3,43
2013	117	742 071	10,5	14,1	-8,3	3,79
2014	119	733 202	10,4	13,7	-7,0	4,28
2015	122	725 687	11,1	14,3	-10,0	4,45
2016	128	716 188	10,5	14,3	-15,8	4,23
2017	125	702 244	10,1	14,1	-15,5	4,45
2018	127	688 495	10,1	14,2	-5,0	3,87

2019	127	682 177	10,0	13,9	-0,7	3,93
------	-----	---------	------	------	------	------

Metai	Šiaurės regionas					
	IA	GV	BGR	BMR	K_{Δ}	SIR
2002	81	847 174	8,3	12,9	-6,1	1,06
2003	87	838 603	8,4	12,9	-11,6	1,16
2004	93	826 175	8,4	13,2	-14,7	1,83
2005	99	811 082	8,3	14,1	-20,3	2,10
2006	105	790 852	8,2	14,6	-12,8	2,54
2007	112	776 600	8,2	15,3	-13,8	3,08
2008	120	761 681	8,7	15,1	-12,2	3,74
2009	127	748 734	8,7	14,7	-16,2	2,73
2010	131	733 124	8,2	15,0	-29,9	2,00
2011	139	707 088	8,5	15,1	-17,1	2,10
2012	144	691 123	8,8	15,4	-13,3	2,86
2013	148	678 571	8,8	15,6	-11,8	2,98
2014	151	667 075	9,1	15,2	-10,4	3,65
2015	156	657 196	9,3	16,1	-14,4	3,82
2016	163	644 523	9,1	16,2	-18,8	3,65
2017	162	628 996	8,6	16,4	-18,4	3,96
2018	164	613 832	8,4	16,4	-10,2	3,68
2019	166	604 133	8,3	15,9	-6,0	3,02

5 PRIEDAS

Polinominio skirstinio skaičiavimai

Senėjimo koeficiento

2006–2010 m.

$$H_0: p_1 = 0,253; p_2 = 0,253; p_3 = 0,227; p_4 = 0,267$$

$$\hat{p}_1 = 0,232; \hat{p}_2 = 0,258; \hat{p}_3 = 0,229; \hat{p}_4 = 0,280$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 466 \left(\frac{0,232 - 0,253}{0,253} \right)^2 + \left(\frac{0,258 - 0,253}{0,253} \right)^2 + \left(\frac{0,229 - 0,227}{0,227} \right)^2 + \left(\frac{0,280 - 0,267}{0,267} \right)^2 = 4,105$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0,1}^2(4-1) = \chi_{0,9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 4,105 \neq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, hipotezė H_0 priimama. Senėjimo koeficientas regionuose iš esmės statistiškai nepakitę per penkerius metus nuo 2006 iki 2010 m.

2010–2014 m.

$$H_0: p_1 = 0,232; p_2 = 0,258; p_3 = 0,229; p_4 = 0,280$$

$$\hat{p}_1 = 0,206; \hat{p}_2 = 0,266; \hat{p}_3 = 0,233; \hat{p}_4 = 0,295$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 512 \left(\frac{0,206 - 0,232}{0,232} \right)^2 + \left(\frac{0,266 - 0,258}{0,258} \right)^2 + \left(\frac{0,233 - 0,229}{0,229} \right)^2 + \left(\frac{0,295 - 0,280}{0,280} \right)^2 = 8,453$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0,1}^2(4-1) = \chi_{0,9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 8,453 > \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, hipotezė H_0 atmetama. Senėjimo koeficientas regionuose iš esmės statistiškai pakito per penkerius metus, 2010–2014 m.

2014–2019 m.

$$H_0: p_1 = 0,206; p_2 = 0,266; p_3 = 0,233; p_4 = 0,295$$

$$\hat{p}_1 = 0,191; \hat{p}_2 = 0,264; \hat{p}_3 = 0,236; \hat{p}_4 = 0,308$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 538 \left(\frac{0,191 - 0,206}{0,206} \right)^2 + \left(\frac{0,264 - 0,266}{0,266} \right)^2 + \left(\frac{0,236 - 0,233}{0,233} \right)^2 + \left(\frac{0,295 - 0,308}{0,308} \right)^2 = 4,073$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0,1}^2(4-1) = \chi_{0,9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 4,073 < \chi(k-1) = 6,25$, hipotezė H_0 priimama. Senėjimo koeficientas regionuose iš esmės statistiškai nepakito per penkerius metus, t. y. 2014–2019 m.

Gyventojų skaičius

Regionai	Bendras 2002m.	Proc. dalis 2002 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.
Iš viso	345 4637		3 289 835		3 289 835		3 141 976	
Rytų regionas	845 292	24,5	831 237	25,3	831 237	25,3	824 193	26,2
Pietų vidurio regionas	881 517	25,5	833 913	25,3	833 913	25,3	794 729	25,3
Vakarų regionas	880 654	25,5	833 833	25,3	833 833	25,3	789 930	25,1
Šiaurės regionas	847 174	24,5	790 852	24,0	790 852	24,0	733 124	23,3

Bendras 2010m.	Proc. dalis 2010 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2019 m.	Proc. dalis 2019 m.
3141976		2 943 472		2 943 472		2 794 184	
824193	26,2	806 106	27,4	806 106	27,4	8 105 38	29,0
794729	25,3	737 089	25,0	737 089	25,0	697 336	25,0
789930	25,1	733 202	24,9	733 202	24,9	682 177	24,4
733124	23,3	667 075	22,7	667 075	22,7	604 133	21,6

2002–2006 m.

$$H_0: p_1 = 0,245; p_2 = 0,255; p_3 = 0,255; p_4 = 0,245.$$

$$\hat{p}_1 = 0,253; \hat{p}_2 = 0,253; \hat{p}_3 = 0,253; \hat{p}_4 = 0,240;$$

$$n = 3289835$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 3289835 \left(\frac{0,253 - 0,245}{0,245} \right)^2 + \left(\frac{0,253 - 0,255}{0,255} \right)^2 + \left(\frac{0,253 - 0,255}{0,255} \right)^2 + \left(\frac{0,240 - 0,245}{0,245} \right)^2$$

$$= 5287,03$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{1-0.1}(4-1) = \chi^2_{0.9}(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 5287,03 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1) = 6,25, \text{ hipotezè } H_0 \text{ atmetama.}$$

2006–2010 m.

$$H_0 : p_1 = 0,253; p_2 = 0,253; p_3 = 0,253; p_4 = 0,240;$$

$$\hat{p}_1 = 0,290; \hat{p}_2 = 0,250; \hat{p}_3 = 0,244; \hat{p}_4 = 0,216;$$

$$n = 3141976$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 3141976 \left(\frac{0,262 - 0,253}{0,253} \right)^2 + \left(\frac{0,253 - 0,253}{0,253} \right)^2 + \left(\frac{0,251 - 0,253}{,0253} \right)^2 + \left(\frac{0,233 - 0,240}{0,240} \right)^2$$

$$= 7511,01$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{1-0.1}(4-1) = \chi^2_{0.9}(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 7511,01 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1) = 6,25, \text{ hipotezè } H_0 \text{ atmetama.}$$

2010–2014 m.

$$H_0 : p_1 = 0,262; p_2 = 0,253; p_3 = 0,251; p_4 = 0,233;$$

$$\hat{p}_1 = 0,274; \hat{p}_2 = 0,250; \hat{p}_3 = 0,249; \hat{p}_4 = 0,227;$$

$$n = 2943472$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 2943472 \left(\frac{0,274 - 0,262}{0,262} \right)^2 + \left(\frac{0,250 - 0,253}{0,253} \right)^2 + \left(\frac{0,249 - 0,251}{,0251} \right)^2 + \left(\frac{0,227 - 0,233}{0,233} \right)^2$$

$$= 8674,92$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{1-0.1}(4-1) = \chi^2_{0.9}(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 8674,92 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1) = 6,25, \text{ hipotezè } H_0 \text{ atmetama.}$$

2014–2019 m.

$$H_0 : p_1 = 0,274; p_2 = 0,250; p_3 = 0,249; p_4 = 0,227;$$

$$\hat{p}_1 = 0,290; \hat{p}_2 = 0,250; \hat{p}_3 = 0,244; \hat{p}_4 = 0,216;$$

$$n = 2794184$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 2794184 \left(\frac{0,290 - 0,274}{0,274} \right)^2 + \left(\frac{0,250 - 0,250}{0,250} \right)^2 + \left(\frac{0,244 - 0,249}{0,249} \right)^2 + \left(\frac{0,216 - 0,227}{0,227} \right)^2$$

$$= 16840,1$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{1-0.1}(4-1) = \chi^2_{0.9}(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 16840,1 > \chi^2_{1-\alpha}(k-1) = 6,25, \text{ hipotezè } H_0 \text{ atmetama.}$$

Bendrasis gimstamumo rodiklis

Regionai	Bendras 2002 m.	Proc. dalis 2002 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.
Iš viso	34		36		36		39	
Rytų regionas	8,3	24,2	9,7	26,9	9,7	26,9	11,4	29,4
Pietų vidurio regionas	8,4	24,7	8,6	23,9	8,6	23,9	9,5	24,3
Vakarų regionas	9,1	26,8	9,4	26,3	9,4	26,3	9,7	25,0
Šiaurės regionas	8,3	24,3	8,2	22,9	8,2	22,9	8,2	21,2

Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2019 m.	Proc. dalis 2019 m.
39		41		41		39	
11,4	29,4	11,7	28,4	11,7	28,4	11,1	28,6
9,5	24,3	9,8	24,0	9,8	24,0	9,3	24,0
9,7	25,0	10,4	25,4	10,4	25,4	10,0	25,9
8,2	21,2	9,1	22,1	9,1	22,1	8,3	21,4

2002–2006 m.

$$H_0: p_1 = 0,242; p_2 = 0,247; p_3 = 0,268; p_4 = 0,243.$$

$$\hat{p}_1 = 0,269; \hat{p}_2 = 0,239; \hat{p}_3 = 0,263; \hat{p}_4 = 0,229;$$

$$n = 36$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 36 \left(\frac{0,269 - 0,243}{0,243} \right)^2 + \left(\frac{0,239 - 0,247}{0,247} \right)^2 + \left(\frac{0,262 - 0,268}{0,268} \right)^2 + \left(\frac{0,229 - 0,243}{0,243} \right)^2 = 0,62$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 0,62 \neq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25, \text{ hipotezės } H_0 \text{ nėra pagrindo atmesti.}$$

2006–2010 m.

$$H_0: p_1 = 0,269; p_2 = 0,239; p_3 = 0,262; p_4 = 0,229;$$

$$\hat{p}_1 = 0,294; \hat{p}_2 = 0,243; \hat{p}_3 = 0,250; \hat{p}_4 = 0,212;$$

$$n = 39$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 39 \left(\frac{0,294 - 0,269}{0,269} \right)^2 + \left(\frac{0,243 - 0,239}{0,239} \right)^2 + \left(\frac{0,250 - 0,262}{0,262} \right)^2 + \left(\frac{0,212 - 0,229}{0,229} \right)^2 = 0,64$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 0,64 \neq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25, \text{ hipotezės } H_0 \text{ nėra pagrindo atmesti.}$$

2010–2014 m.

$$H_0: p_1 = 0,294; p_2 = 0,243; p_3 = 0,250; p_4 = 0,212;$$

$$\hat{p}_1 = 0,284; \hat{p}_2 = 0,240; \hat{p}_3 = 0,254; \hat{p}_4 = 0,221;$$

$$n = 41$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 41 \left(\frac{0,284 - 0,294}{0,294} \right)^2 + \left(\frac{0,240 - 0,243}{0,243} \right)^2 + \left(\frac{0,254 - 0,250}{0,250} \right)^2 + \left(\frac{0,221 - 0,212}{0,212} \right)^2 = 0,13$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,13 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, tai hipotezės H_0 nėra pagrindo atmesti.

2014–2019 m.

$$H_0: p_1 = 0,284; p_2 = 0,240; p_3 = 0,254; p_4 = 0,221;$$

$$\hat{p}_1 = 0,286; \hat{p}_2 = 0,240; \hat{p}_3 = 0,259; \hat{p}_4 = 0,214;$$

$$n = 39$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 39 \left(\frac{0,286 - 0,284}{0,284} \right)^2 + \left(\frac{0,240 - 0,240}{0,240} \right)^2 + \left(\frac{0,259 - 0,254}{0,254} \right)^2 + \left(\frac{0,214 - 0,221}{0,221} \right)^2 = 0,05$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,05 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, hipotezės H_0 nėra pagrindo atmesti.

Bendrasis mirtingumo rodiklis

Regionai	Bendras 2002 m.	Proc. dalis 2002 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.
Iš viso	48		55		55		54	
Rytų regionas	11,1	23,4	13,0	23,9	13,0	23,9	12,2	22,6
Pietų vidurio regionas	11,7	24,6	13,5	24,7	13,5	24,7	13,4	24,9
Vakarų regionas	11,8	24,8	13,4	24,6	13,4	24,6	13,2	24,6
Šiaurės regionas	12,9	27,2	14,6	26,8	14,6	26,8	15,0	27,9

Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2019 m.	Proc. dalis 2019 m.
54		55		55		55	
12,2	22,6	12,3	22,4	12,3	22,4	11,6	20,9
13,4	24,9	13,8	25,0	13,8	25,0	14,0	25,2
13,2	24,6	13,7	24,9	13,7	24,9	13,9	25,2
15,0	27,9	15,2	27,7	15,2	27,7	15,9	28,7

2002–2006 m.

$$H_0: p_1 = 0,234; p_2 = 0,246; p_3 = 0,248; p_4 = 0,272.$$

$$\hat{p}_1 = 0,239; \hat{p}_2 = 0,247; \hat{p}_3 = 0,246; \hat{p}_4 = 0,268;$$

$$n = 55$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 55 \left(\frac{0,239 - 0,234}{0,234} \right)^2 + \left(\frac{0,247 - 0,246}{0,246} \right)^2 + \left(\frac{0,246 - 0,248}{0,248} \right)^2 + \left(\frac{0,268 - 0,272}{0,272} \right)^2 = 0,03$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,03 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, hipotezès H_0 nėra pagrindo atmesti.

2006–2010 m.

$$H_0 : p_1 = 0,239; p_2 = 0,247; p_3 = 0,246; p_4 = 0,268;$$

$$\hat{p}_1 = 0,226; \hat{p}_2 = 0,249; \hat{p}_3 = 0,246; \hat{p}_4 = 0,279;$$

$$n = 54$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 54 \left(\frac{0,226 - 0,239}{0,239} \right)^2 + \left(\frac{0,249 - 0,247}{0,247} \right)^2 + \left(\frac{0,246 - 0,246}{0,246} \right)^2 + \left(\frac{0,279 - 0,268}{0,268} \right)^2 = 0,25$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,25 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, hipotezès H_0 nėra pagrindo atmesti.

2010–2014 m.

$$H_0 : p_1 = 0,226; p_2 = 0,249; p_3 = 0,246; p_4 = 0,279;$$

$$\hat{p}_1 = 0,224; \hat{p}_2 = 0,250; \hat{p}_3 = 0,249; \hat{p}_4 = 0,277;$$

$$n = 55$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 55 \left(\frac{0,224 - 0,226}{0,226} \right)^2 + \left(\frac{0,250 - 0,249}{0,249} \right)^2 + \left(\frac{0,249 - 0,246}{0,246} \right)^2 + \left(\frac{0,277 - 0,279}{0,279} \right)^2 = 0,02$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,02 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, hipotezès H_0 nėra pagrindo atmesti.

2014–2019 m.

$$H_0 : p_1 = 0,224; p_2 = 0,250; p_3 = 0,249; p_4 = 0,277;$$

$$\hat{p}_1 = 0,209; \hat{p}_2 = 0,252; \hat{p}_3 = 0,252; \hat{p}_4 = 0,287;$$

$$n = 55$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 55 \left(\frac{0,209 - 0,224}{0,224} \right)^2 + \left(\frac{0,252 - 0,250}{0,250} \right)^2 + \left(\frac{0,252 - 0,249}{0,249} \right)^2 + \left(\frac{0,287 - 0,277}{0,277} \right)^2 =$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,30 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, hipotezė H_0 nėra pagrindo atmesti.

Migracijos soldo

Regionai	Bendras 2002 m.	Proc. dalis 2002 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2006m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.
Iš viso	14,0		31,4		31,4		101,1	
Rytų regionas	0,5	3,8	-0,3	-1,1	-0,3	-1,0	-14,7	-14,5
Pietų vidurio regionas	-4,4	-31,2	-7,7	-24,5	-7,7	-24,5	-28,9	-28,6
Vakarų regionas	-4,0	-28,8	-10,5	-33,5	-10,5	-33,5	-27,6	-27,3
Šiaurės regionas	-6,1	-43,5	-12,8	-40,9	-12,8	-40,9	-29,9	-29,6

Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2019 m.	Proc. dalis 2019 m.
101,1		19,6		19,6		10,1	
-14,7	-14,5	2,4	12,2	2,4	12,2	12,8	126,4
-28,9	-28,6	-4,5	-23,2	-4,5	-23,2	4,1	40,1
-27,6	-27,3	-7,0	-35,8	-7,0	-35,8	-0,7	-7,0
-29,9	-29,6	-10,4	-53,0	-10,4	-53,0	-6,0	-59,6

2002–2006 m.

$$H_0 : p_1 = 0,038; p_2 = -0,313; p_3 = -0,289; p_4 = -0,437;$$

$$\hat{p}_1 = -0,011; \hat{p}_2 = -0,245; \hat{p}_3 = -0,336; \hat{p}_4 = -0,409;$$

$$n = 31,4$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 31,4 \left(\frac{(-0,011 - 0,038)^2}{0,038} \right) + \left(\frac{(-0,245 - -0,313)^2}{-0,313} \right) + \left(\frac{(-0,336 - -0,289)^2}{-0,289} \right) + \left(\frac{(-0,409 - -0,437)^2}{-0,437} \right)^2$$

$$= 51,9$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{1-0,1}(4-1) = \chi^2_{0,9}(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 51,9 > \chi^2_{k-1} = 6,25, \text{ hipotezę } H_0 \text{ atmetame.}$$

2006–2010 m.

$$H_0 : p_1 = -0,010; p_2 = -0,245; p_3 = -0,336; p_4 = -0,409;$$

$$\hat{p}_1 = -0,145; \hat{p}_2 = -0,286; \hat{p}_3 = -0,273; \hat{p}_4 = -0,296;$$

$$n = 101,1$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 101,1 \left(\frac{(-0,145 - -0,010)^2}{-0,010} \right) + \left(\frac{(-0,286 - -0,245)^2}{-0,245} \right) + \left(\frac{(-0,273 - -0,336)^2}{-0,336} \right) + \left(\frac{(-0,296 - -0,409)^2}{-0,409} \right)^2$$

$$= 146,5$$

$$\chi^2_{1-\alpha}(k-1) = \chi^2_{1-0,1}(4-1) = \chi^2_{0,9}(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 146,5 > \chi^2_{k-1} = 6,25, \text{ hipotezę } H_0 \text{ atmetame.}$$

2010–2014 m.

$$H_0: p_1 = -0,145; p_2 = -0,286; p_3 = -0,273; p_4 = -0,296;$$

$$\hat{p}_1 = 0,122; \hat{p}_2 = -0,232; \hat{p}_3 = -0,358; \hat{p}_4 = -0,530;$$

$$n = 19,6$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 19,6 \left(\frac{0,122 - (-0,145)}{-0,145} \right)^2 + \left(\frac{-0,232 - (-0,286)}{-0,286} \right)^2 + \left(\frac{-0,358 - (-0,273)}{-0,273} \right)^2 + \left(\frac{-0,530 - (-0,296)}{-0,296} \right)^2$$

$$= 81,4$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0,1}^2(4-1) = \chi_{0,9}^2(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 81,4 > \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25, \text{ tai hipotezę } H_0 \text{ atmetame.}$$

2014–2019m.

$$H_0: p_1 = 0,122; p_2 = -0,232; p_3 = -0,358; p_4 = -0,530;$$

$$\hat{p}_1 = 1,264; \hat{p}_2 = 0,401; \hat{p}_3 = -0,070; \hat{p}_4 = -0,596;$$

$$n = 10,1$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 10,1 \left(\frac{1,264 - 0,122}{0,122} \right)^2 + \left(\frac{0,401 - (-0,232)}{-0,232} \right)^2 + \left(\frac{-0,070 - (-0,358)}{-0,358} \right)^2 + \left(\frac{-0,596 - (-0,530)}{-0,530} \right)^2$$

$$= 966,6$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0,1}^2(4-1) = \chi_{0,9}^2(3) = 6,25$$

$$\chi^2 = 966,6 > \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25, \text{ tai hipotezę } H_0 \text{ atmetame.}$$

Santuokų (ištuokų) rodiklis

Regionai	Bendras 2002 m.	Proc. dalis 2002 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2006 m.	Proc. dalis 2006 m.	Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.
Iš viso	6,5		12,2		12,2		11,0	
Rytų regionas	2,3	36,3	3,6	29,8	3,6	29,8	3,7	34,0
Pietų vidurio regionas	1,8	27,5	3,0	24,8	3,0	24,8	2,5	22,7
Vakarų regionas	1,3	19,8	3,0	24,5	3,0	24,5	2,7	25,0
Šiaurės regionas	1,1	16,4	2,5	20,8	2,5	20,8	2,0	18,3

Bendras 2010 m.	Proc. dalis 2010 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2014 m.	Proc. dalis 2014 m.	Bendras 2019 m.	Proc. dalis 2019 m.
11,0		16,6		16,6		15,2	
3,7	34,0	5,2	31,0	5,2	31,0	4,9	32,0
2,5	22,7	3,5	21,3	3,5	21,3	3,4	22,3
2,7	25,0	4,3	25,7	4,3	25,7	3,9	25,8
2,0	18,3	3,7	22,0	3,7	22,0	3,0	19,8

2002–2006 m.

$$H_0 : p_1 = 0,363; p_2 = 0,275; p_3 = 0,198; p_4 = 0,164.$$

$$\hat{p}_1 = 0,298; \hat{p}_2 = 0,248; \hat{p}_3 = 0,245; \hat{p}_4 = 0,208;$$

$$n = 12,2$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 12,2 \left(\frac{0,298 - 0,363}{0,363} \right)^2 + \left(\frac{0,248 - 0,275}{0,275} \right)^2 + \left(\frac{0,245 - 0,198}{0,198} \right)^2 + \left(\frac{0,208 - 0,164}{0,164} \right)^2 = 2,07$$

$$k = 4$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 2,07 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, tai hipotezès H_0 nėra pagrindo atmesti.

2006–2010 m.

$$H_0 : p_1 = 0,298; p_2 = 0,248; p_3 = 0,245; p_4 = 0,208;$$

$$\hat{p}_1 = 0,340; \hat{p}_2 = 0,227; \hat{p}_3 = 0,250; \hat{p}_4 = 0,183;$$

$$n = 11$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 11 \left(\frac{0,340 - 0,298}{0,298} \right)^2 + \left(\frac{0,227 - 0,248}{0,248} \right)^2 + \left(\frac{0,250 - 0,245}{0,245} \right)^2 + \left(\frac{0,183 - 0,208}{0,208} \right)^2 = 0,46$$

$$k = 4$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,46 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, tai hipotezès H_0 nėra pagrindo atmesti.

2010–2014 m.

$$H_0 : p_1 = 0,340; p_2 = 0,227; p_3 = 0,250; p_4 = 0,183;$$

$$\hat{p}_1 = 0,310; \hat{p}_2 = 0,213; \hat{p}_3 = 0,257; \hat{p}_4 = 0,220;$$

$$n = 16,6$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})}{p_{i0}} = 16,6 \left(\frac{0,310 - 0,340}{0,340} \right)^2 + \left(\frac{0,213 - 0,227}{0,227} \right)^2 + \left(\frac{0,257 - 0,250}{0,250} \right)^2 + \left(\frac{0,220 - 0,183}{0,183} \right)^2 = 0,88$$

$$k = 4$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = \chi_{0.9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,88 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, tai hipotezès H_0 nėra pagrindo atmesti.

2014–2019 m.

$$H_0 : p_1 = 0,310; p_2 = 0,213; p_3 = 0,257; p_4 = 0,220;$$

$$\hat{p}_1 = 0,320; \hat{p}_2 = 0,223; \hat{p}_3 = 0,258; \hat{p}_4 = 0,198;$$

$$n = 15,2$$

$$\chi^2 = n \sum_{i=1}^k \frac{(\hat{p}_i - p_{i0})^2}{p_{i0}} = 15,2 \left(\frac{0,320 - 0,310}{0,310} \right)^2 + \left(\frac{0,223 - 0,213}{0,213} \right)^2 + \left(\frac{0,258 - 0,257}{0,257} \right)^2 + \left(\frac{0,198 - 0,220}{0,220} \right)^2 = 0,20$$

$$k = 4$$

$$\chi_{1-\alpha}^2(k-1) = \chi_{1-0.1}^2(4-1) = X_{0,9}^2(3) = 6,25$$

$\chi^2 = 0,20 \not\geq \chi_{1-\alpha}^2(k-1) = 6,25$, tai hipotezės H_0 nėra pagrindo atmesti.

6 PRIEDAS

Laiko eilučių tarpinės lentelės

Hipotezės apie trendo egzistavimą tikrinimo rezultatai

Regionas, charakteristika	$H_0: MX_t = a = const$	Regionas, charakteristika	$H_0: MX_t = a = const$
Rytų regionas (IA)	–	Pietų vidurio regionas (SIR)	–
Rytų regionas (GV)	–	Vakarų regionas (IA)	–
Rytų regionas (BGR)	–	Vakarų regionas (GV)	–
Rytų regionas (SIR)	–	Vakarų regionas (BGR)	–
Pietų vidurio regionas (IA)	–	Šiaurės regionas (IA)	–
Pietų vidurio regionas (GV)	–	Šiaurės regionas (GV)	–
Pietų vidurio regionas (BGR)	–	Šiaurės regionas (BGR)	–
Pietų vidurio regionas (BMR)	–	Šiaurės regionas (SIR)	–

Trendo tiesinės lygtis

Regionas, charakteristika	Trendo lygtis	Regionas, charakteristika	Trendo lygtis
Rytų regionas (IA)	$y = 1,2154x + 89,551$	Pietų vidurio regionas (SIR)	$y = 0,0837x + 2,2653$
Rytų regionas (GV)	$y = -2624,2x + 845436$	Vakarų regionas (IA)	$y = 3,5415x + 71,638$
Rytų regionas (BGR)	$y = 0,2058x + 8,7464$	Vakarų regionas (GV)	$y = -12312x + 897094$
Rytų regionas (SIR)	$y = 0,1523x + 2,7399$	Vakarų regionas (BGR)	$y = 0,0808x + 9,1705$
Pietų vidurio regionas (IA)	$y = 4,0534x + 80,412$	Šiaurės regionas (IA)	$y = 5,1538x + 81,283$
Pietų vidurio regionas (GV)	$y = -11562x + 893891$	Šiaurės regionas (GV)	$y = -14946x + 865685$
Pietų vidurio regionas (BGR)	$y = 0,0828x + 85349$	Šiaurės regionas (BGR)	$y = 0,0292x + 8,294$
Pietų vidurio regionas (BMR)	$y = 0,1438x + 12,143$	Šiaurės regionas (SIR)	$y = 0,1323x + 1,5178$

Charakteristikos	AR(1) proceso (eliminavus trendą) lygtis	S^2
Rytų regionas		
IA	$X_t = 0,68X_{t-1} + 0,39t + 29,48 + \varepsilon_t$	4,53
GV	$X_t = 0,84X_{t-1} + (-0,420)t + 135267,56 + \varepsilon_t$	7997,1
BGR	$X_t = 0,80X_{t-1} + 0,041t + 1,91 + \varepsilon_t$	2,68
SIR	$X_t = 0,82X_{t-1} + 0,027t + 0,62 + \varepsilon_t$	2,75
Pietų vidurio regionas		
IA	$X_t = 0,82X_{t-1} + 0,730t + 17,80 + \varepsilon_t$	8,62
GV	$X_t = 0,83X_{t-1} + (-1965,54)t + 14236,01 + \varepsilon_t$	39049,71
BGR	$X_t = 0,80X_{t-1} + 0,017t + 1,77 + \varepsilon_t$	3,07
BMR	$X_t = 0,82X_{t-1} + 0,026t + 2,30 + \varepsilon_t$	2,79
SIR	$X_t = 0,82X_{t-1} + 0,015t + 0,48 + \varepsilon_t$	2,94
Vakarų regionas		
IA	$X_t = 0,82X_{t-1} + 0,637t + 15,80 + \varepsilon_t$	7,26
GV	$X_t = 0,83X_{t-1} + (-2093,04)t + 142287,02 + \varepsilon_t$	32407,4
BGR	$X_t = 0,80X_{t-1} + 0,016t + 1,90 + \varepsilon_t$	3,10
Šiaurės regionas		
IA	$X_t = 0,67X_{t-1} + 1,70t + 30,32 + \varepsilon_t$	10,46
GV	$X_t = 0,83X_{t-1} + (-2540,8)t + 134761,3 + \varepsilon_t$	39436,06
BGR	$X_t = 0,80X_{t-1} + 0,006t + 1,68 + \varepsilon_t$	3,21
SIR	$X_t = 0,82X_{t-1} + 0,024t + 0,38 + \varepsilon_t$	2,79

Duomenų normalumo tikrinimo rezultatai su SPSS

Rytų regionas

One-SampleKolmogorov-SmirnovTest

		AI	GV	BGR	BMR	K	SIR
N		18	18	18	18	18	18
NormalParameters	Mean	101,1667	820506,2778	10,6944	12,1500	-,2111	434,7500
	Std. Deviation	9,26886	15014,21424	1,27209	,60803	5,55421	60,30680
MostExtremeDifferences	Absolute	,301	,225	,236	,125	,208	,131
	Positive	,199	,225	,104	,125	,208	,131
	Negative	-,301	-,154	-,236	-,125	-,187	-,107
TestStatistic		,301	,225	,236	,125	,208	,131
Asymp. Sig. (2-tailed)		,000	,016	,009	,200	,038	,200

Pietų vidurio regionas

One-SampleKolmogorov-SmirnovTest

		AI	GV	BGR	BMR	K	SIR
N		18	18	18	18	18	18
NormalParameters	Mean	118,8333	784055,0000	9,3167	13,5167	-8,7611	3,0611
	Std. Deviation	22,14458	62036,88813	,56905	,88001	6,88444	,64547
MostExtremeDifferences	Absolute	,153	,127	,182	,169	,168	,145
	Positive	,119	,127	,151	,099	,152	,096
	Negative	-,153	-,084	-,182	-,169	-,168	-,145
TestStatistic		,153	,127	,182	,169	,168	,145
Asymp. Sig. (2-tailed)		,200	,200	,119	,184	,193	,200

Vakarų regionas

One-SampleKolmogorov-SmirnovTest

		AI	GV	BGR	BMR	K	SIR
N		18	18	18	18	18	18
NormalParameters	Mean	105,2222	780127,1111	9,9333	13,3722	-10,9222	3,3722
	Std. Deviation	19,40757	65923,30867	,57189	,80279	6,20508	,95536
MostExtremeDifferences	Absolute	,137	,110	,158	,155	,149	,134
	Positive	,120	,110	,108	,124	,097	,099
	Negative	-,137	-,091	-,158	-,155	-,149	-,134
TestStatistic		,137	,110	,158	,155	,149	,134
Asymp. Sig. (2-tailed)		,200	,200	,200	,200	,200	,200

Šiaurės regionas

One-SampleKolmogorov-SmirnovTest

		AI	GV	BGR	BMR	K	SIR
N		18	18	18	18	18	18
NormalParameters	Mean	130,4444	723697,8889	8,5722	15,0056	-14,3333	2,7778
	Std. Deviation	28,61349	79948,23567	,33921	1,11591	5,51799	,90265
MostExtremeDifferences	Absolute	,127	,103	,194	,165	,140	,152
	Positive	,107	,103	,194	,114	,116	,107
	Negative	-,127	-,085	-,136	-,165	-,140	-,152
TestStatistic		,127	,103	,194	,165	,140	,152
Asymp. Sig. (2-tailed)		,200	,200	,071	,200	,200	,200

9 PRIEDAS

Tiesiniai regresijos modeliai, tenkinantys tinkamumo kriterijus

Pietų vidurio regionas	
IA ir GV	$y = -0,0004x + 395,15 + \varepsilon_i$
IA ir BGR	$y = 34,4363x - 202,06 + \varepsilon_i$
IA ir SIR	$y = 24,823x + 42,947 + \varepsilon_i$
Vakarų regionas	
IA ir GV	$y = -0,0003x + 329,98 + \varepsilon_i$
IA ir BGR	$y = 28,5334x - 178,30 + \varepsilon_i$
IA ir SIR	$y = 16,711x + 48,954 + \varepsilon_i$
Šiaurės regionas	
IA ir GV	$y = -0,00035x + 386,69,45 + \varepsilon_i$
IA ir BMR	$y = 23,8377x - 227,49 + \varepsilon_i$
IA ir SIR	$y = 25,019x + 61,004 + \varepsilon_i$

Modelių paklaidos regionuose

Modeliai	R.R	PV.R	V.R	Š.R
Aritmetinis	10,5	7,2	5,7	5,7
Geometrinis	16,8	6,1	5,5	9,4
EkspONENTINIS	11,2	10,1	8,4	9,8

Prognozės lentelė

Regionas	Modelis	2020	2021	2022	2023	2024	2025
Rytų regionas	$P_t = P_0 + (P_0 \times AK \times t) + MAD$	115	117	118	120	121	123
Pietų vidurio regionas	$P_t = P_0 \times (1 + AK)^t + MAD$	153	157	162	168	173	178
Vakarų regionas	$P_t = P_0 \times (1 + AK)^t + MAD$	138	143	148	153	158	163
Šiaurės regionas	$P_t = P_0 + (P_0 \times AK \times t) + MAD$	176	181	185	190	195	200