VILNIAUS UNIVERSITETAS

Giedrius Alkauskas

Kai kurie skaičių teorijos uždaviniai

Daktaro disertacijos santrauka
Fiziniai mokslai, matematika (01 P)

Vilnius, 2009

Disertacija rengta 2005-2009 metais Vilniaus Universitete.

Mokslinis vadovas:
Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01 P).
Disertacija ginama Vilniaus Universiteto matematikos mokslo krypties taryboje:

Pirmininkas:
Prof. dr. Gediminas Stepanauskas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Nariai:
Prof. habil. dr. Bronius Grigelionis (Matematikos ir informatikos institutas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Prof. habil. dr. Antanas Laurinčikas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Prof. habil. dr. Konstantinas Pileckas (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Doc. dr. Darius Šiaučiūnas (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Oponentai:
Prof. habil dr. Eugenijus Manstavičius (Vilniaus universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).
Dr. Jonas Genys (Šiaulių universitetas, fiziniai mokslai, matematika - 01P).

Disertacija bus ginama viešame Matematikos mokslo krypties tarybos posėdyje 2009 m. rugsėjo 22 d., 15 val., Vilniaus Universiteto Nuotolinių studijų centre.
Adresas: Šaltinių 1A, 03225 Vilnius, Lietuva.
Disertacijos santrauka išsiuntinėta 2009 m. rugpjūčio mėn.
Su disertacija galima susipažinti Vilniaus Universiteto bibliotekoje.

VILNIUS UNIVERSITY

Giedrius Alkauskas

Several problems from number theory

Summary of Doctoral Dissertation
Physical sciences, mathematics (01 P)

Vilnius, 2009

The scientific work was carried out in 2006-2009 at Vilnius University.

Scientific supervisor:
Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01 P).

The thesis is defended in the council of Mathematics of Vilnius University:

Chairman:
Prof. Dr. Gediminas Stepanauskas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Members:
Prof. Dr. Habil. Bronius Grigelionis (Institue of Mathematics and Informatics, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Prof. Dr. Habil. Antanas Laurinčikas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Prof. Dr. Habil. Konstantinas Pileckas (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Doz. Dr. Darius Šiaučiūnas (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics - 01P).

Opponents:
Prof. Dr. Habil. Eugenijus Manstavičius (Vilnius University, Physical sciences, Mathematics - 01P).
Dr. Jonas Genys (Šiauliai University, Physical sciences, Mathematics 01P).

The dissertation will be defended at the public meeting of the council on September 22, 2009, in Vilnius University remote Education Study Centre at 3 pm.
Address: Šaltinių 1A, 03225 Vilnius, Lithuania.
The summary of dissertation was distributed on August, 2009.
The dissertation is available at the Library of Vilnius University.

1. Disertacinio darbo aprašymas

Šią disertaciją sudaro trys nepriklausomi skyriai. Pirmasis nagrinėja Minkovskio "klaustuko" funkcijos Stieltjes'o transformaciją. Antrasis skyrius nagrinėja funkcines lygtis, susijusias su įvairiomis dviejų ir daugiau kintamųjų formomis. Galiausiai, trečiąjame skyriuje pateikiamas žaismingas ir originalus mažosios Fermat teoremos įrodymas.

1.1. **Aktualumas.** Per paskutiniuosius dešimt metų susidomėjimas Minkovskio "klaustuko" funkcija $?(x)$ ryškiai išaugo. Nežiūrint to, visi kitų autorių ankstesni rezultatai ir tyrinėjimai buvo apie pačią funkciją $?(x)$ *per se*. Tapo reikalinga visiškai naujos rūšies teorema, kuri gali būti laikoma kaip pirmasis žingsnis link gilios aritmetinės ir analizinės Minkovskio klaustuko funkcijos integralinių transformacijų struktūros supratimo. Aišku, kad analizinėje išraiškoje, jei ji egzistuoja, vis tiek negalima apsieiti be tam tikro ribinio proceso, ar tai būtų eilutė, ar integralas. Pagal apibrėžimą, diadinė periodo funkcija yra apibrėžiama Stieltjes'o integralo pagalba, kuris, mūsų atveju, yra labai sudėtingas "transcendentinis" ir neefektyvus procesas: pasiskirstymo funkcija, kurios Stieltjes'o transformacija yra nagrinėjama, net ir pasirinktame kuriame nors konkrečiame taške yra apibrėžiama tik grandininėmis trupmenomis. Toliau, diadinės periodo funkcijos Taylor'o koeficientai koordinačių pradžioje yra tam tikri realūs skaičiai, kurie, tikriausiai, nėra aritmetinai ("aritmetinais" skaičiais vadiname algebrinius skaičius, periodus, eksponentinius periodus, ir t.t.) Taigi, kiekvienas iš jų "neša" begalinį informacijos kiekį. Tokiame kontekste, išraiška racionaliomis funkcijomis su racionaliais koeficientais yra labai reikšminga.

Iš kitos pusės, funkcinės lygtys, asocijuotos su tam tikromis formomis, užkoduoja daug prasmingos aritmetinės ir algebrinės informacijos apie daugdarą ar algebrinių skaičių kūną, susietą su ta forma, todėl jų tyrimų svarba nekelia abejonų.

Klasikinių rezultatų naujų įrodymų radimas visada yra įdomus įvykis matematiniame gyvenime. Tai liečia ir gerai žinomą mažąją Fermat teoremą, kuri turi keletą skirtingų įrodymų.

1.2. **Tikslas ir uždaviniai.** Darbo tikslas yra surasti kai kurių svarbių matematinių objektų (diadinės periodo funkcijos, funkcijų, asocijuotų su tam tikromis formomis, tenkinančių funkcines lygtis) analizines ir algebrines išraiškas.

Uždaviniai yra šie:

1. Gauti Minkovskio "klaustuko" funkcijos Stieltjes'o transformacijos išraišką.
2. Rasti kai kurių kelių kintamųjų formų netrivialius endomorfizmus.
3. Pateikti naują mažosios Fermat teoremos įrodymą.

1.3. **Tyrimų metodika.** Pirmajame skyriuje yra naudojami kompeksinės dinamikos, grandininių trupmenų analizinės teorijos, kelių kompleksinių kintamųjų funkcijų teorijos, analizės, integralinių transformacijų teorijos metodai ir technika. Antrajame skyriuje naudojami kūnų algebros ir aritmetikos metodai. Trečiasis skyrius remiasi formaliųjų laipsninių eilučių technika.

1.4. **Naujumas ir praktinė vertė.** Visi pirmojo ir antrojo skyrių rezultatai yra nauji. Trečiajame skyriuje pateikiamas naujas klasikinės teoremos įrodymas.

1.5. **Darbo struktūra.** Disertacija parašyta anglų kalba. Ją sudaro įvadas, trys matematinai skyriai, išvados, literatūros ir mokslinių publikacijų sąrašai. Bendra darbo apimtis yra 75 puslapiai.

1.6. **Ginamieji teiginiai.**

1. Minkovskio "klaustuko" funkcijos momentų generuojanti funkcija turi keletą analizinių išraiškų, atspindinčių jos prigimtį.
2. Netrivialūs endomorfizmai egzistuoja bent jau kai kurioms formų

klasėms, ir jie atspindi asocijuoto kūno algebrines savybes.
3. Mažoji Fermat teorema išplaukia iš vienos $p-$adinės analizės tapatybės.

1.7. **Svarbiausi rezultatai.**

1.7.1. *Pirmasis skyrius.* Šio skyriaus tikslas yra pratęsti autoriaus anksčiau pradėtus Minkovskio "klaustuko" funkcijos $?(x)$ tyrinėjimus. Funkcija $?(x)$ ("klaustuko funkcija") buvo įvesta Hermano Minkovskio 1904-ais metais kaip pavyzdys funkcijos $F:[0,\infty)\rightarrow[0,1)$, kuri atvaizduoja racionaliuosius skaičius į diadinius racionaliuosius, ir kvadratines iracionalybes į ne diadinius racionaliuosius. Neneigiamam realiajam x ji yra apibrėžiama formule

$$F([a_0,a_1,a_2,a_3,...])=1-2^{-a_0}+2^{-(a_0+a_1)}-2^{-(a_0+a_1+a_2)}+...,\qquad (1)$$

čia simbolis $x=[a_0,a_1,a_2,a_3,...]$ reprezentuoja x išraišką reguliariąja grandinine trupmena. Pagal tradiciją, ši funkcija yra dažniausiai nagrinėjama intervale $[0,1]$, ir tokiu atveju ji yra normuojama $F(1)=1$, kai tuo tarpu mūsų atveju $F(1)=\frac{1}{2}$. Taigi, mes naudojame žymenį $?(x)=2F(x)$, kai $x\in[0,1]$. Kai x yra racionalusis skaičius, eilutė nutrūksta sulyg paskutiniuoju nenuliniu grandininės trupmenos elementu a_n. "Klaustuko" funkcija yra tolydi, monotoninė ir singuliari. Su "klaustuko" funkcija ar artimomis temomis (Farey medis, racionaliųjų skaičių numeravimas, Stern'o diatominė seka, įvairūs vienmačiai ir daugiamačiai apibendrinimai, vardiklių statistika, Farey intervalai, Hausdorff'o dimensija ir analizinės savybės) susieta literatūros apžvalga (toli gražu ne išsemianti) yra autoriaus [9] straipsnyje.

Visai neseniai, Calkin'as and Wilf'as apibrėžė binarųjį medį, kuris yra generuojamas iteracijos

$$\frac{a}{b}\quad\mapsto\quad\frac{a}{a+b}\,,\quad\frac{a+b}{b},$$

pradedant nuo viršūnės $\frac{1}{1}$. Du paminėtieji autoriai išpopuliarino šį medį, bet jis jau labai seniai buvo žinomas matematikams ir fizikams kaip Stern'o-Brocot ar Farey medis. Elementarūs samprotavimai parodo, kad kiekvienas teigiamas racionalusis skaičius pasitaiko šiame medyje lygiai vieną kartą, ir iš karto jau kaip suprastinta trupmena. Pirmos keturios kartos atrodo taip:

$$\begin{array}{cccccccccccccccc}
 & & & & & & & \frac{1}{1} & & & & & & & & \\
 & & & \frac{1}{2} & & & & & & & & \frac{2}{1} & & & & \\
 & \frac{1}{3} & & & & \frac{3}{2} & & & & \frac{2}{3} & & & & \frac{3}{1} & & \\
\frac{1}{4} & & \frac{4}{3} & & \frac{3}{5} & & \frac{5}{2} & & \frac{2}{5} & & \frac{5}{3} & & \frac{3}{4} & & \frac{4}{1}. &
\end{array} \qquad (2)$$

Ypatingai svarbus yra faktas, kad n-toji medžio karta yra sudaryta iš tiksliai tų 2^{n-1} taigiamųjų racionaliųjų skaičių, kurių grandininės trupmenos dalinių dalmenų suma lygi n. Šis faktas gali būti gautas tiesiogiai iš apibrėžimo. Iš tiesų, pirma, jei racionalusis skaičius $\frac{a}{b}$ yra išreikštas grandinine trupmena $[a_0, a_1, ..., a_r]$, tada atvaizdis $\frac{a}{b} \to \frac{a+b}{b}$ atvaizduoja $\frac{a}{b}$ į $[a_0 + 1, a_1 ..., a_r]$. Antra, atvaizdis $\frac{a}{b} \to \frac{a}{a+b}$ atvaizduoja $\frac{a}{b}$ į $[0, a_1 + 1, ..., a_r]$, kai $\frac{a}{b} < 1$, ir į $[0, 1, a_0, a_1, ..., a_r]$, kai $\frac{a}{b} > 1$. Tai yra svarbi pastaba, kuri parodo, kad racionaliųjų skaičių nagrinėjimas pagal jų poziciją Calkin'o-Wilf'o medyje yra labai svarbus žiūrint iš metrinės skaičių teorijos ir grandininių trupmenų dinamikos perspektyvos.

Yra labai gerai žinoma, kad kiekviena nagrinėjamo medžio karta turi pasiskirstymo funkciją $F_n(x)$, ir kad $F_n(x)$ tolygiai konverguoja į $F(x)$. Funkcija $F(x)$, kaip pasiskirstymo funkcija (tikimybių teorijos prasme, kuri priverčia funkciją būti monotoniška ir, šiuo atveju, tolydžia) yra vienareikšmiškai apibrėžiama funkcine lygtimi

$$2F(x) = \begin{cases} F(x-1) + 1, & \text{jei} \quad x \geq 1, \\ F(\frac{x}{1-x}), & \text{jei} \quad 0 \leq x < 1. \end{cases}$$

Iš to išplaukia, kad $F(x) + F(1/x) = 1$. Funcijos $F(x)$ vidurkis buvo nagrinėjamas keleto autorių, ir jis pasirodė esąs $3/2$.

Galiausiai, ir visų svarbiausiai, turime pabrėžti, kad yra stulbinantys panašumai ir paralelės tarp autoriaus anksčiau gautų rezultatų apie

$F(x)$, ir Lewis'o-Zagier'o rezultatų apie periodo funkcijas, susietas su Maass'o banginėmis formomis.

Prieš formuluojant pagrindinį pirmojo skyriaus rezultatą, pateikiame trumpą santrauką autoriaus rezultatų apie kai kurias natūralias $F(x)$ integralines transformacijas. Tegul

$$M_L = \int\limits_0^\infty x^L \,\mathrm{d}F(x), \quad m_L = \int\limits_0^\infty \Big(\frac{x}{x+1}\Big)^L \mathrm{d}F(x) = 2\int\limits_0^1 x^L \,\mathrm{d}F(x).$$

Abi sekos yra skaičių teorijos prasme įdomios, nes

$$\begin{aligned} M_L &= \lim_{n\to\infty} 2^{1-n} \sum_{a_0+a_1+\ldots+a_s=n} [a_0, a_1, .., a_s]^L, \\ m_L &= \lim_{n\to\infty} 2^{2-n} \sum_{a_1+\ldots+a_s=n} [0, a_1, .., a_s]^L, \end{aligned}$$

(sumuojama pagal racionaliuosius skaičius, išreikštus grandininėmis trupmenomis; taigi, $a_i \geq 1$, ir $a_s \geq 2$). Apibrėžkime eksponentines generuojančias funkcijas

$$\begin{aligned} M(t) &= \sum_{L=0}^\infty \frac{M_L}{L!} t^L = \int\limits_0^\infty e^{xt} \,\mathrm{d}F(x), \\ \mathfrak{m}(t) &= \sum_{L=0}^\infty \frac{m_L}{L!} t^L = \int\limits_0^\infty \exp\Big(\frac{xt}{x+1}\Big) \,\mathrm{d}F(x) = 2\int\limits_0^1 e^{xt} \,\mathrm{d}F(x). \end{aligned}$$

Tiesiogiai patikrinama, kad $\mathfrak{m}(t)$ yra sveikoji funkcija, o $M(t)$ yra meromorfinė funkcija, kurios paprastieji poliai yra $z = \log 2 + 2\pi i n$, $n \in \mathbb{Z}$. Toliau, turime, kad

$$M(t) = \frac{\mathfrak{m}(t)}{2 - e^t}, \quad \mathfrak{m}(t) = e^t \mathfrak{m}(-t).$$

Antroji tapatybė išreiškia tik simetrijos savybę, kuri yra $F(x)+F(1/x) = 1$. Pagrindinis rezultatas apie $\mathfrak{m}(t)$ yra tas, kad ši funkcija yra vienareikšmiškai aprašoma reguliarumo savybe $\mathfrak{m}(-t) \ll e^{-\sqrt{\log 2}\sqrt{t}}$, kai

$t \to \infty$, kraštine sąlyga $\mathfrak{m}(0) = 1$ ir integraline lygtimi

$$\mathfrak{m}(-s) = (2e^s - 1) \int\limits_0^\infty \mathfrak{m}'(-t) J_0(2\sqrt{st})\,\mathrm{d}t, \quad s \in \mathbb{R}_+.$$

Čia

$$J_0(z) = \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \cos(z \sin x)\,\mathrm{d}x$$

yra Bessel'io fukcija.

Pagrindinis darbo nagrinėjamas objektas yra momentų generuojanti funkcija. Tegul

$$G(z) = \sum_{L=1}^\infty m_L z^{L-1}.$$

Ši eilutė konverguoja, kai $|z| \le 1$, ir funkcijos $G(z)$ funkcinė lygtis (1 teorema) parodo, kad egzistuoja visos $G(z)$ išvestinės taške $z = 1$, jeigu z artėja į 1, pasilikdamas pusplokštumėje $\Re z \le 1$. Tada integralas

$$G(z) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x+1-z}\,\mathrm{d}F(x) = 2\int\limits_0^1 \frac{x}{1-xz}\,\mathrm{d}F(x), \tag{3}$$

tai yra, $F(x)$ Stieltjes'o transformacija, funkciją $G(z)$ analiziškai pratęsia į išpjautą plokštumą $\mathbb{C} \setminus (1, \infty)$. Momentų M_L generuojanti funkcija neegzistuoja dėl faktorialinio M_L augimo, bet ši generuojanti funkcija gali būti apibrėžta išpjautoje plokštumoje $\mathbb{C}' = \mathbb{C} \setminus (0, \infty)$ pagal formulę

$$\int_0^\infty \frac{x}{1-xz}\,\mathrm{d}F(x).$$

Iš tiesų, šis integralas lygus $G(z+1)$. Taigi, egzistuoja visos aukštesnės funkcijos $G(z)$ išvestinės taške $z = 1$, ir

$$\frac{1}{(L-1)!} \frac{\mathrm{d}^{L-1}}{\mathrm{d}z^{L-1}} G(z)\Big|_{z=1} = M_L, \quad L \ge 1.$$

Yra teisingas toks rezultatas.

1 teorema. *Funkcija $G(z)$, apibrėžta laipsnine eilute, yra analiziškai* *pratęsiama į išpjautąją plokštumą* $\mathbb{C} \setminus (1, \infty)$ *integralu (3). Ji tenkina funkcinę lygtį*

$$\frac{1}{z} + \frac{1}{z^2} G\Big(\frac{1}{z}\Big) + 2G(z+1) = G(z) \tag{4}$$

bei simetrijos savybę

$$G(z+1) = -\frac{1}{z^2} G\Big(\frac{1}{z} + 1\Big) - \frac{1}{z},$$

kuri išplaukia iš pagrindinės funkcinės lygties. Be to, $G(z) \to 0$*, jei* $z \to \infty$ *ir atstumas tarp* z *ir pustiesės* $[0, \infty)$ *artėja į* ∞*. Atvirkščiai, funkcija, tenkinanti visas šias savybes, yra vienintelė.*

Taigi, šis rezultatas ir specifinė trijų narių funkcinės lygties forma, leidžianti pavadinti $G(z)$ *diadine periodo funkcija.*

Norime pabrėžti, kad pagrindinė ankstesnių tyrinėjimų motyvacija buvo momentų m_L prigimties ir struktūros išsiaiškinimas. Būtų įdomu išreikšti šias konstantas (kylančias lyg ir iš geometrinio chaoso) tam tikra struktūrine išraiška, neateinančia tiosiogiai iš Calkin'o-Wilf'o medžio, kuri atskleistų konstantų struktūrą daug giliau ir plačiau. Tai iš dalies yra pasiekta disertacijoje. Taigi, pagrindinis rezultatas formuluojamas taip.

2 teorema. *Egzistuoja tokia kanoninė ir išreikštinė racionaliųjų funkcijų seka* $\mathbf{H}_n(z)$*, kad, kai* $\{|z| \leq \frac{3}{4}\} \cup \{|z + \frac{9}{7}| \leq \frac{12}{7}\}$*, turime absoliučiai konverguojančią eilutę*

$$G(z) = \int\limits_0^\infty \frac{1}{x+1-z}\,\mathrm{d}F(x) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{H}_n(z), \quad \mathbf{H}_n(z) = \frac{\mathscr{B}_n(z)}{(z-2)^{n+1}};$$

čia $\mathscr{B}_n(z)$ *yra* $n-1$*-tojo laipsnio daugianariai su racionaliaisiais koeficientais. Kai* $n \geq 1$*, jie turi simetrijos savybę*

$$\mathscr{B}_n(z+1) = (-1)^n z^{n-1} \mathscr{B}_n\Big(\frac{1}{z} + 1\Big), \quad \mathscr{B}_n(0) = 0.$$

Racionaliosios funkcijos $\mathbf{H}_n(z)$ yra apibrėžiamos labai sudėtinga ir neišreikštine rekurencija. Lentelėje pateikti pirmieji šios sekos nariai $\mathscr{B}_n(z)$.

n	$\mathscr{B}_n(z)$	n	$\mathscr{B}_n(z)$
0	-1	4	$-\frac{2}{27}z^3+\frac{53}{270}z^2-\frac{53}{270}z$
1	0	5	$\frac{4}{81}z^4-\frac{104}{675}z^3+\frac{112}{675}z^2-\frac{224}{2025}z$
2	$-\frac{1}{6}z$	6	$-\frac{8}{243}z^5+\frac{47029}{425250}z^4-\frac{1384}{14175}z^3-\frac{787}{30375}z^2+\frac{787}{60750}z$
3	$\frac{1}{9}z^2-\frac{2}{9}z$	7	$\frac{16}{729}z^6-\frac{1628392}{22325625}z^5+\frac{272869}{22325625}z^4+\frac{5392444}{22325625}z^3-\frac{238901}{637875}z^2+\frac{477802}{3189375}z$

1.7.2. *Antrasis skyrius.* Šio skyriaus vienas iš uždavinių yra formuluojamas taip.

Tegul $T(a_1, a_2, ..., a_n)$ yra nagrinėjamojo tikrinio ir baigtinio kūno $\mathbb{Q}$ $n-$tojo laipsnio plėtinio norminė forma fiksuotoje sveikojoje bazėje. Reikia rasti visas tokias funkcijas $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, kad

$T(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$ priklauso tik nuo $T(a_1, a_2, ..., a_n)$ reikšmės.

Vienas iš pagrindinių rezultatų, glaudžiai susijęs su šiuo uždaviniu, yra toks tvirtinimas.

3 teorema. *Tegul funkcija $G : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tenkina funkcinę lygtį*

$$G(aX + bY) + G(bX - aY) = G(aX - bY) + G(bX + aY)$$

su fiksuotais tarpusavyje pirminiais sveikaisiais skaičiais a and b, iš kurių vienas yra lyginis. Tada $G(n) = g(n) + An^2$; čia A yra kompleksinė konstanta, o $g(n)$ yra periodinė funkcija su sveikuoju periodu, priklausančiu tik nuo a ir b.

1.7.3. *Trečiasis skyrius.* Šiame skyriuje pateikiamas, kaip jau minėta, mažosios Fermat teoremos naujas įrodymas. Ši klasikinė teorema teigia, kad jei $a \in \mathbb{Z}$, o p yra pirminis skaičius, tai $a^p - a$ dalijasi iš p. Darbe parodoma, kad ši teorema išplaukia iš tokio teiginio.

Teiginys. *Tegul*

$$f(x) = 1 - x - dx^2 + \sum_{k \geq 3} a_k x^k$$

yra formalioji eilutė virš kūno $\mathbb{Q}$, *su koeficientais žiede* $\mathbb{Z}$. *Tada šią laipsninę eilutę galima vieninteliu būdu išreikšti formalia sandauga*

$$f(x) = \prod_{k \geq 1} (1 - m_k x^k),$$

kurioje koeficientai m_k *yra sveikeji skaičiai.*

Šis teiginys nėra naujas, jis gerai žinomas $p-$adinėje analizėje.

1.8. **Išvados.** 1. Nustatyta, kad Minkovskio “klaustuko” funkcijos Stieltjes'o transformacija $G(z)$ (taip vadinamoji *diadinė periodo funkcija*) turi išraišką “beveik” baigtine forma; tai yra, kai $\{|z| \leq \frac{3}{4}\} \cup \{|z+\frac{9}{7}| \leq \frac{12}{7}\}$, galioja tapatybė

$$G(z) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathbf{H}_n(z);$$

čia $\mathbf{H}_n(z)$ yra racionaliųjų funkcijų su racionaliaisiais koeficientais kanoninė seka.

2. Įrodyta, kad egzistuoja tokios formų klasės T, kad dviejų kintamųjų funkcinė lygtis

$$T(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n)) = h\Big(T(a_1, a_2, ..., a_n)\Big), \quad a_i \in \mathbb{Z},$$

be akivaizdaus sprendinio $f(a) = h(a) = a$, $a \in \mathbb{Z}$, turi ir kitų sprendinių.

3. Gauta, kad mažoji Fermat teorema ($p|a^p - a$, kai $a \in \mathbb{Z}$, p yra pirminis) išplaukia iš $p-$adinėje analizėje naudojamos formalios lygybės

$$f(x) = 1 - x - dx^2 + \sum_{k \geq 3} a_k x^k = \prod_{k \geq 1} (1 - m_k x^k).$$

1.9. **Aprobacija.** Pirmojo skyriaus rezultatai buvo pristatyti: Šiaulių tarptautinėje konferencijoje, skirtoje profesoriaus Laurinčiko 60 metų jubiliejiui, Šiauliai (2008-ųjų rugpjūtis); Makso Planko matematikos institute, Bona, Vokietija (2009-ųjų kovas); Würzburg'o skaičių teorijos seminare, Vokietija (2009-ųjų kovas); Graz'o technikos universiteto skaičių teorijos seminare, Austrija (2009-ųjų kovas).

1.10. **Pagrindinės publikacijos.**

- [1] A generalization of the Rödseth-Gupta theorem on binary partitions, *Lith. Math. J.* **43** (2) (2003), 103-110.
- [2] Dirichlet series associated with strongly $q-$multiplicative functions, *Ramanujan J.* **8** (1) (2004), 13-21.

- [3] Prime and composite numbers as integer parts of powers (with A. Dubickas), *Acta Math. Hungar.* **105** (3) (2004), 249-256.
- [4] Functional equation related to quadratic and norm forms, *Lith. Math. J.* **45** (2) (2005), 123-141.
- [5] An asymptotic formula for the moments of Minkowski question mark function in the interval $[0,1]$, *Lith. Math. J.* **48** (4) (2008), 357-367.
- [6] A curious proof of Fermat's little theorem, *Amer. Math. Monthly* **116** (4) (2009), 362-364.
- [7] Generating and zeta functions, structure, spectral and analytic properties of the moments of the Minkowski question mark function, *Involve* **2** (2) (2009), 121-159.
- [8] The Minkowski question mark function: explicit series for the dyadic period function and moments, *Math. Comp.* (priimtas).
- [9] The moments of Minkowski question mark function: the dyadic period function, *Glasgow Math. J.* (priimtas).

1.11. **Summary.** In the recent decade, the interest in the Minkowski question mark function has grown considerably. In the first chapter of this thesis, we take a novel point of view and show that the Stieltjes transform of the Minkowski question mark function $F(x)$, defined as

$$G(z) = \int_0^\infty \frac{1}{x+1-z}\,\mathrm{d}F(x),$$

has properties similar to those of period functions associated with Maass wave forms. We call the function $G(z)$ *the dyadic period function*. Further, we demonstrate also one of its unique properties, which states that in a certain region the dyadic period function is a sum of infinite series of rational functions with rational coefficients.

In the second chapter we are mainly dealing with the following problem.
Let $T(a_1, a_2, ..., a_n)$ be a norm form in some integral basis of some proper field extension of $\mathbb{Q}$ of degree n. Find all functions $f : \mathbb{Z} \to \mathbb{C}$, such that

$T(f(a_1), f(a_2), ..., f(a_n))$ *depends only on the value of* $T(a_1, a_2, ..., a_n)$.

It is shown that in many cases there exists other solutions apart from the obvious $f(a) = a$. Our solutions, though being the elementary, show that many arithmetic facts are hidden beyond the definition of the problem.
In the final third chapter we present a new and original proof of Fermat's little theorem.

Trumpos žinios apie autorių

Gimimo data ir vieta

1978m. vasario 8d., Anykščiai.

Išsilavinimas ir kvalifikacija

1992m. Anykščių muzikos mokykla.

1993m. Anykščių J. Biliūno vidurinė mokykla.

1996m. Kauno technologijos universiteto Gimnazija.

2001m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos bakalauras.

2004m. Vilniaus universiteto Matematikos ir informatikos fakultetas, matematikos magistras.

Darbo patirtis

2003-2004, Vilniaus kolegija, matematikos dėstytojas.

2006-2007, Vilniaus universitetas, asistentas.

Short information about the author

Birth date and place

1978 8th of February, Anykščiai.

Education

1992 Anykščiai music school.

1993 Anykščiai J. Biliūnas secondary school.

1996 High School of Kaunas University of Technology.

2001 Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, bachelor of mathematics.

2004m.Vilnius University, Faculty of Mathematics and Informatics, master of mathematics.

Working experience

2003-2004 Vilnius College, teacher of mathematics.

2006-2007 Vilnius University, teaching assistant.